Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 2

Inhoud

Rekenen II

Algebra I

Context College

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

3

Rekenen II

3.1 Breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een breuk herkennen en de betekenis ervan begrijpen;
- gelijkwaardige breuken en breuken vereenvoudigen;
- breuken vergelijken door gelijknamig maken of omzetten naar een decimaal getal.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen en de juiste rekenvolgorde;
- afronden en schatten;
- werken met grootheden en de bijbehorende eenheden.

Verkennen

Opgave V1

In twee groepen is een toets gemaakt. In groep A waren er 3 onvoldoendes en in groep B waren dat er 4. In groep A hebben 20 leerlingen de toets gemaakt, in groep B hebben 30 leerlingen de toets gemaakt.

In welke groep is de toets beter gemaakt als je alleen let op de onvoldoendes?

Uitleg 1

Deze rechthoek is in 12 gelijke vierkantjes verdeeld. 7 daarvan zijn rood gekleurd. Dat is $\frac{7}{12}$ deel. $\frac{7}{12}$ heet een breuk. 7 is de teller en 12 is de noemer.

De gehele rechthoek is $\frac{12}{12} = 1$.

De noemer is de naamgever: het zijn twaalfde delen, kortweg twaalfden.
De teller telt hoeveel twaalfden er zijn: er zijn zeven twaalfden.

Je ziet: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.

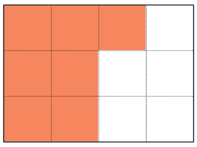
7 van de 12 is hetzelfde gedeelte als 14 van de 24.

Zo geldt ook: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25}$. Je kunt teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen zonder dat de waarde van de breuk verandert.

Als je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt, blijft de breuk hetzelfde deel weergeven.

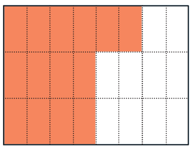
Omgekeerd is $\frac{8}{20}$ gelijk aan $\frac{2}{5}$, dus je kunt ook teller en noemer door hetzelfde getal delen zonder dat de waarde van de breuk verandert. Het vereenvoudigen van een breuk is het zoeken naar een gelijke breuk met de kleinst mogelijke teller en noemer.

$\frac{7}{12}$



Figuur 3.1

$\frac{14}{24}$



Figuur 3.2

Heb je behalve $\frac{7}{12}$ deel ook nog 2 gehele rechthoeken rood gekleurd, dan is dat samen $2 + \frac{7}{12}$.

Dat schrijf je als $2\frac{7}{12}$.

(Dit laatste is eigenlijk een hele rare notatie: een plus-teken mag je eigenlijk niet weglaten, dan is niet duidelijk hoe je moet rekenen!)

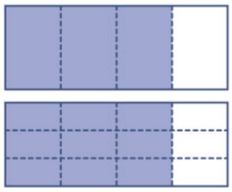
Opgave 1

Bekijk de figuren hiernaast.

a Geef met een breuk aan welk deel van de bovenste figuur gekleurd is.

b Wat is de teller en wat is de noemer van de breuk die je bij a hebt opgeschreven?

c Leg met behulp van beide figuren uit waarom $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.



Figuur 3.3

Opgave 2

Op dezelfde manier als bij **Opgave 1** kun je de breuk $1\frac{3}{4}$ in beeld brengen.

a Laat zien hoe de breuk $1\frac{3}{4}$ er met rechthoeken uit ziet.

Waarom is $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$?

b Waarom is $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$?

c Hoeveel twaalfden is $1\frac{3}{4}$?

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 1** wat je verstaat onder breuken vereenvoudigen.

a Leg met behulp van een figuur uit waarom $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

b Welke breuk krijg je als je in $\frac{12}{30}$ teller en noemer beide door 2 deelt? Is die breuk ook gelijk aan $\frac{2}{5}$?

c Hoe kun je een breuk vereenvoudigen?

Uitleg 2

Als je wilt weten welk deel groter is, moet je breuken vergelijken.

$\frac{5}{12}$ deel is minder dan $\frac{7}{12}$ deel. Je schrijft: $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$.
Het teken $<$ betekent: is kleiner dan.

$\frac{7}{12}$ deel is meer dan $\frac{7}{13}$ deel. Je schrijft: $\frac{7}{12} > \frac{7}{13}$.
Het teken $>$ betekent: is groter dan.

Als je $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ met elkaar wilt vergelijken, moet je de breuken eerst gelijknamig maken. Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ dus: $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Je weet: $\frac{1}{10} = 0{,}1$ en $\frac{2}{10} = 0{,}2$ en bijvoorbeeld $\frac{12}{100} = 0{,}12$.

Breuken met als noemer 10,100,1000,... kun je als decimaal getal schrijven.

Ook andere breuken kun je als decimaal getal schrijven:

- $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25$
- $\frac{3}{8} = \ldots = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

Je ziet dat je er dan eerst een breuk met als noemer 10, of 100, of 1000,... van moet maken. Je rekenmachine doet dit snel met een deling.

Figuur 3.4

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je breuken kunt vergelijken.
Vul het juiste teken > of < in.

a $\frac{2}{10} \cdots \frac{19}{100}$

b $\frac{2}{15} \cdots \frac{1}{5}$

c $\frac{3}{4} \cdots \frac{2}{3}$

d $\frac{13}{16} \cdots \frac{7}{8}$

Opgave 5

Je kunt breuken ook goed vergelijken door er eerst decimale getallen van te maken.
Doe de voorgaande opgave nog eens, maar nu met behulp van decimale getallen.

a $\frac{2}{10} \cdots \frac{19}{100}$

b $\frac{2}{15} \cdots \frac{1}{5}$

c $\frac{3}{4} \cdots \frac{2}{3}$

d $\frac{13}{16} \cdots \frac{7}{8}$

Opgave 6

In groep A hebben 3 van de 20 leerlingen voor een wiskundetoets een onvoldoende gehaald.
In groep B hebben voor dezelfde toets 4 van de 30 leerlingen een onvoldoende gehaald.

Mag je zeggen dat er in groep B naar verhouding meer onvoldoendes zijn?
Er zijn wel meer onvoldoendes, maar ook meer leerlingen...

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

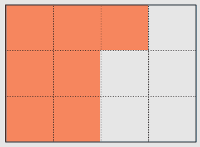
$\frac{7}{12}$ heet een **breuk**.

7 is de **teller** en 12 is de **noemer**.

Van de rechthoek is $\frac{7}{12}$ deel gekleurd. Het geheel is $\frac{12}{12} = 1$.

En 7 gehelen is $\frac{7}{1} = 7$.

$\frac{7}{12}$



Figuur 3.5

$\frac{7}{12}$ en $\frac{14}{24}$ geven hetzelfde deel weer: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.

Dus omgekeerd kun je zeggen $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Je hebt dan $\frac{14}{24}$ **vereenvoudigd** tot $\frac{7}{12}$ door teller en noemer door hetzelfde getal 2 te delen.

Wil je breuken vergelijken dan moet je ze eerst **gelijknamig maken**.
Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk.

Breuken met als noemer 10, 100, 1000, ... kun je als **decimaal getal** schrijven: $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{123}{1000} = 0{,}123$. Bij andere breuken kan dat ook door de deling uit te voeren, met de hand of met een rekenmachine.
Soms gaat het aantal decimalen eindeloos door. Dan werk je vaak met een benadering: $\frac{2}{7} = 0{,}28571428571428... \approx 0{,}286$.

Voorbeeld 1

“Van mensen van rond de 30 jaar oud dragen al vier op de tien personen een bril of contactlenzen.”
Dit is een uitspraak die ooit stond in een artikel van het **Centraal Bureau voor de Statistiek**.
Hoeveel personen in een groep van 200 dertigjarigen zouden er een bril of contactlenzen moeten dragen?

Antwoord
De uitspraak betekent dat $\frac{4}{10}$ deel van de dertigjarigen een bril of contactlenzen draagt.

Omdat $\frac{1}{10}$ van 200 gelijk is aan 20, zijn er $4 \times 20 = 80$ personen in die groep die een bril of contactlenzen dragen.

Je kunt ook de breuk eerst vereenvoudigen: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Dan bepaal je eerst $\frac{1}{5}$ deel van 200 en neem je dat 2 keer.

Opgave 7

Schrijf in de volgende gevallen het beschreven deel als breuk.

a 7 van de 12 personen bestellen een pizza.

b Van elke 100 mensen hebben er 45 een bril.

c 1 minuut is een deel van 1 uur.

d 7 cm is een deel van 1 m.

Opgave 8

Lees het stukje over het voorkomen van kleurenblindheid.

Kleurenblindheid
Kleurenblindheid is het wijdst verspreid onder blanke westerse mannen. Op elke 100 mannen lijden er ongeveer 11 aan één of andere vorm van kleurenblindheid. Onder Aziatische mannen is dat aandeel veel lager, slechts 1 op elke 20 Aziatische mannen is kleurenblind.

a Welk deel van de westerse mannen is kleurenblind? Geef je antwoord als breuk.

b Welk deel van de Aziatische mannen is kleurenblind?

c Laat zien dat het aandeel Aziatische mannen dat kleurenblind is inderdaad kleiner is dan het aandeel westerse mannen dat kleurenblind is.

Opgave 9

Een opslagtank bevat 450 liter vloeistof wanneer hij voor driekwart is gevuld.

Hoeveel liter vloeistof bevat deze tank als hij voor tweederde deel is gevuld?

Voorbeeld 2

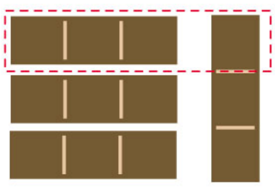
Je koopt met twee vrienden een pakje met vier repen chocola. Je verdeelt deze 4 repen dus met 3 personen, ieder even veel. Hoeveel krijgt elk?

Antwoord

Bekijk de figuur.

Je ziet dat ieder krijgt dan $\frac{4}{3}$ deel.

Dat is meer dan een hele reep: $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$.



Figuur 3.6

Opgave 10

Je verdeelt 15 repen chocolade met zijn zessen.

Hoeveel chocoladerepen krijgt ieder? Schrijf je antwoord als breuk met de gehelen zichtbaar.

Opgave 11

Je kent de tandwielen van technisch Lego wel. Ze zijn er met verschillende hoeveelheden tanden. Neem twee tandwielen waarvan de tanden in elkaar grijpen.

a Beide tandwielen hebben 20 tanden. Als je het éne tandwiel één keer helemaal ronddraait, hoeveel draait het andere dan rond?

De tandwielen zijn verschillend: het kleinste heeft 8 tanden, het grootste 18 tanden.

b Je draait het kleinste één keer helemaal rond. Hoeveel draait het grootste tandwiel?

c Je draait het grootste één keer helemaal rond. Hoeveel draait het kleinste tandwiel?

Figuur 3.7

Voorbeeld 3

Wat is meer $\frac{3}{10}$ of $\frac{2}{7}$?

Antwoord

Breuken kun je vergelijken door ze gelijknamig te maken.
Je zoekt dan eerst het kleinste getal dat zowel een veelvoud van 10 als een veelvoud van 7 is. Dat getal heet het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) van 10 en 7.
In de tabel hiernaast zie je dat dit getal 70 is.

$\frac{3}{10} = \frac{21}{70}$ en $\frac{2}{7} = \frac{20}{70}$, dus $\frac{3}{10} > \frac{2}{7}$.

Je kunt de breuken ook vergelijken door ze eerst beide om te zetten naar een decimaal getal: $\frac{3}{10} = 0{,}3$ en $\frac{2}{7} = 0{,}28571428....$

Ook nu zie je snel welke van beide het grootst is.

10	**7**
20	14
30	21
40	28
50	35
60	42
70	49
	56
	63
	70

Tabel 3.1

Opgave 12

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Vergelijk de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{15}$ door gelijknamig maken.

b Vergelijk de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{15}$ door ze om te zetten naar decimale getallen.

c Neem nu de breuken $\frac{6}{25}$ en $\frac{4}{15}$.
Vergelijk ze door gelijknamig maken.

d Vergelijk de breuken $\frac{6}{25}$ en $\frac{4}{15}$ door ze eerst naar decimale getallen om te zetten.

Opgave 13

Er wordt van een griepepidemie gesproken als er van elke 1000 inwoners meer dan 80 de griep hebben. In de klas van Antoine hebben 3 leerlingen de griep en zijn er 24 gezond. Volgens Antoine zou er wel eens sprake kunnen zijn van een epidemie.

Ga na of hij daarin gelijk heeft.

Oefenen

Opgave 14

Uit onderzoek (uit 2003) bleek dat je elke dag gemiddeld ongeveer 8 uur slaapt, 1,5 uur eet en 2 uur televisie kijkt.

a Hoe groot is het deel van de dag dat iemand slaapt?

Ga verder uit van een mens die 84 jaar oud wordt.

b Hoeveel jaar heeft hij dan geslapen?

c Hoe groot is het deel van de dag dat een mens aan het eten is?

d Hoeveel keek een mens toen gemiddeld in zijn leven televisie?

Opgave 15

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk en haal indien mogelijk de gehelen er uit.

a $\frac{15}{12} = \ldots$

b $\frac{12}{15} = \ldots$

c $\frac{13}{4} = \ldots$

d $\frac{4}{13} = \ldots$

e $\frac{5}{85} = \ldots$

f $\frac{85}{5} = \ldots$

Opgave 16

Schrijf de volgende breuken als decimale getallen.
Geef waar nodig een benadering in vijf decimalen.

a $\frac{7}{3} = \ldots$

b $\frac{13}{12} = \ldots$

c $8\frac{3}{25} = \ldots$

d $\frac{1}{19} = \ldots$

e $\frac{4}{21} = \ldots$

Opgave 17

Schrijf de volgende getallen als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

a 2,17 = ...

b 0,0125 = ...

c 0,675 = ...

d 0,0002 = ...

Opgave 18

Je kunt de euromunten die delen van 1 euro voorstellen, weergeven door een breuk. Zo is de munt van 50 eurocent weer te geven als $\frac{1}{2}$. En zo kun je € 2,50 weergeven als $2+\frac{1}{2}$.

a Laat zien dat € 2,50 ook is te schrijven als $2+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$.

b Geef nog minstens twee andere manieren om € 2,50 weer te geven met breuken.

c Geef ook € 0,99 op minstens drie manieren weer met behulp van breuken.

Opgave 19

Vul <, >; of = in:

a $\frac{2}{11} \cdots \frac{3}{11}$

b $\frac{2}{11} \cdots \frac{2}{10}$

c $\frac{2}{10} \cdots \frac{3}{11}$

d $1\frac{3}{8} \ldots 1\frac{1}{3}$

e $\frac{1}{3} \ldots 0{,}33$

f $0{,}1538 \ldots \frac{2}{13}$

Opgave 20

Volgens de statuten van sportclub LLDM moet $\frac{3}{4}$ deel van de leden op een vergadering aanwezig zijn om over een voorstel te mogen stemmen. Als men over een wijziging van de statuten stemt moet $\frac{2}{3}$ van de aanwezigen vóór stemmen om die wijziging aan te nemen.

a Op een ledenvergadering zijn 176 van de 234 leden aanwezig. Mag er worden gestemd?

b Voor een voorstel tot wijziging van de statuten stemmen 117 van de aanwezige leden. Wordt het voorstel aangenomen?

Toepassen

Fietsen hebben een voortandwiel (dat aan de trapas vast zit) en een achtertandwiel aan de achteras. Het aantal tanden van die tandwielen bepalen de versnelling. Voortandwielen hebben gemiddeld 42 tot 54 tanden; achtertandwielen 12 tot 34 tanden.

Bij het werken met tandwielen van verschillende groottes heb je met breuken (verhoudingen) te maken.

Opgave 21: Overbrenging

Bekijk de tekst over de overbrenging bij een fiets.

a Waarom heeft het voortandwiel de meeste tanden?

b Met één pedaalslag gaat het voortandwiel één keer rond. Hoeveel keer gaat het achterwiel dan rond als het voortandwiel 48 tanden en het achtertandwiel 20 tanden heeft?

Het getal dat je bij b hebt gevonden heet de overbrenging. Bij elke verhouding van de tanden op de twee tandwielen kun je die overbrenging berekenen in twee decimalen nauwkeurig.

c Vul deze tabel in (antwoorden in decimalen):

tanden voor	tanden achter	overbrenging
42	15	
43	16	
45	15	
46	16	
51	17	
54	18	

Tabel 3.2

d Kun je bij verschillende aantallen tanden toch dezelfde overbrenging hebben?

Opgave 22: Verzet

De afstand die de fiets met één pedaalslag vooruit gaat heet het verzet. Het verzet hangt af van de overbrenging en de grootte van de wielen. Stel dat je fiets 2,83 m vooruit gaat als het achterwiel één keer rond draait.

a Hoe groot is het verzet bij een overbrenging van $\frac{12}{5}$ bij één pedaalslag?

b Hoe groot is het verzet bij 54 tanden voor en 18 tanden achter?

c Breid de tabel bij c van de voorgaande opgave uit met een kolom waarin het verzet staat.

d Toen Francesco Moser in 1988 het indoor uurrecord verbeterde (ruim 50 km afgelegd in 1 uur), gebruikte hij een fiets met een versnelling van 47 bij 17. Wat was de overbrenging? Hij had een speciale fiets laten maken met een verzet van 8,93 meter! Hoe groot was de omtrek van zijn achterwiel wel niet?

Testen

Opgave 23

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.
Schrijf er daarna achter om welk decimale getal het gaat. Geef waar nodig een benadering in vier decimalen.

a $\frac{2}{8}$

b $\frac{35}{49}$

c $\frac{315}{40}$

Opgave 24

Vul het juiste teken in.

a $\frac{2}{3}$...0,66

b $\frac{6}{14}$...$\frac{14}{35}$

Opgave 25

$\frac{2}{3}$ deel van de 144 personeelsleden van een bedrijf komt met de auto naar het werk.

$\frac{1}{8}$ deel komt lopend, de rest gaat op de fiets.

a Hoeveel personeelsleden komen met de auto naar het werk?

b Hoeveel personeelsleden komen met de fiets?

3.2 Rekenen met breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken handmatig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met breuken op de rekenmachine.

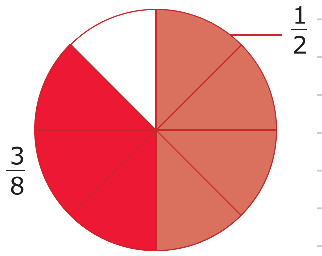
Voorkennis

- het begrip breuk, breuken vereenvoudigen en omrekenen naar een decimaal getal;
- breuken vergelijken door gelijknamig maken.

Verkennen

Opgave V1

Ton en Hans bestellen samen een grote pizza. Ton neemt de helft van de pizza, Hans neemt $\frac{3}{8}$ deel.



Figuur 3.1

a Welk deel van de pizza nemen ze samen?

b Welk deel van de pizza heeft Ton meer dan Hans?

Ton eet van zijn stuk maar $\frac{3}{4}$ deel op.

c Welk deel van de hele pizza is dat?

d Leg uit dat het bij onderdeel c eigenlijk ging om het vermenigvuldigen van twee breuken.

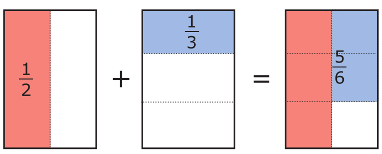
Uitleg 1

Gelijknamige breuken kun je eenvoudig bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken:

- $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$
- $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

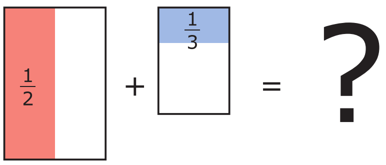
Als breuken niet gelijknamig zijn, moet je ze eerst gelijknamig maken!

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.



Figuur 3.2

Denk er wel om dat beide breuken delen van hetzelfde geheel moeten zijn!



Figuur 3.3

Opgave 1

Bereken en vereenvoudig daarna zoveel mogelijk:

a $\frac{5}{9} + \frac{1}{9}$

b $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$

c $3\frac{7}{12} + \frac{11}{12}$

d $4\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$

Opgave 2

Je wilt de breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{8}$ optellen.

a Beide breuken zijn niet gelijknamig. Ze zijn wel gemakkelijk gelijknamig te maken. Hoe?

b Hoeveel is dus $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$?

c En hoeveel is $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$?

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 1**.

a Maak zelf zo'n tekening bij $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

b Waarom moeten de twee rechthoeken waarvan je $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{4}$ deel hebt aangegeven even groot zijn?

c Waarom maak je de éne verdeling horizontaal en de andere verticaal?

d Bereken $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

Je kunt $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ ook exact berekenen met de rekenmachine. Je hebt behalve de toetsen voor de cijfers alleen de toetsen $\boxed{\div}$ en $\boxed{+}$ nodig.

e Wat is dan de uitkomst van deze optelling?

Uitleg 2

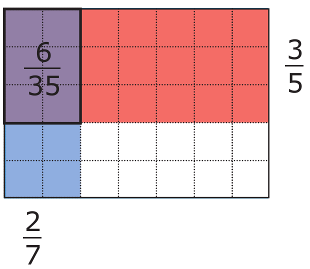
$\frac{3}{5}$ deel van 35 kun je als volgt berekenen:

- $\frac{1}{5}$ deel van 35 is 7;
- $\frac{3}{5}$ deel is 3 keer $\frac{1}{5}$ deel, dus $3 \times 7 = 21$.

En $\frac{2}{7}$ deel van $\frac{3}{5}$ deel is zo $\frac{2}{7} \times 21 = 6$. En 6 is $\frac{6}{35}$ deel van 35.

Je ziet dat $\frac{2}{7}$ van $\frac{3}{5}$ hetzelfde is als $\frac{6}{35}$. Dus: $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

Zo kun je breuken vermenigvuldigen: je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.



Figuur 3.4

Opmerking:
In plaats van × gebruik je voor vermenigvuldigen meestal $\cdot$: $2 \cdot 3 = 2 \times 3$.

Als je een getal deelt door een breuk, kijk je hoe vaak die breuk in dat getal past. Zo kun je de uitkomst van $14 \Big/ \frac{1}{2}$ voorstellen als het antwoord op de vraag: “Hoeveel halve euro's passen er in 14 hele euro's?” Je ziet dan dat $14 \Big/ \frac{1}{2} = 28$.

Je kunt ook **twee breuken op elkaar delen**.

Een munt van € 0,50 is $\frac{1}{2}$ euro. Een munt van € 0,10 is $\frac{1}{10}$ euro. Stel je wilt weten hoeveel munten van € 0,10 er gaan in een munt van € 0,50. Dan reken je eigenlijk uit: $\frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{10}$. De uitkomst is 5 zoals je wel weet. Dus: $\frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{10} = 5$.

Dit komt omdat $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Dus: $\frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{10} = \frac{5}{10} \Big/ \frac{1}{10} = 5/1 = 5$.

Je ziet dat het handig is om beide breuken gelijknamig te maken.

Je kunt ook zo redeneren: $\frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{10} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{1}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1} = 5$.

Je hebt dan beide breuken vermenigvuldigd met het omgekeerde van de tweede breuk.

Opgave 4

Bekijk de vermenigvuldiging $\frac{6}{7} \times \frac{5}{8}$.

a Voer de vermenigvuldiging met de hand uit.

b Kun je de breuk nog vereenvoudigen?

c Je kunt ook vereenvoudigen voordat je de tellers en de noemers vermenigvuldigt. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 5

Je hebt nog $2\frac{1}{2}$ taart. Je geeft iedereen $\frac{1}{6}$ deel van een taart.

a Hoeveel personen kun je een stuk taart geven?

b Welke deling van breuken hoort hier bij?

c Maak beide breuken gelijknamig. Leg nu uit hoe je het antwoord op a kunt zien aan beide breuken.

d Je kunt de deling ook uitvoeren door beide breuken te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede (de noemer). Laat zien hoe.

Opgave 6

Bereken nu met de hand (geef je antwoord als breuk):

a $\frac{2}{11} \times \frac{3}{11}$

b $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$

c $\frac{7}{10} \Big/ \frac{2}{5}$

d $\frac{3}{8} \cdot 1\frac{5}{6}$

e $\frac{5}{12} \Big/ 1\frac{7}{8}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt met **breuken rekenen**. De vier basisbewerkingen zijn:

- **breuken optellen**, je maakt ze dan eerst gelijknamig;
- **breuken aftrekken**, je maakt ze dan eerst gelijknamig;
- **breuken vermenigvuldigen**, door de tellers te vermenigvuldigen en de noemers te vermenigvuldigen;
- **breuken delen**, je kunt dit doen door ze gelijknamig te maken, je kunt ook twee breuken delen door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede.

Je kunt deze bewerkingen zowel met de hand uitvoeren (zie voorbeelden) als met de rekenmachine.

Voorbeeld 1

Breuken optellen en aftrekken doe je door ze eerst gelijknamig te maken.

- $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{3}{6} + 1 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3\frac{5}{6}$.
- $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} = 2 + \frac{3}{6} - 1 - \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Je kunt ook je rekenmachine gebruiken bij het rekenen met breuken. Je gebruikt dan de 'breukentoets' die er soms zo uitziet [A b/c] om breuken in te voeren.

Hier zie je hoe dat gaat bij $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$:

[2] [A b/c] [1] [A b/c] [2] [−] [1] [A b/c] [1] [A b/c] [3] [=]

levert meteen $1\frac{1}{6}$ op.

Opgave 7

Bekijk de optelling $3\frac{1}{6} + 1\frac{1}{4}$.

a Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine.

b Doe deze optelling ook op je rekenmachine zonder de breukentoets te gebruiken.

Bekijk de aftrekking $3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}$.

c Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine.

d Doe deze aftrekking ook op je rekenmachine zonder de breukentoets te gebruiken.

e Oefen het optellen en aftrekken van breuken via het practicum.

Voorbeeld 2

Soms zijn er ook helen betrokken bij de vermenigvuldiging. Die werk je dan eerst weg.

$2\frac{1}{7} \times 5\frac{3}{4}$ doe je zo:

- $2\frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$.
- $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.
- $\frac{15}{7} \times \frac{23}{4} = \frac{345}{28} = 12\frac{9}{28}$.

Kijk ook hoe dit met je rekenmachine gaat.

Opgave 8

Bekijk de vermenigvuldiging $3\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4}$.

a Breng die vermenigvuldiging in beeld met behulp van een rechthoek van $3\frac{1}{6}$ bij $1\frac{1}{4}$.

b Leg met behulp van die rechthoek uit waarom je niet gewoon 3×1 en $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$ kunt uitrekenen en dit bij elkaar optellen.

c Bepaal de juiste uitkomst met behulp van je figuur.

d Bepaal de juiste uitkomst nog eens door eerst de gehelen weg te werken.

e Oefen het vermenigvuldigen van breuken via het practicum.

Voorbeeld 3

Breuken delen kan door ze eerst gelijknamig te maken:

- $\frac{2}{5} \Big/ \frac{3}{7} = \frac{14}{35} \Big/ \frac{15}{35} = \frac{14}{15}$.
- $1\frac{2}{5} \Big/ 2\frac{3}{7} = \frac{7}{5} \Big/ \frac{17}{7} = \frac{49}{35} \Big/ \frac{85}{35} = \frac{49}{85}$.

Breuken delen kan ook door ze te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk:

- $\frac{2}{5} \Big/ \frac{3}{7} = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}\right) \Big/ \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$.
- $1\frac{2}{5} \Big/ 2\frac{3}{7} = \frac{7}{5} \Big/ \frac{17}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{17} = \frac{49}{85}$.

Dit kan ook op de rekenmachine met behulp van de breukentoets.

$1\frac{2}{5} \Big/ 2\frac{3}{7}$ gaat dan zo:

1 A% 2 A% 5 ÷ 2 A% 3 A% 7 =

Opgave 9

Bekijk de deling $\frac{5}{6}\Big/\frac{1}{4}$.

a Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine. Kies de methode die je het handigst vindt.

b Welke vraag beantwoord je met deze deling?

Bekijk de deling $3\frac{1}{6}\Big/1\frac{3}{4}$.

c Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine. Kies de methode die je het handigst vindt.

d Oefen het delen van breuken via het practicum.

Oefenen

Opgave 10

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3} = \ldots$

b $2\frac{1}{6} + 1\frac{3}{4} - 2\frac{1}{12} = \ldots$

c $3\frac{7}{12} - 2\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \ldots$

d $4\frac{3}{10} - 2\frac{2}{5} + \frac{17}{20} = \ldots$

Opgave 11

In een stad is 1/3 deel van mannen boven de 40 jaar en 1/7 deel van de vrouwen boven de 40 jaar. Er zijn evenveel mannen als vrouwen.

a Welk deel van mensen in die stad is boven de 40 jaar?

b Waarom kun je het antwoord bij a alleen berekenen omdat er evenveel mannen als vrouwen in deze stad wonen?

Opgave 12

Anneke, Henk en Frits verdelen een taartje.

Vreetzak Frits neemt $\frac{2}{3}$ deel van de taart, Anneke snijdt (bescheiden als ze is) $\frac{1}{12}$ deel van de taart af.

Welk deel van de taart blijft er over voor Henk?

Opgave 13

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{3} = \ldots$

b $2\frac{1}{6} \times 1\frac{3}{5} = \ldots$

c $3\frac{7}{12} \times 2\frac{5}{6} = \ldots$

d $\frac{3}{10} \times 3\frac{1}{3} = \ldots$

Opgave 14

Je kunt het land van boer Groot Koerkamp voorstellen door een rechthoek. Als de boer sterft wordt het land verdeeld onder zijn zonen. Bart krijgt de helft, Dirk $\frac{3}{8}$ en Ben $\frac{1}{8}$ deel.

a Geef met drie kleuren aan wie van de zonen welk deel krijgt.

Bart verbouwt op $\frac{1}{4}$ deel van zijn land tulpen, op de helft narcissen en op de rest hyacinten. Dirk verbouwt op zijn stuk voor de helft tulpen en de rest hyacinten en Ben verbouwt alleen maar narcissen.

b Deel de vakken op en geef in elk vakje met een T, een N of een H aan welke soort bloemen er verbouwd wordt.

c Op welk deel van het totale land staan tulpen?

d Schrijf de berekening op waarmee je het deel tulpen kunt berekenen zonder het plaatje te gebruiken.

e Bereken op welk deel narcissen staan en controleer het in de tekening.

f Bereken het deel hyacinten.

Opgave 15

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $12 \Big/ \frac{2}{3} = \ldots$

b $\frac{2}{3} \Big/ 12 = \ldots$

c $\frac{3}{5} \Big/ \frac{2}{3} = \ldots$

d $2\frac{1}{6} \Big/ 1\frac{3}{5} = \ldots$

e $3\frac{7}{12} \Big/ 2\frac{5}{6} = \ldots$

f $\frac{3}{10} \Big/ 3\frac{1}{3} = \ldots$

Opgave 16

Nathalie heeft vaak last van benauwdheid. Daarom slikt ze medicijnen. Ze slikt per dag $1\frac{1}{2}$ tablet. In een strip zitten 20 tabletjes.

a Hoeveel dagen doet Nathalie met één strip?

In de zomer moet ze een $\frac{1}{4}$ tablet meer nemen.

b Hoeveel dagen doet ze nu met één strip?

Toepassen

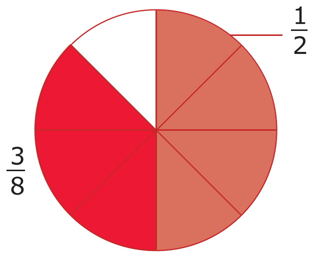
Ton en Hans bestellen samen een grote pizza. Ton neemt de helft van de pizza, Hans neemt $\frac{3}{8}$ deel.

Samen eten ze dan $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$ deel van de pizza op.

Ton eet $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ deel van de pizza minder dan Hans.

Als Ton van zijn stuk maar $\frac{3}{4}$ opeet, eet hij $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ deel van de pizza.

Dit is een voorbeeld van het toepassen van rekenen met breuken.



Figuur 3.5

Opgave 17

Schilder A kan een huis in 5 uur geheel schilderen, schilder B kan dit in 3 uur.

a Welk deel van het huis kunnen beide schilders samen in een uur schilderen?

b Waarom moet het steeds over hetzelfde huis gaan en kun je niet het schilderwerk van twee verschillende huizen vergelijken?

c Hoeveel tijd hebben beide schilders samen nodig om het huis te schilderen?

d Schilder C schildert het huis in 3,5 uur. Welk deel van het huis schilderen A en C in 1 uur? Hoeveel tijd hebben ze nodig voor het hele huis?

e Beantwoord de vragen uit d ook voor alle drie de schilders samen.

Opgave 18

Stel dat 1 op de 8 werkende Nederlanders werkt bij een bouwbedrijf. En ook dat daarvan $\frac{2}{10}$ deel op kantoor werkt.

a Welk deel van alle werkende Nederlanders werkt dan bij een bouwbedrijf op kantoor?

In een stad bestaat $\frac{3}{5}$ deel van de beroepsbevolking uit mannen van 20 jaar of ouder. Van die mannen is ongeveer 1 op de 40 werkeloos.

b Welk deel van de beroepsbevolking bestaat uit werkeloze mannen van 20 jaar of ouder?

c Deze stad heeft op het moment een beroepsbevolking van 86.315 mensen. Hoeveel werkeloze mannen van 20 jaar of ouder zijn er?

Opgave 19

Zo'n 9 miljoen Nederlanders doen aan sport. Bij al die activiteit komen nogal wat blessures voor: elk jaar moet 1 op de 5 sporters medisch worden behandeld. 1/6 deel van alle sportblessures zijn knieblessures.

a Het hoeveelste deel van alle 17 miljoen Nederlanders doet aan sport?

b Het hoeveelste deel van alle Nederlanders moet voor een sportblessure worden behandeld?

c Hoeveel sportende Nederlanders krijgen in de loop van het jaar een knieblessure? Schrijf je berekening op.

Opgave 20

In Nederland gebruikten we tot 1 januari 2002 de gulden. Verder waren er kwartjes (kwart guldens), dubbeltjes ($\frac{1}{10}$ gulden), stuivers ($\frac{1}{20}$ gulden) en centen ($\frac{1}{100}$ gulden). Ook was er de rijksdaalder ($2\frac{1}{2}$ gulden).

a Hoeveel stuivers gingen er in een rijksdaalder?

b Hoeveel stuivers gingen er in een kwartje?

In de Wikipedia vind je een **artikel over de geschiedenis van de Tibetaanse munten**. In het begin van de twintigste eeuw toen Tibet een zelfstandig land was, had het een eigen muntstelsel:

1 srang = $6\frac{2}{3}$ tangkas, 1 tangka = $1\frac{1}{2}$ sho = 15 skar.

c Hoeveel sho gingen er in 1 srang?

d Welk deel van 1 srang is 1 skar?

Testen

Opgave 21

Bereken met de hand en controleer achteraf met je rekenmachine.

a $1\frac{2}{3} + 5\frac{4}{5}$

b $2\frac{7}{8} - \frac{3}{10}$

Opgave 22

Bereken zonder rekenmachine.

a $2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{5}$

b $\frac{1}{3} \Big/ 4\frac{2}{8}$

c $3\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}$

d $\frac{1}{7} \Big/ \frac{2}{3}$

e $\frac{2}{5} \times 2\frac{4}{7}$

f $4\frac{1}{4} \Big/ 2\frac{1}{8}$

Opgave 23

Neem aan dat in een bepaald gebied vier op de zes leerlingen naar het mbo gaat. Van deze leerlingen kiest $\frac{1}{4}$ de richting zorg en welzijn, $\frac{2}{3}$ gaat voor techniek en de rest kiest economie.

a Het hoeveelste deel van deze mbo-leerlingen kiest voor economie?

b Welk deel van de leerlingen in dit gebied gaat naar zorg en welzijn op het mbo?

c Op een scholengemeenschap in dit gebied zitten 1500 leerlingen. Hoeveel van hen kiezen voor techniek op het mbo?

3.3 Breuken en procenten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip procent (en promille) gebruiken en rekenen met percentages
- rekenen met percentages (en promillages) erbij of eraf.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen;
- werken met verhoudingstabellen;
- rekenen met breuken.

Verkennen

Opgave V1

In het jaar 2000 gaf Nederland volgens het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) 5,5% van de totale uitgaven (overheid, bedrijven, instellingen en huishoudens samen) aan onderwijs uit.

a Leg uit hoeveel euro per uitgave van € 100,00 besteed werd aan onderwijs.

b Welk deel van elke euro van de totale Nederlandse uitgaven ging dat jaar naar het onderwijs?

Opgave V2

Vroeger gaven scholieren minder geld uit dan nu. In 1984 gaven ze gemiddeld € 53,00 per maand uit. Er kwam toen gemiddeld € 103,00 per maand binnen. In de loop van de jaren is dit veranderd. De gemiddelde totale uitgaven waren enige tijd geleden € 100,00 per maand tegenover € 144,00 aan inkomsten. In 1984 hield een scholier aan het einde van de maand dus een groter deel van zijn inkomen over dan tegenwoordig het geval is. De gemiddelde prijsstijging in deze tijd is 63%. Anno nu zou een scholier uit 1984 dus € 86,00 uitgeven. Jongeren van nu besteden beduidend meer, terwijl hun inkomsten niet evenredig zijn toegenomen met de prijsstijgingen.

a In 1984 gaf de gemiddelde scholier € 53,00 per maand uit. Hoeveel hield een scholier in dat jaar dan maandelijks over?

b Hoeveel houdt een scholier tegenwoordig gemiddeld maandelijks over?

c Is dat naar verhouding even veel?

naar: nationaal scholieren onderzoek Nibud

Uitleg

Het Latijnse *pro centum* betekent ‘per honderd’. Dus 1 procent (1%) betekent 1 van elke 100.

Dat is $\frac{1}{100}$ deel van het totaal. Je schrijft: $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Dus 1% van 500 is $\frac{1}{100}$ deel van 500. Dat is $\frac{1}{100} \times 500 = 5$ of $0{,}01 \times 500 = 5$.

En 12% van 500 is $\frac{12}{100}$ deel van 500. Dat is $\frac{12}{100} \times 500 = 60$ of $0{,}12 \times 500 = 60$.

100% van 500 is 500.

1%, 12%, 100% en dergelijke zijn percentages.

Figuur 3.1

percentage	100	1	12
hoeveelheid	500	5	60

Tabel 3.1

Op de vraag welk percentage 60 is van 500, is het antwoord: 12%. Dit kun je met een verhoudingstabel uitrekenen, in dit geval via 1.

Veel gebruikt wordt ook promille, dat is 1 op de 1000. Het teken daarvoor is ‰.

4‰ is een promillage van 4. 4‰ van 500 is $\frac{4}{1000} \cdot 500 = 2$.

Opgave 1

45% komt overeen met $\frac{45}{100}$ deel.

a Met welk deel komt 23% overeen?

b Bereken 23% van 150.

c Laat zien dat 25% overeenkomt met $\frac{1}{4}$ deel.

d Waarom is 33% niet precies gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel? Is het meer of minder?

Opgave 2

Bereken.

a 10% van 350.

b 12‰ van € 68,00.

c Hoeveel procent is 15 van de 1560?

d Van welk bedrag is € 45,00 20%?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

1 **procent** is $\frac{1}{100} = 0{,}01$. Dus 1% ergens van is $\frac{1}{100}$ deel daarvan.

Figuur 3.2

Bij het rekenen met procenten kun je werken met verhoudingstabellen.
Daarin bereken je bijvoorbeeld welk **percentage** (hoeveel procent) 50 van de 125 is:

$\frac{50}{125} \cdot 100 = 40\%$.

getal	125		50
procent	100	1	?

Tabel 3.2

Je gebruikt procenten vooral om te vergelijken.
Het is niet eenvoudig om te zeggen of 11 van de 43 een groter of kleiner deel is dan 23 van de 81.
Wanneer je berekent hoeveel procent 11 van de 43 is (25,58...%) en hoeveel procent 23 van de 81 is (28,39...%), dan kun je het antwoord zo geven.

1 **promille** is $\frac{1}{1000}$. Het teken daarvoor is ‰.

4‰ is een **promillage** van 4. 4‰ van 500 is $\frac{4}{1000} \cdot 500 = 2$.

Voorbeeld 1

Wat is meer: 23 van de 53 of 31 van de 64?

Antwoord

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{23}{53} \cdot 100 \approx 43{,}4\%$.

Of je deelt: $\frac{23}{53} \approx 0{,}434$, dus is het 43,4%.

aantal	53	23
procent	100	?

Tabel 3.3

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{31}{64} \cdot 100 \approx 48{,}4\%$.

Of je deelt: $\frac{31}{64} \approx 0{,}484$, dus is dit 48,4%.

aantal	64	31
procent	100	?

Tabel 3.4

Conclusie: 31 van 64 is meer dan 23 van 53.

Opgave 3

Wat is naar verhouding meer?

a 5 van de 11 of 45 van de 100

b 23% of $\frac{15}{71}$ deel

Opgave 4

Jaap spaart maandelijks € 18,00 van zijn € 55,00 inkomsten. Zijn oudere broer Willem heeft maandelijks € 125,00 aan inkomsten en spaart € 40,00 euro per maand.

Wie spaart naar verhouding het meest?

Voorbeeld 2

Ooit was al ons gas om te koken en het huis te verwarmen afkomstig uit Nederland, maar tegenwoordig wordt ook gas uit het buitenland gekocht. In 2013 was 63% van het gebruikte gas afkomstig uit Nederland. Dit was samen 38,7 miljard m^3 gas. Hoeveel aardgas was afkomstig uit het buitenland?

Antwoord
Het buitenland leverde $100 - 63 = 37\%$.

Met een verhoudingstabel: $? = \frac{37}{63} \cdot 38{,}7 \approx 22{,}7$ miljard m^3.

miljard m^3 gas	38,7	?
procent	63	37

Tabel 3.5

Opgave 5

Een basketballer heeft van de zestien doelpogingen veertien keer gescoord.

Hoe hoog is zijn scoringspercentage?

Opgave 6

Bekijk de voedingswaardetabel van karnemelk per portie van 150 gram.

Voedingswaarde												
product	energie	energie	water	eiwit	koolh.	suikers	vet	verz.	e.o.v	m.o.v	choles.	vezels
eenheid per 150 g	kcal	kJ	g	g	g	g	g	g	g	g	mg	g
karnemelk, ongesuikerd	48	200	136,5	3,6	6,8	6,8	0,6	0,5	0,2	0,0	1,5	0,0

Figuur 3.3

a Voor hoeveel procent bestaat deze karnemelk uit water?

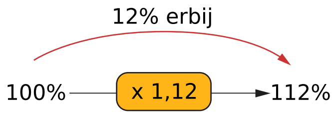
b Hoeveel procent vet bevat de karnemelk?

Voorbeeld 3

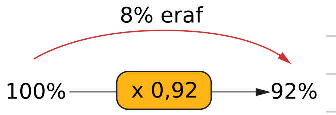
Bij het werken met procenten gaat het vaak om:

1. Percentage erbij: Een winkelier koopt zijn artikelen voor een bepaalde inkoopprijs. Hij wil ze verkopen voor een verkoopprijs die bijvoorbeeld 12% hoger ligt. Hij moet dan bij elk artikel 12% van de inkoopprijs optellen, ofwel de inkoopprijs met $1 + 0{,}12 = 1{,}12$ vermenigvuldigen.
2. Percentage eraf: Een winkelier doet bepaalde artikelen in de uitverkoop. Van alle verkoopprijzen gaat bijvoorbeeld 8% af, ofwel hij moet de inkoopprijs met $1 - 0{,}08 = 0{,}92$ vermenigvuldigen.

Wil je weten met hoeveel procent een hoeveelheid gestegen of gedaald is?



Figuur 3.4



Figuur 3.5

Als bijvoorbeeld de temperatuur van water van 45 graden naar 65 graden stijgt, is de stijging $65 - 45 = 20$ graden. Dat is een stijging van $\frac{20}{45} = 0{,}444 = 44{,}4\%$.

Opgave 7

Bereken de nieuwe prijs of het nieuwe bedrag.

a Je koopt een fiets van € 650,00 en krijgt 12,5% korting.

b De contributie van de tafeltennisclub is € 120,00 per jaar en wordt met 5% verhoogd.

c In 2010 was de prijs van benzine ten opzichte van 1960 met ongeveer 180% gestegen. In 1960 kostte 1 liter benzine € 0,54.

Opgave 8

Je haalt van een bedrag eerst 10% af en doet er dan weer 10% van het nieuwe bedrag bij. Laat met een berekening zien of je weer hetzelfde bedrag hebt gekregen.

Oefenen

Opgave 9

Bereken het percentage.

a Hoeveel procent is $\frac{1}{10}$ deel?

b Hoeveel procent is 5 van de 20?

c Hoeveel procent is € 3,50 van € 21,00? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

d Een bedrag neemt af van € 125,00 naar € 100,00. Hoeveel procent is de korting?

e Een bedrag neemt toe van € 100,00 naar € 125,00. Hoeveel procent is de toename?

Opgave 10

Bereken het bedrag.

a Hoeveel is 4% van € 1000,00?

b Een bedrag van € 1,34 wordt met 12% verhoogd. Bereken de nieuwe prijs.

c Een bedrag van € 24,65 wordt met 28% verlaagd. Bereken de nieuwe prijs.

d Een bedrag is met 10% verhoogd en is nu € 127,50. Bereken de oude prijs.

e Een bedrag is met 24% verlaagd en is nu € 40,80. Bereken de oude prijs.

Opgave 11

Bereken.

a Je krijgt $\frac{2}{7}$ deel van € 140,00. Hoeveel procent is dat? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Een trui is afgeprijsd van € 39,00 voor € 34,50. Hoeveel procent is de korting? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Een telefoonabonnement is duurder geworden, van € 15,00 naar € 18,00. Hoeveel procent is het duurder geworden?

Opgave 12

Het water van de Rijn verdeelt zich als het Nederland binnenkomt over meerdere rivieren. Eerst gaat 65% van het water naar de Waal en 35% naar het Pannerdensch Kanaal. Dat kanaal splitst zich vlak voor Arnhem, waarbij 60% van het water naar de Nederrijn stroomt en 40% naar de IJssel.

a Hoeveel procent van het Rijnwater stroomt door de IJssel?

b In het Ruhrgebied in Duitsland wordt het water van de Rijn vervuild doordat er een bepaalde hoeveelheid kleurstof wordt geloosd. Onderzoekers schatten dat 640 kilogram van die kleurstof in de IJssel terecht is gekomen. Hoeveel kilogram kleurstof is er geloosd?

Opgave 13

Marianne is met haar vriendin Anneke aan het winkelen. Op een gegeven moment komen ze langs een winkel met aanbiedingen. Daar stormen ze meteen naar binnen.

Figuur 3.6

a Marianne ziet een trui van € 49,98. Wat gaat die trui kosten met deze korting?

b Anneke koopt twee spijkerbroeken met een winkelprijs van elk € 51,75. Wat betaalt ze daarvoor?

Marianne ziet een blouse waarop 20% korting staat. De winkelprijs is € 33,50 en ze moet er € 27,00 voor betalen.

c Klopt het kortingspercentage wel?

Opgave 14

Je koopt een fiets van € 650,00 voor € 600,00. Hoeveel procent korting krijg je dan?

a Bereken dit percentage door eerst de korting in euro's te berekenen.

b Bereken dit percentage door rechtstreeks met de bedragen 600 en 650 te rekenen.

Toepassen

Btw is de afkorting voor *belasting toegevoegde waarde*. Die belasting betaal je meestal bij het kopen van een product of dienst. De belastingdienst maakt onderscheid tussen luxe artikelen (21% btw) en basisartikelen (6% btw) zoals brood.

Je zus koopt een elektrische scooter. De winkelier verkoopt deze voor € 2250,00. Dit is de prijs zonder btw (dat heet exclusief btw). Hij moet 21% btw rekenen: de scooter kost daarom 21% meer. Hij kost dan:
$1{,}21 \times 2250{,}00 = 2722{,}50$ euro inclusief btw.

Meestal zet de winkelier de prijs al meteen inclusief btw op het artikel. Je koopt een fiets en je betaalt € 900,00 inclusief 21% btw. Hoeveel btw heb je dan betaald?

De winkelier heeft de verkoopprijs berekend door de prijs zonder btw te vermenigvuldigen met 1,21.
De prijs zonder btw krijg je dus terug door te delen door 1,21:
$\frac{900}{1{,}21} \approx 743{,}80$ euro.
De btw is: $900 - 743{,}80 = 156{,}20$ euro.

Je kunt ook met een verhoudingstabel via 1 rekenen.

Denk erom dat je nu *niet* 21% van 900 kunt uitrekenen en dat van de 900 aftrekken, want de € 900,00 is het bedrag dat tot stand komt *nadat* er 21% bij opgeteld is. Je moet dan 900 op 121% stellen.

Opgave 15

Bekijk de rekenvoorbeelden met btw hierboven.

Voor een fiets betaal je € 650,00, exclusief 21% btw.

a Hoeveel betaal je voor deze fiets inclusief btw?

Voor een koelkast betaal je € 677,60, inclusief 21% btw.

b Hoeveel euro bedraagt de btw?

c Hoeveel kost deze koelkast zonder btw?

Opgave 16

In de horeca bestaat ook het lage btw-tarief van 6%.
Dat tarief geldt voor het leveren van voedsel en (niet-alcoholische) dranken.
Je eet in een restaurant een maaltijdsalade met een glas bubbelwater. Dat kost je € 8,75 inclusief btw.

Hoeveel bedraagt de prijs exclusief btw?

Testen

Opgave 17

Bij een loterij worden 750 loten verkocht.
Er zijn twee eerste prijzen van € 35,00, drie tweede prijzen van € 25,00 en vier derde prijzen van € 5,00.
15% van de inkomsten wordt uitgekeerd aan prijzen.

a Wat kost een lot? Rond af op 10 cent.

b Hoeveel promille van de inkomsten wordt er aan derde prijzen uitbetaald?

Opgave 18

Je kunt in de uitverkoop sneakers kopen voor € 125,00 met 10% korting of voor € 150,00 met 21% korting. Hoeveel procent prijsverschil hebben - na aftrek van de korting - de duurste sneakers ten opzichte van de goedkoopste?

3.4 Machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen macht, grondtal, exponent, machtsverheffen;
- rekenen met machten in de juiste rekenvolgorde.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen met de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met breuken.

Verkennen

Opgave V1

Als je een A4-blaadje dubbelvouwt, krijg je twee lagen papier.
Als je het blad nog een keer dubbelvouwt, krijg je vier lagen papier
Hoeveel lagen papier krijg je als je het blad tien keer hebt dubbelgevouwen?

Uitleg

Je krijgt een kwadraat als je een getal met zichzelf vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 = 3^2$.

Je krijgt een macht als je met steeds hetzelfde getal vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst machtig groot: $3^5 = 243$.

Je spreekt van machtsverheffen en je zegt ‘3 tot de macht 5’, of kortweg ‘3 tot de vijfde’. 3^5 is een macht met grondtal 3 en exponent 5.
Een kwadraat zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.

Figuur 3.1

Je kunt ook de machten berekenen van een breuk: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

Je kunt ook de machten berekenen van negatieve getallen. Let op de rekenvolgorde: $-17^3 = -17 \cdot 17 \cdot 17 = -4913$ en $(-17)^3 = -17 \cdot -17 \cdot -17 = -4913$

Verder zijn er rekenregels:

- machten vermenigvuldigen dan exponenten optellen:
  $10^4 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$;
- machten delen dan exponenten aftrekken:
  $10^5 / 10^3 = (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)/(10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^2$;

- machten van machten dan exponenten vermenigvuldigen:
  $\left(10^3\right)^4 = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{12}$;
- grondtal niet 0 en exponent wel: $10^0 = 1$;
- negatieve exponenten kunnen ook voorkomen:
  $10^3 / 10^5 = (10 \cdot 10 \cdot 10)/(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$;
- machten gaan in een berekening voor vermenigvuldigen en delen.

Het samennemen of korter schrijven van machten heet herleiden.

Opgave 1

Bereken de machten.

a 1^{12}

b $3{,}5^3$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

d $\left(\frac{2}{5}\right)^4$

Opgave 2

a Bereken 3^4.

b Wat betekent $(-3)^4$? Wat is de uitkomst?

c Wat betekent -3^4? Wat is de uitkomst?

Opgave 3

Bereken.

a $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

b $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$

c $\left(\frac{2}{7}\right)^0$

d $-2 \cdot (-3)^2$

Opgave 4

Herleid de machten. Je hoeft ze niet te berekenen.

a $3^{95} \cdot 3^{114}$

b $\frac{3^{114}}{3^{95}}$

c $\left(3^{12}\right)^5$

d $\frac{\left(3^{15}\right)^{10}}{3^{50} . 3^{100}}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je krijgt een **macht** als je met steeds hetzelfde getal vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.

Je spreekt van **machtsverheffen** en je zegt ‘3 tot de macht 5’, of kortweg ‘3 tot de vijfde’. 3^5 is een macht met **grondtal** 3 en **exponent** 5.
Een **kwadraat** zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.

Rekenregels om machten te **herleiden**:

- machten vermenigvuldigen dan exponenten optellen: $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$;
- machten delen dan exponenten aftrekken: $10^5 / 10^3 = 10^2$;
- machten van machten dan exponenten vermenigvuldigen: $\left(10^3\right)^4 = 10^{12}$;
- grondtal niet 0 en exponent wel: $10^0 = 1$;
- negatieve exponenten kunnen ook voorkomen: $10^3 / 10^5 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$;
- machten gaan in een berekening voor vermenigvuldigen en delen.

Figuur 3.2

Voorbeeld 1

Bij het rekenen moet je machten berekenen voor vermenigvuldigen en delen.

Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst. Hier zie je een voorbeeld van hoe je dit kunt toepassen.

$2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$

$= 2 \cdot 16 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 32 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 32 + 6 - 4$
$= 34$

Let goed op mintekens en haakjes:

$(-17)^4 = -17 \cdot -17 \cdot -17 \cdot -17 = 83521$,
maar $-17^4 = -17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = -83521$.

Opgave 5

Let op de rekenvolgorde en bereken.

a $4 \cdot 2^5 - \frac{400}{2^4}$

b $\frac{(2^3+3^2)^2}{17} - 2^2$

c $\left(2 \cdot \frac{1}{2^3}\right)^3$

Opgave 6

Bereken.

a $500 - -5^3$

b $500 - (-5)^3$

c $500 + -5^4$

d $500 + (-5)^4$

Voorbeeld 2

Soms kun je uitdrukkingen met machten berekenen door eerst te herleiden

Bereken: $\frac{17^{304} . 17^{98}}{(17^{100})^4}$

Antwoord

$\frac{17^{304} . 17^{98}}{(17^{100})^4} = \frac{17^{402}}{17^{400}} = 17^2 = 289$

Opgave 7

Bereken.

a $\frac{13^{240}}{(13^{10})^4 . 13^{200}}$

b $\frac{4^{99}}{2^{150} . (-2^5)^{10}}$

Opgave 8

Reken je met getallen in de technische notatie dan werk je met machten.

a Een raket wordt afgeschoten met een snelheid van $42 \cdot 10^3$ km/h richting de maan.
Hij moet een afstand afleggen van ongeveer $1{,}20 \cdot 10^6$ km.
Hoe lang is de raket onderweg?

b Er zitten ongeveer $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomen in 12 gram ^{12}C (koolstof). Hoeveel gram weegt 1 atoom van deze koolstof? Geef je antwoord in drie significante cijfers in de technische notatie.

Oefenen

Opgave 9

Bereken.

a 4^5

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

d $\left(1\frac{3}{5}\right)^3$

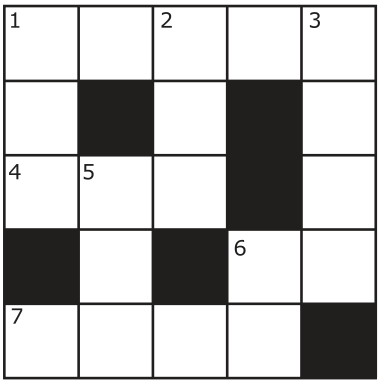
e $(-2)^6$

f $-2^4 \cdot 3^3$

Opgave 10

Vul de kruisgetallenpuzzel in.

Horizontaal		Verticaal	
1	$(6^2)^3$	1	$2^4 \cdot 5^2 + 1$
4	$3^2 \cdot (2^2)^2$	2	$\left((2 \cdot 3)^2\right) \cdot (20 - 1)$
6	$\frac{3^7}{3^5} \cdot 10$	3	$2 \cdot 5^5$
7	$2 \cdot 10^3 + 2$	5	$10 \cdot \left(\frac{7^5}{7^3} - 1\right)$
		6	$(2^3)^2 \cdot 3 - 10^2$



Tabel 3.1

Opgave 11

Herleid de machten. Je hoeft ze niet te berekenen.

a $2^{16} \cdot (2^{10})^3$

b $\frac{4 \cdot 2^{26}}{2^{20}}$

c $\frac{2^{14} \cdot 2^{26}}{(2^{20})^2}$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan eentwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

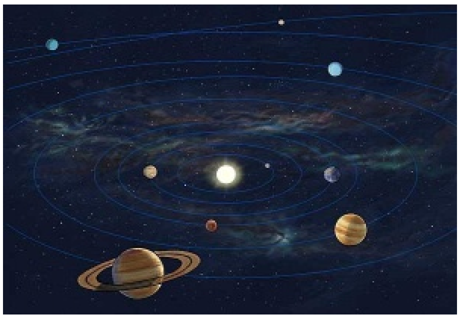
De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon. 1 AE $\approx 150 \cdot 10^6$ km.

a Hoeveel AE is 1 km?

b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?

c Pluto bevindt zich ongeveer $5{,}9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?

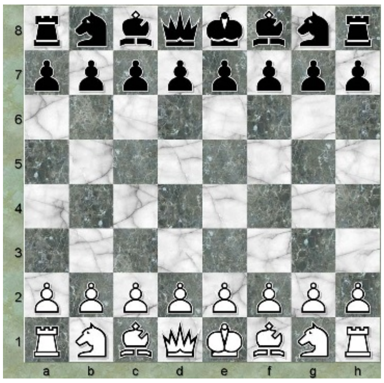
d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $300 \cdot 10^6$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?



Figuur 3.3

Toepassen

Sissah Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah Ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.”
De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen. Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 3.4

Opgave 14

Bekijk het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

e Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**. Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?

b Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

c Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Testen

Opgave 16

Bereken uit het hoofd.

a 2^7

b $(-2)^7$

c -2^7

d $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

e Bereken de macht met grondtal 3 en exponent 6.

Opgave 17

Bereken.

a $-4 \cdot 2^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$

b $-2 \cdot (-4)^4$

c $\left(\frac{2}{4}\right)^3 \cdot 3 + 2^6$

d $-4^4 + 3^5 \cdot 2^2$

Opgave 18

Herleid de volgende machten. Je hoeft ze niet uit te rekenen.

a $\frac{(9^{20})^4}{3^2 \cdot 9^{16}}$

b $6^{16} \cdot 6^{12}$

c $(4^{17})^4$

d $12^{14} \cdot \frac{12^{80}}{12^{56}}$

3.5 Wortels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen wortel en hogere machtswortel en deze berekenen/benaderen;
- wortelvormen herleiden.

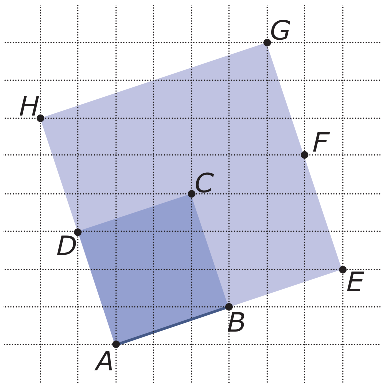
Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen, breuken en machten met de juiste rekenvolgorde;
- oppervlakte van een vierkant en inhoud van een kubus berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.
Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.
Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.



Figuur 3.1

a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

d Laat ook zien, dat $2 \cdot \left(2\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.
Derdemachts worteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Je schrijft:

$\sqrt{9} = 3$

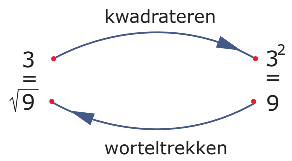
Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.
Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Bijvoorbeeld:

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$
- $\sqrt{6} \Big/ \sqrt{2} = \sqrt{6/2} = \sqrt{3}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derdemachts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierdemachts worteltrekken, enz.
Met hogere machtswortels kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Bijvoorbeeld is:

$\sqrt[3]{64} = 4$ omdat $4^3 = 64$

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.



Figuur 3.2

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{-343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

a Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

b $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

c $\frac{4 \cdot \sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met 'gewone' wortels. Toch is er een verschil.

a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

b $5\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

c $\frac{4 \cdot \sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
n-de-machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een n-de macht. Zo geldt:

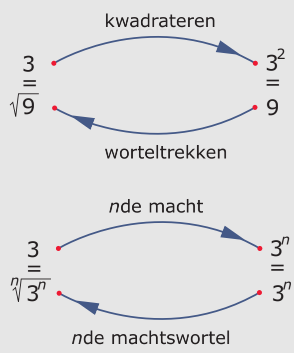
$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

Het rekenen met wortels gaat zo:

- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{7 \cdot 5}$ en $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7 \cdot 5}$
- $\sqrt{7} \Big/ \sqrt{5} = \sqrt{7/5}$ en $\sqrt[3]{7} \Big/ \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7/5}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.
- In de rekenvolgorde komen machten en wortels voor vermenigvuldigen en delen.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bij het rekenen moet je deze rekenvolgorde hanteren:

- H: je berekent eerst wat er binnen de haakjes staat (of in de teller en noemer van een breuk);
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst.

Bereken nu $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$.

Antwoord

$2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$

$= 2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 8 + 6 - 4$
$= 10$

Opgave 4

Let op de rekenvolgorde en bereken.

a $4 \cdot 2^5 - \frac{400}{\sqrt{16}}$

b $\frac{(2^3+3^2)^2}{17} - \sqrt[3]{64}$

c $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^3$

Voorbeeld 2

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels uitdrukkingen kunt herleiden.

- $2 \cdot \sqrt{10} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{10} + \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10}$
- $2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{15} = 6 \cdot \sqrt[3]{15}$
- $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$

Opgave 5

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt{30} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$

b $\left(\sqrt{5}\right)^5 - \sqrt{5}$

c $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

d $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$

Oefenen

Opgave 6

Bereken of benader de volgende wortels in drie decimalen nauwkeurig

a $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

b $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

c $\sqrt[3]{66}$

d $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

Opgave 7

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 8

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $3 \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

c $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

d $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 9

Bereken.

a $\left(\sqrt{81} - 4\right)^2 \Big/ \left(5^2 - \sqrt{6^2 + 8^2}\right)$

b $\sqrt[3]{10^2/2 + 4 \cdot 5 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}$

Opgave 10

Een balk heeft ribben van 4, 8 en 12 cm.

a Bereken de lengtes van alle mogelijke zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.
De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek. Als de beide rechthoekszijden 1 zijn, is de langste zijde $\sqrt{2}$.
Je berekent dit met de stelling van Pythagoras.
Die stelling zegt dat in elke rechthoekige driehoek de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de langste zijde: $a^2 + b^2 = c^2$ als a en b de rechthoekszijden zijn.

De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde 1 is, dan is de langste zijde (ook wel de schuine zijde) 2 en de langste rechthoekszijde dus $\sqrt{3}$ (gebruik de stelling van Pythagoras).

Figuur 3.4

Opgave 11

Bekijk de twee tekendriehoeken hierboven. Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van 1 eenheid heeft. Neem eerst een driehoek die dezelfde vorm heeft als de geodriehoek.

a Laat zien dat de langste zijde $\sqrt{2}$ cm is als de twee rechthoekszijden 1 cm zijn.

b Hoe lang is de langste zijde als de kortste zijden 16 cm zijn?

Neem nu de andere tekendriehoek.

c Laat zien hoe je de andere zijden berekent als de kortste zijde 1 cm is.

d Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?

e Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 6 cm is?

Opgave 12

Je kunt de stelling van Pythagoras ook toepassen in drie dimensies.

Een balk heeft ribben van 4, 8 en 12 cm.

a Bereken de lengtes van alle mogelijke zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Testen

Opgave 13

Bereken of benader in drie decimalen nauwkeurig.

a $\sqrt{144}$

b $\sqrt[3]{-216}$

c $\sqrt{125}$

d $\sqrt[3]{100}$

Opgave 14

Bereken.

a $\left(2^5 - 12\right) / \left(\sqrt{64} - \sqrt{9}\right)$

b $\left(\sqrt{75} / \sqrt{3} - 2\right)^4$

Opgave 15

Herleid.

a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{30} / \sqrt{2}$

b $\sqrt{162} - \sqrt{32}$

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het rekenen met breuken, procenten, machten en wortels voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Rekenen II** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- breuk met teller en noemer — vereenvoudigen — gelijknamig maken en vergelijken
- rekenen met breuken
- procent, percentage — promille, promillage
- macht met grondtal en exponent — rekenen met machten
- wortel — hogere machtswortel — rekenen met wortels

Activiteitenlijst

- breuken vereenvoudigen — breuken vergelijken door gelijknamig maken — breuken omrekenen naar een decimaal getal;
- breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met procenten — rekenen met promillages
- rekenen met machten en de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met (hogere machts)wortels en de juiste rekenvolgorde — wortelvormen herleiden.

Testen

Opgave 1

Bereken met de hand (dus zonder rekenmachine):

a $\frac{1}{4} + \frac{4}{15} = \ldots$

b $\frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \ldots$

c $2\frac{1}{4} + 1\frac{4}{15} = \ldots$

d $2\frac{1}{4} - 1\frac{4}{15} = \ldots$

e $\frac{1}{4} \times \frac{4}{15} = \ldots$

f $\frac{1}{4} \Big/ \frac{4}{15} = \ldots$

g $2\frac{1}{4} \times 1\frac{4}{15} = \ldots$

h $2\frac{1}{4} \Big/ 1\frac{4}{15} = \ldots$

Opgave 2

Van de scooters die uit een fabriek komen is $\frac{2}{3}$ deel rood. $\frac{5}{8}$ deel van de rode scooters is elektrisch, de rest loopt op benzine.

a Welke deel van alle scooters is rood en elektrisch?

Per dag verlaten er 960 scooters de fabriek.

b Hoeveel daarvan zijn rood en elektrisch?

De rode scooters die op benzine lopen worden in de fabriek gevuld met elk $2\frac{1}{3}$ liter benzine.

c Hoeveel liter benzine wordt er dus op één dag getankt?

In de grote benzinetank van de fabriek gaat 7000 liter.

d Hoeveel scooters kunnen ze daarmee van $2\frac{1}{3}$ liter benzine voorzien?

Opgave 3

Maak de volgende berekeningen kloppend door het juiste getal of de juiste getallen (soms een breuk) in te vullen:

a $\frac{3}{8} + \frac{\dots}{12} = \frac{19}{24}$

b $1\frac{7}{8} - \dots = \frac{3}{4}$

c $\frac{7}{12} \cdot \frac{\dots}{13} = \frac{14}{39}$

d $\frac{3}{5} / \dots = 10$

Opgave 4

Een winkelier geeft op Lego wel 40% korting, omdat de oude voorraad weg moet om ruimte te maken voor de nieuwste series.

a Hoeveel kost de brandweerkazerne van € 78,50 dan nog?

b De brandweerauto kost met korting nog € 21,30. Hoeveel kostte hij zonder korting?

Opgave 5

Aanbiedingen!

a Een leren bureaustoel van € 295,00 kun je met korting kopen voor € 200,00. Hoeveel procent korting krijg je dan?

b Een pak hagelslag van 250 gram kost € 1,75. De fabrikant doet een aanbieding: 100 gram meer voor dezelfde prijs. Hoeveel korting krijg je dan eigenlijk?

Opgave 6

Bereken (gebruik alleen waar nodig je rekenmachine om het antwoord in twee decimalen nauwkeurig te geven):

a 7^2

b $1{,}5^2$

c $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

d $\sqrt{6{,}25}$

e $\sqrt{\frac{4}{81}}$

f $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

g $\sqrt{70}$

h $\left(3\sqrt{6}\right)^2$

Opgave 7

Maak de volgende berekeningen, geef steeds exacte antwoorden.

a 7^4

b 5^0

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

d $1{,}6^3$

e $\sqrt{2 \cdot 2^2 + 17}$

f $\left(5\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)^2$

g $\frac{6 \cdot 3^2}{6 - 3^2}$

h $5^{1+\sqrt{25}} / 25 - 5$

Opgave 8

Schrijf als macht van 7:

a $7 \cdot 7^{140}$

b $7^{141} / 7^{15}$

c $\left(7^{70}\right)^7$

d $7^5 + 42 \cdot 7^4$

e $\frac{3 \cdot 7^{115}}{1029}$

f $\frac{8 \cdot 7^{200}}{7^{201} + 7^{200}}$

Toepassen

Opgave 9: Behangplaksel

In een receptenboek uit 1936 staat dit recept voor behangplaksel (dl staat voor deel of delen).

Rijstebloem 4 dl
Krijt (zeer fijn) 2 dl
Caseïne 1 dl
Aluin in poeder $\frac{1}{2}$ dl
Men kan het mengsel direct met heet water tot een bruikbare pap aanroeren. Beter lost men de caseïne met iets ammoniak op als vroeger aangegeven en mengt deze oplossing met de gekookte rijstemeelpap. Verder is een pap van zuivere tarwebloem zeer bruikbaar. Hiertoe mengt men de tarwebloem met koud water tot een dun papje aan en giet dit mengsel juist als bij stijfsel in een voldoende hoeveelheid kokend water.

a Rijstebloem koop je in pakken van 1 kg. Hoeveel moet je van de andere bestanddelen inkopen als je 1 pak rijstebloem tot behangplaksel wilt verwerken?

b Met 1 kg behangplaksel kun je 20 m^2 muur behangen. Hoeveel van elk van deze ingrediënten moet je kopen om 35 m^2 muur te kunnen behangen?

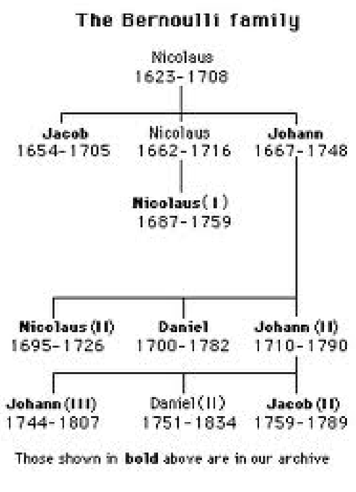
Opgave 10: Stamboom

De Zwitserse familie Bernoulli heeft een flink aantal bekende wiskundigen voortgebracht, allemaal mannen. Je ziet hier een deel van de mannelijke lijn van hun familiestamboom. De namen van de bekende wiskundigen zijn vet gedrukt. In het algemeen komen iemand's erfelijke eigenschappen voor de helft van de vader en voor de helft van de moeder. Bekijk nu Johann III Bernoulli.

a Hoe groot is het deel dat zijn overgrootvader van vaders kant aan erfelijke eigenschappen heeft bijgedragen?

b Jakob en Johann Bernoulli waren de eerste bekende wiskundigen uit de familie. Als je aanneemt dat goed zijn in wiskunde erfelijk is, voor welk deel heeft Johann III dan zijn wiskundige capaciteiten geërfd?

c Kun je op grond van deze stamboom aannemen dat wiskundige kwaliteiten erfelijk zijn?



Figuur 3.1

Opgave 11: Dwergspitsmuis

De dwergspitsmuis is het kleinste zoogdier van Nederland. Toch eet het diertje naar verhouding 40 keer zoveel als een volwassen olifant. Het eet elke dag zijn eigen gewicht aan insecten op.

De dwergspitsmuis is een insectenetend zoogdiertje met een gewicht tussen de 2,4 en 2,6 gram. Het diertje leeft het liefst zo diep mogelijk onder de grond in gangen en holen die andere dieren gegraven hebben. De dwergspitsmuis heeft een heel ander levensritme dan de mens: hij slaapt 3 uur en is dan 3 uur wakker en actief, daarna slaapt hij weer 3 uur, enzovoorts. Hij heeft dus maar een dag van 6 uur. Een dwergspitsmuis van 1 jaar is van middelbare leeftijd; het dier wordt hoogstens zo'n 15 maanden oud.

Tabel 3.1

Een olifant weegt gemiddeld zo’n 4000 kg. In een dierentuin eet zo’n olifant per dag 20 kg hooi, 15 kg gras, 10 kg krachtvoer, 45 kg takken, 5 kg brood en 5 kg gemengd groenvoer.

a Hoe lang schat je deze dwergspitsmuis als je zijn staart niet meerekent?

b Reken na of de dwergspitsmuis naar verhouding 40 keer zoveel eet als de olifant.

c Voor een dwergspitsmuis duurt een ‘dag’ 6 uur. Hoe lang is voor de mens één ‘muizenjaar’?

d Hoe lang is voor deze muis één mensenjaar?

e Hoe oud wordt de dwergspitsmuis in ‘muizenjaren’?

Opgave 12: Toegestane afwijkingen bij producten

Op bijvoorbeeld een pak suiker wordt het gewicht aangeven als: 1 kg ℮.
Deze ℮ geeft aan dat het gewicht van dit pak suiker wel niet precies 1 kg zal zijn, maar wel ligt binnen de grenzen die de Europese Unie heeft vastgesteld.
Regelmatig worden er door ambtenaren in opdracht van de E.U. controles uitgevoerd om na te gaan of het gewicht binnen de juiste grenzen ligt. Voor 1 kg suiker is de toegestane afwijking van het gewicht 1,5%.

a Tussen welke grenzen mag het gewicht van dit pak suiker zitten?

b Zoek minstens vijf verschillende producten waarop dit teken voorkomt en maak een lijst met het toegestane gewicht (of volume) van elk van die producten.

Opgave 13: Wortels benaderen

Voor het benaderen van wortels bestaan verschillende technieken. Deze gaat vrij snel:

- Stap 1: Doe een gok.
- Stap 2: Deel het getal waarvan je de wortel wilt benaderen door je gok.
- Stap 3: Bereken het gemiddelde van het getal dat je bij stap 2 hebt gevonden en je gok.

Je hebt nu een nieuwe gok en daarmee herhaal je de stappen 2 en 3 tot je de gewenste benadering hebt gevonden.

a Probeer deze techniek uit en laat zien dat $\sqrt{12} \approx 3{,}464$ in drie decimalen nauwkeurig.

b Benader op dezelfde manier $\sqrt{40} \approx 6{,}324$ in drie decimalen nauwkeurig.

c Geef een verklaring voor deze methode met behulp de oppervlakte van rechthoeken.

d Deze methode is in feite een algoritme om wortels in een gewenst aantal decimalen te benaderen en kun je daarom programmeren. Zoek uit hoe je dit kunt doen.

4

Algebra I

4.1 Wat is een formule?

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Voorkennis

- tabellen en grafieken maken bij woordformules;
- waarden aflezen uit grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Met de regel van 72 bereken je in hoeveel jaar je geld zich verdubbelt:

Deel het rentepercentage per jaar op 72 en de uitkomst is ongeveer het aantal jaren waarin je geld zich verdubbelt.

Dus bij 4% rente per jaar verdubbelt je geld zich in 18 jaar want $\frac{72}{4} = 18$.

Wil je weten hoeveel rente (koerswinst, rente, dividend) je moet maken om je verjaardagscadeau van € 1000,- te verdubbelen in 8 jaar? Deel 72 door 8 en je vindt: 9%.

Het rentepercentage per jaar staat niet van tevoren vast. Noem het bijvoorbeeld r.

a Welke berekening moet je dan doen om de *verdubbelingstijd* te berekenen?

b Waarom noem je r een 'variabele'?

c Is *verdubbelingstijd* ook een variabele?

d Je kunt ook voor *verdubbelingstijd* een letter nemen, bijvoorbeeld t.
Hoe ziet je rekenformule er dan uit?

e Hoe groot is t als $r = 2{,}5\%$?

f Hoe groot moet r zijn als je wilt dat je kapitaal in 10 jaar verdubbelt?

Uitleg

Gordijnen hang je in plooien. Daarom is de breedte van een gordijn altijd meer dan de breedte van het raam waar het voor komt te hangen. Meestal neem je de totale breedte van het gordijn ongeveer 1,5 keer de raambreedte.

Zoiets heet een **vuistregel**. Een vuistregel is een berekening of een manier van werken die vooral op ervaring is gebaseerd. Als een vuistregel een berekening beschrijft kun je hem in formulevorm geven:

$\textit{gordijnbreedte} = 1{,}5 \times \textit{raambreedte}$

Of korter: $g = 1{,}5 \times r$

Maar dan moet je goed weten wat g en r betekenen: g is de totale breedte van het gordijn in meter en r is de breedte van het raam in meter.
Voor een raam met een breedte van 8 m heb je dan $1{,}5 \times 8 = 12$ m aan gordijnbreedte nodig. Je vult het getal 8 in de formule in. Dat heet ‘substitueren’, je substitueert 8 voor r.
Koop je gordijnen in stroken van 1 m breedte dan heb je 12 stroken nodig. Hoe lang die stroken moeten zijn hangt af van de hoogte van het raam...

Figuur 4.1

Opgave 1

Bekijk de vuistregel in de **Uitleg**.

a Welke formule hoort er bij deze vuistregel? Noem de gordijnbreedte g en de raambreedte r, net als in de tekst.

b Maak hierbij een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

r in m	0	2	4	6	8
g in m					

Tabel 4.1

c Waarom noem je r recht evenredig met g?

Je hebt een kamerraam met een breedte van 6,42 m en een hoogte van 2,35 m. Je wilt gordijnen kopen die bestaan uit stroken met een breedte van 90 cm.

d Hoeveel van die stroken koop je en hoeveel m^2 stof is dat?

Opgave 2

Voor de oppervlakte van een cirkel geldt de formule $A = \pi \times r^2$. Hierin is r de lengte van de straal in m en A de oppervlakte.

a Waarom is dit geen vuistregel?

b Maak hierbij een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

r in m	0	2	4	6	8
A in m					

Tabel 4.2

c Waarom is A niet recht evenredig met r?

Je hebt een ronde tafel met een diameter van 1,50 m. Je wilt een rond tafelkleed dat aan alle kanten 20 cm moet oversteken.

d Uit hoeveel m^2 stof bestaat dit tafelkleed?

Opgave 3

Soms wordt wel beweerd dat iemands ideale gewicht in kg te berekenen is door van de lengte van die persoon in cm 100 af te trekken.

a Waarom is dit een vuistregel?

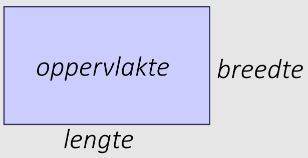
b Hoe groot is het ideale gewicht van iemand die 1,78 m lang is?

c Schrijf een zo kort mogelijke formule op bij deze vuistregel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een berekening waarin variabelen voorkomen en een isgelijkteken.
Een bekend voorbeeld is
oppervlakte (rechthoek) = *lengte* × *breedte*.
De **variabelen** zijn *lengte*, *breedte* en *oppervlakte*.
Als je voor twee ervan een getal kiest, kun je de derde uitrekenen.



Figuur 4.2

Meestal kort je de variabelen af tot letter: b voor *breedte*, l voor *lengte* en A voor *oppervlakte (rechthoek)* (de A komt van 'area', Engels voor oppervlakte).
De formule hierboven wordt dan: $A = l \times b$.

Omdat het keerteken op de letter x lijkt, schrijf je het als ·.

De formule hierboven wordt dan: $A = l \cdot b$.

En als dat niet tot misverstanden leidt, laat je het keerteken meestal weg.

Als bijvoorbeeld $l = 10$, dan wordt de formule $A = 10 \cdot b$ of $A = 10b$.
In dit geval is A **afhankelijk** van b.
De formule geeft dan een **verband tussen twee variabelen** weer.
Je kunt er een **tabel** bij maken door voor b getallen in te vullen en daarmee de waarden van A uit te rekenen. Dit heet **substitueren**, je substitueert voor b telkens een ander getal.
En bij die tabel kun je weer een grafiek maken met A op de verticale as.

Voorbeeld 1

Een behanger weet uit ervaring dat hij in een uur ongeveer 12 m^2 kan behangen.
Zijn uurprijs bedraagt € 45,00.

Wanneer een klant hem vraagt om een prijsopgave te doen, dan schat hij eerst het aantal m^2 dat hij zou moeten behangen en dan berekent hij zo de arbeidskosten:

$arbeidskosten = aantal\ m^2\ /12 \cdot 45$

Dit is een vuistregel. De behanger zal dus altijd zeggen dat het uiteindelijke bedrag daar in de buurt zal liggen. Want het aantal m^2 is nog niet precies bekend, dus het aantal uren dat hij werkt ook niet. En bovendien komen er ook nog de kosten voor de verf bij.

Schrijf deze formule zo kort mogelijk en schat zijn arbeidskosten als hij 650 m^2 moet behangen.

Antwoord

De formule kun je zo schrijven

$K = a/12 \cdot 45 = a \cdot \frac{45}{12} = a \cdot 3{,}75 = 3{,}75a$.

Dus het kortst als $K = 3{,}75a$.

De arbeidskosten bij 650 m^2 bereken je door dit getal voor a te substitueren.
Je krijgt dan $K = 3{,}75 \cdot 650 = 2437{,}50$ euro.

Opgave 4

Bekijk de formule voor de arbeidskosten van de behanger in **Voorbeeld 1**. Behalve arbeidskosten zijn er ook materiaalkosten, een bedrag per m^2 afhankelijk van de kwaliteit van het behang. En de behanger rekent voorrijkosten van € 35,00 per klus.

a Deze behanger heeft een klus waarbij hij 240 m^2 muur moet behangen met behang van € 15,50 per m^2. Hoeveel moet hij hiervoor rekenen?

b Welke formule kun je opschrijven voor de totale kosten TK in euro voor het behangen van a m^2 met behang dat € 15,50 per m^2 kost? Maak je formule zo eenvoudig mogelijk.

c Welke formule kun je opschrijven voor de totale kosten TK in euro voor het behangen van a m^2 met behang dat p euro per m^2 kost? Maak je formule zo eenvoudig mogelijk.

Opgave 5

Een MBO-afdeling heeft een kopieerapparaat voor de leerlingen. De huurprijs is € 320,00 per maand en de kosten voor een zwart/wit kopie bedragen € 0,04 en voor een kleurenkopie zijn ze € 0,12 per stuk.

a Noem de totale maandelijkse kosten voor dit apparaat TK, het aantal zwart/wit kopieën z en het aantal kleurenkopieën k. Schrijf een bijpassende formule op.

b Hoeveel bedragen de totale kosten per maand als er 1200 zwart/wit en 300 kleurenkopieën zijn gemaakt?

c Er worden ongeveer 4 keer zoveel zwart/wit kopieën gemaakt als kleurenkopieën. Hoeveel is in dat geval de gemiddelde prijs van een kopie?

De school gaat uit van gemiddelde kosten van € 0,06 per kopie. Er wordt geen verschil gemaakt tussen zwart/wit en kleur.

d Met welke formule kun je dan de maandelijkse kosten per kopie K beschrijven afhankelijk van het aantal kopieën a?

e Er worden in februari 1325 kopieën gemaakt met dit apparaat. Hoeveel bedragen dan de maandelijkse kosten per kopie?

Voorbeeld 2

Om de remweg van een personenauto te berekenen wordt soms van de volgende vuistregel gebruik gemaakt:

> Als de snelheid van de auto v km/uur is, dan vind je de remweg R in meters door
> - de snelheid door 10 te delen;
> - wat daar uitkomt met zichzelf te vermenigvuldigen;
> - en tenslotte $\frac{3}{4}$ deel te nemen van wat je hebt gevonden.

Je berekent dus eerst $\frac{v}{10}$ en daarna $\frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10}$ en tenslotte wordt:

$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^2}{100}$.

Dit is dezelfde vuistregel in formulevorm.

Je noemt dit een vuistregel omdat het maar een benadering geeft van de werkelijke remweg. Die hangt namelijk ook van de omstandigheden af: is het wegdek nat of droog, hoe snel reageert de bestuurder, etc. Bovendien kloppen de eenheden links en rechts van het isgelijkteken niet met elkaar.

Opgave 6

Bekijk de vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto afhankelijk van zijn snelheid.

a Over welke twee variabelen gaat het hier en welke eenheden horen er bij?

b Een automobilist rijdt 120 km/uur als hij plotseling moet remmen. Hoe lang is zijn remweg?

c De stopafstand is de afstand die de auto nog aflegt vanaf het moment dat de automobilist in de gaten krijgt dat hij moet remmen tot het moment dat de auto stil staat. Is de stopafstand groter of kleiner dan de remweg? En waarom?

Opgave 7

Bekijk de vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto afhankelijk van zijn snelheid.

a Maak een tabel bij de gegeven formule.
Welke variabele is de afhankelijk variabele?

b Teken een grafiek van R afhankelijk van v.
Welke variabele komt op de verticale as?

c Bepaal met behulp van de grafiek bij welke snelheid de remweg meer dan 50 m wordt.

Oefenen

Opgave 8

Je ziet hier hoe de oppervlakte van een rechthoek kan worden berekend met de formule $A = l \cdot b$.

Hierin is:

- A de oppervlakte in m^2
- l de lengte in m
- b de breedte in m

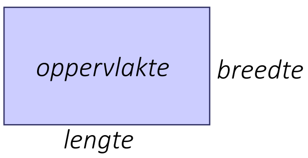
Neem in deze opgave aan dat $b = 6$ m.

a Welke formule kun je nu opschrijven voor A afhankelijk van l?

b Hoe groot is A als $l = 15$ m?

c Maak een tabel en een grafiek bij deze formule.
Welke variabele moet op de verticale as en waarom?

d Bij welke lengte is $A = 25\ m^2$? Antwoord in twee decimalen.



Figuur 4.3

Opgave 9

De oppervlakte van een rechthoek kan worden berekend met de formule $A = l \cdot b$.

Hierin is:

- A de oppervlakte in m^2
- l de lengte in m
- b de breedte in m

Neem in deze opgave aan dat $A = 60\ m^2$.

a Welke formule kun je nu opschrijven voor A afhankelijk van l?

b Hoe groot is b als $l = 15$ m?

c Waarom is nu niet duidelijk welke variabele op de verticale as moet?

d Maak een tabel en een grafiek bij deze formule. Kies je getallen zo, dat je gehele uitkomsten krijgt.

Opgave 10

Je ziet hier een dunne cilindervormige kaars met een lengte van 30 cm.
Als de kaars wordt aangestoken brandt hij gelijkmatig op.
Elk uur wordt hij ongeveer 2,4 cm korter.

a Welke formule kun je nu opschrijven voor de kaarslengte L in cm afhankelijk van de tijd t in uren na het aansteken?

b Hoe lang is de kaars na 3 uur brandtijd?

c Maak een tabel en een grafiek bij deze formule, laat t lopen vanaf $t = 0$ (het moment dat de kaars wordt aangestoken) tot $t = 12$.

d Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Figuur 4.4

Opgave 11

Een docent berekent het cijfer c voor een toets vanuit de punten p die een leerling heeft gescoord. De docent gebruikt deze formule: $c = \frac{p}{60} \cdot 9 + 1$.

a Wat is je cijfer als je veertig punten hebt?

b Waarom kun je voor deze toets maximaal zestig punten halen?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een 5,5 of hoger krijgt. Reken dat na met de formule.

Opgave 12

Je betaalt € 9,95 voor het online maken van een fotoboek. Voor elke foto die je toevoegt betaal je € 0,15 bij.

a Hoeveel betaal je voor een fotoboek met 30 foto's?

b Noem het aantal foto's x en stel een formule op voor de kosten K van het fotoboek in euro.

c Hoeveel betaal je per foto voor een fotoboek van 35 foto's?

d Stel een formule op voor de kosten k per foto in euro, afhankelijk van x.

e Zal k ooit minder worden dan € 0,20? Licht je antwoord toe.

Opgave 13

Alle kubussen hebben dezelfde vorm.
Noem de lengte van een ribbe van een kubus r.

a Welke formule geldt dan voor de inhoud V?

b Welke formule geldt voor de oppervlakte A van de kubus?

c Teken de grafieken van V en van A afhankelijk van r in één figuur.

d Vanaf welke waarde van r is de inhoud altijd een groter getal dan de oppervlakte?

Toepassen

Er bestaan ook in de gezondheidszorg de nodige formules.

Je *BMR* (*Basal Metabolic Rate* of Basale Stofwisselingssnelheid) is het aantal calorieën dat je lichaam verbrandt om de normale lichaamsfuncties uit te kunnen voeren. Bij het rekenen met *BMR* wordt lichaamsactiviteit (zoals lopen, fietsen, enzovoort) niet meeberekend. Je *BMR* verbruikt tweederde van je dagelijkse caloriebehoefte. De *BMR* verschilt van persoon tot persoon, afhankelijk van gewicht, lengte en leeftijd. Maar ook erfelijke factoren spelen een rol.

Figuur 4.5

Om de *BMR* te berekenen, zijn er voor volwassenen de formules van Harris en Benedict (uit 1919):

- *BMR* mannen = 66 + 13,7× *gewicht* +5× *lengte* −6,8× *leeftijd*
- *BMR* vrouwen = 655+9,6× *gewicht* +1,8× *lengte* −4,7× *leeftijd*

Hierin is *gewicht* in kg, *lengte* in centimeters en *leeftijd* in jaren.

Opgave 14

Bekijk hierboven de formules van Harris en Benedict.

a Bereken de *BMR* van een volwassen man van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Hoe groot is de totale dagelijkse caloriebehoefte van deze man?

b Bereken de *BMR* van een volwassen vrouw van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Wat is de totale dagelijkse caloriebehoefte van deze vrouw?

c Kun je het verschil tussen beide antwoorden verklaren?

Iemand's lengte is een vaststaand gegeven, dat verandert in de loop van je leven bijna niet.
Neem iemand van 30 jaar oud met een lengte van 1,80 m. Het gewicht van deze persoon bepaalt de *BMR*.

d Schrijf de formule voor de mannen en die voor de vrouwen die aan deze voorwaarden voldoen zo kort mogelijk op.

e Teken bij beide formules die je bij d hebt gevonden een grafiek. Hoe zie je in de grafieken dat de mannen een hogere *BMR* hebben dan vrouwen?

Opgave 15

Voor volwassenen is de *BMI* (Body Mass Index, een index voor het gewicht in verhouding tot de lichaamslengte) een getal waaraan je kunt zien of je overgewicht hebt of niet. Dat wordt zo berekend:

$$BMI = \frac{G}{l^2}$$

Hierin is l de lengte in meter en G het gewicht in kg.
Bij een *BMI* tussen de 18,5 en 25 heb je een gezond gewicht.

a Kun je bij deze formule een grafiek tekenen?

b Hoeveel bedraagt de BMI van een volwassene met een lengte van 180 cm en een gewicht van 80 kg?

c Meestal is de lengte van een persoon een vast gegeven, maar zijn of haar gewicht niet. Neem bijvoorbeeld een volwassen persoon met een lengte van 180 cm. Welke formule geldt voor de BMI van deze persoon?

d Teken een bijpassende grafiek.
Maak eerst een tabel met voor het gewicht de waarden 50, 60, 70, 80, 90, 100.

e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke gewichten horen daarbij?

f Als iemand een gewicht van 90 kg heeft, dan denk je al snel aan iemand met overgewicht.
Maar dat hoeft niet. Welke formule voor de BMI geldt voor mensen van 90 kg?

g Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor lengte de waarden 1,5; 1,6; 1,7...2,2.

h Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht.
Welke lengtes horen daarbij?

Testen

Opgave 16

In Duitsland kent het schoolsysteem de cijfers 1 tot en met 6 bij beoordelingen. In tegenstelling tot in Nederland is 1 daar het hoogste cijfer. Van 4 tot en met 1 heb je een voldoende. Als je een 5 of een 6 scoort, heb je een onvoldoende. Een docent in Duitsland berekent het cijfer c van een toets voor een leerling die p punten heeft gescoord met de volgende formule:

$$c = 6 - \frac{p}{70} \cdot 5$$

a Welk cijfer krijgt een Duitse leerling die 42 punten heeft gescoord?

b Waarom kun je voor deze toets maximaal 70 punten scoren?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een voldoende krijgt. Reken het na met de formule.

Opgave 17

Van een serie rechthoeken is de lengte twee keer zo groot als de breedte.

a Welke formule kun je opstellen voor de oppervlakte A van deze rechthoeken afhankelijk van de breedte b?

b Teken een grafiek van A afhankelijk van b.
Neem voor b alle waarden vanaf 0 tot en met 10 cm.

c Bepaal in mm nauwkeurig de waarde van b waarbij een oppervlakte hoort van 100 cm^2.

4.2 Variabelen optellen/aftrekken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken.

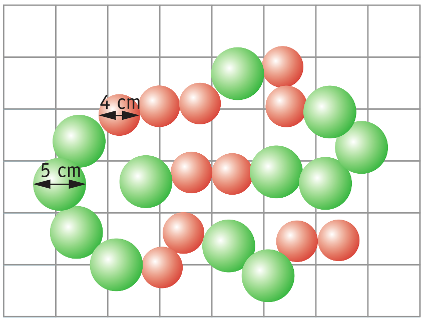
Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Verkennen

Opgave V1

Een kralenketting bestaat uit groene en rode kralen. De rode kralen hebben een diameter van 4 cm en de groene kralen hebben een diameter van 5 cm.



Figuur 4.1

a Iemand bepaalt zo de lengte van de kralenketting: $5+4+4+5+\ldots$

Is dit een handige methode? Bereken zo de lengte van de kralenketting.

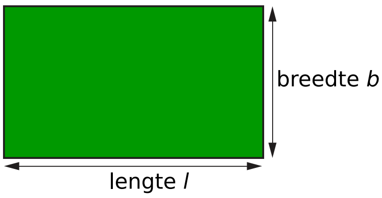
b Iemand anders berekent de lengte van de kralenketting door het aantal rode kralen met 4 te vermenigvuldigen en het aantal groene kralen met 5 te vermenigvuldigen en beide antwoorden op te tellen.

Hoe kun je deze berekening als formule kort opschrijven?

c Je krijgt een doos met kralen met daarin 42 groene kralen en 35 rode kralen.

Hoe lang is de langste ketting die je hiermee kunt maken?

Uitleg



Figuur 4.2

De formule voor de omtrek van een rechthoek kun je schrijven als:
$P = l+l+b+b$, waarbij de variabelen l de lengte, b de breedte en P de omtrek van de rechthoek voorstellen. Deze formule kun je korter schrijven, dat noem je herleiden. Hier kun je de uitdrukking $l+l+b+b$ herleiden tot $2\cdot l+2\cdot b$, nog korter $2l+2b$.

$2l$ en $2b$ noem je de termen van de uitdrukking.
De formule wordt zo $P = 2l+2b$.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen:

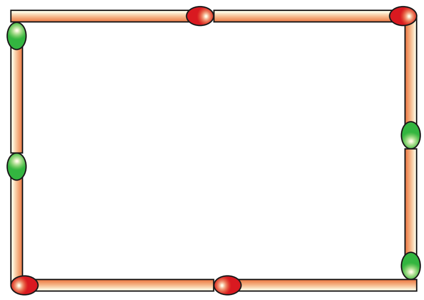
- $a+a = 2\cdot a = 2a$ en $2a+3a = 2\cdot a+3\cdot a = a+a+a+a+a = 5a$, maar $2a+2b$ kan niet korter; die twee termen zijn niet van dezelfde soort.
- $5a-2a = a+a+a+a+a-a-a = 3a$
- $a+b = b+a$.
  Bij aftrekken mag dit alleen als je het minteken meeneemt: $4-3 = -3+4$ of met variabelen $a-b = -b+a$.
- $1a$ schrijf je korter als a, net zoals $-1a = -a$.

Opgave 1

Je ziet een rechthoek gelegd van twee soorten lucifers. Noem de lengte van de kortste lucifer k en die van de langste lucifer l.

a Welke formule geldt voor de omtrek P van de rechthoek? Schrijf de formule zo kort mogelijk op.

b Moet je ook nog iets afspreken over de gebruikte eenheden van de verschillende variabelen in de formule?



Figuur 4.3

Opgave 2

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

A. $P = 3a + 2b$ kun je niet herleiden.
B. $P = 2a + 3b - 3b$ kun je herleiden tot $P = 2a$.
C. $P = 4b - 5b + 3a$ kun je herleiden tot $P = 3a + b$.
D. $P = a + 6a$ kun je herleiden tot $P = 7a$.
E. $P = -3q + 7q$ kun je herleiden tot $P = 4q$.
F. $P = -3b - -2b$ kun je herleiden tot $P = -b$.
G. $P = a + a + b + b + a + a - b - b$ kun je herleiden tot $P = 4a$.

Opgave 3

Herleid.

a $4a + 2a$

b $3d + 2t$

c $a + a + 3a$

d $-2a + 3b + 4a + 7b$

e $2b + 3a + b + -2a + b$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een formule zoals $P = 3x + 5y + 2x - x$ bestaat uit vier **termen**, waarvan er drie gelijksoortig zijn.

Je kunt de **uitdrukking** $3x + 5y + 2x - x$ **herleiden** door **gelijksoortige termen** samen te nemen: $3x + 2x - 1x + 5y = 4x + 5y$.

De formule is dan herleid tot: $P = 4x + 5y$.

Andere voorbeelden van herleiden zijn:

- $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$
- $2a + 3a = 2 \cdot a + 3 \cdot a = a + a + a + a + a = 5a$.
- $2a + 3b$ kun je niet herleiden want er zijn geen gelijksoortige termen.
- $a + b = b + a$ en $a - b = -b + a$.
- $1a = a$ en $-1a = -a$.
- $0a = 0$.

Voorbeeld 1

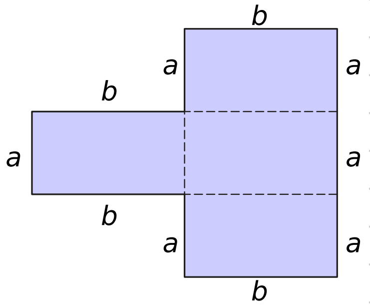
De omtrek van de figuur wordt voorgesteld door de letter P. De verschillende zijden van de figuur hebben de lengte a of de lengte b, behalve de zijde die drie keer de lengte van a is.

Er geldt: $P = a + b + a + b + 3a + b + a + b$.

Met behulp van de eigenschappen van optellen kun je dit schrijven als: $P = a + a + a + 3a + b + b + b + b$.

En dus herleiden tot: $P = 6a + 4b$.

$P = 6a + 4b$ kun je niet korter schrijven.



Figuur 4.4

Opgave 4

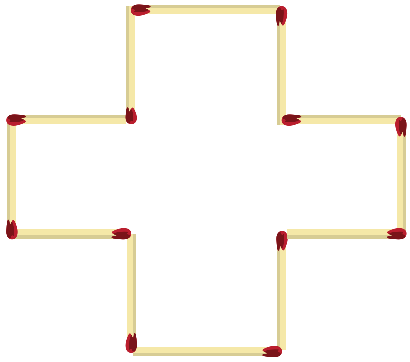
Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l. Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.

a Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.

b Bereken P als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm met behulp van je formule.

c Geef een zo kort mogelijke formule voor de breedte B van de figuur.

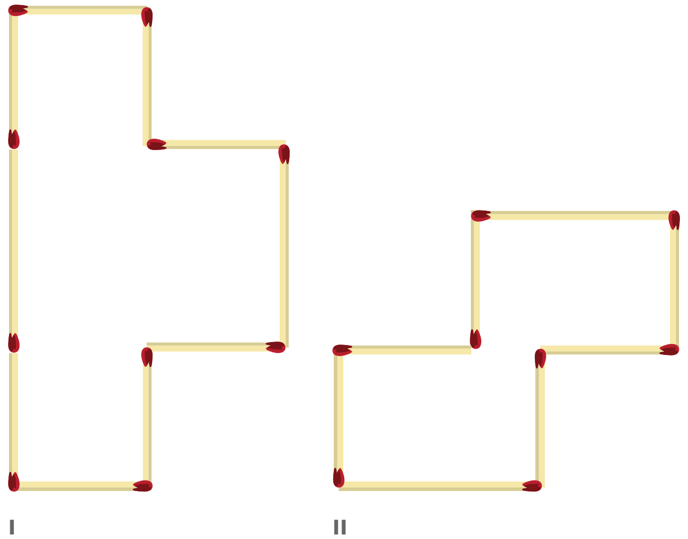
d Stel, de omtrek van de figuur is 26 cm. De lengte van de korte lucifer is gelijk aan 2 cm. Wat is dan de lengte van de lange lucifer?



Figuur 4.5

Opgave 5

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek. Noem de lengte van de korte lucifer k en de lengte van de lange lucifer l.



Figuur 4.6

Voorbeeld 2

Iemand verkoopt telefoonhoesjes en oordopjes op de markt. Een telefoonhoesje verkoopt ze voor € 7,50 en een oordopje voor € 5,00 per stuk.

Ze heeft hierbij de volgende formule bedacht:

$R = 7{,}50h + 5{,}00a$

Waarbij R staat voor de opbrengst in euro's, h voor het aantal verkochte telefoonhoesjes en a voor het aantal verkochte oordopjes.

Als ze 15 telefoonhoesjes en 25 oordopjes verkoopt, heeft ze een opbrengst van € 237,50.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Kun je de formule die de verkoopster heeft bedacht, herleiden?

b Laat met een berekening zien hoe je aan de opbrengst van € 237,50 komt.

c Hoe groot is de opbrengst als ze twaalf telefoonhoesjes en achttien oordopjes verkoopt?

Een andere marktkoopman verkoopt ook telefoonhoesjes en oordopjes. Hij verkoopt een telefoonhoesje voor € 10,00 en een oordop voor € 3,50.

d Welke formule voor de opbrengst hoort hierbij?

e Als beide marktkooplui allebei tien telefoonhoesjes en twintig oordopjes verkopen, wie heeft dan de grootste opbrengst?

Opgave 7

Bij een telefoonabonnement hoort de formule $K = 0{,}06t + 15$, waarbij K de kosten in euro's zijn per maand en t het aantal belminuten per maand.

Door een actie van de telefoonmaatschappij krijg je per belminuut € 0,02 korting. Daarnaast krijg je nog eens € 5,00 korting per maand.

a Stel een formule op voor de nieuwe belkosten.

b Stel dat je 120 minuten gebeld hebt in een maand. Hoeveel euro spaar je uit met het nieuwe tarief?

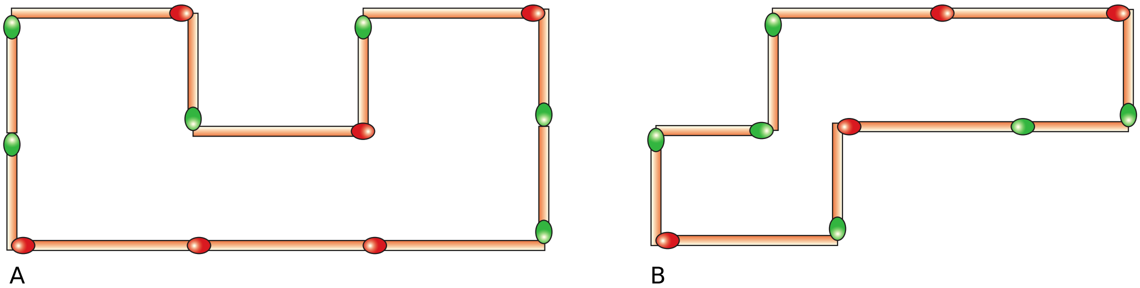
c Stel dat je niet € 5,00 korting krijgt, maar € 7,00 en dat je niet € 0,02 per belminuut korting krijgt, maar € 0,01. Hoe ziet de formule er dan uit?

d Stel dat je 220 minuten in een maand belt en dat je mag kiezen tussen de eerste korting en de tweede korting. Welke korting neem je dan?

Oefenen

Opgave 8

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek. De lengte van de korte lucifer is p en die van de lange is r.



Figuur 4.7

Opgave 9

Herleid.

a $2b + l + b + 4l + 3b$

b $3k + 2k + l + 4l + k$

c $150a + 120b + 22a + 3a + 55b$

d $m + 8n + 4n + 9p$

Opgave 10

Herleid.

a $4p + 6q - 3p + 12q$

b $-3p - 4p + 12q + 11p$

c $15a + 3b - 12a + b - a$

d $x \cdot 5 + 4y - 4x$

e $p + 4q + 2p - 2q$

f $3a + 4b - 6a + 8c$

Opgave 11

Iemand werkt bij een boer als aardbeienplukster. Ze krijgt € 3,00 per uur en voor elke gevulde mand krijgt ze € 1,50. Hierbij kun je de volgende formule opstellen: $L = 3{,}00 \cdot u + 1{,}50 \cdot a$.

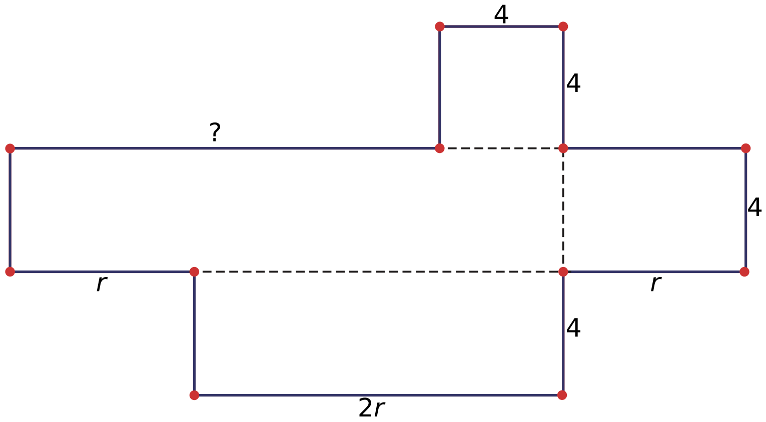
a Wat stellen de variabelen in de formule voor?

b Waarom mag je de formule ook schrijven als $L = 1{,}50a + 3{,}00u$?

c Deze plukster werkt op een dag zeven uur en ze krijgt vijftien manden vol. Wat is haar loon op die dag?

Opgave 12

Bekijk de figuur.



Figuur 4.8

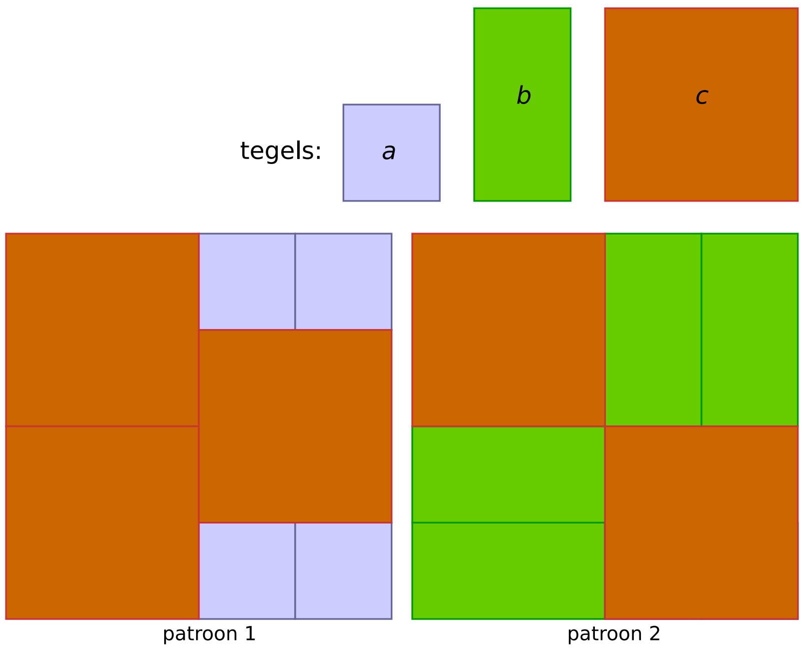
a Hoe groot is de lengte van het lijnstuk bij het vraagteken?

b Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.

c Neem $r = 6$ cm. Hoe groot is dan de omtrek van de figuur?

Opgave 13

Een tuindersbedrijf maakt tegelpatronen voor terrassen. Daarvoor gebruiken ze drie typen tegels. De oppervlakte van tegel 1 is a, van tegel 2 b en van tegel 3 c. In de figuren zie je twee tegelpatronen die het bedrijf maakt.



Figuur 4.9

a Maak een formule voor oppervlakte O van tegelpatroon 1 en tegelpatroon 2.

Om het werk te versnellen, maakt het bedrijf grotere tegelpatronen door samenstellingen te maken van patroon 1 en patroon 2. Een samenstelling ziet er als volgt uit:

patroon 1	patroon 2	patroon 1
patroon 2	patroon 1	patroon 2
patroon 1	patroon 2	patroon 1

Tabel 4.1

b Maak een formule voor de oppervlakte van dit samengestelde tegelpatroon.

Toepassen

Het herleiden van uitdrukkingen pas je bijvoorbeeld toe als je formules moet optellen of aftrekken.

Een voor de hand liggend voorbeeld is het berekenen van winst door inkomsten en uitgaven van elkaar af te halen.

Een voorbeeld daarvan is de winkelier die een kopieermachine huurt om zijn klanten in staat te stellen kopieën te maken. Hij vraagt € 0,15 per kopie.
Maar het huren en het onderhoud van het apparaat kost met € 125,00 per maand en de kosten voor elke kopie bedragen € 0,06.
Je kunt bij deze situatie een formule opstellen voor de kosten K per maand afhankelijk van het aantal kopieën q dat er wordt gemaakt. Ook kun je een formule opstellen voor de inkomsten R per maand afhankelijk van q.
De winst W bereken je dan uit $W = R - K$.

Opgave 14

Bekijk hierboven de situatie rond de kopieermachine in een winkel.

a Stel een formule op voor de inkomsten per maand van de winkelier.

b Stel ook een formule op voor de totale kosten per maand.

c Stel nu een formule op voor de maandelijkse winst door inkomsten en kosten van elkaar af te trekken.
Herleid je formule tot een zo eenvoudig mogelijke vorm.

d Maak een figuur met daarin alle drie de grafieken van R, K en W.

e Vanaf welk aantal kopieën per maand maakt deze winkelier winst op zijn kopieermachine?

Opgave 15

Volgens het CBS waren er in Nederland in 2017 ongeveer 4,32 miljoen koopwoningen en ongeveer 3,27 miljoen huurwoningen.

In de periode 2012 - 2017 zijn er 28000 koopwoningen per jaar bijgekomen tegenover 30000 huurwoningen per jaar.

Neem aan dat die jaarlijkse groei zo door gaat en dat n het aantal jaren na 2017 voorstelt.

a Welke formule kun je opstellen voor het aantal koopwoningen K (in duizendtallen) afhankelijk van n?

b Welke formule kun je opstellen voor het aantal huurwoningen H (in duizendtallen) afhankelijk van n?

c Stel een formule op voor het totaal aantal woningen W (in duizendtallen) afhankelijk van n.

d Je kunt ook een formule opstellen voor het verschil V (in duizendtallen) van het aantal koopwoningen en het aantal huurwoningen. Stel zo'n formule op.

e Hoe zie je aan deze laatste formule dat het aantal huurwoningen op deze manier het aantal koopwoningen inhaalt?

Testen

Opgave 16

Herleid:

a $2a + 3a$

b $-2b + 4b - b$

c $17q - 20 + 15q + 21 + 2q$

d $3k - 6 - 4k + 5$

e $2{,}5s + 5s - 7{,}5s$

f $3x - 6y + 8x + 2y - 7z$

Opgave 17

Je brengt folders en kranten rond. Voor de folders krijg je een vast bedrag van € 6,00 plus voor elke rondgebrachte folder 5 cent. Voor elke rondgebrachte krant krijg je 10 cent.

Hierbij kun je de volgende formule voor het weekloon opstellen: $W = 6 + 0{,}05a + 0{,}10b$.

a Waar staan de letters W, a en b in de formule voor?

b Waarom kun je deze formule ook schrijven als $W = 0{,}05a + 0{,}10b + 6$?

c Hoeveel bedraagt het weekloon als je per week 250 folders en 240 kranten rondbrengt?

4.3 Variabelen vermenigvuldigen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door factoren te vermenigvuldigen.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken.

Verkennen

Opgave V1

In de afbeelding zie je een balk die bestaat uit zes kubussen. Iedere kubus heeft zijden van r cm.

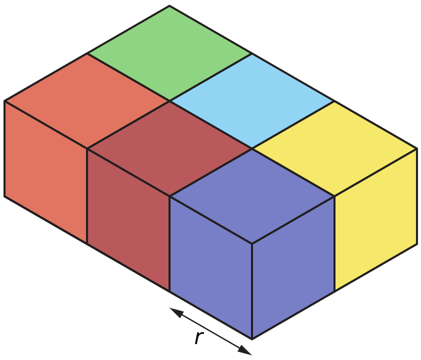
a Maak een formule waarbij je de inhoud van één kubus kunt berekenen. Noem de inhoud I en de zijden r.

b Maak nu een formule waarbij je de inhoud van de gehele balk berekent. Noem de inhoud weer I en gebruik r, de lengte van de zijden van een kubus.

c Ook de oppervlakte van de balk kun je uitdrukken in r. Hoe groot is de oppervlakte van een zijvlak van een kubus?

d Hoe groot is de oppervlakte van de bovenkant van de balk? En de voorkant? En de zijkant?

e Maak een berekening van de oppervlakte van de gehele balk, uitgedrukt in r. Vergeet niet de zijkanten mee te tellen die je niet ziet. Geef de oppervlakte van de balk aan met O.



Figuur 4.1

Uitleg

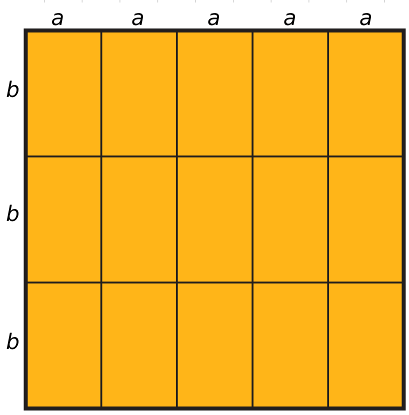
In de figuur zie je drie rijen met rechthoeken met breedte a en lengte (of hoogte) b. Elke rechthoek heeft dus een oppervlakte van $a \cdot b = ab$.

Je kunt dit ook schrijven als $b \cdot a$, dus $a \cdot b = b \cdot a$.
Je vermenigvuldigt beide variabelen; de volgorde maakt daarbij niet uit.

Voor de oppervlakte A van de gehele figuur geldt:

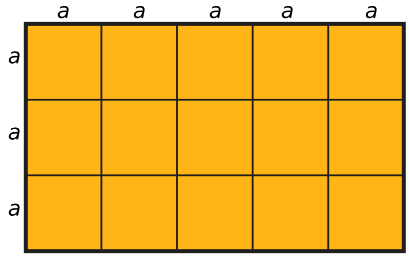
- gewoon lengte maal breedte: $A = 5a \cdot 3b$;
- losse rechthoeken samennemen: $A = 15 \cdot ab$.

Dus $5a \cdot 3b = 5 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 5 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 15 \cdot ab = 15ab$.



Figuur 4.2

Als je vierkanten met een oppervlakte van $a \cdot a = a^2$ stapelt, zoals in de rechthoek in de tweede figuur, dan zie je $5a \cdot 3a = 5 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 15a^2$.



Figuur 4.3

Je kunt van ingewikkelder figuren de oppervlakte bepalen door de oppervlakte van (halve) rechthoeken op te tellen.
Heb je bijvoorbeeld een figuur die bestaat uit twee vierkanten met een oppervlakte van a^2 en drie rechthoeken met een oppervlakte van ab, dan wordt de totale oppervlakte: $a^2 + a^2 + ab + ab + ab = 2a^2 + 3ab$.
Ook nu kun je gelijksoortige termen optellen.

Opgave 1

Je hebt een rechthoek met een lengte van $6p$ en een breedte van $4q$.

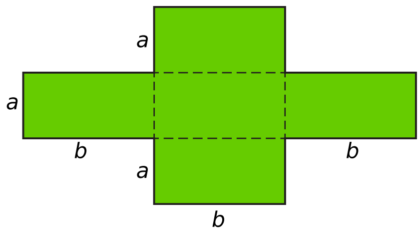
a Op welke twee manieren kun je de oppervlakte A hiervan beschrijven?

Je hebt een rechthoek met een lengte van $6p$ en een breedte van $4p$.

b Op welke twee manieren kun je de oppervlakte A hiervan beschrijven?

Opgave 2

Stel een zo kort mogelijke formule op voor de omtrek P en de oppervlakte A van de figuur.



Figuur 4.4

Opgave 3

Herleid.

a $3ab + 4ab$

b $2xy - 4yx + 7xy$

c $-3ab + 4a^2 - 2ab$

d $2x^2 + 5xy - x^2$

Opgave 4

Herleid.

a $P = 5p + 3p + 2q + p + 6q$

b $A = p^2 + 5pq + p^2 + qp$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt **variabelen vermenigvuldigen**:

- $a \cdot b = ab$
- Vaak gebruik je de wisseleigenschap: $a \cdot b = b \cdot a$, dus $ab = ba$.
- $2a \cdot 3b = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$
- $2a \cdot 3a = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$
- $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

In bijvoorbeeld $2a \cdot 3b$ heten $2a$ en $3b$ de **factoren** van de vermenigvuldiging.

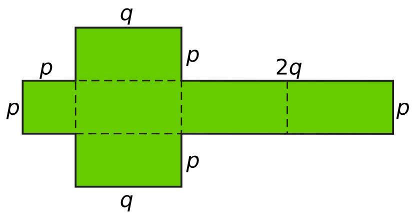
Weer kun je de gelijksoortige termen optellen of aftrekken:

- $3ab + b^2 + 4ab + b^2 = 3ab + 4ab + b^2 + b^2 = 7ab + 2b^2$
- $-4ab + 3ac - 5ac + 3ab = -4ab + 3ab + 3ac - 5ac = -ab - 2ac$
- $(2a)^3 - 2a^2 \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3 - 2a^3 = 6a^3$

Voorbeeld 1

Deze figuur bestaat uit vijf rechthoeken en een vierkant.

Geef een formule voor de oppervlakte A van de figuur.



Figuur 4.5

Antwoord

Voor de oppervlakte A geldt:
$A = p \cdot p + 3 \cdot p \cdot q + p \cdot 2q = p^2 + 3pq + 2pq = p^2 + 5pq$

Opgave 5

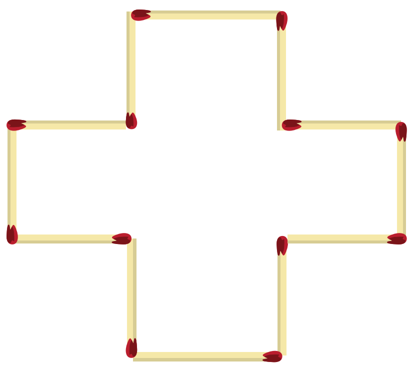
Bekijk de formule voor de figuur uit het voorbeeld.

a Leg uit hoe je aan de formule voor de oppervlakte kunt komen.

b Neem $p = 5$ en $q = 3$ en bereken de oppervlakte A. Controleer je antwoord met behulp van de figuur.

Opgave 6

Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l. Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.


Figuur 4.6

a Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.

b Bereken A als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm met behulp van je formule.

Voorbeeld 2

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen met variabelen erin.

- $4ab + 2ba = 4ab + 2ab = 6ab$
- $-2t^2 + 3t + t^2 = -2t^2 + t^2 + 3t = -t^2 + 3t$
- $2y \cdot 7y = 2 \cdot 7 \cdot y \cdot y = 14y^2$
- $5z \cdot z^3 = 5 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z = 5z^4$
- $-4c^2 \cdot -6c^3 = -4 \cdot c \cdot c \cdot -6 \cdot c \cdot c \cdot c = 24 \cdot c^5$
- $(-x)^2 \cdot x^3 = -x \cdot -x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

Opgave 7

Herleid of schrijf: ‘Kan niet korter.’

a $ab + ba$

b $3a - 2a^2$

c $4a + a^2 - 2a$

d $a + 4ab$

e $a^2 - 2a^2 - ab + 3a$

Opgave 8

Herleid.

a $3x \cdot 4x^2$

b $-2x^2 + 3x \cdot x + 5x$

c $(-z)^3 \cdot -5z^2$

d $b^2 \cdot b^3 \cdot b$

Opgave 9

Herleid.

a $4p + 6q - 3p + 12q$

b $-3p - 4p + 12q + 11p$

c $15a + 3b - 12a + b - a$

d $x \cdot 5 + 4y - 4x$

e $x \cdot x + 4x + 2x \cdot x - 2x$

f $3u \cdot v - 2v \cdot u + u$

Voorbeeld 3

Van een balk is de lengte vier keer de breedte en de hoogte twee keer de breedte. Noem de breedte van de balk x. Dus:
$breedte = x$
$lengte = 4x$
$hoogte = 2x$

Geef formules voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.

Antwoord

$inhoud\ balk = lengte \cdot breedte \cdot hoogte$
Als je invult wat je weet, krijg je:
$I = 4x \cdot x \cdot 2x$

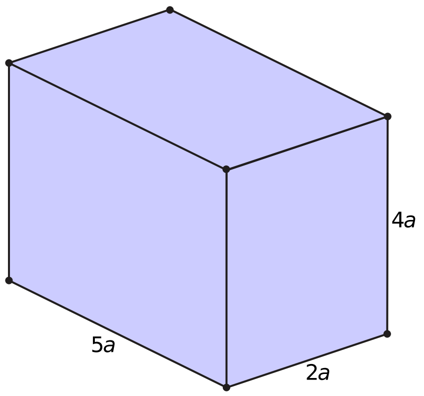
Dit kun je korter opschrijven als:
$I = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 8x^3$

De oppervlakte van de balk vind je door de oppervlakte van alle grensvlakken op te tellen:

$A = 2 \cdot x \cdot 4x + 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 4x = 8x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 38x^2$.

Opgave 10

Stel formules op voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.



Figuur 4.7

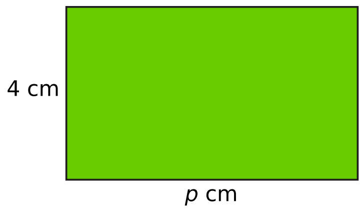
Oefenen

Opgave 11

Van een rechthoek is de lengte p en de breedte 4.

a Geef een formule voor de oppervlakte A van deze rechthoek.

b Hoe groot is A als $p = 3$?



Figuur 4.8

Opgave 12

Herleid.

a $ab + 2ab$

b $10xy - 7xy$

c $nm + nm + 2nm$

d $5df - 10df + 7df$

Opgave 13

Herleid.

a $5a \cdot 4a^2$

b $-3p \cdot 2p$

c $3x^4 \cdot (-x)^2$

d $g^2 \cdot 2g \cdot 3g$

Opgave 14

Herleid. Als je het niet korter kunt schrijven, neem je de uitdrukking over.

a $pt + 3tp - 5p$

b $x^2 + x^2$

c $v^2 + 3v$

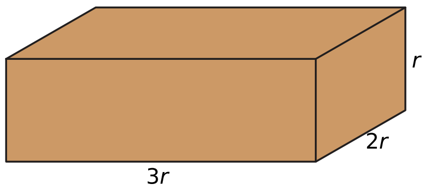
d $4u^2 - 2u^2$

e $8z^4 \cdot (-z)^2$

f $8x - 8 \cdot x \cdot (-2x) - 16x^2$

Opgave 15

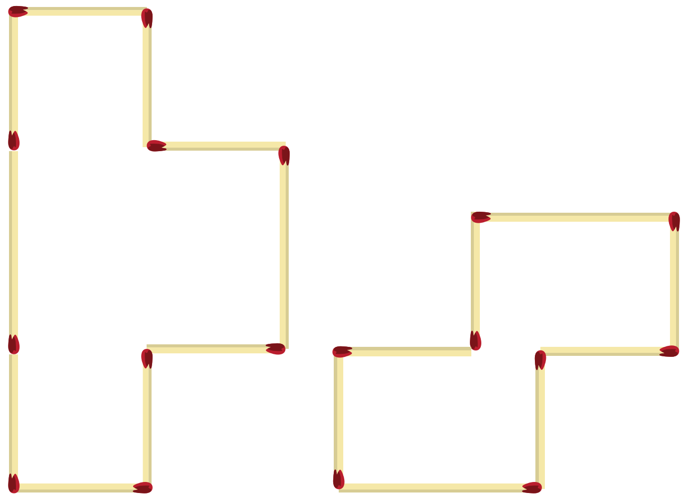
Stel een formule op voor de inhoud I en de oppervlakte A van deze balk.



Figuur 4.9

Opgave 16

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de oppervlakte. Noem de lengte van de korte lucifer k en de lengte van de lange lucifer l.



I II

Figuur 4.10

Toepassen

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem.
Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton.
Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x, beide in cm.
Voor het verband tussen h en x geldt de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

Opgave 17

Bekijk hierboven de beschrijving van een bepaald type verpakkingsdoosje.

a Leid zelf de formule die in de tekst wordt gegeven af.

b De verpakkingsmachine laat een maximale breedte van 8 cm toe. Bepaal de waarde van h bij $x = 8$.

Opgave 18

Bekijk de oppervlakteformule van het doosje hagelslag nog eens.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van het doosje?

b Hoeveel cm^3 hagelslag gaat er in het doosje met de maximale breedte van 8 cm?

Testen

Opgave 19

Herleid.

a $m = 2 \cdot 5t$

b $y = 2x \cdot 3x$

c $s = d \cdot 2d \cdot 3 \cdot 5d$

d $y = -2x^4 \cdot 4x$

e $s = 5x \cdot 3x + 2(-x)^2$

f $c = 5a \cdot 3b + 12ab - b$

Opgave 20

a Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakten van de driehoek, het vierkant en de rechthoek.

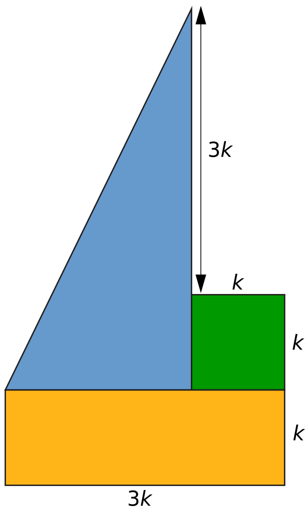
b Hoe groot is de oppervlakte van de gehele figuur als $k = 2$?

c Geef formules voor de oppervlakte van de rechthoek en het vierkant.

d Doe hetzelfde voor de driehoek.

e Geef de formule voor de oppervlakte A van de hele figuur. Schrijf de formule zo kort mogelijk.

f Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakte met behulp van de formule van de gehele figuur. Klopt dit met jouw antwoord bij opgave b?



Figuur 4.11

4.4 Haakjes wegwerken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door haakjes weg te werken.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen.

Verkennen

Opgave V1

Een rol behang is 60 cm breed. De hoogte van de kamer is l cm. Om het behang aan de onderkant te kunnen bijsnijden maak je elke baan 10 cm langer dan de hoogte van de kamer.
Voor de oppervlakte van een baan behang geldt dus: *oppervlakte* $= 60 \cdot (l + 10)$.

a Leg uit waarom deze formule klopt.

b De kamer die je gaat behangen is 220 cm hoog. Hoe groot is de oppervlakte van een baan behang?

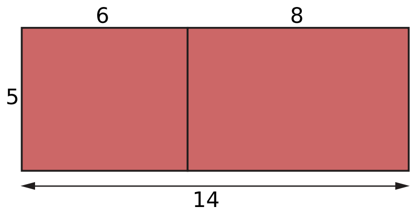
Uitleg 1

Van deze rechthoek kun je de oppervlakte op twee manieren berekenen.

- $5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 30 + 40 = 70$
- $5 \cdot (6 + 8) = 5 \cdot 14 = 70$

Dus: $5 \cdot (6 + 8) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8$.

Het herleiden van een uitdrukking met haakjes naar een uitdrukking zonder haakjes noem je haakjes wegwerken.



Figuur 4.1

Bij uitdrukkingen met haakjes en variabelen gaat dit net zo.

De oppervlakte van deze rechthoek is:

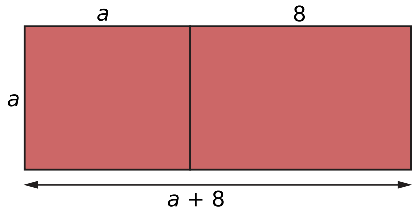
- $5 \cdot a + 5 \cdot 8$
- $5 \cdot (a + 8)$

Blijkbaar is $5 \cdot (a + 8) = 5 \cdot a + 5 \cdot 8$.

Ofwel: $5(a + 8) = 5a + 40$.

In het algemeen geldt:

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$



Figuur 4.2

Opgave 1

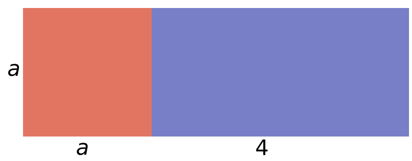
Je ziet een rechthoek die verdeeld is in twee kleinere rechthoeken.

a Hoe groot is de oppervlakte van de hele rechthoek?

b Hoe groot is de oppervlakte van de rode rechthoek?

c Hoe groot is de oppervlakte van de blauwe rechthoek?

d Herleid door het wegwerken van de haakjes: $a(a+4)$.



Figuur 4.3

Opgave 2

Je ziet een rechthoek die verdeeld is in twee kleinere rechthoeken.

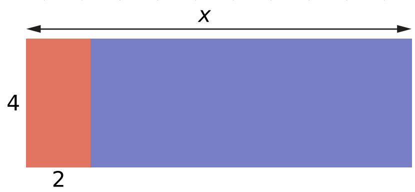
a Hoe groot is de oppervlakte van de hele rechthoek?

b Hoe groot is de oppervlakte van de rode rechthoek?

c Geef de lengte van de blauwe rechthoek.

d Hoe groot is de oppervlakte van de blauwe rechthoek?

e Herleid door het wegwerken van de haakjes: $4(x-2)$.



Figuur 4.4

Opgave 3

Herleid.

a $6(a+4)$

b $14(a-5)$

c $-7(a-b)$

d $a(4-d)$

e $(a+6) \cdot 3$

f $a(a-9)$

Uitleg 2

De totale oppervlakte van deze rechthoek kun je op twee manieren berekenen:

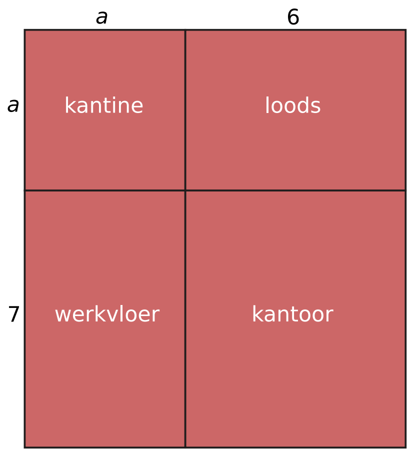
- *oppervlakte totaal* $= a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7$
- *oppervlakte totaal* $= (a+6) \cdot (a+7)$

Dus: $(a+6) \cdot (a+7) = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7$.

Korter: $(a+6)(a+7) = a^2 + 6a + 7a + 42 = a^2 + 13a + 42$.

Ook een uitdrukking waarin twee stel haakjes voorkomen, kun je herleiden door de haakjes weg te werken.

Vergeet niet om gelijksoortige termen samen te nemen.



Figuur 4.5

In het algemeen geldt:

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Of korter:

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a+b)(c+d)$$

Figuur 4.6

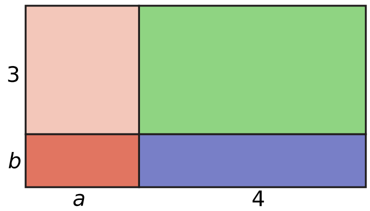
Opgave 4

Je ziet een rechthoek die verdeeld is in vier kleinere rechthoeken.

a Geef de oppervlakte van elke kleinere rechthoek.

b Hoe groot is de lengte en de breedte van de hele rechthoek?

c Herleid door het wegwerken van de haakjes: $(a+4)(b+3)$.



Figuur 4.7

Opgave 5

Herleid door het wegwerken van de haakjes.

a $(a+3)(a+4)$

b $(a+3)(b+5)$

c $(x+2)(x-1) = (x+2)(x+\text{-}1)$

d $(z-2)(z-9) = (z+\text{-}2)(z+\text{-}9)$

Opgave 6

Herleid door het wegwerken van de haakjes.

a $(x+5)(3x+4)$

b $(6x-3)(x-7)$

c $(8+3x)(5-2y)$

d $(3-3x)(6-7x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms komen in uitdrukkingen haakjes voor.

Je kunt die **haakjes wegwerken** door te gebruiken:

- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  of korter: $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  of korter: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

Je kunt dit ook toepassen op aftrekkingen:

- $a \cdot (b-c) = a \cdot (b+\text{-}c) = a \cdot b + a \cdot \text{-}c = a \cdot b - a \cdot c$
  of korter: $a(b-c) = ab - ac$
- $(a+b) \cdot (c-d) = (a+b) \cdot (c+\text{-}d) = a \cdot c + a \cdot \text{-}d + b \cdot c + b \cdot \text{-}d$
  of korter: $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$.

$$(a+b)(c+d)$$

Figuur 4.8

Voorbeeld 1

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen door het wegwerken van haakjes:

- $4(x+3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$
- $-5(2a+7) = -5 \cdot 2a + -5 \cdot 7 = -10a - 35$
- $2z(8z-2) = 2z \cdot 8z - 2z \cdot 2 = 16z^2 - 4z$
- $a(3-b) = 3a - ab$
- $-2 + 6(b-3) = -2 + 6b - 18 = 6b - 20$
- $5 - (4-2d) = 5 - 1 \cdot (4-2d) = 5 - 4 + 2d = 2d + 1$

Je ziet dat je eerst de haakjes wegwerkt en dan pas de gelijksoortige termen samenneemt.

Opgave 7

Herleid.

a $2(x+3)$

b $a(a+42)$

c $-p(q+4)$

d $-6(4-a)$

e $-6+7(a-2)$

f $2b-3(b-4)$

Opgave 8

Herleid.

a $y = 3x + x$

b $p = 5q + 7q - 3q$

c $A = 12ab - 2a(4b+6)$

d $K = 3(2m+5) - 4(m-7)$

Opgave 9

Iemand gaat een kamer behangen. Hij koopt daarvoor rollen behang die 52 cm breed zijn. De hoogte van de kamer is h (cm). Om er zeker van te zijn dat de banen niet te kort zijn, snijdt hij altijd 10 cm extra af. Bij de oppervlakte A (cm^2) van de banen behang hoort daarom de formule $A = 52 \cdot (h+10)$.

a Herleid de formule door het wegwerken van de haakjes.

b Wat is de oppervlakte in m^2 van een baan die hij moet afsnijden, als de hoogte van de kamer 290 cm is?

c Wat is de oppervlakte in m^2 van een baan die hij moet afsnijden, als de hoogte van de kamer 2,4 m is?

Voorbeeld 2

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen door het wegwerken van de haakjes:

- $(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$
- $(a-4)(b+4) = ab + 4a - 4b - 16$
- $(2x-4)(3x+6) = 6x^2 + 12x - 12x - 24 = 6x^2 - 24$
- $(2b-3)(1-a) = 2b - 2ab - 3 + 3a = 3a + 2b - 2ab - 3$

Opgave 10

Herleid.

a $(3+a)(5+b)$

b $(x-12)(2-x)$

c $(d-3)(d+3)$

d $(y-7)(y+5)$

e $(2a-4)(3b-6)$

f $(4-6z)(7-z)$

Opgave 11

Herleid.

a $A = (2x+3)(x+4) - 12$

b $Z = (2a-4)(2a-3) - 4a^2$

c $Q = (z-10)(z+10) + 100$

d $R = (3p-2)(6-q) - 18p$

Opgave 12

Herleid.

a $K = 2x - 3y + 5x + 2x - 3y$

b $A = -3b^4 \cdot 5b^3$

c $R = 2pq + 4p(q+3) - 1$

d $Z = 3 - 2(x-3) + 5x + 7(2+3x)$

e $L = (a-4)(b+4) + 16$

Oefenen

Opgave 13

Herleid.

a $4(x+3)$

b $-6(x+2)$

c $(2+d) \cdot 1{,}5$

d $b(1-b)$

e $3r(r+2)$

f $-k(k-1)$

Opgave 14

Herleid.

a $(x+5)(x+2)$

b $(y+1)(3y+2)$

c $(a+3)(a-2)$

d $(p+4)(p-4)$

e $(2q-5)(-q+5)$

f $(7+u)(4-u)$

Opgave 15

Herleid.

a $x(2x+7)$

b $(k+3)k$

c $(v+2)(v+v)$

d $(a+b)(c+d)$

e $(2s+3)(3s-1)$

f $(-p-1)(-2p-3)$

Opgave 16

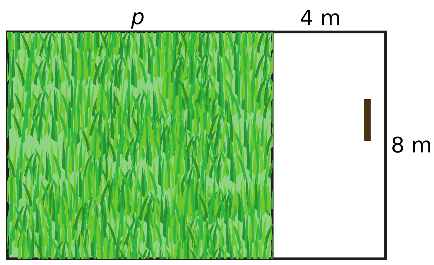
Elke heeft in haar tuin een terras gemaakt van 4 meter bij 8 meter. Ze houdt nog een flink stuk over voor het grasveld. De breedte van het grasveld is net als het terras 8 meter. De lengte is onbekend, en wordt aangegeven met p (meter).

a De breedte van de tuin is 8 meter. Druk de lengte l (meter) van de hele tuin uit in p.

b Druk de oppervlakte van het grasveld uit in p.

c Druk de oppervlakte van de hele tuin uit in p.

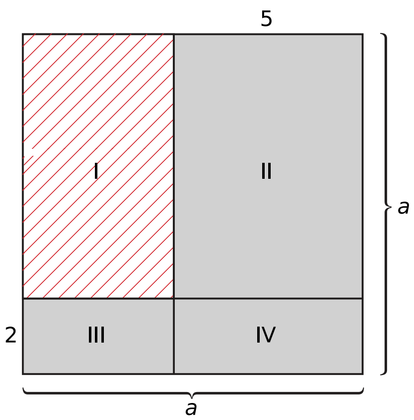
d Bereken de oppervlakte van de tuin als $p = 12$ m.



Figuur 4.9

Opgave 17

Gegeven is een vierkant van a bij a. Het vierkant is opgedeeld in vier delen. Druk de oppervlakte van het gearceerde deel uit in a.



Figuur 4.10

Opgave 18

Vul in.

a $6(a + ...) = ... + 18$

b $(2x + ...)(... + 5) = 6x^2 + 31x + 35$

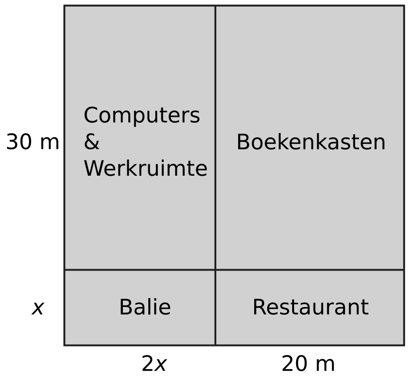
c $... \cdot (2 - ...) = -14 + 21p$

d $(... - 2a)(4b + 6) = ... + 16b - 12a + 24$

Toepassen

Een bibliotheek is opgedeeld in vier stukken: de balie, een restaurant, een werkruimte met computers en een ruimte waar alle boeken staan.

Eén van die afmetingen is nog onderwerp van discussie.
In het bovenaanzicht is die afmeting x genoemd.



Figuur 4.11

Opgave 19

Bekijk de indeling van de bibliotheek hierboven.

a Druk de oppervlakte van de hele bibliotheek uit in x. Schrijf je antwoord met en zonder haakjes.

b Waarom kan de oppervlakte van de bibliotheek nooit minder dan 600 m^2 zijn?

De oppervlakte van het restaurant is 160 m^2.

c Bereken x. Druk daarvoor eerst de oppervlakte van het restaurant uit in x en stel dat gelijk aan 160.

d Bereken hoe groot het deel van de bibliotheek is waarin de balie staat.

Testen

Opgave 20

Herleid

a $a(a - 5)$

b $-3(4 - 2s)$

c $(d + 1)(d + 2)$

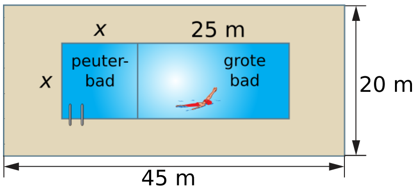
d $(a - 3)(2b - 7)$

e $(3x + 5)(4 - 4x)$

f $2 - 3(2x - 7)$

Opgave 21

In een stadspark wordt een zwembad aangelegd. Dit zwembad bestaat uit twee gedeelten: een vierkant peuterbad en een rechthoekig zwembad ernaast. Je ziet een ontwerp van het zwembad. Om het zwembad heen wordt een tegelpad aangelegd, daardoor krijgt het hele zwembadperceel een afmeting van 45 bij 20 meter. Het grote zwembad is 25 m lang en het peuterbad x (in meter).



Figuur 4.12

a Kies $x = 10$ meter en bereken de oppervlakte van het zwembad.

b Bereken nu de totale oppervlakte van het zwembadperceel (dus inclusief het tegelpad om het zwembad heen).

c Geef een formule voor de gehele oppervlakte A (in m^2) van het zwembad. Schrijf deze met en zonder haakjes.

d Geef een formule voor de oppervlakte B in m^2 van het tegelpad.

e Kies $x = 10$ en bereken de oppervlakte van het tegelpad in m^2 nauwkeurig.

4.5 Som, verschil, product, delen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden bij delen door een getal.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen en/of haakjes weg te werken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een rechthoek met lengte l en breedte b.

a Welke formule geldt voor de omtrek P van de rechthoek?

De halve omtrek krijg je door de totale omtrek door 2 te delen.

b Laat zien, dat dit klopt met de formule die je bij a hebt gevonden.

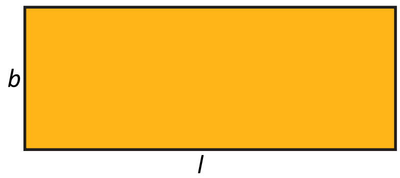
c Welke formule geldt voor de oppervlakte A van de rechthoek?

De halve oppervlakte krijg je door de totale oppervlakte door 2 te delen.

d Laat met de figuur zien, dat de halve oppervlakte gelijk is aan de halve lengte keer de breedte.

e Hoe ziet dit er met de formule bij c uit?

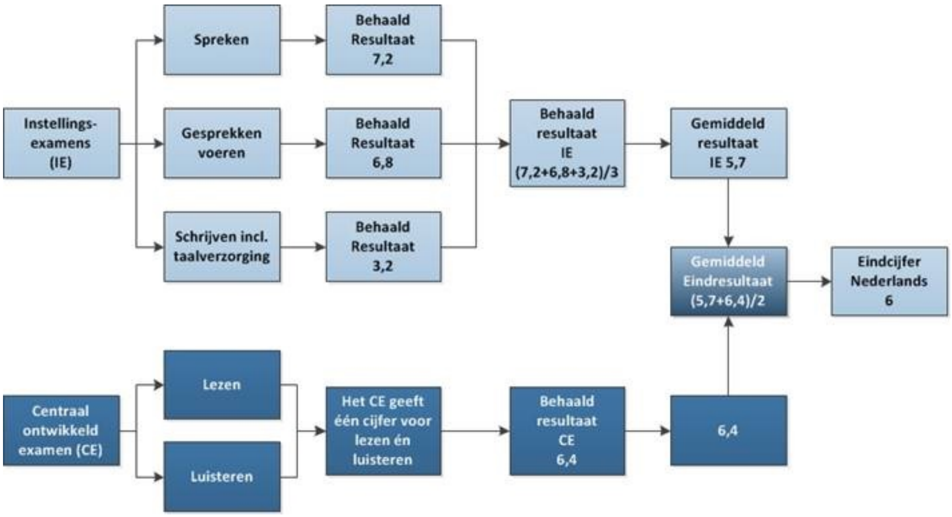
f Laat zien dat de halve oppervlakte van de rechthoek ook gelijk is aan de lengte keer de halve breedte.



Figuur 4.1

Opgave V2

In het mbo worden bij Nederlands vijf vaardigheden geëxamineerd. De resultaten van deze vijf vaardigheden worden omgerekend naar één eindcijfer. Hierbij wordt het onderstaande schema gebruikt, waarin ook een getallenvoorbeeld is opgenomen. Deze formule geldt zowel voor taalniveau 2F als 3F. Het eindcijfer van Nederlands komt op de resultatenlijst die bij het succesvol doorlopen van de opleiding samen het diploma wordt uitgereikt.



Figuur 4.2

a Wat gaat er fout als er bij de berekening voor het eindcijfer van het instellingsexamen geen haakjes worden gebruikt? Wat zou in bovenstaand voorbeeld dan het gemiddelde resultaat IE worden, afgerond op één decimaal?

Hakan heeft voor zijn Centrale Examen Nederlands een 8,2 gescoord, voor Spreken een 7,6 en voor Gesprekken voeren een 7,4. Het examen Nederlands schrijven moet hij nog maken.

b Welk cijfer moet Hakan daarvoor minimaal behalen om een 8 als eindcijfer voor Nederlands op zijn resultatenlijst te krijgen? Schrijf je berekening met zoveel mogelijk tussenstappen op. Controleer je antwoord door zijn scores in bovenstaande formule in te vullen.

Uitleg

Van deze rechthoek kun je de halve omtrek op twee manieren berekenen:

- $\frac{2l+2b}{2}$
- $l + b$

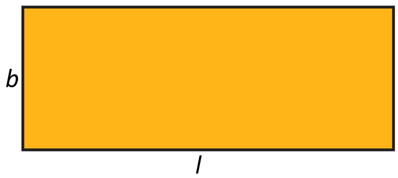
Dus: $\frac{2l+2b}{2} = \frac{2l}{2} + \frac{2b}{2} = l + b$.

Als je de som van twee termen door 2 deelt, moet je elke term door 2 delen.

Je kunt dit ook zo schrijven: $\frac{2l+2b}{2} = \frac{1}{2}\cdot(2l + 2b) = \frac{1}{2}\cdot 2l + \frac{1}{2}\cdot 2b = l + b$.

Op dezelfde manier is een kwart van de omtrek:

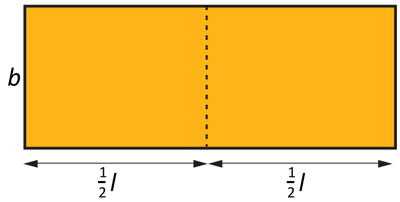
$\frac{2l+2b}{4} = \frac{2l}{4} + \frac{2b}{4} = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}b$.



Figuur 4.3

Voor de halve oppervlakte van deze rechthoek geldt:

- $\frac{l \cdot b}{2}$
- $\frac{1}{2} l \cdot b$



Figuur 4.4

Blijkbaar is $\frac{l \cdot b}{2} = \frac{l}{2} \cdot b = \frac{1}{2} l \cdot b$.

Maar je kunt ook schrijven: $\frac{l \cdot b}{2} = l \cdot \frac{b}{2} = l \cdot \frac{1}{2} b$.

Als je een product door 2 deelt, deel je maar één van de factoren door 2.

Op dezelfde manier is een kwart van de oppervlakte: $\frac{l \cdot b}{4} = \frac{l}{4} \cdot b = \frac{1}{4} l \cdot b$ of $\frac{l \cdot b}{4} = l \cdot \frac{b}{4} = l \cdot \frac{1}{4} b$ of $\frac{l \cdot b}{4} = \frac{1}{4} \cdot l \cdot b$.

Opgave 1

Bekijk de bovenste rechthoek in de **Uitleg**.

a De omtrek van deze rechthoek is $P = 2l + 2b$.

Waarom is éénderde deel van deze omtrek niet $\frac{2}{3} l + 2b$?

b Welke formule geldt wel voor éénderde van de omtrek van deze rechthoek?

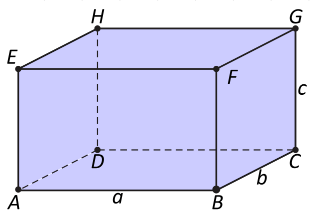
Voor de oppervlakte van deze rechthoek geldt $A = l \cdot b$.

c Laat door goede verdelingen van deze rechthoek zien, dat $\frac{l \cdot b}{3} = \frac{l}{3} \cdot b = l \cdot \frac{b}{3}$.

d Wat stelt $\frac{l}{3} \cdot \frac{b}{3}$ in dit verband voor?

Opgave 2

Hier en op het **werkblad** zie je een balk met lengte a, breedte b en hoogte c.



Figuur 4.5

a Wat stelt $l = 4a + 4b + 4c$ voor?

b Waarom is $\frac{4a+4b+4c}{4} = a + b + c$?

c Wat stelt $V = a \cdot b \cdot c$ voor?

d Leg met behulp van de figuur op het werkblad uit dat $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c$

e Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot c$?

f Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{4} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{4}$?

Opgave 3

Waar of niet waar?

a $\frac{a+4}{2} = \frac{1}{2} a + 2$

b $\frac{3p+q}{4} = \frac{3}{4} p + q$

c $\frac{2a \cdot 3b}{3} = \frac{2}{3} a \cdot b$

d $\frac{2a+3a\cdot b}{4} = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}b$

e $\frac{15+5pq}{10} = 1{,}5 + 0{,}5pq$

f $\frac{a(a-9)}{4} = \frac{1}{4}a(a-9)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wil je een som, een verschil, of een product nog door een getal delen.

- Als je een som of een verschil van meerdere termen door een getal deelt, dan moet je alle termen door dat getal delen: $\frac{a\pm b\pm c}{g} = \frac{1}{g} \cdot (a \pm b \pm c) = \frac{a}{g} \pm \frac{b}{g} \pm \frac{c}{g}$
- Als je een product van meerdere factoren door een getal deelt, dan moet je één van die factoren door dat getal delen: $\frac{a\cdot b\cdot c}{g} = \frac{1}{g} \cdot a \cdot b \cdot c = \frac{a}{g} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{g} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{g}$

Voorbeeld 1

Deel de uitdrukking $12a - 2b \cdot {-4}b^2$ door 8 en schrijf de uitkomst zo eenvoudig mogelijk.

Antwoord

$\frac{12a-2b\cdot{-4}b^2}{8} = \frac{12a+8b^3}{8} = \frac{12a}{8} + \frac{8b^3}{8} = 1{,}5a + b^3.$

Opgave 4

Voer de volgende delingen uit en schrijf de uitkomst zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{15-5\cdot p}{5}$

b $\frac{12a-5a\cdot 3b}{3}$

c $\frac{3a(b+3)}{6}$

d $\frac{a-6ab}{a}$

Opgave 5

Voor de oppervlakte A van een driehoek geldt de formule $A = \frac{b \cdot h}{2}$ waarin b de basis (een zijde) van de driehoek is en h de hoogte die loodrecht op die basis staat.

Je berekent dus de oppervlakte van een driehoek door de lengte van de basis en die van de hoogte te vermenigvuldigen en de uitkomst door 2 te delen.

a Waarom kun je de oppervlakte van een driehoek ook berekenen door de halve lengte van de basis met de hoogte te vermenigvuldigen?

b Welke andere manier om de oppervlakte van een driehoek te berekenen is er nog meer?

c Van een driehoek is basis $AB = 5$ cm en hoogte $CD = 3$ cm.
Laat zien dat alle drie de manieren om de oppervlakte te berekenen, inderdaad hetzelfde opleveren.

Opgave 6

Voor de bewegingsenergie E van een voorwerp met massa m dat met een snelheid v voortbeweegt, geldt

$E = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Hierin is:

- m de massa in kilogram
- v de snelheid in meter/seconde
- E de energie in Joule

a Bereken E als het voorwerp een massa heeft van 0,2 kg en beweegt met een snelheid van 50 m/s.

b Waarom kun je de gegeven formules ook schrijven als $E = \frac{1}{2}mv^2$?

c Laat met de gegevens uit a zien, dat deze tweede formule hetzelfde resultaat geeft.

Voorbeeld 2

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,-;
- de kosten per kopie: € 0,06 voor papier en inkt.

Bij welk aantal kopieën per maand komt de school uit de kosten als ze de leerlingen 10 cent per kopie laten betalen?

Antwoord

Je kunt dit probleem bijvoorbeeld oplossen door te kijken naar de kosten k in cent per kopie.

Die kosten bedragen $k = \frac{150 + 0{,}06 \cdot a}{a}$.

Je kunt bij deze formule een tabel maken, bijvoorbeeld met behulp van Excel.

Nu kun je de vraag beantwoorden.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Laat zien hoe je met de gegeven formule de kosten per kopie bij 1000 kopieën per maand berekent.

b Je kunt de gegeven formule ook anders schrijven door de deling uit te voeren. Welke formule krijg je dan?

c Aan de hand van de formule bij b kun je het probleem ook zonder Excel te gebruiken wel oplossen. Laat zien, hoe.

Opgave 8

Mark organiseert een festival en huurt een terrein. De kosten hiervoor bedragen € 3500,00 en daarbij komt nog € 2,50 aan kosten per persoon.

a Stel Mark vraagt geen entree. Wat kost het hem dan per gast wanneer hij 300 mensen uitnodigt?

b Stel de formule op voor de kosten K per gast, afhankelijk van het aantal gasten q.

c Stel Mark wil in totaal € 650,00 winst maken. Hij nodigt 400 mensen uit. Welk bedrag moet hij dan als entree vragen?

Oefenen

Opgave 9

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{a+b}{5}$

b $\frac{a \cdot b}{5}$

c $\frac{a \cdot b+c}{5}$

d $\frac{a(b+c)}{5}$

Opgave 10

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk en zonder haakjes.

a $\frac{(2x+12)(x+2)}{4}$

b $\frac{6a-6a \cdot 2b}{3}$

c $\frac{6a+3b(a-2)}{6}$

d $\frac{250-15 \cdot p}{p}$

Opgave 11

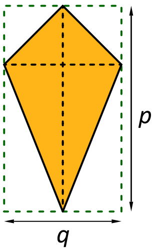
Je ziet hier een vlieger. Beide diagonalen staan loodrecht op elkaar.

Voor de oppervlakte A geldt $A = \frac{p \cdot q}{2}$.

a Licht deze formule toe.

b Kun je de oppervlakte van deze vlieger ook schrijven als $A = \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$?
Licht je antwoord toe.

c Hoe kun je deze formule anders schrijven?
Hoe kun je dit in de figuur aangeven?



Figuur 4.6

Opgave 12

Je huurt één dag een busje omdat je op kamers gaat wonen en je spullen wilt verhuizen. De kosten zijn:

- € 40,00 per dag;
- € 0,25 per gereden km.

Dat is nog exclusief de benzinekosten, je moet het busje afgetankt weer inleveren.

a Bereken de kosten per km k als je in totaal 180 km met dit busje rijdt.

Je stelt voor de kosten per km k deze formule op: $k = \frac{40+0{,}25 \cdot a}{a}$.

Hierin is a het totaal aantal gereden km met het busje.

b Leg uit waarom deze formule juist is.

c Een vriend wil je helpen en zegt dat die formule kan worden geschreven als $k = \frac{40}{a} + 0{,}25$.
Heeft hij gelijk?

Opgave 13

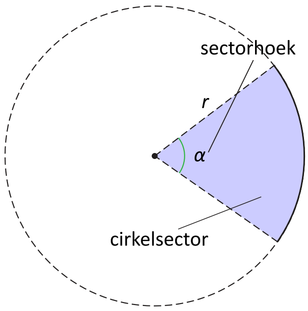
Dit is een sector van een cirkel met straal r.
De sectorhoek is α.

Voor de oppervlakte A geldt $A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$.

a Licht deze formule toe.

b Waarom is de formule $A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$ ook correct? Licht je antwoord toe.

c Laat ook met een getallenvoorbeeld zien dat beide formules dezelfde uitkomst geven.



Figuur 4.7

Toepassen

De ANWB adviseert om bij het autorijden een afstand d (in meter) te bewaren die de helft is van je eigen snelheid v in km/h.

Gemiddeld is een auto 4 m lang. De afstand tussen de voorbumpers van twee auto's is dus $s = 4 + d$ m. Neem aan dat alle auto's zich aan het advies van de ANWB houden, 4 m lang zijn en dezelfde snelheid v hebben.

Hiermee kun je een formule opstellen voor de tijd die er dan zit tussen twee auto's die zich hieraan houden.

Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$.

En dus kun je een formule opstellen van het aantal auto's per minuut afhankelijk van de snelheid.

Figuur 4.8 bron: Wikipedia

Opgave 14

Bekijk de informatie hierboven.

a Geef de formule van d als functie van v.

b De tijd t in seconden tussen twee auto's is nu te berekenen met de formule: $t = \frac{3{,}6s}{v}$. Licht dit toe.

c Stel een formule op voor t als functie van v door formules uit a en b te combineren met $s = 4 + d$.

d Er wordt gereden met een snelheid van 100 km/uur.
Hoeveel tijd zit er tussen twee auto's?

Opgave 15

Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$.

a Schrijf de formule op van N als functie van v.

b Er passeert een stroom auto's met een snelheid van 100 km/uur.
Hoeveel auto's per minuut komen er voorbij?

c Als er een constante stroom van 20 auto's per minuut voorbij komt, hoe hard wordt er dan gereden?

Testen

Opgave 16

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{a-5}{5}$

b $\frac{3a \cdot 8b}{4}$

c $\frac{6p-5p \cdot 6q}{3}$

d $\frac{a \cdot (2b-8)}{2}$

e $\frac{200+0{,}15a}{a}$

Opgave 17

Voor het vervoer van grotere spullen kun je een aanhangwagen huren. De kosten zijn:

- € 20,00 per dag;
- € 0,10 per gereden km.

Je huurt de aanhanger voor één dag.

a Je rijdt die dag 120 km met de aanhanger. Hoeveel ben je daarvoor per gereden kilometer kwijt?

b Stel een formule op voor de kosten per km voor één dag deze aanhanger huren.

c Hoe meer km je rijdt, hoe lager de kosten per km worden. Laat zien, hoe je dit uit de formule kunt afleiden.

4.6 Vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking met één variabele;
- vergelijkingen met één variabele grafisch oplossen, eventueel met behulp van inklemmen;
- vergelijkingen met één variabele oplossen door vergelijkend rekenen, terugrekenen en/of de balansmethode.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen en/of haakjes weg te werken.

Verkennen

Opgave V1

Een rol behang is 60 cm breed. De hoogte van de kamer is l cm. Om het behang aan de onderkant te kunnen bijsnijden maak je elke baan 10 cm langer dan de hoogte van de kamer.
Voor de oppervlakte van een baan behang geldt dus: *oppervlakte* $= 60 \cdot (l + 10)$.

a Leg uit waarom deze formule klopt.

b De kamer die je gaat behangen is 220 cm hoog. Hoe groot is de oppervlakte van een baan behang?

c De oppervlakte van een baan behang is = 16000 cm^2. Hoe hoog is de kamer dan in cm nauwkeurig?

Uitleg 1

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?” is een vergelijking.

Noem het aantal kopieën per maand a en de vergelijking wordt:

$150 + 0{,}075a = 0{,}10a$

In een vergelijking zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. In deze vergelijking staan aan de linkerzijde van het isgelijkteken de kosten per maand en aan de rechterzijde de inkomsten per maand. Hij bevat één variabele: a.
Je zoekt de waarden van a die ervoor zorgen dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn, dat zijn de oplossingen van de vergelijking.

Deze vergelijking heeft één oplossing: $a = 6000$.
Ga maar na:

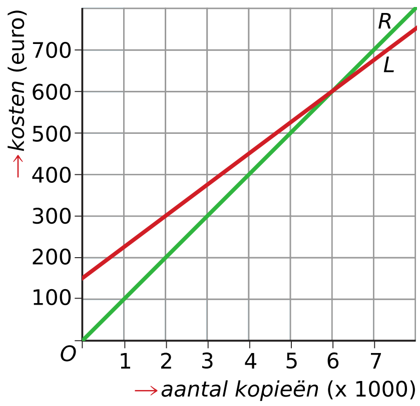
$150 + 0{,}075 \cdot 6000 = 0{,}10 \cdot 6000$

Maar hoe kom je aan die oplossing en waarom is er maar één?

Als je de oplossing niet meteen ziet, kun je er altijd uitkomen door getallen voor a in te vullen (te substitueren), net zolang tot je de juiste waarde voor a gevonden hebt.
Links van het isgelijkteken heb je: $L = 150 + 0{,}075a$ en rechts van het isgelijkteken heb je: $R = 0{,}10a$. Maak daarbij een tabel.

a	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
L	150	225	300	375	450	525	600	675	750
R	0	100	200	300	400	500	600	700	800

Tabel 4.1



Figuur 4.1

In dit geval zit de oplossing meteen in de tabel: bij $a = 6000$ zijn L en R gelijk! Vaak moet je nog verder zoeken door de tabel te verfijnen.
Dan kun je ook een grafiek gebruiken: bij het snijpunt van L en R zijn beide gelijk. De waarde van a die daarbij hoort, kun je aflezen (vaak: schatten). Met behulp van nauwkeuriger tabellen rond het snijpunt kun je de waarden van a steeds nauwkeuriger bepalen. Dit proces heet inklemmen.

In dit geval zijn de grafieken van L en R rechte lijnen en is er maar één snijpunt, en dus precies één oplossing.

Opgave 1

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?

a Welke vergelijking hoort hierbij?

b Maak bij deze vergelijking een tabel en de bijbehorende grafiek.

c Probeer zo nauwkeurig mogelijk uit de tabel en de grafiek af te lezen welke waarde van a de oplossing van de vergelijking geeft.

d De vergelijking is niet exact op te lossen met behulp van de grafiek. Waarom is dat in het geval van de kopieermachine ook niet echt nodig?

e Je kunt de uitkomst wel nauwkeuriger bepalen met behulp van een tabel en de methode van inklemmen. Kies waarden rond het getal 14700.

Uitleg 2

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine € 2250,-?” is een vergelijking.

Noem het aantal kopieën per maand a en de vergelijking wordt:

$150 + 0{,}075a = 2250$

Een vergelijking als $150 + 0{,}075a = 2250$ kun je oplossen door te bekijken hoe je moet rekenen.
Het rekenschema is:

$$a \xrightarrow{\times\, 0{,}075} \ldots \xrightarrow{+\, 150} 2250$$

En dus kun je zo terugrekenen:

$$a \xleftarrow{/\, 0{,}075} \ldots \xleftarrow{-\, 150} 2250$$

Dit betekent: $a = (2250 - 150)/0{,}075 = 28000$ kopieën.

Bij de vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?” hoort de vergelijking:

$150 + 0{,}075a = 0{,}10a$

Deze vergelijking kun je niet oplossen door terugrekenen omdat de variabele aan beide zijden van het isgelijkteken voorkomt.

Nu kun je beter de balansmethode toepassen: voer aan beide zijden van het isgelijkteken dezelfde bewerking uit.
De oplossing gaat dan zo:

$$\begin{aligned} 150 + 0{,}075a &= 0{,}10a && \text{beide zijden } -0{,}075a \\ 150 &= 0{,}025a && \text{beide zijden verwisselen} \\ 0{,}025a &= 150 && \text{beide zijden delen door } 0{,}025 \\ a &= \frac{150}{0{,}025} = 6000 \end{aligned}$$

Je ziet dat je dezelfde oplossing krijgt als bij **Uitleg 1**.

Opgave 2

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine € 3200,-?

a Welke vergelijking hoort hier bij?

b Los deze vergelijking op met behulp van terugrekenen.

c Laat zien dat je deze vergelijking ook kunt oplossen met de balansmethode.

Opgave 3

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Waarom kun je deze vergelijking niet oplossen door terugrekenen?

c Los deze vergelijking op met de balansmethode.

d Welk antwoord geef je op de vraag die aan het begin werd gesteld?

Opgave 4

Je ziet hier een viertal vergelijkingen.
Los ze op met behulp van terugrekenen of met behulp van de balansmethode.
Geef exacte antwoorden.

a $4p - 1500 = 275$

b $4p - 1500 = 300 - 2{,}5p$

c $4(p-5)^2 = 64$.

d $4\sqrt{p-5} = 64$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **vergelijking** zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. De getallen voor die variabelen die beide zijden van het isgelijkteken gelijk maken heten de **oplossingen** van de vergelijking. Voor vergelijkingen met één variabele bestaan verschillende methoden om die oplossingen te vinden.

- De **inklemmethode** waarbij je systematisch naar de oplossing zoekt met behulp van steeds nauwkeuriger tabellen.
  Deze methode kun je goed gebruiken als je toch al grafieken hebt die je vergelijkt, of als de andere twee niet werken.
- De **terugrekenmethode** waarbij je eerst bedenkt welk rekenschema op de variabele kan worden toegepast. Vervolgens ga je alle rekenstappen vervangen door de terugrekenstappen.
  Deze methode is alleen bruikbaar als je ervoor kunt zorgen dat de variabele precies één keer voorkomt.
- De **balansmethode** waarbij je de vergelijking opvat als een balans in evenwicht. Je kunt dan aan beide zijden dezelfde bewerking uitvoeren zonder het evenwicht te verbreken. Zo maak je de vergelijking systematisch eenvoudiger.

Ook zijn er nog wel andere handigheden die je kunnen helpen bij het oplossen van vergelijkingen.

terugrekenen	
+	−
×	/
$\square^2$	√

Figuur 4.2

Een bekende manier is het opschrijven van een eenvoudige berekening die dezelfde structuur heeft als de vergelijking. Dit heet wel vergelijkend rekenen.

In de voorbeelden zie je hoe deze methoden worden toegepast.

Voorbeeld 1

Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.
Noem je de brandtijd in uren t, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

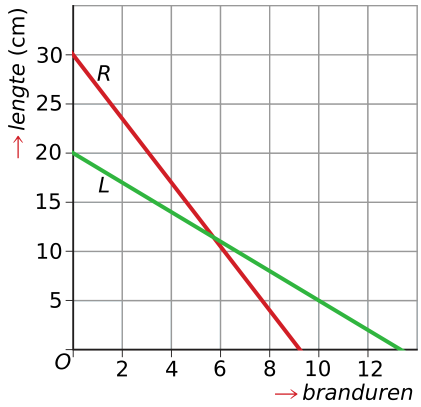
Bereken nu wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van t is deze vergelijking waar?

Antwoord

Maak een tabel en een grafiek bij $L = 20 - 1{,}50t$ en $R = 3 - 3{,}25t$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	20,00	18,50	17,00	15,50	14,00	12,50	11,00	9,50	8,00
R	30,00	26,75	23,50	20,25	17,00	13,75	10,50	7,25	4,00

Tabel 4.2



Figuur 4.3

Je ziet nu dat de oplossing tussen $t = 5$ en $x = 6$ zit. Je maakt dan een nieuwe tabel tussen 5 en 6 met t in één decimaal.

Nu vind je dat de oplossing tussen $t = 5{,}7$ en $t = 5{,}8$ zit. Op gehelen afgerond krijg je $t \approx 6$. De kaarsen zijn dus na ongeveer zes uur even lang.

Wil je het antwoord nog nauwkeuriger krijgen, dan maak je een tabel tussen 5,7 en 5,8 met t in twee decimalen. Je vindt dan de oplossing tussen $t = 5{,}71$ en $t = 5{,}72$. Op één decimaal nauwkeurig wordt je antwoord $t \approx 5{,}7$. De kaarsen zijn dus na ongeveer 5,7 uur even lang, dat is na 5 uur en 42 minuten (0,7 maal 60 minuten).

Wil je een nog nauwkeuriger antwoord, dan maak je een tabel tussen 5,71 en 5,72 met t in drie decimalen.

En zo kun je eindeloos doorgaan. Deze procedure heet inklemmen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ opgelost.

a Hoe kun je met behulp van de grafiek een eerste benadering van de oplossing aflezen?

b Maak nu zelf de tabel tussen $t = 5{,}7$ en $t = 5{,}8$ en bepaal de oplossing in één decimaal nauwkeurig.

c Bepaal nu je oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

d Bepaal tot slot je oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Twee schildersbedrijven adverteren met hun kosten. Ze beweren allebei heel goedkoop te zijn.

Schildersbedrijf A:
'Spotgoedkoop: voor maar € 30,00 per vierkante meter komen wij uw muur een nieuwe kleur geven.'

Schildersbedrijf B:
'Wij schilderen voor slechts € 28,95 per vierkante meter. Daar komt € 48,00 aan voorrijkosten bij.'

a Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Wanneer zijn beide schildersbedrijven even duur?"

b Los de vergelijking met behulp van tabellen in één decimaal nauwkeurig op.

Voorbeeld 2

Een kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.

Na hoeveel uur is deze kaars nog 12 cm lang?

Antwoord

Voor de lengte van de kaars past de formule $L = 20 - 1{,}5t$ als t de tijd in uren en L de lengte in cm is.

De vraag kun je vertalen naar de vergelijking $20 - 1{,}5t = 12$.

Deze vergelijking kun je op meerdere manieren oplossen:

- Door vergelijkend rekenen:
  $20 - \ldots = 12$ betekent $\ldots = 8$, dus $1{,}5t = 8$.
  $1{,}5 \cdot \ldots = 8$ betekent $\ldots = 8/1{,}5$, dus $t = 8/1{,}5 \approx 5{,}33$ uur.
- Door een terugrekenschema te gebruiken:
  Vanuit de variabele moet je zo rekenen:
  $t \xrightarrow{\times\, -1{,}5} \ldots \xrightarrow{+\,20} 12$
  En dus kun je zo terugrekenen:
  $t \xleftarrow{/\, -1{,}5} \ldots \xleftarrow{-\,20} 12$
  Dus is $t = (12 - 20)/\,-1{,}5 \approx 5{,}33$.
- Door de balansmethode te gebruiken:

$$\begin{aligned} 20 - 1{,}5t &= 12 && \text{beide zijden 20 aftrekken} \\ -1{,}5t &= -8 && \text{beide zijden delen door } -1{,}5 \\ t &= -8/-1{,}5 \approx 5{,}33 \end{aligned}$$

  Ook hier vind je $t \approx 5{,}33$ uur.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe een vergelijking op drie manieren kan worden opgelost.

a Wat is kenmerkend voor een vergelijking waarbij dit kan?

Bekijk de vergelijking $0{,}2a^2 + 200 = 600$

b Laat zien dat deze vergelijking op alle drie de beschreven manieren kan worden opgelost.
Voer de drie oplossingsmethoden uit.

Bekijk de vergelijking $0{,}2(a-20)^2 = 400$

c Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Bekijk de vergelijking $0{,}2\sqrt{a-20} = 4$

d Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op.
Gebruik de methode die je het handigst vindt.

a $15 \cdot (2x+10) = 240$

b $0{,}01(x-4)^2 + 25 = 26$

c $15 + 2\sqrt{x} = 35$

d $\frac{60}{2x-4} = 3$

Voorbeeld 3

Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.
Noem je de brandtijd in uren t, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

Bereken nu wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van t is deze vergelijking waar?

Antwoord

De vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ kun je niet oplossen met terugrekenen.
Maar wel met de balansmethode:

$$\begin{aligned} 20 - 1{,}50t &= 30 - 3{,}25t && \text{beide zijden } 3{,}25t \text{ optellen} \\ 20 + 1{,}75t &= 30 && \text{beide zijden 20 aftrekken} \\ 1{,}75t &= 10 && \text{beide zijden door 1,75 delen} \\ t &= \frac{10}{1{,}75} = \frac{40}{7} \approx 7{,}71 \end{aligned}$$

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de balansmethode gebruikt om een vergelijking op te lossen.
Los nu zelf de vergelijkingen op.

a $7g + 6 = 5g + 15$

b $8g - 15 = 5g + 21$

c $8g - 15 = 5g$

d $12 - 4g = 6g + 2$

Opgave 10

Los de vergelijkingen op.

a $2g + 15 + 6g = 5 + 3g - 20$

b $6 + \frac{8g}{2} = 4 - 5g + 12 + g$

c $26 - a - 4a = 8a$

d $x + 6 - 0{,}5x = 3{,}4 + 0{,}1x$

Opgave 11

Neem een getal in je hoofd. Vermenigvuldig het getal met 4 en tel bij het antwoord 20 op. Trek hiervan twee keer het getal af en neem de helft van wat je nu hebt gevonden.
Als je me nu de uitkomst van deze berekening vertelt, weet ik het getal dat je had bedacht.

Hoe kan dat? Geef een duidelijke uitleg door de bijbehorende vergelijking op te stellen.

Oefenen

Opgave 12

Hoveniersbedrijf Jongman rekent voor het winterklaar maken van een tuin € 75,00 plus € 2,50 per m^2.

a Maak een formule bij het verband tussen de oppervlakte A van de tuin en de kosten K voor het winterklaar maken.

b Meneer Van Gils heeft zijn tuin laten opknappen. Hij krijgt een rekening van € 475,00. Welke vergelijking moet je oplossen om te weten hoe groot de tuin van meneer Van Gils is?

c Los deze vergelijking op met behulp van een tabel en een grafiek. Hoe groot is de tuin van meneer Van Gils? Geef je antwoord in m^2 nauwkeurig.

d Het concurrerende hoveniersbedrijf Green Garden rekent voor het winterklaar maken slechts € 25,00 en daarbij € 3,60 per m^2. Met welke vergelijking kun je berekenen bij hoeveel m^2 tuin beide bedrijven even duur zijn?

e Los deze vergelijking op met behulp van tabellen en een grafiek door in te klemmen. Geef je antwoord in gehele m^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Er is een verband tussen de lengte (in cm) van je voet en je schoenmaat: ‘Vermenigvuldig de lengte van je voet met 1,5 en tel daar 2 bij op.’ Neem voor je voetlengte L en de schoenmaat S.

a Beschrijf dit verband met een rekenschema.

b Stel een formule op bij het verband tussen L en S.

c Bereken je schoenmaat als je voet 26 cm lang is.

d Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Bij welke voetlengte heb je een schoenmaat van 36,5?”
Geef een terugrekenschema.

e Los deze vergelijking op door terug te rekenen.

Opgave 14

Voor een toets kun je maximaal 51 punten krijgen. Het cijfer wordt berekend met de formule $c = \frac{p}{51} \cdot 9 + 1$. De c staat voor het cijfer en de p voor het aantal punten.

a Welke cijfer heb je als je 33 punten hebt behaald? Rond af op één decimaal.

b Maak een terugrekenschema bij deze formule.

c Jan Willem had een 6,5 voor de toets.
Welke vergelijking moet je oplossen om uit te rekenen hoeveel punten hij had? Los die vergelijking op.

d Welke formule hoort bij het terugrekenschema?
Controleer je formule met behulp van c.

Opgave 15

Los de vergelijkingen op.

a $12g + 3 = 7g + 18$

b $13 + 6g - 2 = 2 + 8g$

c $2(x - 12)^2 = 32$

d $-6p + 55 = 4(p - 5)$

e $-x + 7 = x - (11 + 3x)$

f $320 + 0{,}5g = 950 - 1{,}25g$

Opgave 16

Los de vergelijkingen op.

a $2(k + 5) = -4k$

b $0{,}1(a - 5)^2 = 5$

c $3(x + 1) - 2(x - 4) = 1$

d $0{,}5\sqrt{2x - 1} = 1$

Opgave 17

Mina en Yassin hebben beiden een moestuin. Beide moestuinen hebben dezelfde oppervlakte, maar andere afmetingen. Noem de standaard afmetingen x bij x bij meter. De moestuin van Mina is elf meter langer maar twee meter korter in de breedte. De moestuin van Yassin is vier meter langer en drie meter breder.

a Met welke formule kun je de oppervlakte van de moestuin van Yassin berekenen?

b Met welke formule kun je de oppervlakte van de moestuin van Mina berekenen?

c De oppervlaktes van de moestuinen van Mina en Yassin zijn even groot. Welke afmetingen hebben ze?

d Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de moestuinen?

Toepassen

Je ziet hier een leeg zuiver cilindervormig blik.

Dergelijke blikken worden gemaakt van metaal. De oppervlakte van het blik bepaalt hoeveel metaal je ervoor nodig hebt.

Noem de straal van de cirkelvormige bodem r cm en de hoogte van het blik h cm.

Voor de oppervlakte A van blik met deksel geldt dan (ongeveer):

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Deze formule kun je zelf afleiden.

Figuur 4.4

Opgave 18

Bekijk de formule voor de oppervlakte van een cilindrisch blik.

a Leg uit hoe je deze formule zelf kunt afleiden.

Bekijk alleen blikken waarvan de hoogte en de diameter even groot zijn.

b Welke formule geldt voor de oppervlakte van zo'n blik?

c Hoe groot is de diameter van zo'n blik als de oppervlakte 500 cm^2 is? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 19

Bekijk de oppervlakteformule van het cilindrische blik nog eens.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van zo'n blik?

b Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van een blik met een hoogte van 10 cm en een inhoud van 1 L? Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.

Testen

Opgave 20

Een zwembad heeft een kortingskaart voor een jaar. Voor deze kortingskaart betaal je € 45,00, maar met deze kaart betaal je maar € 2,50 per keer zwemmen. Als je geen kortingskaart hebt, betaal je € 4,50 per keer zwemmen.

a Je wilt weten hoeveel keer je in een jaar moet gaan zwemmen om voordeliger uit te zijn met een kortingskaart.
Welke vergelijking past daar bij?

b Los deze vergelijking op.

Opgave 21

Los de volgende vergelijkingen op.

a $26 - 3{,}5x = 10$

b $26 - 3{,}5x = 10 + 2x$

c $3(x - 4)^2 = 300$

d $(k - 3)(k + 6) = k(k - 2)$

e $\frac{26}{3p+5} = 2$

4.7 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het begin van het werken met formules voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra I** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- formule — variabele(n), afhankelijk variabele — substitueren — verband tussen twee variabelen, tabel, grafiek;
- variabelen optellen en aftrekken;
- variabelen vermenigvuldigen en delen;
- haakjes wegwerken;
- som en product delen;
- vergelijking — terugrekenen, vergelijkend rekenen, balansmethode.

Activiteitenlijst

- in een formule voor een variabele een getal substitueren — bij het verband tussen twee variabelen een tabel en een grafiek maken;
- variabelen optellen en aftrekken;
- variabelen vermenigvuldigen en delen;
- haakjes wegwerken;
- een som/verschil van meerdere termen delen door een getal — een product van meerdere termen delen door een getal;
- een vergelijking met één variabele oplossen door terugrekenen, vergelijkend rekenen, de balansmethode.

Testen

Opgave 1

Herleid.

a $2a + 4 + 3a + 7 + a$

b $-5a + 8a + 2b - 4b$

c $8ab + 3a - 4b + 5b - 6ab$

d $-8ab + 6b - 2ba - 3b + 5 - 3b$

e $a \cdot a + 5a - 3a^2 + a$

f $8a^2 - 3a \cdot 2a - 7a$

Opgave 2

Herleid.

a $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

b $2x^2 \cdot 5x^4$

c $-2x \cdot -x^{10}$

d $(-x)^2 \cdot 4x^5$

e $2x^9 \cdot -3y^7$

Opgave 3

Herleid.

a $2(3+a)$

b $-c(5+c)$

c $5(3x+4)$

d $(z+3)(z+6)$

e $(2d-4)(3d-2)$

f $(4x+3)(2y-8)$

Opgave 4

Herleid.

a $A = 2 - 3(a-6)$

b $R = 2(3+p) - 7 - 8(2p+4)$

c $T = (2x-5)(2x+5) + 25$

d $Q = (-3a-2)(2b-5) + 4b$

Opgave 5

Los op.

a $3 + 8x = 35$

b $7 - 2x = -23$

c $5x - 7x + 2 = 14$

d $5(3-x) = 65$

e $-3(x-10) = 21$

f $3(x-10)^2 = 21$

Opgave 6

Herleid. Neem vervolgens $a = 3$ en bereken b.

a $2ab - 6a + 8b + 4ab = 8$

b $3a - 2(a+b) - 3b = 13$

Opgave 7

Ryan verkoopt op de markt twee soorten tijdschriften en boeken. Een tijdschrift verkoopt hij voor € 3,50 en een boek voor € 5,00. Hierbij kun je de formule $R = 3{,}50a + 5{,}00b$ opstellen.

a Wat stellen de variabelen in de formule voor?

b Hoeveel bedraagt Ryan's opbrengst als hij 50 tijdschriften en 35 boeken verkoopt?

c Ryan heeft op een dag 40 tijdschriften verkocht en heeft een opbrengst van € 250,00. Hoeveel boeken heeft hij die dag verkocht?

d Door waterschade geeft hij korting op de tijdschriften en de boeken. Voor het bepalen van de totale korting die hij gegeven heeft, gebruikt hij de formule $Q = 1{,}50a + 2{,}00b$. Geef een zo kort mogelijke formule voor de opbrengst R, waarbij de korting er al af is.

Toepassen

Opgave 8: Bioscoop

Een bioscoop heeft twee zalen waarin evenveel bezoekers kunnen. In de éne zaal zijn evenveel rijen als stoelen per rij. In de andere zaal zijn drie stoelen per rij minder, maar wel vier rijen meer. Hoeveel stoelen telt elke zaal?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking op door eerst de haakjes weg te werken.

c Geef antwoord op de aan het begin gestelde vraag.

Opgave 9: Leeftijdspuzzle

Theo en Saar zijn samen 38 jaar. Theo was vijf jaar geleden twee keer zo oud als Saar nu. Hoe oud zijn ze ieder?

a Neem eens aan dat Saar x jaar oud is. Hoe oud is Theo dan?

b Welke vergelijking kun je opstellen om de puzzel op te lossen?

c Los de vergelijking op om de leeftijden van Theo en Saar te bepalen.

Register

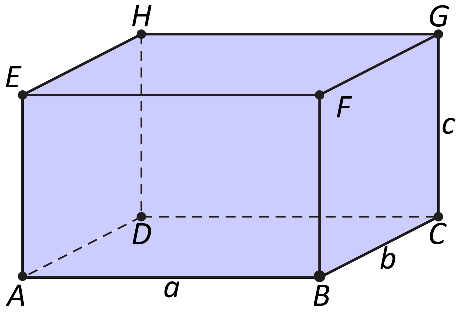
Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 2



a Wat stelt $l = 4a + 4b + 4c$ voor?

b Waarom is $\frac{4a+4b+4c}{4} = a + b + c$?

c Wat stelt $V = a \cdot b \cdot c$ voor?

d Leg met behulp van de figuur op het werkblad uit dat $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c$

e Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot c$?

f Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{4} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{4}$?