Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 3

Inhoud

Lineaire functies
Algebra 2

Context College

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

5

Lineaire functies

5.1 Recht evenredig

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een recht evenredig verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) recht evenredig verband een passende formule opstellen;
- de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met recht evenredige verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.

Figuur 5.1

a Je koopt in Denemarken iets dat 350 DKK kost. Hoeveel euro is dat?

b Als iets in Denemarken twee keer zo duur wordt, is dat omgerekend in euro dan ook zo?

c “Het aantal euro is recht evenredig met het aantal Deense Kronen.”
Wat wordt met deze uitspraak bedoeld?

d Schrijf een formule op die het verband aangeeft tussen de kosten in euro (E) en die in Deense Kronen (D).

e Voordat je naar Denemarken op vakantie gaat wil je Deense Kronen aanschaffen voor 500 euro. Hoeveel DKK krijg je als je geen bijkomende kosten hoeft te betalen?

Uitleg

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.

Figuur 5.2

Dit biljet van 50 DKK heeft een waarde van $50 \cdot 0{,}13 = 6{,}50$ euro. Je berekent de waarde E in euro van een aantal Deens Kronen D met de formule $E = 0{,}13 \cdot D$.

De variabele E is recht evenredig met de variabele D, omdat een verdubbeling van een waarde van de éne variabele ook leidt tot een verdubbeling van de bijbehorende waarde van de andere variabele. Het getal 0,13, de constante waar je steeds mee vermenigvuldigt, heet de evenredigheidsconstante.

Bij zo'n recht evenredig verband kun je gemakkelijk een tabel en een grafiek maken. De grafiek wordt een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoeveel euro bedraagt de waarde van 1250 DKK?

b Hoeveel DKK is € 1000,- waard?

c Laat met een voorbeeld zien dat E verdubbelt als D verdubbelt.

d Als D drie keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met E? Laat dit zien met een berekening.

e Hier zijn E en D recht evenredig. Teken een bijpassende grafiek.

f Hoe kun je aan de grafiek zien dat het hier om een recht evenredig verband gaat?

g Als je in Nederland Deense Kronen koopt bij een bank, betaal je ook transactiekosten. Waarom is in dat geval het aantal DKK niet recht evenredig met het te betalen bedrag in euro?

Opgave 2

Een kopie maken met een kopieermachine kost € 0,125 per velletje.

a Hoeveel ben je kwijt als je in een jaar tijd 1750 kopieën maakt?

b Met welke formule kun je de kosten K in euro afhankelijk van het aantal kopieën a weergeven?

c Zijn deze twee variabelen recht evenredig met elkaar? Waarom?

d Maak een tabel en teken de grafiek bij deze formule.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Recht evenredig

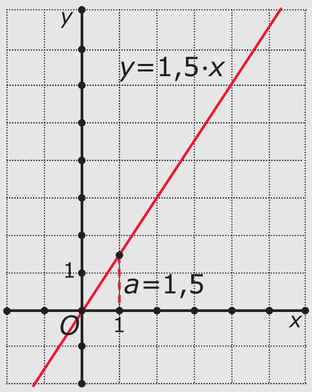
Een variabele y is **recht evenredig** met variabele x als een verdubbeling van x ook een verdubbeling van y tot gevolg heeft. De bijbehorende formule heeft dan de vorm

$y = a \cdot x$ met a een willekeurig reëel getal.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn die door de oorsprong gaat.

- a heet de **evenredigheidsconstante**.
- a bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt. Als a positief is, stijgt de lijn, is a negatief dan daalt de lijn. Daarom wordt a ook wel eens het **hellingsgetal** genoemd of de **richtingscoëfficiënt**.

Omgekeerd hoort ook bij elke rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel een **recht evenredig verband** tussen x en y.



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Recht evenredig

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$. Van welk van beide formules kun je met deze applet de grafiek maken? Bij welk van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?

Antwoord

Door $a = 2$ te kiezen maak je de grafiek van $y_1 = 2x$.
De grafiek van $y_2 = 2x + 3$ kun je niet maken want die grafiek gaat niet door (0,0), omdat bij $x = 0$ de uitkomst $y = 3$ hoort.
Alleen bij $y_1 = 2x$ is sprake van een recht evenredig verband omdat de grafiek daarvan wel een rechte lijn door (0,0) is.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Maak de grafiek van $y_1 = 2x$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y_1 = 2x$ door (0,0) gaat?

c De formule $y_2 = 2x + 3$ beschrijft geen recht evenredig verband. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat een verdubbeling van de waarde van x geen verdubbeling van de waarde van y oplevert bij deze formule.

d Teken de grafieken van $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$ in één figuur.

e Hoe kun je aan de grafiek van $y_2 = 2x + 3$ zien dat er in dit geval geen sprake is van een recht evenredig verband?

Opgave 4

Welke van de volgende formules beschrijven een recht evenredig verband? Licht je antwoord toe en geef in dat geval de evenredigheidsconstante. (Lees eventueel eerst in de **Theorie** na wat je daaronder verstaat.)

- $y_1 = x$
- $y_2 = -0{,}5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = \frac{1}{x}$
- $y_5 = x^2$
- $y_6 = 0$

Voorbeeld 2

Een schaatser schaatst met een constante snelheid van Sneek naar Leeuwarden. Na 14 minuten heeft hij 5 kilometer afgelegd. Geef een formule voor de tijd t die hij onderweg is (in minuten) afhankelijk van de afgelegde afstand s in km.

Antwoord

De schaatser doet over elke km $14/5 = 2{,}8$ minuten. Over s km doet hij $2{,}8 \cdot s$ minuten, dus $t = 2{,}8 \cdot s$ minuten. Dit is de gevraagde formule.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Welke twee variabelen zijn hier recht evenredig met elkaar? En waarom?

Je kunt de formule ook vinden door uit te gaan van $t = a \cdot s$ en dan a uit te rekenen door de gegeven waarden van t en s in te vullen.

b Bereken a.

Leeuwarden en Sneek liggen 26,4 kilometer uit elkaar.

c Hoe lang doet de schaatser over deze tocht?

d Hoe lang duurt het voordat de schaatser de Elfstedentocht (200 km) heeft afgelegd als zijn gemiddelde snelheid gelijk is aan de constante snelheid tussen Leeuwarden en Sneek?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens. Je kunt ook een formule maken van de vorm $s = a \cdot t$.

a In de natuurkunde wordt vaak de letter v gebruikt om de snelheid aan te geven.
Waarom stelt nu de evenredigheidsconstante a de snelheid voor? In welke eenheden?

b Bereken opnieuw de waarde van a. Hoe ziet de formule er nu uit?

Je kunt de formule die je in deze opgave hebt gevonden ook aflei-den uit die van de vorige opgave.

c Laat zien hoe dat gaat.

Oefenen

Opgave 7

In Zwitserland wordt met de Zwitserse Frank (SFr) betaald. De omrekenkoers is op zeker moment: 1 SFr = 0,83 euro.

Figuur 5.4

a Je bent in Zwitserland op vakantie en je koopt een souvenir voor SFr. 34,50. Hoeveel euro kost dit souvenir?

b Met welke formule kun je omrekenen van SFr naar euro? Noem het aantal SFr z en het aantal euro e.

c Als een ander souvenir anderhalf keer zo duur is in SFr, hoeveel keer zo duur is het dan in euro?

Voordat je op vakantie ging heb je waarschijnlijk Zwitserse Franks gekocht bij een bank in Nederland. Die bank rekent voor de aankoop van SFr nog € 5,00 aan kosten. Wel gebruiken ze dezelfde wisselkoers.

d Hoeveel kosten je SFr. 250,00?

e Is bij een aankoop van SFr in de situatie beschreven bij d het aantal euro dat je betaalt recht evenredig met het aantal gekochte SFr? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

De variabele y is recht evenredig met de variabele x. De bijbehorende evenredigheidsconstante is 5,8.

a Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x?

b Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

c Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y. Toon dit aan.

Opgave 9

Van een cirkel is de omtrek P recht evenredig met de diameter d. De bijbehorende evenredigheidsconstante wordt π genoemd.

a Welke formule geldt dus voor de omtrek van een cirkel?

b Is de omtrek van een cirkel ook recht evenredig met de straal r? Welke formule geldt er voor P afhankelijk van r?

c Is de oppervlakte A van een cirkel ook recht evenredig met de diameter? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Alexandra krijgt van oma een spaarvarken. Ze doet er elke week € 5,00 in, voor het eerst één week nadat zij het heeft gekregen. Haar jongere zusje Clarabella krijgt precies drie jaar later net zo'n spaarvarken. Zij doet er elke week € 8,00 in, ook voor het eerst één week nadat zij het heeft gekregen. Clarabella vraagt zich af wanneer ze evenveel geld in het spaarvarken zal hebben als haar zus als die zo door gaat.

a Vanaf het moment dat Clarabella begint te sparen, is het geld in haar spaarvarken recht evenredig met het aantal weken dat ze spaart. Waarom is Alexandra's spaargeld niet recht evenredig met het aantal weken na het moment waarop Clarabella begint te sparen?

b Beantwoord Clarabella's vraag met behulp van een berekening.

Opgave 11

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x? Stel in dat geval een passende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de oorsprong en door (12,39).

b De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten (4,12) en (12,39).

c De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten (10,-6) en (15,-9).

d De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt (10; 0,5).

e De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt (10; 0,5).

Toepassen

Naast de temperatuurschaal van Celsius (die wij meestal gebruiken) bestaan er nog andere **temperatuurschalen**, waaronder:

- De temperatuurschaal van Fahrenheit (die nog gebruikt wordt in Amerika).
  Je krijgt het aantal graden Fahrenheit door het aantal graden Celsius te delen door 10, de uitkomst te vermenigvuldigen met 18 en vervolgens nog 32 erbij te tellen.
- De temperatuurschaal van Réamur.
  Je krijgt het aantal graden Réamur door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.

Opgave 12

Hierboven worden verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C, die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R.

a Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_F.

b Leid ook een omrekenformule af van T_F naar T_C.

c Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_R.

d Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_R naar T_C.

e Welke van deze drie temperatuurschalen zijn recht evenredig?

Opgave 13

Hierboven worden drie verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C, die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R.

a Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_F naar T_R.

b Leid ook een omrekenformule af van T_R naar T_F.

Testen

Opgave 14

De variabele y is recht evenredig met de variabele x. De bijbehorende evenredigheidsconstante is 0,35.

a Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x?

b Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

c Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y. Toon dit aan.

Opgave 15

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x? Stel in dat geval een passende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (4,10) en door (6,15).

b De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt (2,6).

c De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt (2,6).

5.2 Lineaire functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) lineair verband een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen;
- werken met recht evenredige verbanden.

Verkennen

Opgave V1

In het deel van de atmosfeer waarin het menselijk leven plaats vindt daalt de luchttemperatuur elke km dat je hoger komt gemiddeld met ongeveer 6,5 °C. Onder bepaalde weersomstandigheden kan met de formule $T = 25 - 0{,}0065h$ temperatuur T in graden celsius op een hoogte van h meter worden berekend. Dat is handig voor bijvoorbeeld bergbeklimmers, dan weten ze welke temperaturen ze tijdens de klim kunnen verwachten.

a Hoe ziet de grafiek van T afhankelijk van h er uit?

b Is er sprake van een recht evenredig verband tussen T en h? Waarom?

c Bereken de temperatuur op 7500 meter hoogte.

d Op welke hoogte komt de temperatuur voor het eerst onder het vriespunt?

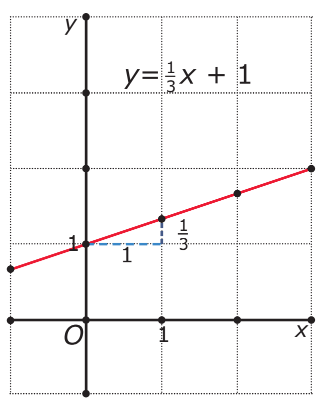
Uitleg

De grafiek bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ is een rechte lijn.
Want als je begint met de uitkomst voor $x = 0$ te berekenen ($y = 1$), dan wordt daarna elke keer dat je de x-waarde met 1 verhoogt, de y-waarde met $\frac{1}{3}$ verhoogd. En als je de x-waarde met 1 verlaagt, dan wordt de y-waarde met $\frac{1}{3}$ verlaagd. Dat getal $\frac{1}{3}$ is de coëfficiënt van x en bepaalt de richting van de lijn. Het is de richtingscoëfficiënt of ook wel het hellingsgetal van de lijn.

Bij een formule die in de vorm $y = \ldots$ (met op de stippeltjes een uitdrukking met alleen x als variabele) staat, zeg je dat y een lineaire functie is van x.

Door in de formule $x = 0$ in te vullen vind je het snijpunt van de grafiek met de y-as.

Voor het snijpunt van de grafiek met de x-as moet je $\frac{1}{3}x + 1 = 0$ oplossen. Dat geeft $x = -3$, dus het snijpunt met de x-as is $(-3,0)$.



Figuur 5.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg uit hoe je bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ snel een grafiek kunt tekenen.

b Teken snel een grafiek bij de formule $y = -0{,}25x + 4$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

c Teken snel een grafiek bij de formule $y = 4x - 6$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

d Teken snel een grafiek bij de formule $y = 5 - x$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

e Hoe kun je aan de richtingscoëfficiënt zien of de grafiek daalt of stijgt?

f Hoe ziet de grafiek er uit als de richtingscoëfficiënt 0 is? Geef een voorbeeld van een formule waarin dit zo is.

Opgave 2

Gegeven is de lineaire functie $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

a Welk punt op de y-as ligt op de grafiek van deze functie? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn?

b Teken de grafiek van deze functie.

c Bereken het snijpunt met de x-as van deze grafiek.

d Voor welke waarde van x geldt $y = 30$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire functie

Een variabele y is een **lineaire functie** van x als er een formule bij hoort van de vorm

$y = a \cdot x + b$

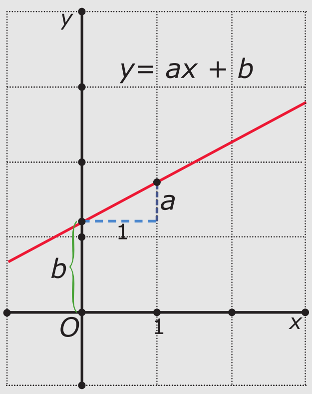
met a en b willekeurige reële getallen.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
De formule $y = a \cdot x + b$ is de **vergelijking van de lijn**.

De waarden van a en b kun je nog kiezen.

- a heet de **richtingscoëfficiënt** of het **hellingsgetal** van de lijn. Dit getal geeft de toename of afname van y als x met 1 wordt verhoogd. a bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt.
- b bepaalt het snijpunt met de y-as, dat is $(0,b)$.

Bij elke rechte (niet verticale) lijn in een xy-assenstelsel hoort een **lineaire functie** die het verband tussen x en y beschrijft. Bij een verticale lijn kun je geen functie maken.



Figuur 5.2

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven is de formule $y = 1{,}5x + 3$.
Omdat deze formule de vorm $y = a \cdot x + b$ heeft, is y een lineaire functie van x. De grafiek is een rechte lijn die je snel kunt tekenen omdat

- hij door het punt (0,3) moet gaan;
- het hellingsgetal 1,5 is, wat betekent dat het vergroten van de x-waarde met 1 een toename van de y-waarde met 1,5 tot gevolg heeft.

Zo kun je gemakkelijk meer punten van de rechte lijn vinden en hem tekenen.
De formule heet ook wel de vergelijking van de lijn.

Door de waarden van a en b te veranderen, krijg je andere lineaire functies.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Maak de grafiek van de lijn met vergelijking $y = 2x + 1$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y = 2x + 1$ door (0,1) gaat?

c Het punt (100,201) ligt op deze lijn. Ga dat na en bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn het punt dat hoort bij $x = 101$.

Opgave 4

Teken de grafieken van de volgende lineaire functies. Controleer je antwoorden met behulp van de applet.

- $y_1 = x - 3$
- $y_2 = \text{-}0{,}5x$
- $y_3 = \text{-}x + 1$
- $y_4 = 5 - 2x$
- $y_5 = 3$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven zijn de lineaire functies $y = 0{,}5x + b$. Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt (3,5)?

Antwoord

Vul $x = 3$ en $y = 5$ in de gegeven formule in. Je vindt: $5 = 0{,}5 \cdot 3 + b$.

Dit levert op: $b = 3{,}5$.

Opgave 5

Gegeven zijn de lineaire functies $y = ax + 6$.

Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt (3,5)?

Opgave 6

De functies $y = ax + 1$ hebben als grafiek een rechte lijn.

Voor welke waarden van a loopt de grafiek van zo'n functie evenwijdig met de lijn $y = 6 - 0{,}5x$?

Oefenen

Opgave 7

Vier lineaire functies zijn gegeven door de vergelijkingen $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -2x + 1$, $y_3 = 2x + 5$ en $y_4 = -0{,}5x + 5$.

a Teken de vier bijbehorende rechte lijnen in één assenstelsel.

b Bij welke van deze lineaire functies hoort een rechte lijn die evenwijdig loopt met die van $y_1 = 2x + 1$? Hoe kun je dat aan de formule zien?

c Wat valt op aan de twee lijnen die horen bij y_3 en y_4?

Opgave 8

In mijnen geldt als vuistregel dat de temperatuur 0,025 °C stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt. Op een bepaald moment is de buitentemperatuur bij de ingang van een mijnschacht vast op 20 °C.

Figuur 5.3 Black Diamond Mine

a Welke temperatuur verwacht je dan op een diepte van 300 meter?

b Stel bij de buitentemperatuur van 20 °C een formule op voor T (de temperatuur in de mijn in °C) afhankelijk van d (de diepte in meters).

c Een mijnwerker meet op dat moment een temperatuur van 34,3 °C. Hoe diep zit hij?

Op een ander tijdstip meet een mijnwerker die op 684 meter diepte zit een temperatuur 37,8 °C.

d Hoeveel bedraagt op dat tijdstip de buitentemperatuur?

Opgave 9

Een kaars met een lengte van 40 cm brandt elk uur nadat hij is aangestoken 0,125 cm op. De lengte l (in cm) van deze kaars hangt af van de brandtijd t (in uur).

a Welke formule geldt voor l afhankelijk van t? Waarom is hier sprake van een lineaire functie?

b Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?”?

c Los deze vergelijking op en geef antwoord op de bij b gestelde vraag.

Opgave 10

Door de formule $y = 2x + b$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Als $b = 5$ krijg je één van die functies. Teken de bijbehorende grafiek.

b Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt (7,12)?

c Voor welke waarde van b is (12,0) het snijpunt van de grafiek met de x-as?

Opgave 11

Door de formule $y = ax + 10$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Door welk punt gaan alle grafieken van deze functies?

b Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt (7,12)?

c Voor welke waarde van a is zo'n functie evenwijdig met de lijn die hoort bij de formule $x + 2y = 4$?

Toepassen

Ieder huishouden verbruikt energie. Meestal betreft dat gas en elektra. De prijs daarvoor hangt natuurlijk af van de leverancier en bestaat uit twee gedeelten: een prijs voor het verbruik en een vaste leveringsprijs, die het vastrecht wordt genoemd. In huis heb je meters die het verbruik registreren. Hiernaast zie je een oude elektriciteitsmeter.

Figuur 5.4 elektriciteitsmeter

Bij een bepaalde energieleverancier betaalde je in 2010 bijvoorbeeld:

- voor het verbruik van gas:
  een vastrecht van € 45,00 per jaar en daar boven op € 0,38 per verbruikte m^3
- voor het verbruik van elektriciteit:
  een vastrecht van € 52,00 per jaar en daar boven op € 0,07 per verbruikte kWh (kiloWattuur)

Opgave 12

Hierboven vind je enkele gegevens over de kosten voor het energieverbruik van huishoudens rond 2010.

a Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikte ongeveer 1950 m^3 gas per jaar. Hoeveel moesten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

b Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikte ongeveer 4800 kWh elektriciteit per jaar. Hoeveel moesten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

c Leid uit de tekst een formule af voor de kosten K_g per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte m^3 gas g. Leid ook een formule af voor de kosten K_e per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte kWh elektriciteit e.

Jordi woont in 2010 op een studentenkamer en verbruikt jaarlijks ongeveer 430 m^3 gas en 1100 kWh elektriciteit. Zijn vriendin Amira heeft een eigen appartement en verbruikt jaarlijks ongeveer 680 m^3 gas en 1600 kWh elektriciteit. Jordi trekt bij Amira in. Hun gezamenlijk verbruik wordt daardoor ongeveer 760 m^3 gas en 1840 kWh elektriciteit. Ze zijn allebei bij deze energieleverancier.

d Zijn ze nu goedkoper uit?

Opgave 13

In 2010 betaalde je bij een bepaalde waterleidingmaatschappij € 1,20 per kubieke meter water. Daarnaast betaalde je ook een bedrag voor vaste lasten zoals administratie en onderhoud van de leidingen. Die vaste lasten bedroegen bij deze maatschappij € 40,00 per jaar.

a Je verbruikt per jaar a m^3 water. Waarom zijn de kosten voor het waterverbruik exclusief de vaste lasten recht evenredig met a?

b Welke formule geldt voor de totale jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K inclusief de vaste lasten?

c Iemand moet over 2010 voor het waterverbruik € 810,40 betalen. Hoeveel m^3 water heeft hij dat jaar verbruikt?

Testen

Opgave 14

Gegeven is de lineaire functie met vergelijking $y = 0{,}25x + 4$.

a Welk punt op de y-as ligt op de grafiek van deze functie? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn?

b Teken de grafiek van deze functie.

c Bereken het snijpunt met de x-as van deze grafiek.

d Voor welke waarde van x geldt $y = 1000$?

e Van een andere lineaire functie loopt de grafiek evenwijdig met die van de gegeven functie. Die grafiek gaat door (2,0). Welke formule hoort er bij die functie?

Opgave 15

Voor het verbruik van water betaalt elk huishouden een vast bedrag per jaar plus een prijs per verbruikte m^3 water. Bij een bepaalde aanbieder is het vaste bedrag € 45,00 en moet je € 1,05 per m^3 betalen.

a Welke formule kun je hierbij opstellen voor de jaarlijkse kosten K bij een verbruik van a m^3?

b Hoeveel betaalt een huishouden aan deze aanbieder voor een verbruik van 120 m^3 water in een bepaald jaar?

c Als een huishouden € 200 moet betalen voor het waterverbruik in een bepaald jaar, hoeveel water hebben ze dan dat jaar verbruikt?

5.3 Het hellingsgetal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen van een lineaire functie waarvan de grafiek door twee gegeven punten gaat.

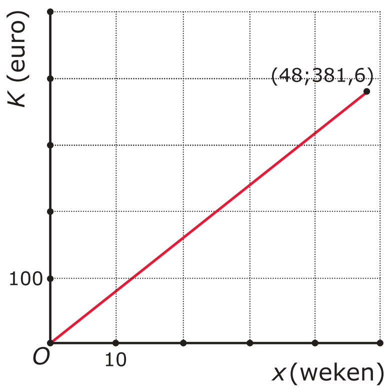
Voorkennis

- bij een (in woorden beschreven) lineair verband een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

In de gemeente Overdal wordt maximaal 48 weken per jaar het huisvuil opgehaald. In elke zwarte vuilcontainer zit een chip die er voor zorgt dat elke leging geregistreerd wordt. De gemeente stuurt dan op het eind van het jaar een rekening. Als je iedere week de zwarte container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Hiernaast zie je een grafiek waarin de kosten zijn uitgezet tegen het aantal weken.



Figuur 5.1

a Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $K = a \cdot x$ waarin a een constante is. Waarom is dat?

b Bereken de waarde van de evenredigheidsconstante a die bij deze grafiek past.

Opgave V2

In de gemeente Vijfhouten worden de kosten voor het ophalen van de zwarte vuilcontainers anders berekend. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar, net als in Overdal, € 381,60 betalen.

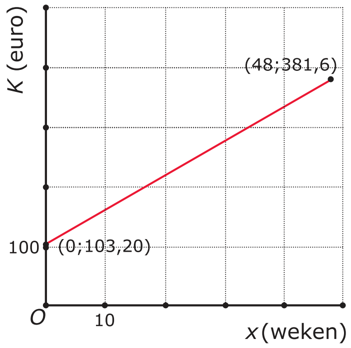
a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K in euro afhankelijk van het aantal weken x dat de zwarte container wordt geleegd.

b De grafiek is een rechte lijn, dus er hoort een formule bij van de vorm $K = a \cdot x + b$. Welke waarde heeft b?

c Hoe kun je de waarde van de richtingscoëfficiënt a bepalen?

Uitleg

In de gemeente Vijfhouten worden de zwarte vuilcontainers wekelijks en maximaal 48 keer per jaar opgehaald. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Deze grafiek laat het verband zien tussen het aantal keren x dat je de zwarte container laat legen en de kosten per jaar K.



Figuur 5.2

Bij deze grafiek hoort een lineaire functie van de vorm $K = ax + b$. Uit de gegevens volgt onmiddellijk $b = 103{,}20$. Maar hoe bepaal je nu de waarde van de richtingscoëfficiënt a?

Bekijk de twee gegeven punten van de grafiek $(0; 103{,}20)$ en $(48; 381{,}60)$. Het aantal weken x neemt tussen deze twee punten toe met $48 - 0 = 48$. Het te betalen bedrag K neem tussen deze twee punten toe met $381{,}60 - 103{,}20 = 278{,}40$. Per week is dat $\frac{278{,}40}{48} = 5{,}80$.

De toename per eenheid is het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn.

Kortweg: $a = \frac{381{,}60 - 103{,}20}{48 - 0} = 5{,}80$.

En de bij de grafiek passende lineaire functie is $K = 5{,}80x + 103{,}20$.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het hellingsgetal berekent als je van een rechte lijn twee punten weet.

In een andere gemeente wordt hetzelfde systeem gehanteerd als in de gemeente Vijfhouten, alleen met andere bedragen. Daar betaalt de familie Arends in 2011 € 277,50 en daarvoor hebben ze de zwarte container 34 keer laten legen. Hun buren hebben nog twee opgroeiende kinderen en moesten hun zwarte container 42 keer laten legen. Zij betaalden dat jaar € 327,50.

a Hoeveel keer extra werd de zwarte container van de buren geleegd?

b Hoeveel moesten de buren meer betalen?

c Hoeveel kost in deze gemeente dus het legen van de zwarte container per keer?

Ook in deze gemeente geldt een formule van de vorm $K = ax + b$.

d Welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt a?

e Door welke twee punten gaat de rechte lijn die bij deze formule hoort? Hoe kun je vanuit die twee punten in één keer de richtingscoëfficiënt berekenen?

f Je hebt nu gevonden dat de formule er uit ziet als $K = 6{,}25x + b$. Hoe vind je de waarde van b?

Opgave 2

De grafiek van een rechte lijn gaat door $A(3,5)$ en $B(7,11)$. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$.

a Hoeveel neemt de waarde van x toe tussen beide punten?

b Hoeveel neemt de waarde van y toe tussen beide punten?

c Hoeveel neemt de waarde van y toe als x met 1 wordt verhoogd?

Je hebt de waarde van de richtingscoëfficiënt a berekend.

d Hoe zie de formule er nu uit?

e Bereken de waarde van b.

f Schrijf tenslotte de complete formule op die bij deze lijn past.

g Kun je je antwoord nog controleren?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De algemene formule voor een lineair verband is

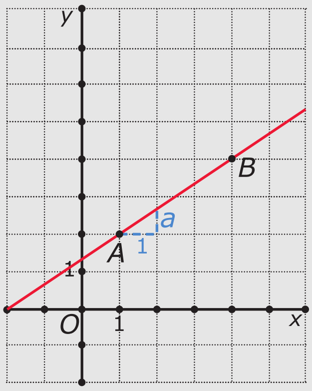
$y = a \cdot x + b$ met a en b willekeurige reële getallen.

Het **hellingsgetal**, of de **richtingscoëfficiënt**, geeft aan hoeveel de y-waarde stijgt of daalt als de x-waarde met 1 toeneemt. Dit getal is in de algemene formule de a, de coëfficiënt van x.

- Als $a > 0$ dan is de lijn stijgend, als $a < 0$ dan is de lijn dalend.
- Als $a = 0$ dan is de lijn horizontaal, evenwijdig aan de x-as.
- Een verticale lijn heeft geen hellingsgetal.
- Twee **evenwijdige lijnen** hebben hetzelfde hellingsgetal.

Zijn van een lineaire grafiek alleen twee punten bekend, dan kun je zelf een bijpassende formule opstellen. Je bepaalt dan eerst het hellingsgetal van de lijn door te berekenen hoeveel de y-waarde toeneemt als de x-waarde met 1 toeneemt. (Dit kan alleen bij lijnen die niet verticaal lopen.)

Experimenteer met de applet. De punten A en B kun je verplaatsen. Je moet dan alleen vanuit de coördinaten van die punten de formule van de lijn door beide punten kunnen maken. Zet je de punten recht boven elkaar, dan zie je dat ook GeoGebra geen formule van de vorm $y = a \cdot x + b$ kan maken...



Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Stel een vergelijking (formule) op bij de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$.

Antwoord

De vergelijking heeft de vorm $y = a \cdot x + b$ waarin a het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel y toeneemt bij een toename van x met 1. Dat kun je zo doen:

- Tussen de punten A en B neemt x toe met $4 - 1 = 3$.
- Tussen de punten A en B neemt y toe met $4 - 2 = 2$.
- Als x met 1 toeneemt, neemt y toe met $\frac{2}{3}$.

Nu je weet dat het hellingsgetal $a = \frac{2}{3}$, wordt je formule $y = \frac{2}{3}x + b$.

De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van één van beide gegeven punten in de vergelijking in te vullen.

Ga na, dat je dezelfde vergelijking krijgt als in de applet. (Maar nu exact in breuken!)

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(5,7)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(1,0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(4,3)$.

e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-3,-3)$ en $B(4,1)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(2,0)$ en $B(0,3)$.

Opgave 4

Bij een lineaire functie hoort bij $x = -3$ de uitkomst -40 en bij $x = 2$ de uitkomst 10.

Stel de bijbehorende formule op.

Opgave 5

Bij het **Practicum** kun je telkens twee nieuwe lijnen maken door de vier gegeven punten te verplaatsen. Je ziet dan van beide lijnen de formule. Je kunt jezelf of elkaar oefenen door die na te rekenen. Je kunt ook lijnen met een gegeven formule maken door de punten op de juiste plek te zetten.

a Oefen met een medeleerling.

b Als je punt A recht onder punt $B(4,4)$ zet, is de lijn door beide punten evenwijdig aan de y-as. Welke formule hoort er bij zo'n lijn? Kun je dat verklaren?

c Bij welke lijnen horen formules van de vorm $y = b$? Kun je dat verklaren?

Voorbeeld 2

Een lijn k gaat door het punt (1,20) en loopt evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = 2x + 1$. Welke formule hoort bij lijn k?

Antwoord

Omdat de lijnen l en k evenwijdig zijn, hebben ze dezelfde richtingscoëfficiënt. De formule bij lijn k heeft dus de vorm $y = 2x + b$.

De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van het gegeven punt van k in de vergelijking in te vullen: $20 = 2 \cdot 1 + b$ geeft $b = 18$.

De gevraagde formule is $y = 2x + 18$.

Opgave 6

Lijn k gaat door het punt (2,24) en is evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = -x$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Opgave 7

Lijn k gaat door het punt (-3,20) en is evenwijdig met de lijn l door de punten (4,5) en (12,15).

Welke formule hoort bij lijn k?

Oefenen

Opgave 8

De **Chinese munteenheid** is de yuan. Je weet wel dat er iets meer dan acht yuan in een euro gaan, maar de precieze koers schommelt nogal. Bovendien rekent een bank in China als je euro's inwisselt voor yuan waarschijnlijk nog bepaalde omrekenkosten. Op zekere dag betaal je in Beijing voor 100 yuan € 85,00 en later betaal je voor 50 yuan € 43,75. Ga er van uit dat de wisselkoers niet is veranderd intussen.

a Hoeveel euro kost elke yuan?

b Hoeveel bankkosten betaal je elke keer als je yuan koopt?

Het bedrag E in euro dat je betaalt voor Y yuan kun je met een lineaire formule berekenen. Ga uit van een constante wisselkoers.

c Stel die formule op.

d Hoeveel kosten je 250,00 yuan?

Opgave 9

Stel in de volgende gevallen een formule op bij de beschreven lijn.

a De lijn heeft een hellingsgetal van 4 en gaat door het punt (0,6).

b De lijn gaat door de punten $A(0,31)$ en $B(2,15)$.

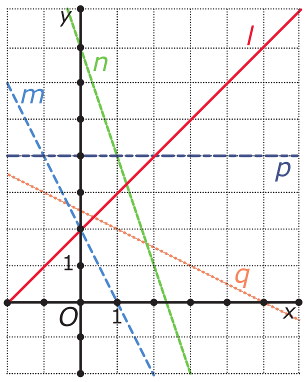
c De lijn gaat door de punten $A(6,2)$ en $B(12,-1)$.

d De lijn gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(7,0)$.

Opgave 10

Bekijk de rechte lijnen in de grafiek. Elke rechte lijn is de grafiek van een lineaire functie.

Geef de bijbehorende formules.



Figuur 5.4

Opgave 11

De tabel laat zien hoe een kaars opbrandt. Op een aantal tijdstippen is de lengte van de kaars gemeten in halve cm nauwkeurig. Teken je hierbij een grafiek dan lijken de punten op een rechte lijn te liggen. Het lijkt er daarom op dat L een lineaire functie is van t. Maar hoe weet je dat zeker?

tijdstip t in uur	0	3	5	9
lengte L in cm	43	38,5	35,5	29,5

Tabel 5.1

a Neem aan dat L een lineaire functie is van t en stel met behulp van de eerste twee gegevens uit de tabel een daarbij passende formule op.

b Ga na, dat ook de andere twee gegevens in de tabel aan de gevonden formule voldoen.

c Waarom kun je nu wel zeggen dat de gegevens in de tabel bij een lineaire functie horen, maar kun je nog steeds niet zeggen dat L een lineaire functie is van t?

Opgave 12

In een binnenvaartschip wordt grind gestort. Bij een lading van 200 ton is de diepgang 2,25 m en bij een lading van 600 ton is de diepgang 3,75 m. Bij een diepgang van 5,25 m is het schip volgeladen.

De diepgang D van dit schip in m is een lineaire functie van het gewicht van de lading L in ton.

a Stel een daarbij passende formule op.

b Welke diepgang heeft het lege schip?

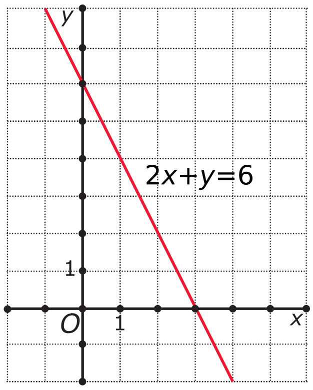
Het schip moet door een vaargeul met een diepte van 5 m. Voor de veiligheid moet er minstens 1 m water onder het schip overblijven.

c Hoeveel ton grind mag dit schip maximaal laden? Rond je antwoord af op gehele tonnen.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het opstellen van een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of drie punten op een rechte lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn, of lijnen loodrecht op elkaar staan.



Figuur 5.5

Opgave 13: Drie punten op één lijn

Hierboven kun je lezen wat de vergelijking van een lijn is.

Je wilt onderzoeken of de drie punten $O(0,0)$, $A(30,12)$ en $B(50,19)$ op één lijn liggen.

a Stel een vergelijking op van de lijn door O en A.

b Onderzoek nu of B op deze lijn ligt.

c Onderzoek of de punten A, B en $C(90,33)$ op één lijn liggen.

Opgave 14: Evenwijdige en loodrechte lijnen

Je weet dat lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt evenwijdig zijn. Dat betekent dat je kunt nagaan of een figuur een parallellogram is door hem in een assenstelsel te plaatsen en na te gaan of er bij de lijnen door de hoekpunten sprake is van gelijke richtingscoëfficiënten.

Neem bijvoorbeeld vierhoek $ABCD$ met $A(10,20)$, $B(16,23)$, $C(12,30)$ en $D(18,33)$.

a Laat met behulp van richtingscoëfficiënten zien dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn.

b Om aan te tonen dat deze vierhoek een parallellogram is, moet je nu laten zien dat ook het andere paar zijden evenwijdig is. Laat zien hoe je dat doet.

Stel je nu eens voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt 3 die door $A(0,2)$ gaat.

c Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,5)$?

d Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90°. Teken de beeldpunten van A en B en teken de lijn door die beeldpunten.

e Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn door beide beeldpunten?

Als een lijn l als richtingscoëfficiënt p heeft, dan heeft de lijn die loodrecht staat op l als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{p}$.

f Neem de lijn l met vergelijking $y = -0{,}5x+3$. Stel een vergelijking op van de lijn door $(1,5)$ en loodrecht op l.

g Je kunt het opstellen van een vergelijking van een lijn loodrecht op een andere lijn oefenen met de applet in het **Practicum**. Doe dit samen met een medeleerling; geef elkaar opgaven op.

Testen

Opgave 15

Stel in de volgende gevallen een formule op voor de bijbehorende lineaire functie.

a De grafiek is een rechte lijn door (0,12) en (36,0).

b De grafiek is een rechte lijn door (5,40) en is evenwijdig met de rechte lijn met formule $y = 0{,}25x$.

Opgave 16

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.
Je wilt weten hoeveel de lege kabelhaspel weegt.

a Stel daartoe een formule op van de lineaire functie van het gewicht G in kg afhankelijk van het aantal meter a kabel op de haspel.

b Bereken nu hoeveel een lege kabelhaspel weegt.

5.4 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt van twee lineaire functies berekenen;
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Voorkennis

- bij een (in woorden beschreven) lineaire functie een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) berekenen en daarmee de formule van een lineaire functie opstellen;
- berekeningen met lineaire functies uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

Je staat op een viaduct boven de snelweg. Auto A rijdt er met een snelheid van 105 km/h onder door. Auto B rijdt er 5 minuten later met een snelheid van 115 km/h onder door.

a Na hoeveel tijd heeft auto B auto A ingehaald?

b Misschien kon je bij a geen oplossing vinden, misschien ook wel. Een aanpak van zo'n probleem is het invoeren van variabelen en het opstellen van vergelijkingen. Welke vergelijkingen bijvoorbeeld?

Opgave V2

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Je wilt hun leeftijden in 2006 weten. Hier zie je hoe je dit kunt aanpakken met behulp van lineaire verbanden.

a Laat x de leeftijd van Bob in 2006 zijn en y die van Jeroen in 2006. Welke formule kun je dan maken?

b Bedenk welke leeftijden Bob en Jeroen in 2010 hebben. Maak ook een formule voor de situatie in 2010.

c Beide formules kun je herleiden tot een vorm waarin y een functie van x is. Laat dat zien.

d Hoe kun je nu hun leeftijden in 2006 bepalen?

e Vergelijk jouw oplossing bij de voorgaande opgave (als je die hebt gevonden) met de aanpak in deze opgave. Beschrijf voor- en nadelen van beide manieren van werken.

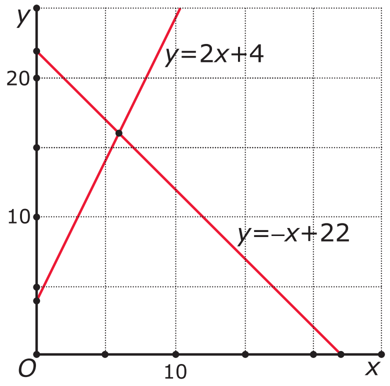
Uitleg

Je hebt bij een bepaald probleem twee vergelijkingen gevonden zoals:
$y = -x + 22$
en
$y = 2x + 4$.

Je wilt de waarden van x en misschien ook y berekenen die aan beide vergelijkingen voldoen.

Je kunt daar grafieken bij tekenen zoals die hiernaast. Het punt dat aan beide formules voldoet is het snijpunt van beide grafieken. Omdat in dat punt de y-waarden van beide formules gelijk zijn, kun je het uitrekenen door $-x + 22 = 2x + 4$ op te lossen.
Deze lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode. Ga na dat je $x = 6$ vindt. Door invullen van deze x-waarde in één van beide lineaire functies vind je ook de gewenste y-waarde. Het snijpunt van beide grafieken is (6,16).

En daarmee kun je antwoord geven op de vraag die werd gesteld.



Figuur 5.1

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het snijpunt berekent van de grafieken bij twee lineaire formules.

a Bereken zelf het snijpunt van $y = -x + 22$ en $y = 2x + 4$.

b Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = -x + 12$ en $y = x + 13$.

c Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 6x - 1$ en $y = 3x + 3$.

d Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 2x$ en $y = 3$.

Opgave 2

Je wilt het volgende probleem oplossen.

> De afstand van Deventer naar Amersfoort over de snelweg A1 is 70 km. De éne automobilist rijdt met een constante snelheid van 100 km/uur van Amersfoort naar Deventer. Een andere automobilist start op hetzelfde moment in Deventer en rijdt 120 km/uur. Op welke afstand vanaf Amersfoort gerekend, passeren ze elkaar?

a Probeer het probleem op te lossen.

Je kunt dit probleem oplossen met een lineaire vergelijking. Noem de tijd die ze onderweg zijn t uur en de afstand tot Amersfoort die ze hebben afgelegd s km.

b Welke twee lineaire formules kun je opstellen?

c Los het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

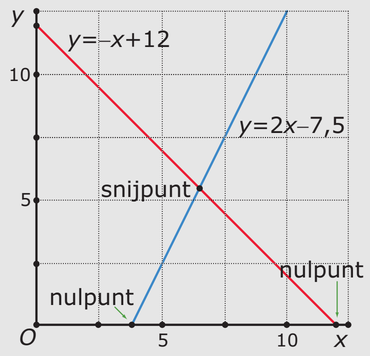
Als je een probleem kunt 'vertalen' naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een **lineair model** hebt gemaakt. Vaak gaat het dan om het berekenen van een **snijpunt** van de grafieken bij twee formules.

Het snijpunt van de grafieken bij lineaire formules zoals $y = -x + 12$ en $y = 2x - 7{,}5$ is als volgt uit te rekenen:

- Je stelt beide formules aan elkaar gelijk: $-x + 12 = 2x - 7{,}5$.
- Deze **lineaire vergelijking** los je op met de balansmethode. Je vindt: $x = 6{,}5$.
- De bijbehorende waarde van y vind je door de gevonden x-waarde in één van beide formules te substitueren.

Je krijgt als snijpunt van beide lijnen $(6{,}5; 5{,}5)$.

Ook een **nulpunt**, dus het snijpunt van de grafiek met de x as, van een lineaire formule is op te sporen door een vergelijking op te lossen. Het nulpunt van de formule $y = 2x - 7{,}5$ vind je door $2x - 7{,}5 = 0$ op te lossen. Dit geeft $x = 3{,}75$, dus het nulpunt is $(3{,}75; 0)$.



Figuur 5.2

Voorbeeld 1

Bereken het snijpunt van de lijn l door (2,0) en (3,4) en de lijn k door (2,1) en (4,0).

Antwoord

Stel eerst bijbehorende lineaire formules op.

- Bij lijn l vind je de formule $y = 4x - 8$.
- Bij lijn k vind je de formule $y = -0{,}5x + 2$.

Voor het snijpunt geldt $4x - 8 = -0{,}5x + 2$.

Met de balansmethode vind je $x = \frac{20}{9}$. Het snijpunt wordt na invullen van deze x-waarde $\left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Opgave 3

In de **Theorie** kun je nalezen hoe je het snijpunt van de grafieken van twee lineaire formules berekent. Ook wordt besproken wat het nulpunt van een lineaire functie is en hoe je dit berekent.

a Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe het snijpunt van twee lineaire functies wordt berekend. Voer zelf de complete berekening uit en ga na, dat je hetzelfde krijgt.

b Bereken het snijpunt van de lijn l door (0,5) en (6,2) en de lijn k met bijbehorende formule $y = 0{,}4x - 2$.

c Bereken het snijpunt van de lijn l door (0,0) en (2,1) en de lijn m door (0,4) en (4,0).

Opgave 4

Twee kaarsen branden gelijkmatig op, hun lengte L in cm is een lineaire functie van de brandtijd t in uren. Op $t = 0$ heeft kaars I een lengte van 35 cm en kaars II een lengte van 42 cm. 8 uur later zijn beide kaarsen nog 20 cm lang.

Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de tijdstippen waarop deze kaarsen zijn opgebrand? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een goed voorbeeld van het werken met een lineair model is de keuze tussen een auto met een benzinemotor of een dieselmotor. Dat komt omdat er sprake is van twee soorten kosten per jaar, namelijk vaste kosten (voor het kopen van de auto, de verzekering en de wegenbelasting en het onderhoud) en brandstofkosten afhankelijk van het aantal gereden km per jaar.
Iemand maakt de volgende schatting:

- Rijden in een benzineauto kost ongeveer € 3000 per jaar en dan heb je nog jaarlijks de verzekering en de wegenbelasting, samen zo'n € 500 per jaar. De brandstofkosten zijn ongeveer € 1,80 per liter en je rijdt ongeveer 1 op 12, dus met 1 liter benzine rijdt je 12 km.
- Rijden in een dieselauto kost ongeveer € 4000 per jaar en dan heb je nog jaarlijks de verzekering en de wegenbelasting, samen zo'n € 750 per jaar. De brandstofkosten zijn ongeveer € 1,20 per liter en je rijdt ongeveer 1 op 20, dus met 1 liter diesel rijdt je 20 km.

Hierbij kan hij twee formules opstellen voor de kosten K als functie van het aantal jaarlijks gereden kilometers a. Laat zien hoe dat gaat en bereken bij welk aantal gereden km per jaar het rijden op diesel voordeliger is.

Antwoord

Leidt zelf af dat uit de gegevens volgt:

- Voor de benzineauto: $K = 3500 + 0{,}15a$.
- Voor de dieselauto: $K = 4750 + 0{,}06a$.

Je kunt nu narekenen dat je volgens deze schatting bij ongeveer 13900 km per jaar voordeliger uit bent met het rijden op diesel.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe iemand een lineair model opstelt bij de vraag wat voordeliger is, rijden op benzine of op diesel.

a Laat zien hoe je uit zijn aannames de formule voor de jaarlijkse kosten van de benzineauto kunt afleiden.

b Doe hetzelfde voor de jaarlijkse kosten van de dieselauto.

c Bereken bij welk aantal jaarlijks gereden km de kosten voor de benzineauto even hoog zijn als voor de dieselauto. Laat zien dat het antwoord overeen komt met dat in het voorbeeld.

Opgave 6

Als een ondernemer een nieuw product op de markt brengt, dan maakt hij kosten. Die kosten kun je vaak grofweg in twee categorieën verdelen:

- vaste kosten voor het ontwikkelen van het product en het opzetten van een productielijn en een magazijn;
- variabele kosten die afhangen van het aantal van die producten dat hij maakt, bijvoorbeeld materiaalkosten, loonkosten, en dergelijke.

Stel je voor dat een bedrijf een nieuwe lamp op de markt wil brengen. De vaste kosten zijn becijferd op € 350.000. De kosten per geproduceerde lamp bedragen € 6,50. Het bedrijf gaat deze lampen verkopen voor € 11,50 per stuk.

a Noem het aantal verkochte lampen q. Welke formule kun je dan opstellen voor de totale kosten TK?

b Welke formule kun je opstellen voor de totale opbrengst TO?

c Bij beide formules horen rechte lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen economen wel het ‘break-even point’. Bereken dit punt. Waarom heeft het die naam?

Opgave 7

Voor een muziekuitvoering zijn 300 kaartjes verkocht. Kinderen betalen € 2,00 en volwassenen € 3,00. De totale inkomsten zijn in totaal € 787,00.

a Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Welke twee lineaire formules kun je dan afleiden?

b Schrijf deze formules zo, dat k een functie is van v.

c Bij beide lineaire functies horen rechte lijnen. Bereken het snijpunt van deze twee lijnen.

d Hoeveel kaartjes van elke soort zijn er verkocht?

Oefenen

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y_1 = \frac{1}{4}x$ en $y_2 = 2x + 5$.

a Teken de grafieken van beide functies in één figuur en geef daarin het snijpunt en alle nulpunten aan.

b Bereken het exacte snijpunt van beide grafieken.

Opgave 9

De lijn k gaat door (5,0) en (1,1). De lijn l gaat door (0,5) en (3,0).

a Stel bij deze lijnen passende lineaire formules op.

b Bereken het exacte snijpunt van beide lijnen.

Opgave 10

Een bedrijf brengt een nieuwe keukenmachine op de markt. Deze keukenmachine gaat € 124,50 kosten. Om het apparaat te kunnen produceren heeft het bedrijf kosten gemaakt. Het ontwikkelen van het apparaat en het inrichten van een productielijn hebben € 310.000,00 gekost. Verder kost elk apparaat het bedrijf aan materiaal en loonkosten € 82,00.

a Stel een formule op voor de totale kosten TK voor de productie van x van die keukenmachines.

b Stel ook een formule op voor de totale opbrengst TO van de verkoop van x van die keukenmachines.

c Hoeveel keukenmachines moet het bedrijf minstens verkopen om winst te kunnen maken?

Opgave 11

Een vrachtauto weegt volgeladen met 6,5 m^3 zand 14,5 ton. Nadat de chauffeur 2,5 m^3 zand heeft bezorgd, weegt de vrachtauto met zand nog 10,75 ton.

Hoeveel weegt de lege vrachtauto?

Opgave 12

Een zebra ziet op 150 m afstand een cheetah (jachtluipaard) en vlucht met een topsnelheid van 72 km/h.
De cheetah zet de achtervolging in met zijn topsnelheid van 108 km/h.

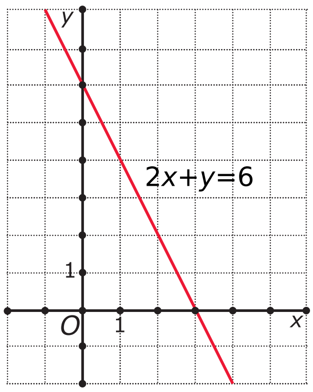
a Welke twee formules voor de afstand s (in m) afhankelijk van de tijd t (in s) kun je dan afleiden?

b Bereken nu met behulp van de twee gevonden formules na hoeveel tijd de cheetah de zebra heeft ingehaald.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

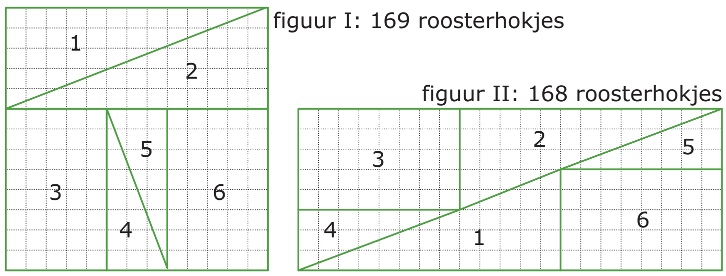
Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het berekenen van snijpunten van lijnen. En je kunt al vergelijkingen van lijnen opstellen. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of lijnen door hetzelfde punt gaan, of punten op dezelfde lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn of loodrecht op elkaar staan.



Figuur 5.3

Opgave 13: Ontbrekend roosterhokje

Hier zie je een klassieke puzzel waarbij kennis van lijnen en hun hellingsgetallen handig kan zijn. Bekijk de figuren I en II. Ze lijken te zijn samengesteld uit dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee rechthoeken. Toch is de oppervlakte van de figuur I gelijk aan 169 en die van figuur II gelijk aan 168. Hoe kan dat?



Figuur 5.4

a Controleer eerst dat de beide gegeven oppervlaktes inderdaad kloppen.

b En, weet je waar de fout zit?

Opgave 14: Door één punt?

Onderzoek of deze drie lijnen door één punt gaan:

- Lijn k door (0,0) en (5,3).
- Lijn l door (0,6) en (11,12).
- Lijn m door (-7,-6) en (6,2).

Testen

Opgave 15

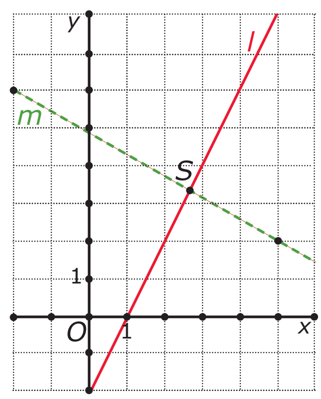
Je ziet hier twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$.

a Van lijn m zijn twee roosterpunten gegeven. Van welke lineaire functie is deze lijn de grafiek?

b Bereken het snijpunt S van beide lijnen.

c Bereken het exacte nulpunt van de grafiek m.

d Stel een formule op voor de lijn die evenwijdig loopt met l en door het punt (5,2) gaat.



Figuur 5.5

Opgave 16

Een autoverhuurbedrijf verhuurt een Toyota voor € 75,00 per week. De benzinekosten worden geschat op € 0,12 per kilometer. Het bedrijf verhuurt ook een Renault voor € 100,00 per week. De benzinekosten van de Renault zijn ongeveer € 0,10 per kilometer.

a Je wilt de Toyota voor een week huren en je hebt € 125,00. Hoeveel kilometer kun je dan rijden? Beantwoord dezelfde vraag voor de Renault.

b Geef formules voor de kosten per week van de Toyota en de Renault, afhankelijk van het aantal gereden kilometers.

c Bereken vanaf welk aantal kilometer de Renault goedkoper is.

5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met formules heb je al leren werken. In dit onderwerp is het begrip lineaire functie ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (lineaire) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- recht evenredig — evenredigheidsconstante
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- vergelijking van een lijn
- lineaire vergelijking

Activiteitenlijst

- een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en de grafiek ervan tekenen;
- een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en de grafiek ervan tekenen;
- formule, vergelijking opstellen van een lijn door twee gegeven punten;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren — lineaire vergelijkingen oplossen.

Testen

Opgave 1

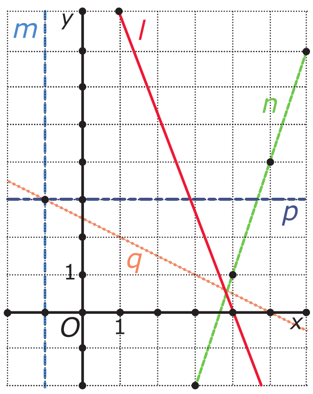
Hier zie je enkele lijnen getekend. De meeste rechte lijnen zijn de grafiek van een lineaire functie.

a Welke van de getekende rechte lijnen is dat niet? En waarom niet?

b Bij lijn n kun je gemakkelijk de richtingscoëfficiënt aflezen. Stel een vergelijking op bij deze lijn.

c Stel ook een formule op bij de lijn l.

d Welke formule hoort er bij lijn p?



Figuur 5.1

Opgave 2

In de figuur bij **Opgave 1** zie je enkele lijnen getekend. Bij de meeste rechte lijnen heb je een vergelijking opgesteld.

a Bereken het exacte snijpunt van de lijnen l en n.

b Lijn q gaat door het snijpunt van de lijnen m en p en door het punt (5,0). Onderzoek of de lijnen q, l en n door één punt gaan.

c Bereken de exacte coördinaten van het nulpunt van de lineaire functie die bij lijn n hoort.

Opgave 3

Gegeven zijn de lineaire formules $x - 3y = 9$ en $4x + 2y = 9$.

a Laat zien dat beide formules te herleiden zijn tot lineaire functies van x.

b De lijn p is evenwijdig met de grafiek van $x - 3y = 9$ en gaat door het punt (3,5). Welke lineaire functie past er bij lijn p?

Opgave 4

De jaarlijkse kosten K (in euro) voor het rijden met een auto met benzinemotor bestaan uit:

- Brandstofkosten B (in euro).
- Onderhoud (in euro).
- Overige vaste kosten voor afschrijving, APK-keuring, wegenbelasting en verzekering (in euro).

Mevrouw Jansen heeft een auto die ze voor haar werk gebruikt. Gemiddeld verbruikt haar auto 8 liter benzine per 100 gereden kilometer en is de benzineprijs € 1,75 per liter. a is het aantal gereden km per jaar.

a Leg uit waarom bij deze gegevens de brandstofkosten voor mevr. Jansen recht evenredig zijn met het aantal gereden km per jaar.

b Stel een formule op voor B afhankelijk van a.

In de totale autokosten K moeten ook de overige kosten worden verwerkt. Mevr. Jansen schat de onderhoudskosten op € 0,01 per km. En de overige vaste kosten op € 2500,00 per jaar.

c Stel een formule op voor K afhankelijk van a.

d Waarom is K niet recht evenredig met a?

Van haar werkgever krijgt mevr. Jansen een kilometervergoeding van € 0,19 per werkkilometer.

e Bereken bij welke aantallen gereden kilometer per jaar mevr. Jansen geld overhoudt van haar kilometervergoeding.

Opgave 5

In de zeventiger jaren van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. (Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro). In het Westland werd als volgt betaald:

- bij een jaarverbruik tot 600 m^3 gas : vaste kosten € 21,00 per jaar en daarbij € 0,13 per verbruikte m^3 gas;
- bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3 gas : vaste kosten € 48,00 per jaar en daarbij € 0,08 per verbruikte m^3 gas.

a Teken een grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1500 m^3.

De grafiek van K valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten K een lineaire functie van a, de hoeveelheid verbruikte m^3 gas.

b Geef voor elk van die lineaire functies een formule.

c Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden, dus onnodig extra gas verbruiken. Waarom deed hij dat?

d Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het onnodig meer gas verbruiken toch een besparing op?

e Welke prijsmaatregelen kon het gasbedrijf nemen om onnodig gas verbruiken te voorkomen?

Toepassen

Opgave 6: Snelkookpan

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,70	1,94
temperatuur T (in °C)	100	105	110	115	120

Tabel 5.1

Figuur 5.2

Teken je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel, dan kun je daar bij redelijk goede benadering een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat die lijn door (1,100). Bij de tabel past dan een lineaire functie van de vorm $T = ap + b$. De rechte lijn gaat ook ongeveer door bijvoorbeeld (1,50; 110).

a Stel zelf de gegeven formule voor T als functie van p op. Welke eenheden worden er gebruikt?

b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?

c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150 °C bereiken?

Opgave 7: Uitzetting van een metalen staaf

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ gebruikt, waarin l de lengte (in m) van de staaf na het verhitten met ΔT K (kelvin) is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

a Wat stelt l_0 voor?

Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$.
Ga uit van een ijzeren staaf met $l_0 = 0{,}5$ m bij kamertemperatuur (293 K).

b Hoe lang is deze staaf als hij tot 373 K wordt verhit?

c Met hoeveel K moet je deze staaf verhitten om hem 1 mm langer dan l_0 te laten worden?

6

Algebra 2

6.1 Formules met machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- formules met machten van variabelen herleiden, ook met delingen.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Verkennen

Opgave V1

Drie geostationaire satellieten boven de evenaar zijn, indien goed geplaatst, genoeg om de hele wereld te bedekken, met uitzondering van het poolgebied. Zo'n satelliet moet op een hoogte van $36 \cdot 10^3$ km boven het aardoppervlak zitten en net zo snel ronddraaien als het punt op het aardoppervlak waar het recht boven blijft. Dat punt doet over één omwenteling 24 uur. De straal van de aarde is ongeveer $6{,}4 \cdot 10^3$ km.

Figuur 6.1 bron: ESA

a Neem aan dat de baan van zo'n satelliet zuiver cirkelvormig is. Hoe lang is die baan? Geef je antwoord in km in de technische notatie met drie significante cijfers.

b Hoe snel beweegt deze satelliet in km/h? Geef je antwoord in km/h in de technische notatie met drie significante cijfers.

c Een Boeing 747 vliegt ongeveer met een snelheid van $900 = 9 \cdot 10^2$ km/uur.
Hoeveel keer zo snel vliegt de satelliet (hoewel hij steeds op hetzelfde punt boven het aardoppervlak blijft)?

De oppervlakte van een bol (zoals de aarde ongeveer is) bereken je met de formule $A = 4\pi \cdot r^2$, waarin r de straal van de bol is. De satelliet bestrijkt ongeveer $\frac{1}{3}$ deel van het aardoppervlak.

d Welke oppervlakte heeft het gebied dat de satelliet bestrijkt ongeveer? Geef je antwoord in km^2 in de technische notatie met drie significante cijfers.

Uitleg

Als je in formules hele grote of hele kleine getallen moet invullen, werk je met machten van 10.
Bijvoorbeeld als je de omtrek P en de oppervlakte A van een rechthoek gaat berekenen met lengte $l = 5{,}3 \cdot 10^6$ m en breedte $b = 940 \cdot 10^3$ m.

- $P = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2 \cdot 5{,}3 \cdot 10^6 + 2 \cdot 940 \cdot 10^3 =$
  $= 10{,}6 \cdot 10^6 + 1880 \cdot 10^3 = 10{,}6 \cdot 10^6 + 1{,}88 \cdot 10^6 = 12{,}48 \cdot 10^6$ m.

- $A = l \cdot b = 5{,}3 \cdot 10^6 \cdot 940 \cdot 10^3 =$
  $= 4982 \cdot 10^{6+3} = 4982 \cdot 10^9 \approx 4{,}98 \cdot 10^{12}$ m^2.
- Verder is de lengte $\frac{5{,}3 \cdot 10^6}{940 \cdot 10^3} \approx 0{,}0056 \cdot 10^{6-3} = 0{,}0056 \cdot 10^3 = 5{,}6$ keer zo groot als de breedte.

Je ziet:

- Je kunt machten van 10 van dezelfde soort (met dezelfde exponent) optellen.
  Er geldt: $a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n$.
  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $a \cdot g^n + b \cdot g^n = (a + b) \cdot g^n$.
- Je kunt machten van 10 met gelijke of verschillende exponenten vermenigvuldigen.
  Er geldt: $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^m = a \cdot b \cdot 10^{n+m}$.
  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $a \cdot g^n \cdot b \cdot g^m = a \cdot b \cdot g^{n+m}$.
- Je kunt machten van 10 met gelijke of verschillende exponenten delen.
  Er geldt: $\frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^m} = \frac{a}{b} \cdot 10^{n-m}$.
  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $\frac{a \cdot g^n}{b \cdot g^m} = \frac{a}{b} \cdot g^{n-m}$.

Bij optellen en vermenigvuldigen van variabelen mag je de volgorde verwisselen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$. Dit heet de wisseleigenschap van optellen en vermenigvuldigen. Let op! Voor aftrekken en delen geldt de wisseleigenschap niet: $a - b \neq b - a$ en $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$.

Opgave 1

Voor een cilinder met diameter d en hoogte h geldt voor het volume V de formule $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$.

a Een koperen draad heeft een lengte van $1{,}2 \cdot 10^3$ m en een diameter van $21 \cdot 10^{-3}$ m.
Bereken de hoeveelheid koper die voor deze draad nodig is.

Van een grote cilindrische tank zijn diameter en hoogte gelijk, allebei $2{,}1 \cdot 10^3$ mm.
Je kunt het volume van deze tank berekenen door $d = 2{,}1 \cdot 10^3$ en $h = 2{,}1 \cdot 10^3$ beide in de formule in te vullen.

Maar je kunt ook eerst de formule herleiden tot $V = \frac{\pi}{4} d^3$.

b Laat zien, hoe je aan deze laatste formule komt.
Bereken vervolgens op beide manieren het volume van de tank.

Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 + \pi d h$.

Ga uit van dezelfde cilindervormige tank als bij b.

c Schrijf de formule voor de oppervlakte zo, dat A alleen in d is uitgedrukt.
Bereken daarna de totale oppervlakte van deze tank.

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je hoe je met machten moet rekenen als dezelfde variabelen herhaaldelijk met elkaar worden vermenigvuldigd of opgeteld.

a Schrijf $p^2 \cdot p^3$ korter.

b Schrijf $3p^3 + 5p^3 - 4p^3$ korter.

c Schrijf $3p^2 \cdot 5p^3$ korter.

d Schrijf $q + q^2 + 2q + 3q^2$ korter.

e Schrijf $\frac{8p^3}{2p}$ zo kort mogelijk.

f Schrijf $\frac{4a^2b^3}{-2a^2b}$ zo kort mogelijk.

Opgave 3

Herleid de volgende formules.

a $y = 2x^5 \cdot 3x + \left(2x^2\right)^3$

b $y = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 4\right)$

c $P = \frac{12q^2}{3q}$

d $A = (r + 1)^2 + \frac{1}{2}r \cdot 4r$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt uitdrukkingen waarin machten voorkomen herleiden door deze **rekenregels voor machten** te gebruiken:

- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $a^p / a^q = a^{p-q}$
- $a^0 = 1$

Dit kun je gebruiken bij het werken met machten van 10.

Hiermee kun je ook formules herleiden waarin machten voorkomen.

Daarbij kun je ook gebruik maken van gelijksoortige termen samennemen en haakjes wegwerken.

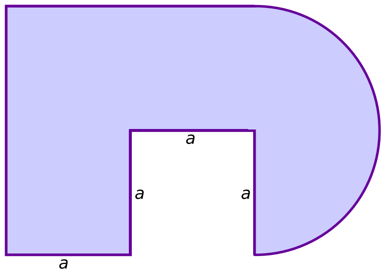
Je kunt hiermee formules zo eenvoudig mogelijk schrijven. Maar vooral bij het oplossen van vergelijkingen heb je dergelijke herleidingen nodig.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een staalplaat die bestaat uit een vierkant met daartegen een halve cirkel. Uit het vierkant is een kleiner vierkant weggesneden.

De oppervlakte van een cirkel met diameter d is $\frac{1}{4}\pi d^2$.

Laat zien dat voor de oppervlakte A van deze staalplaat geldt: $A \approx 4{,}57a^2$.
Bereken die oppervlakte als $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ mm.



Figuur 6.2

Antwoord

De oppervlakte van de staalplaat kun je zo berekenen:

- de halve cirkel heeft een diameter van $2a$, dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (2a)^2$;
- de rest van de figuur is een groot vierkant met zijden $2a$ waaruit een kleiner vierkant met zijden van a is weggesneden, zodat de oppervlakte $(2a)^2 - a^2$ is;
- de totale oppervlakte is $A = (2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (2a)^2$.

Dit kun je herleiden tot: $A = 4a^2 - a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 = \left(3 + \frac{1}{2}\pi\right)a^2 \approx 4{,}57a^2$.

Hierin vul je $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ in en je krijgt:

$A = 4{,}57 \cdot \left(0{,}2 \cdot 10^3\right)^2 = 0{,}1828 \cdot 10^6 \approx 1{,}8 \cdot 10^5$ mm^2.

Opgave 4

Bekijk de staalplaat in **Voorbeeld 1**.

a Voer het herleiden van de formule voor de oppervlakte zelf uit.

Voor de afwerking wordt om de staalplaat een kunststof rand gemaakt.

b Welke formule kun je voor de lengte L van die rand opstellen? Herleid je formule zo ver mogelijk.

c Bereken de lengte van de kunststof rand als $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ mm.

Opgave 5

Werken met machten en gelijksoortige termen samennemen is belangrijk als je met formules werkt. Herleid de uitdrukkingen.

a $p^2 \cdot p^4$

b $3p^2 \cdot -6p^2$

c $3p^2 - 6p^2$

d $\frac{-6k \cdot 4k^3}{-2k^2}$

e $5b \cdot 4ab^3$

f $\left(3a^2b\right)^3$

Opgave 6

Hier zie je formules waarin machten voorkomen. Schrijf elk van die formules eerst zo eenvoudig mogelijk. Vul daarna $p = 2$ en $q = 3$ in elke formule in en bereken de waarde van K.

a $K = 4p \cdot 3p^2$

b $K = 3p^3q - p \cdot 2p^2q$

c $K = \frac{(2p)^4}{p^2 \cdot 2p}$

d $K = 2p \cdot 3q - 4p$

Voorbeeld 2

Je maakt een vierkante omlijsting door uit een gegeven vierkant en kleiner vierkant te zagen.
De omlijsting heeft overal een dikte van 3 cm en een oppervlakte van 444 cm^2.

Welke afmetingen heeft het grootste vierkant?

Antwoord

Noem de zijden van het grootste vierkant z cm.
Die van het kleinste vierkant zijn dan $z - 6$.

De oppervlaktes zijn dan

$z \cdot z = z^2$ en $(z-6) \cdot (z-6) = (z-6)^2$ cm^2.

Uit de gegevens volgt $z^2 - (z-6)^2 = 444$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} z^2 - (z-6)^2 &= 444 && \\ & && \text{haakjes wegwerken} \\ z^2 - \left(z^2 - 12z + 36\right) &= 444 && \\ & && \text{herleiden} \\ 12z - 36 &= 444 && \\ & && \text{beide zijden } +36 \\ 12z &= 480 && \\ & && \text{beide zijden delen door 12} \\ z &= 40 && \end{aligned}$$

Het grootste vierkant heeft zijden van 40 cm.

Opgave 7

Los de vergelijkingen op.

a $x^2 - 121 = 0$

b $(x-6)(x+6) = 13$

c $(x+60)(x-2) = 2(29x+12)$

Opgave 8

Bert heeft een tuin die 14 meter langer is dan hij breed is. Van de tuin van Bart is de breedte 2 meter minder dan de tuin van Bert, maar de lengte is 4 meter meer dan die van Berts tuin. Beide tuinen hebben een even grote oppervlakte. Je wilt weten hoe breed de tuin van Bert is.

a Maak een schets van beide tuinen. Kies x voor de breedte van Bert's tuin.

b Welke vergelijking kun je opstellen om de breedte van de tuin van Bert te berekenen?

c Los de vergelijking op.

d Hoe lang en hoe breed is de tuin van Bert?

Oefenen

Opgave 9

Herleid.

a $3k^3 \cdot 2k^2$

b $3k^3 + 2k^3$

c $3k^3 - 2k^3$

d $(3k^3)^2$

e $\frac{3k^3}{2k^3}$

f $\frac{3k^3}{2k}$

Opgave 10

Voor een cilinder met diameter d en hoogte h geldt voor het volume V de formule $V = \frac{\pi}{4}d^2h$ en voor de oppervlakte A de formule $A = 2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2 + \pi dh$.

Van een cilinder is de hoogte drie keer zo groot als de diameter.

a Laat zien dat voor de inhoud van deze cilinder de formule $V \approx 2{,}36d^3$ geldt.

b Laat zien dat voor de oppervlakte van deze cilinder de formule $A \approx 11{,}00d^2$ geldt.

c Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder als de diameter $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ m is.

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

a $(p+3)^2 = 3(15+2p)$

b $2f(f+1) = (2f+1)(f-2)$

c $q^2(q^2-1) = (q^2-5)(q^2+5)$

d $(3s-1)(2s-7) = (7s+5)(s-4) - 22$

Opgave 12

Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

a $L = (15a^4b^2)/(5(ab)^2)$

b $K = (12p^3 - 7p \cdot p^2)/(5p^2)$

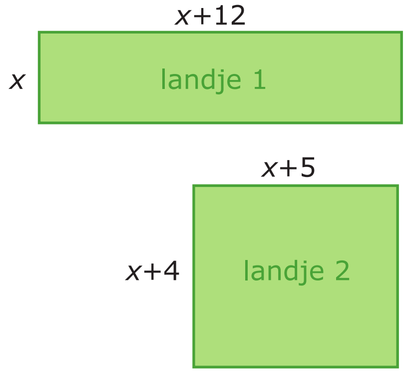
Opgave 13

De twee landjes hebben dezelfde oppervlakte.

a Welke vergelijking levert dit op?

b Los de vergelijking op.

c Welke oppervlakte hebben deze landjes?

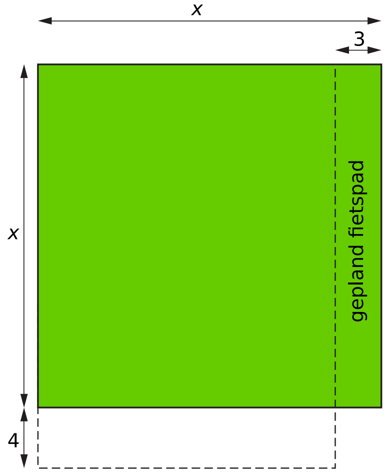


Figuur 6.3

Toepassen

Het land van boer Brandwijk is een vierkant van x bij x meter. Door de aanleg van een fietspad moet hij aan de oostkant een strook van drie meter afstaan. Hij wil er aan de zuidkant een strook van vier meter bij.

Levert hem dat extra land op?



Figuur 6.4

Opgave 14

Bekijk hierboven de situatie waarin boer Brandwijk terecht is gekomen.

a Welke oppervlakte heeft zijn land na de aanleg van het fietspad als hij zijn zin krijgt? Schrijf de uitdrukking met haakjes en zonder haakjes.

b Als zijn land oorspronkelijk honderd meter lang en breed was, hoeveel m^2 heeft hij er dan bij gekregen?

c Bij welke waarde van x is het land na de aanleg van het fietspad even groot als daarvoor?

Opgave 15

Los het volgende probleem op: ‘Een bioscoop heeft twee zalen, zaal 1 en zaal 2. In zaal 1 zijn er even veel stoelen per rij als er rijen zijn. Zaal 2 heeft vijf rijen meer, maar vier stoelen per rij minder. Beide zalen hebben evenveel stoelen, hoeveel?’

Testen

Opgave 16

Schrijf deze formules zo eenvoudig mogelijk. Werk ook de haakjes weg.

a $P = -2(2a + 4)(a - 8)$

b $K = 30p^4 \cdot q - 6p^3 \cdot 2pq$

c $y = \frac{3x \cdot (2x^3)^2 + x^3 \cdot x^4}{5x^3}$

Opgave 17

Los de vergelijkingen op.

a $(4a - 1)(2a + 1) = (7a - 5)(a + 1) + 13$

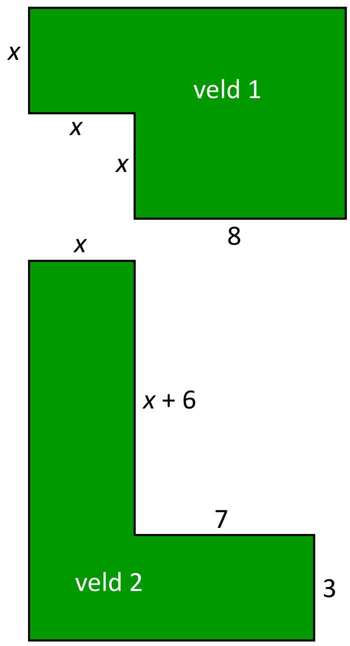
b $(2b - 2)(2b + 4) = 4b(b - 8)$

c $\left(c^2 + 4\right)^2 + 8 = \left(c^2 + 5\right)\left(c^2 + 4\right)$

Opgave 18

Bekijk deze schets van twee grasvelden. Alle hoeken zijn recht.

Beide velden hebben een even grote oppervlakte. Hoe groot is die oppervlakte?



Figuur 6.5

6.2 Breuken met variabelen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken met variabelen vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- het begrip breuk (alleen met getallen), breuken vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- rekenen met breuken met getallen.

Verkennen

Opgave V1

Reken met de breuken $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het verschil van $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

e Kun je de voorgaande berekeningen ook uitvoeren met de breuken $\frac{3}{a}$ en $\frac{2}{b}$?

Uitleg

Je kunt al rekenen met breuken: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen, gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen moet je de tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} = \frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b \cdot d$ vermenigvuldigen)

  Omdat $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ kun je ook onthouden dat delen door een breuk als $\frac{c}{d}$ op hetzelfde neerkomt als vermenigvuldigen met het omgekeerde $\frac{d}{c}$ van die breuk.

Er is een maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling geldt ook $c \neq 0$.

Soms is het voordat je met breuken gaat rekenen verstandig om ze eerst te vereenvoudigen.

Dat doe je door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met breuken rekent als daar variabelen in voorkomen. Neem aan dat alle variabelen ongelijk zijn aan 0. Bereken.

a $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$

b $\frac{2}{p} - \frac{3}{q}$

c $\frac{2}{a} - \frac{1}{2}$

d $\frac{a}{2} + \frac{1}{a}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met breuken rekent als daar variabelen in voorkomen. Neem aan dat alle variabelen ongelijk zijn aan 0. Bereken en vereenvoudig de breuken waar het nodig is.

a $\frac{p}{q} \Big/ \frac{r}{s}$

b $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2}$

c $\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a}$

d $\frac{2}{p} \Big/ \frac{3}{q}$

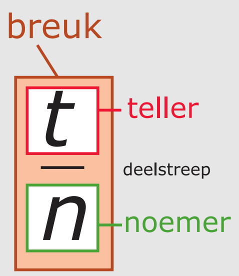
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Breuken kun je vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Het rekenen met **breuken met variabelen** gaat net als het rekenen van breuken met getallen:

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je de tellers en noemers afzonderlijk:
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$



Figuur 6.1

- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:

  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} = \frac{ad}{bc}$

  Of je gebruikt $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling geldt ook $c \neq 0$.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de breuken $\frac{3}{x}$ en $\frac{5}{2y}$ (met $x \neq 0$ en $y \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{3}{x} + \frac{5}{2y} = \frac{3 \cdot 2y}{x \cdot 2y} + \frac{5 \cdot x}{2y \cdot x} = \frac{6y}{2xy} + \frac{5x}{2xy} = \frac{5x+6y}{2xy}$.
- Vermenigvuldigen: $\frac{3}{x} \cdot \frac{5}{2y} = \frac{3 \cdot 5}{x \cdot 2y} = \frac{15}{2xy}$.
- Delen: $\frac{3}{x} \Big/ \frac{5}{2y} = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{5}{2y}} = \frac{\frac{6y}{2xy}}{\frac{5x}{2xy}} = \frac{6y}{5x}$.

Opgave 3

Werk met de breuken $\frac{3}{2a}$ en $\frac{5}{b}$.

a Trek de tweede breuk van de eerstgenoemde af.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 4

Werk met de breuken $\frac{1}{3}a$ en $\frac{1}{2a}$.

a Leg uit dat $\frac{1}{3}a = \frac{a}{3}$.

b Tel beide breuken bij elkaar op.

c Vermenigvuldig beide breuken.

d Deel de tweede breuk door de eerste.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de breuken $\frac{6a}{2a^3}$ en $\frac{5}{4a}$ (met $a \neq 0$).

1. Vermenigvuldig beide breuken: $\frac{6a}{2a^3} \cdot \frac{5}{4a}$.
2. Trek de eerste breuk van de tweede af: $\frac{5}{4a} - \frac{6a}{2a^3}$.

Antwoord

Voor beide berekeningen is het verstandig om vooraf de eerste breuk te vereenvoudigen:

$\frac{6a}{2a^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot a}{2 \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{3}{a^2}$

1. Vermenigvuldigen: $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{3 \cdot 5}{a^2 \cdot 4a} = \frac{15}{4a^3}$.
2. Aftrekken: $\frac{5}{4a} - \frac{3}{a^2} = \frac{5 \cdot a}{4a \cdot a} - \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot a^2} = \frac{5a}{4a^2} - \frac{12}{4a^2} = \frac{5a-12}{4a^2}$.

Opgave 5

Vereenvoudig de breuken (neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$).

a $\frac{6a}{8ab}$

b $\frac{5b}{15b^3}$

c $\frac{7a}{21}$

d $\frac{5a^2b}{ab}$

Opgave 6

Werk met de breuken $\frac{3x^2}{xy}$ en $\frac{xy}{4y}$.

a Trek de tweede breuk van de eerste af.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 7

Werk met de breuken $\frac{2pq}{4p}$ en $\frac{3p}{p^2}$.

a Tel beide breuken op.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Oefenen

Opgave 8

Schrijf de breuken als één breuk en vereenvoudig.

a $\frac{300a}{650b} + \frac{450a}{50b}$

b $\frac{5p}{8q} \cdot \frac{4q}{3p} \cdot \frac{11p}{20q}$

c $\frac{32x}{25y} - \frac{3x+2}{40y}$

d $\frac{9t^4}{4t^3} \Big/ \frac{4t^2}{3t}$

e $\frac{6l}{15k} \cdot \frac{4l}{5k} + \frac{10k}{3l}$

Opgave 9

Schrijf de breuken als één breuk en vereenvoudig. Reken vervolgens p uit als je weet dat $q = 3$.

a $p = \frac{3}{q} + \frac{7}{2q} - \frac{3}{2q}$

b $p = \frac{5}{q} \cdot \frac{4q^2}{3} \cdot \frac{7}{4}$

c $p = \frac{4q}{5} \Big/ \frac{6}{7q}$

Opgave 10

Gegeven zijn de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{4a}{6a^2}$ met $a \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het product van beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

d Bereken het verschil van het kwadraat van de eerste breuk en het kwadraat van de tweede breuk.

Opgave 11

Oefen het rekenen met breuken in het **Practicum**.

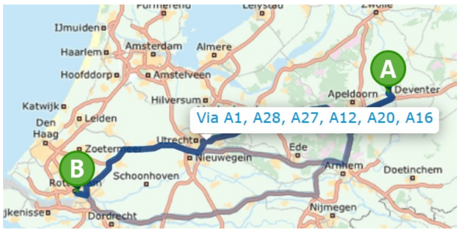
Toepassen

Je rijdt van Rotterdam naar Deventer en weer terug via dezelfde route.

De afgelegde afstand is 145 km.

Je gemiddelde snelheid op de heenreis is anders dan die op de terugreis.

Hoe bereken je de gemiddelde snelheid over de hele reis?



Figuur 6.2

Opgave 12

Je wilt het hierboven geschetste probleem oplossen.

a Probeer eerst zelf een oplossing te vinden.

Als je niet zelf een rekenmethode hebt kunnen vinden, probeer dan met behulp van de volgende opdrachten er uit te komen.

b Kies voor de gemiddelde snelheid op de heenreis v_1.
Hoe lang doe je dan over de heenreis?

c Hoe lang doe je over de totale reis heen en terug? Herleid je formule tot één breuk.

d Je weet nu hoe lang je over de 290 km heen en terug doet.
Bereken hieruit de gemiddelde snelheid. (Stel er een formule voor op.)

e Controleer je antwoord door de gemiddelde snelheid te berekenen als de gemiddelde snelheid op de heenreis 90 km/uur was en die op de terugreis 70 km/uur.

Testen

Opgave 13

Schrijf deze formules zo eenvoudig mogelijk als één breuk.

a $P = \frac{2}{a} + \frac{3}{2a}$

b $K = \frac{3b}{2a} \Big/ \frac{5}{7a}$

Opgave 14

Gegeven zijn de breuken $\frac{4}{3p}$ en $\frac{p}{2}$.

a Trek de tweede breuk van de eerste af.

b Bereken het product van beide breuken.

6.3 Formules met breuken herleiden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met breuken in formules en vergelijkingen.

Voorkennis

- rekenen met breuken met variabelen;
- formules herleiden en vergelijkingen oplossen met de basismethoden.

Verkennen

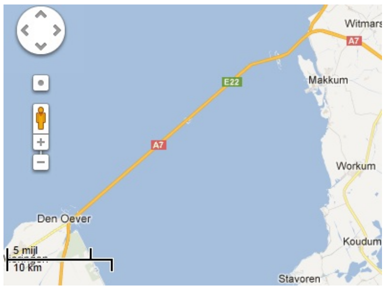
Opgave V1

Snelheid (gemiddelde snelheid) bereken je door de afgelegde afstand te delen door de tijd:

$v = \frac{s}{t}$

Hierin is:

- s de afgelegde afstand in km
- t de tijd in uur
- v de snelheid in km/uur



Figuur 6.1

a Leg uit waarom je deze formule ook kunt schrijven als $s = v \cdot t$.

De Afsluitdijk is 32 km lang. Je rijdt met een constante snelheid van 100 km/uur.

b Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Hoe lang doe je er over om de hele Afsluitdijk te rijden?"

c Geef het antwoord op de vraag bij b in minuten nauwkeurig.

d Je kunt de gegeven formule nog op een derde manier schrijven. Hoe?

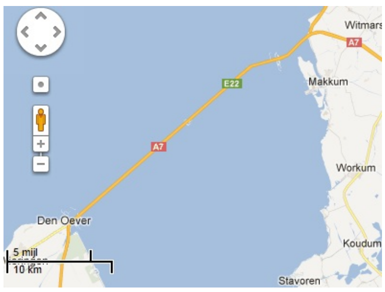
Uitleg

Snelheid (gemiddelde snelheid) bereken je door de afgelegde afstand te delen door de tijd:

$v = \frac{s}{t}$

Hierin is:

- s de afgelegde afstand in km
- t de tijd in uur
- v de snelheid in km/uur



Figuur 6.2

Een formule zoals $v = \frac{s}{t}$ kun je in drie vormen schrijven, afhankelijk van welke grootheid je wilt berekenen.

Daarbij werk je met de balansmethode: beide zijden van het isgelijkteken dezelfde bewerking uitvoeren.

- Beide zijden met t vermenigvuldigen: $v \cdot t = s$ ofwel $s = v \cdot t$.
  Dit is handig als je de afgelegde afstand s wilt berekenen.
- Nu beide zijden door v delen: $t = \frac{s}{v}$.
  Dit is handig als je de tijd t wilt berekenen.

Op deze manier kun je formules met breuken herleiden. Soms moet je eerst nog met die breuken rekenen, dat zie je in de voorbeelden.

Weet je twee van de drie variabelen, bijvoorbeeld $v = 100$ km/uur en $s = 32$ km (de lengte van de Afsluitdijk), dan kun je t berekenen. Het liefst gebruik je dan de vorm $t = \frac{s}{v} = \frac{32}{100} = 0{,}32$ uur.

Maar ook als je alleen de eerste vorm $v = \frac{s}{t}$ hebt, kun je t uitrekenen:

$$\begin{aligned} 100 &= \frac{32}{t} && \\ 100 \cdot t &= 32 && \text{beide zijden } \times t \\ t &= \frac{32}{100} = 0{,}32 \text{ uur} && \text{beide zijden } /100 \end{aligned}$$

Nu gebruik je de balansmethode om een vergelijking op te lossen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat de grootheden s, t en v voorstellen en welk verband er tussen bestaat.

Je rijdt met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur over een afstand van 180 km.

a Je gebruikt $v = \frac{s}{t}$ om uit te rekenen hoe lang je over deze rit doet.
Laat zien hoe.

b Je kunt de formule bij a ook herleiden naar andere vormen.
Welke vorm is het handigst als je de tijdsduur wilt uitrekenen?

Je rijdt 55 minuten met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur.

c Welke afstand leg je in die tijd af? Gebruik de handigste formule.

Opgave 2

Je rijdt met een constante snelheid een afstand van 180 km. Onderweg moet je 5 minuten stoppen om te tanken.

a Waarom geldt nu $t = \frac{180}{v} + \frac{1}{12}$?

b Hoe lang doe je over deze rit als je rijsnelheid 100 km/uur is? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

c Als je reistijd 1 uur en 50 minuten bedraagt, hoe groot is dan je snelheid geweest? Geef je antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

Onder de soortelijke massa ρ van een stof versta je de massa m in kg gedeeld door het volume V in m^3: $\rho = \frac{m}{V}$.

a Eén dm^3 lood weegt 11,3 kg.
Hoeveel bedraagt de soortelijke massa van lood?

b Op welke twee andere manieren kun je deze formule schrijven?

c Gebruik de handigste formule om het gewicht van 12 dm^3 lood uit te rekenen.
Je weet de soortelijke massa.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In formules en vergelijkingen komen regelmatig delingen (breuken) voor.

Bij een formule als $v = \frac{s}{t}$ is v uitgedrukt in s en t.

Dat is handig als je v wilt berekenen.
Maar wil je s berekenen, dan kun je beter s **uitdrukken in** v en t.
Door met breuken te rekenen en/of de balansmethode te gebruiken kun je de formule of de vergelijking herleiden:

- $v = \frac{s}{t}$ kun je herleiden naar $s = v \cdot t$.
  In de tweede formule is s uitgedrukt in v en t.
- $v = \frac{s}{t}$ kun je ook herleiden naar $t = \frac{s}{v}$.
  Nu is t uitgedrukt in s en v.
- $p = \frac{1}{3}q + 4$ kun je herleiden naar $q = 3p - 12$.
  Eerst was p uitgedrukt in q.
  In de tweede formule is q uitgedrukt in p.

Denk er steeds om dat delen door 0 geen betekenis heeft.

Voorbeeld 1

In vergelijkingen kunnen ook breuken voorkomen. Om zulke vergelijkingen op te lossen is de balansmethode meestal het handigst. Je probeert dan, net als bij vergelijkingen zonder breuken, ervoor te zorgen dat de variabele alleen nog links van het isgelijkteken voorkomt.

Los op: $3 + \frac{126}{x} = 12$.

Antwoord

Met de balansmethode:

$$\begin{aligned} 3+\frac{126}{x} &= 12 && \text{beide zijden } -3\\ \frac{126}{x} &= 9 && \text{beide zijden } \times x\\ 126 &= 9x && \text{vergelijking andersom schrijven}\\ 9x &= 126 && \text{beide zijden } /9\\ x &= \frac{126}{9} = 14 \end{aligned}$$

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op.

a $\frac{60}{x} = 5$

b $\frac{x}{15} + 4 = 20$

c $\frac{p}{9} \cdot \frac{6}{5} = 2$

d $\frac{3}{g} + \frac{5}{2g} = 2$

Opgave 5

Druk in de volgende formules y uit in x

a $x \cdot y = 6$

b $2x + 4y = 15$

c $\frac{12}{y+3} = x$

d $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y}$

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{p}{4} + \frac{1}{12} = 2 - \frac{5}{6}p$

Antwoord

Gebruik ook nu de balansmethode:

$$\begin{aligned} \frac{p}{4}+\frac{1}{12} &= 2-\frac{5}{6}p && \text{beide zijden } \times 12\\ 3p+1 &= 24-10p && \text{beide zijden } -1\\ 3p &= 23-10p && \text{beide zijden } +10p\\ 13p &= 23 && \text{beide zijden } /13\\ p &= \frac{23}{13} \end{aligned}$$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een vergelijking met breuken kunt oplossen met de balansmethode.

a Waarom wordt in de eerste stap aan beide zijden met 12 vermenigvuldigd?

b De tweede en de derde stap had je ook wel kunnen omwisselen. Laat zien hoe de oplossing er dan uitziet.

Opgave 7

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{1}{7}x + 4 = 3 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{5}{3}x - 4 = \frac{1}{4}x + 8$

c $\frac{1}{3}p + \frac{1}{4}p = p - \frac{5}{6}$

Voorbeeld 3

Er bestaan diverse temperatuurschalen. Onder andere het omrekenen van graden Celsius naar graden Fahrenheit.

Hiervoor bestaat de formule: $f = \frac{9}{5} \cdot c + 32$.

Hier is f het aantal °F en c het aantal °C.

Schrijf deze formule zo, dat c wordt uitgedrukt in f.

Antwoord

Gebruik ook nu de balansmethode:

$$\begin{aligned}
f &= \tfrac{9}{5} \cdot c + 32 && \text{beide zijden } -32 \\
f - 32 &= \tfrac{9}{5} \cdot c && \text{beide zijden } \times 5 \\
5(f - 32) &= 9c && \text{haakjes wegwerken} \\
5f - 160 &= 9c && \text{beide zijden /9 en verwisselen} \\
c &= \frac{5f - 160}{9}
\end{aligned}$$

Deze laatste formule is nog te herleiden:

$c = \frac{5f-160}{9} = \frac{5f}{9} - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$.

Dus uiteindelijk vind je $c = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de omrekenformule van graden Celsius naar graden Fahrenheit kunt herleiden tot de omrekenformule van graden Fahrenheit naar graden Celsius.

a Je kunt de formule $c = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$ weer herleiden naar de vorm waarin f wordt uitgedrukt in c.
Laat zien hoe.

b Hoeveel graden Fahrenheit is 100 °C?

c Hoeveel graden Celsius is 100 °F?

Opgave 9

a Wanneer een lichaam vrij valt over een hoogte van h m dan geldt voor de eindsnelheid v in m/s: $v^2 = 2gh$. Hierin is g de gravitatieconstante.
Schrijf deze formule zo, dat h is uitgedrukt in v.

b Het aantal exemplaren q van een product dat je per maand kunt verkopen, hangt af van de prijs p in euro volgens de formule $q = 400 - 0{,}20p$.
Schrijf deze formule zo, dat p is uitgedrukt in q

c Gegeven is de formule $\frac{1}{3k} - \frac{1}{4k} = R$.
Schrijf deze formule zo, dat k wordt uitgedrukt in R.

Oefenen

Opgave 10

Volgens de wet van Ohm bestaat er in een draad waar elektrische stroom loopt een verband tussen de spanning U in Volt, de stroomsterkte I in Ampère en de weerstand R in Ohm. De wet van Ohm luidt: $U = I \cdot R$.

a Schrijf deze formule zo, dat I wordt uitgedrukt in U en R.

b Bereken de stroomsterkte bij een spanning van 12 V en een weerstand van 0,02 Ω.

Je wilt de weerstand van een stuk koperdraad berekenen. Je zet er daarom een spanning van 6 V op en meet de stroomsterkte met een ampèremeter. Je meet $I = 180$ A.

c Bereken de weerstand van dit stuk draad in drie significante cijfers.

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{k^2}{9} = 4$

b $\frac{3}{l} - 4 = 8$

c $\frac{1}{m} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{m} + 2$

d $\frac{11t}{3} - \frac{13}{5} = \frac{97}{5}$

e $\frac{1}{2h} + \frac{2}{h} = 1$

f $\frac{1}{2} \Big/ \frac{t}{4} = 6$

Opgave 12

Het aantal batterijen q van een bepaald type dat een fabrikant maandelijks verkoopt, hangt af van de prijs p (in euro) die hij er voor vraagt. De fabrikant gebruikt op grond van eerdere ervaringen deze formule als rekenmodel: $q = 1200 - 150p$.

a Hoeveel van deze batterijen verkoopt hij maandelijks volgens deze formule als hij € 2,20 per stuk rekent?

b Schrijf de gegeven formule zo, dat p is uitgedrukt in q.

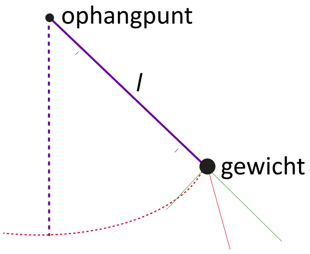
c De fabrikant wil niet minder dan 600 van deze batterijen per maand verkopen.
Welke prijs kan hij dan hoogstens vragen?

Opgave 13

Als je een gewicht aan een touw rustig heen en weer laat slingeren (het touw moet strak blijven, dus geen al te grote uitwijking), dan is de slingertijd T (in seconden) alleen afhankelijk van de lengte van het touw l (in meter). De slingertijd is de tijd die het duurt voor het gewicht om precies één keer heen en weer te slingeren.

Er geldt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Hierin is g de gravitatieconstante.



Figuur 6.3

a Je wilt de gravitatieconstante berekenen. Schrijf eerst de formule zo, dat g wordt uitgedrukt in T en l.

b Je hebt een touw van 1 m lengte met een gewicht er aan dat je rustig laat slingeren.
Je meet een slingertijd van 2 s. Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

a Stel een formule op voor de kosten per folder k afhankelijk van het aantal folders a.

b Bereken bij hoeveel folders je onder de € 0,06 per folder uitkomt.

Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare auto op diesel zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een liter diesel is € 1,30 en je rijdt 26 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 1400,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 2200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

Opgave 15

In de tekst hierboven zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een auto op diesel. De kosten per km noem je k en het jaarlijkse aantal gereden km noem je a.

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

a Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

b Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Ga nu uit van een auto die op diesel rijdt.

c Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

d Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Testen

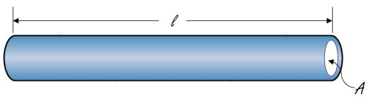
Opgave 16

De weerstand die een elektrische stroom ondervindt in een koperdraad bereken je met de volgende formule:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

Hierin is:

- R de weerstand in ohm (Ω)
- ρ de soortelijke weerstand van het materiaal in ohm meter (Ωm)
- l de lengte in meter (m)
- A de doorsnede in vierkante meter (m^2)



Figuur 6.4

a Schrijf de gegeven formule zo, dat ρ wordt uitgedrukt in de overige variabelen.

b Je hebt 1,5 m koperdraad met een diameter van 1,8 cm en een weerstand van $10{,}0 \cdot 10^{-6}$ Ω. Bereken de soortelijke weerstand van dit koper.

Opgave 17

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{5}{m} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{m} + 4$

b $\frac{11n}{4} + \frac{25}{7} = \frac{39}{7}$

c $\frac{18}{8p} + \frac{8}{3p} = 2$

6.4 Formules en ongelijkheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip ongelijkheid en ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- werken met breuken in formules en vergelijkingen;
- grafieken tekenen bij formules;
- formules herleiden en vergelijkingen oplossen met de basismethoden.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

b Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in uren t.
“Bij welke snelheid is de reistijd meer dan 15 minuten?”

c Laat zien, dat bij deze vraag de ongelijkheid $\frac{16}{v} + \frac{1}{12} > \frac{1}{4}$ hoort.

d Hoe los je deze ongelijkheid op?

Uitleg

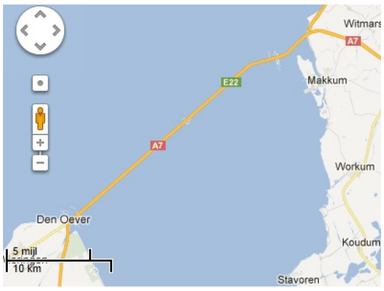
Je rijdt weer op de Afsluitdijk, die 32 km lang is. Je stapt dit keer onderweg 5 minuten uit om van het uitzicht te genieten. Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (km/h), met 60 te vermenigvuldigen en ten slotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5$

Bij deze formule kun je een bijbehorende grafiek tekenen.

Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot, de grafiek loopt omhoog tot vlak bij de verticale as. Zo'n lijn waar de grafiek steeds dichter naartoe loopt heet een asymptoot.
Voor hele grote snelheden komt de reistijd in de buurt van de 5 minuten. Maar wanneer is de reistijd bijvoorbeeld langer dan 60 minuten?

Bekijk de applet



Figuur 6.1

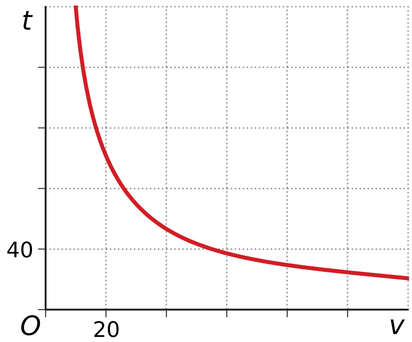
Daarbij hoort de ongelijkheid: $\frac{1920}{v} + 5 > 60$.

Om een ongelijkheid op te lossen bekijk je altijd de bijbehorende grafieken. In dit geval zijn dat de grafiek van $t = \frac{1920}{v} + 5$ en de lijn $t = 60$.

In het snijpunt van beide grafieken is $\frac{1920}{v} + 5 = 60$

De waarde van v die daarbij hoort bereken je: $v \approx 34{,}91$ km/uur.

Uit de grafiek lees je vervolgens de oplossing van de ongelijkheid af: $v \leq 34{,}9$ km/uur.



Figuur 6.2

Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken.

a Hoeveel minuten doe je over deze 32 km als je 80 km/h rijdt?

b Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?

c Teken zelf de grafiek van $t = \frac{1920}{v} + 5$. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 10, 20, ..., 120.

d Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

e Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

Je wilt de ongelijkheid $\frac{1920}{v} + 5 > 60$ oplossen.

a Laat zien hoe je $\frac{1920}{v} + 5 = 60$ exact kunt oplossen.

b Lees vervolgens de juiste exacte oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af.

c Geef vervolgens je antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

Los de volgende ongelijkheden op.
Schets de bijbehorende grafieken en los de bijbehorende vergelijkingen exact op. Neem aan dat $x > 0$.

a $\frac{2}{x} + 3 < 7$

b $\frac{2}{x} + 3 \leq 15$

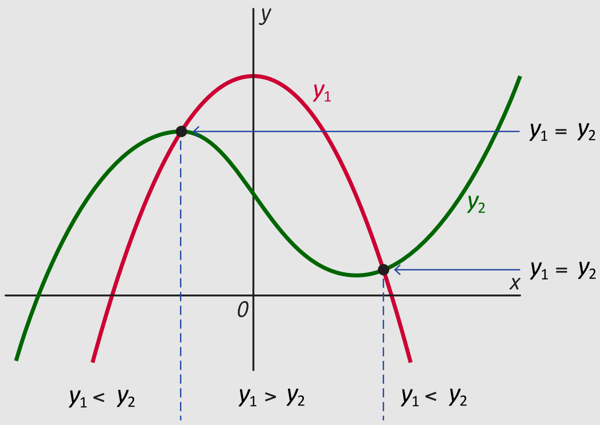
c $\frac{1}{x} < x$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $y_1 > y_2$, $y_1 \geq y_2$, $y_1 \leq y_2$ of $y_1 < y_2$ heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst maak je bij de formules voor y_1 en y_2 een grafiek. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bereken je de coördinaten van de snijpunten. Dat doe je door de vergelijking $y_1 = y_2$ op te lossen. Probeer dat altijd exact te doen, afronden doe je als daarom wordt gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let daarbij goed op de gewenste nauwkeurigheid!



Figuur 6.3

Voorbeeld 1

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Maak een bijpassende formule van k afhankelijk van a en teken de grafiek. Je wilt niet meer dan € 0,06 per folder betalen. Hoeveel folders a moet je dan laten drukken?

Antwoord

Per folder betaal je in ieder geval € 0,04. Verder betaal je per folder $\frac{10}{a}$ euro.

In totaal dus $k = 0{,}04 + \frac{10}{a}$ euro per folder.

Om een goede bijpassende grafiek te maken moet je bedenken dat je veel folders wilt laten maken om de kosten per folder laag te houden. Misschien wel zo'n 1000 stuks. a komt op de horizontale as en laat je daarom bijvoorbeeld lopen vanaf 0 tot en met 1000. Voor 1000 folders betaal je € 0,05 per stuk, maar voor 100 folders betaal je € 0,14 per stuk. Maak zelf een goede tabel en grafiek.

Je moet vervolgens oplossen $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$. Dat kun je doen met behulp van de grafiek en inklemmen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen. Daarna los je de hyperbolische ongelijkheid $0{,}04 + \frac{10}{a} > 0{,}06$ op.

Opgave 4

Bekijk welk probleem er in **Voorbeeld 1** aan de orde wordt gesteld.

a Maak een tabel (in drie decimalen nauwkeurig) en een grafiek bij de formule.

b Je wilt weten bij welk aantal folders a geldt $k < 0{,}06$. Welke waarde voor a levert precies 0,06 op? En wat wordt dus je antwoord?

In **Voorbeeld 1** staat dat je het antwoord bij b ook kunt vinden door te redeneren.

c Leg uit hoe je dan de vergelijking $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$ oplost.

Opgave 5

Bij de productie van verf is er sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort) die niet van het geproduceerde aantal liter verf afhangen. Bij het berekenen van de prijs die de fabrikant per liter verf gaat berekenen moet hij ook met deze vaste kosten rekening houden. Neem aan dat die vaste kosten € 32000,00 bedragen. De productiekosten per liter bedragen € 5,60.

a Stel een formule op voor de totale kosten per liter (K in euro/liter) afhankelijk van het aantal geproduceerde liters a.

b Bereken hiermee de totale kosten per liter bij een productie van 10000 liter van deze verf.

c Bij welke waarde van a worden de totale kosten per liter kleiner dan € 6,00?

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{1}{x} \leq x^3$. Neem aan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = x^3$ in één figuur.

Gebruik ook vervolgens de balansmethode:

$\frac{1}{x} = x^3$

beide zijden $\times x$ en omwisselen

$x^4 = 1$

beide zijden vierde machtswortel trekken

$x = 1$ en/of $x = -1$

Uit de grafieken lees je de oplossing af: $-1 \leq x < 0$ en/of $x \geq 1$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een ongelijkheid kunt oplossen met grafieken en de balansmethode.

a Maak zelf de grafieken van $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = x^3$.

b Leg uit hoe je aan de oplossing van de ongelijkheid komt.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\frac{1}{x} > x^3$ op.

Opgave 7

Los de ongelijkheden op.

a $\frac{1}{6}x + 2 \leq 4 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{3}{p} + 15 \geq 17$

c $x^2 \geq \frac{8}{x}$

Oefenen

Opgave 8

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie K en het aantal kopieën a.

a Welke formule geldt voor K afhankelijk van a?

b Teken een grafiek bij deze formule.

c Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

Opgave 9

Je wilt de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ oplossen.

a Teken de grafieken van $y_1 = \frac{4}{x} + 2$ en $y_2 = x + 1$ in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van x.

b Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.

c Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.

d Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ op in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Los de volgende ongelijkheden op. Neem aan dat x alleen positieve waarden heeft.

a $\frac{2400}{x} + 3{,}6 < 6{,}8$

b $200 + \frac{50}{x} \geq 450$

c $\frac{x-15}{300} - 0{,}5 > 0{,}8$

d $\frac{800}{x-5} \geq 50$

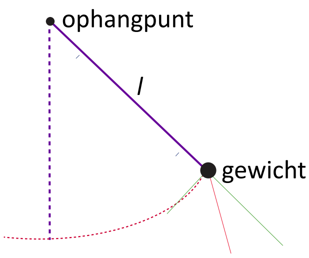
Opgave 11

Als je een gewicht aan een touw rustig heen en weer laat slingeren (het touw moet strak blijven, dus geen al te grote uitwijking), dan is de slingertijd T (in seconden) alleen afhankelijk van de lengte van het touw l (in meter). De slingertijd is de tijd die het duurt voor het gewicht om precies één keer heen en weer te slingeren.

Er geldt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Hierin is $g \approx 9{,}81$ de gravitatieconstante.

Je ziet dat de slingertijd iets langzamer is dan 1 seconde.
Hoe lang moet het touw dan minstens zijn in cm nauwkeurig?



Figuur 6.4

Opgave 12

Van een bepaald type rechthoekige verpakkingsdozen zijn lengte en breedte hetzelfde, maar is de hoogte de helft van de lengte.

Welke afmetingen moeten deze dozen hebben om er tot maximaal 0,25 m^3 ruimte in te hebben?

Toepassen

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a.

De grootste massa m die deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $m = \frac{120000}{a}$.

Hierin is m in kg en a in meters.

Figuur 6.5

Opgave 13

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los de bijbehorende vergelijking op.

c Op welke afstand van de kraan kan een massa van 6 ton dus nog hangen?

d Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Welke massa mag die stapel stenen hoogstens hebben?

Testen

Opgave 14

De weerstand die een elektrische stroom ondervindt in een koperdraad bereken je met de volgende formule:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

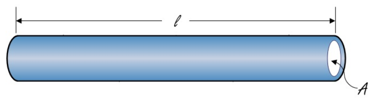
Hierin is:

- R de weerstand in ohm (Ω)
- ρ de soortelijke weerstand van het materiaal in ohm meter (Ωm)
- l de lengte in meter (m)
- A de doorsnede in vierkante meter (m^2)

De soortelijke weerstand van koper is $17 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

a Hoe groot moet de doorsnede van de koperdraad zijn om in 1 m koperdraad een weerstand van meer dan 10 Ω te krijgen?

b Welke diameter heeft zo'n koperdraad?



Figuur 6.6

Opgave 15

Los de volgende ongelijkheden op.

a $\frac{8}{m} + 15 < 20$

b $\frac{11n}{4} + \frac{25}{7} \geq \frac{39}{7}$

c $\frac{18}{x} > 2x$

6.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het begin van het werken met formules voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra 2** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- macht — rekenregels voor machten;
- breuken met variabelen;
- uitdrukken in;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- de rekenregels voor machten toepassen bij het herleiden van uitdrukkingen;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen;
- formules herleiden tot de éne variabele is uitgedrukt in de andere, ook formules met breuken;
- ongelijkheden (ook met breuken erin) systematisch oplossen.

Testen

Opgave 1

Herleid.

a $4(6+3p)+2(p-4)$

b $3(a-5)(a+12)$

c $\frac{8b^4}{3b^3} \Big/ \frac{6b^2}{4b}$

d $2(x-8)-(3-x)$

e $4k\left(k^2+2k\right)-2k^2(3k-3)$

f $\frac{5t}{3r} \cdot \frac{4r}{7t} - \frac{r}{7t}$

Opgave 2

Los deze vergelijkingen exact op.

a $2(k-3)=6$

b $-x(x+3)=(x+5)(7-x)$

c $\frac{1}{3}p+\frac{5}{6}=\frac{p}{2}$

d $4(3q+25)=(q+6)^2$

e $\frac{3}{2y} + \frac{6}{5} = \frac{2}{y}$

f $8\left(1 + \frac{1}{m}\right) = 12$

Opgave 3

Gegeven zijn de breuken $\frac{3}{2a}$ en $\frac{4}{a}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Trek de eerste breuk van de tweede af.

c Bereken het product van beide breuken.

d Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 4

Van een gewelf in de vorm van een halve bol is het volume $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ waarin r de straal in meter is.

a De diameter van dit gewelf is $d = 2r$.
Schrijf de formule zo, dat V wordt uitgedrukt in d.

b Als je wilt berekenen welke diameter zo'n koepelgewelf moet krijgen als je een bepaald volume V wilt hebben, dan kun je deze formule beter herleiden naar een vorm waarin d is uitgedrukt in V. Laat zien hoe dit gaat.

c Welke diameter heeft zo'n koepelgewelf als het volume erbinnen 2 m^3 is? (Geef je antwoord in cm nauwkeurig.)

Opgave 5

Je wilt de ongelijkheid $x^3 > 6 - x$ oplossen.

a Teken eerst de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6 - x$ in één figuur.

b Bepaal door inklemmen alle snijpunten van beide grafieken in twee decimalen nauwkeurig.

c Los de ongelijkheid op.

Opgave 6

Een school huurt voor € 2500,00 per jaar een kopieermachine voor de leerlingen. Om de kosten te dekken moeten de leerlingen een bepaald bedrag per kopie betalen.

De school heeft uitgerekend dat elke kopie aan papier en inkt € 0,05 kost. Die € 0,05 komt extra bij het bedrag dat de leerlingen per kopie moeten betalen. a is het aantal kopieën per jaar.

a Stel een formule op voor het bedrag B dat een leerling per kopie moet betalen afhankelijk van a.

b Teken een bijpassende grafiek voor 0 tot en met 50000 kopieën.

c Hoeveel kopieën per jaar moeten er worden gemaakt om met een prijs voor de leerlingen van € 0,20 per kopie uit de kosten te komen?

Toepassen

Opgave 7: Schaal van Richter

De kracht van een aardbeving wordt gemeten op de schaal van Richter. Een kracht van 6 op de schaal van Richter is al een behoorlijke aardschok. Maar die kracht neemt snel af als je verder van het centrum van de aardbeving af bent. Stel dat voor de kracht k van een bepaalde aardbeving geldt:

$k = 1 + \frac{100}{r^2+20}$

Hierin is r de afstand in km vanaf het centrum van de beving.

a Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving in het centrum?

b Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving op 5 km van het centrum?

c Bij welk getal op de schaal van Richter is er geen sprake van een aardbeving? Leg uit hoe je aan dit antwoord komt.

d Teken een grafiek van k afhankelijk van r. Neem voor r getallen van 0 tot en met 20.

e Als $k < 1{,}1$ is de aardbeving niet voelbaar. Bepaal hoeveel km je daarvoor minstens van het centrum af moet zitten.

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl