

Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 4

Inhoud

Kwadratische functies

Goniometrie

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

7 Kwadratische functies 5

7.1 Kwadratische functies 6

7.2 Ontbinden in factoren 14

7.3 De abc-formule 23

7.4 Handig oplossen 32

7.5 Totaalbeeld 39

8 Goniometrie 43

8.1 Goniometrische verhoudingen 44

8.2 Omtrek en oppervlakte 51

8.3 Vectoren 58

8.4 Sinusregel 66

8.5 Cosinusregel 72

8.6 Totaalbeeld 78

Register 81

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Kwadratische functies

7.1	Kwadratische functies	6
7.2	Ontbinden in factoren	14
7.3	De abc-formule	23
7.4	Handig oplossen	32
7.5	Totaalbeeld	39

7.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratisch verband tussen twee variabelen herkennen aan de standaardformule $y = a(x - p)^2 + q$;
- top en symmetrieas aflezen uit de standaardformule van een kwadratische functie en dan een tabel en een grafiek maken;
- het maximum of minimum van een kwadratische functie vanuit de standaardvorm bepalen;
- nulpunten van een kwadratische functie berekenen door terugrekenen vanuit de standaardformule.

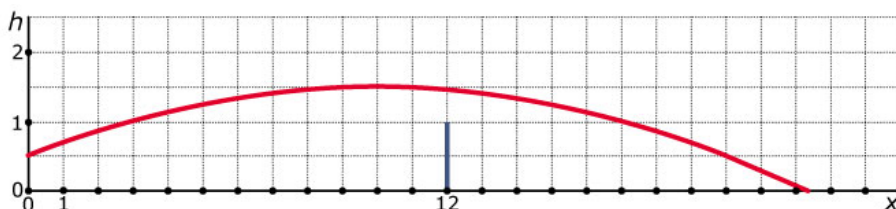
Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren, met name met kwadraten en wortels;
- haakjes wegwerken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen waarin een kwadraat voorkomt.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: tennisbal



Figuur 7.1

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule

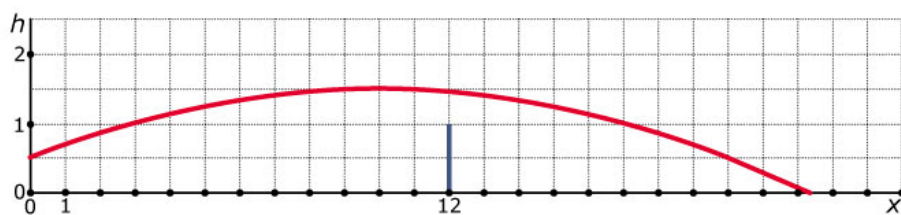
$$h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$$

Hierin stelt h de hoogte van de bal boven het tennisveld en is x de afstand van de monding van het tenniskanon tot het punt recht onder de bal.

Hoe hoog komt de tennisbal maximaal?

Uitleg

Bekijk de applet: [tennisbal](#)



Figuur 7.2

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule:

$$h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$$

Deze formule is van de vorm $h = \dots$ en dus is h een functie van x . In dit geval is er sprake van een kwadratische functie. Hieronder zie je de bijbehorende tabel.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
h	0,50	0,86	1,14	1,34	1,46	1,50	1,46	1,34	1,14	0,86	0,50	0,06	-0,46
toename		0,36	0,28	0,20	0,12	0,04	-0,04	-0,12	-0,20	-0,28	-0,36	-0,44	-0,52

Tabel 7.1

Je ziet dat de toename van de hoogte van de tennisbal steeds wat minder wordt. Hoeveel minder is moeilijk in te schatten. Op het eerste gezicht lijkt er geen regelmaat in de rij van de toenames te zitten. Maar als je de verandering van de toenames bekijkt is deze constant. Toeval of geen toeval?

De grafiek hierboven is een deel van een **parabool**. Je ziet dat het hoogste punt de coördinaten (10; 1,5) is. Dit noem je de **top** van de parabool. De top ligt op de **symmetrieas** van de parabool. In dit geval is het de lijn $x = 10$.

Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg](#) de baan van een tennisbal die wordt afgeschoten door een tenniskanon. De formule die de baan van de bal beschrijft is gegeven.

- Waarom hoort deze formule bij een kwadratische functie?
- Bereken zelf de hoogte van de tennisbal als $x = 3$.
- Je ziet dat er ook een rij is gemaakt van de toenames van de hoogte telkens als x met 2 wordt verhoogd. Maak zelf een rij met de verandering van die toenames.
- De top van de parabool kun je uit de tabel aflezen. Maar je kunt hem ook direct uit de formule afleiden. Ga na hoe.

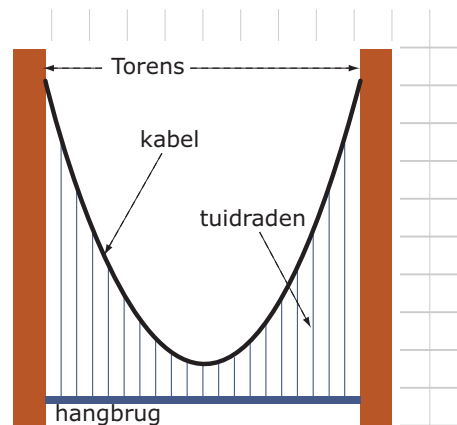
Opgave 2

Een hangbrug is met tuidraden opgehangen aan twee kabels die zijn bevestigd aan twee grote pilaren aan weerszijden van de brug. De kabels hangen dan in de vorm van een parabool. Een mogelijke formule voor zo'n parabool is

$$h = 0,01 \cdot (a - 70)^2 + 16$$

Hierin is h de hoogte van een punt op de kabel boven het wegdek van de brug en a de afstand in meters tot de linker toren.

- Hoe hoog boven het wegdek zit de kabel aan de linker toren vast?
- Maak een tabel met voor a de waarden 0, 10, 20, enzovoorts. Maak ook een rij met afnames en een rij met de verandering van de afnames. Wat valt op bij die laatste rij?
- Hoe groot is de afstand tussen beide torens?
- Welk punt is de top van de parabool? Hoe hoog zit de kabel daar boven het wegdek?



Figuur 7.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

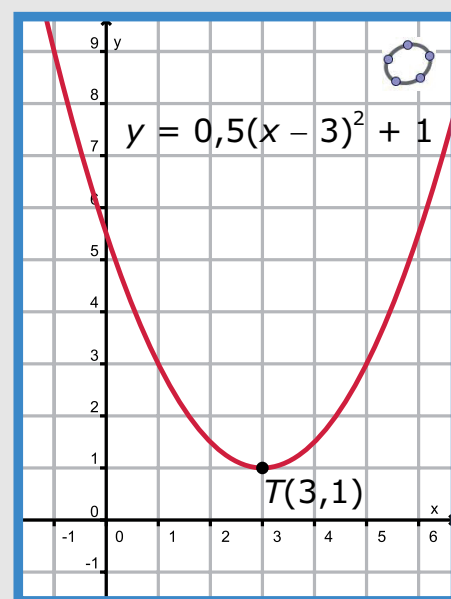
Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een **kwadratische functie** hoort een formule van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ met $a \neq 0$. De bijbehorende grafiek is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

- Als $a > 0$ heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van q voor $x = p$.
- Als $a < 0$ heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van q voor $x = p$.

Een maximum of een minimum noem je een **uiterste waarde** of ook wel een **extreme waarde** van een functie.

Als je in een bijbehorende tabel de waarden van x met vaste stappen laat toenemen, dan kun je een kwadratisch verband herkennen aan de symmetrie in de tabel. Verder kun je de **nulpunten** (de x -waarden waarbij $y = 0$) van een kwadratische functie berekenen door $a(x - p)^2 - q = 0$ op te lossen met de balansmethode. Terugrekenen vanuit een kwadraat doe je door worteltrekken, daarbij krijg je vaak twee oplossingen die de plaats van de snijpunten van de parabool met de x -as aangeven.



Figuur 7.4



Voorbeeld 1

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = (x - 1)^2 + 3$.

Bepaal de extreme waarde van deze kwadratische functie en teken de bijbehorende parabool.

Antwoord

De top van de parabool kun je uit de formule aflezen: $T(1,3)$. De parabool heeft daarom de lijn $x = 1$ als symmetrieas en je ziet dat het een dalparabool is.

De extreme waarde is daarom een minimum van 3 voor $x = 1$.

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken en de grafiek tekenen.

Opgave 3

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

- Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van deze functie een dalparabool is?
- Waarom is het belangrijk om eerst de symmetrieas te weten voor je een tabel maakt?
- Hier zie je een geschikte tabel voor deze parabool. Maak hem af en teken de parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

Tabel 7.2

- Maak een extra rij in deze tabel met daarin de toenames van de y-waarden voor elke stap. En maak ook een extra rij met de verandering van die afnames.
- Is de verandering van de afnames constant?

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies de extreme waarde en de symmetrieas. Vermeld ook welke soort parabool het betreft. Gebruik eventueel de applet in de [Theorie](#).

- $y = -(x + 1)^2 - 4$
- $y = 2(x - 4)^2 + 1$
- $y = -0,01(x - \sqrt{3})^2 + 2$



Opgave 5

Gegeven is de formule $y = (2x - 4)^2 + 3$.

- a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $y = 4(x - 2)^2 + 3$.
- b Deze formule hoort dus ook bij een kwadratische functie. Welke uiterste waarde en welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = (x - 1)^2 - 3$.

Bereken de snijpunten van de bijbehorende parabool met beide coördinaatassen.

Antwoord

Het snijpunt met de y-as kun je berekenen door $x = 0$ in te vullen:

$$y = (0 - 1)^2 - 3 = -2.$$

Het snijpunt met de y-as is dus $(0, -2)$.

Met de x-as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door $y = 0$ te nemen.

Dat geeft de vergelijking $(x - 1)^2 - 3 = 0$.

Deze vergelijking kun je oplossen met de balansmethode.

Er zijn twee mogelijke oplossingen, want bij terugrekenen vanuit kwadraat krijg je een positief en een negatief antwoord.

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 3 &= 0 \\(x - 1)^2 &= 3 && \text{beide zijden 3 aftrekken} \\x - 1 &= \sqrt{3} \vee x - 1 = -\sqrt{3} && \text{worteltrekken} \\x &= 1 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{3} && \text{beide zijden +1}\end{aligned}$$

Het teken $\vee$ lees je als en/of. Beide antwoorden zijn correct.

Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven. Als dat wordt gevraagd kun je ze benaderen in bijvoorbeeld één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je bij een kwadratische functie de snijpunten van de bijbehorende parabool met de beide coördinaatassen kun opstellen.

- a Lees de gevraagde punten uit de figuur af.
- b Voer zelf de berekening van de snijpunten met de x-as uit zonder naar **Voorbeeld 2** te kijken. Schrijf hun exacte coördinaten op.
- c Laat zien dat beide snijpunten met de x-as evenver van de symmetrieas van de parabool liggen.
- d Geef een benadering van de snijpunten met de x-as in twee decimalen nauwkeurig. Ga na dat ze passen bij wat je uit de figuur hebt afgelezen.

Opgave 7

Een kwadratische functie is gegeven door de formule

$$y = -4(x - 8,5)^2 + 5.$$

- Bereken van de bijbehorende parabool het snijpunt met de y-as.
- Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met de x-as.

Oefenen

Opgave 8

Van een kwadratische functie is de formule $y = -0,5(x - 6)^2 + 10$. De bijbehorende grafiek is een bergparabool.

- Waarom is de bijbehorende grafiek een bergparabool? Welk punt is de top van die parabool?
- Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie?
- Maak een geschikte tabel en teken de parabool. Zorg er voor dat de top in ieder geval duidelijk in beeld is.
- Bereken de nulpunten van deze functie.

Opgave 9

Bepaal van elk van de volgende kwadratische functies de extreme waarde.

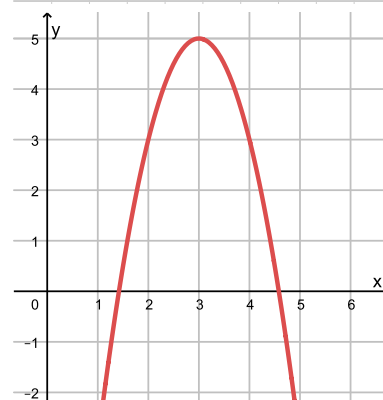
- $y = (x + 5)^2 + 7$
- $y = -2(x - 12)^2 + 45$
- $y = (x + \sqrt{2})^2 - \sqrt{3}$
- $y = 5,5 - 3(x - 2)^2$

Opgave 10

Je ziet hier een parabool. De bijbehorende formule is

$$y = -2(x - 3)^2 + 5.$$

- Bepaal de top van deze parabool en bereken het snijpunt met de y-as.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x-as.
- Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van deze parabool met de x-as.



Figuur 7.5

Opgave 11

Gegeven is een parabool met formule $y = -0,5(x - 10)^2 + 40$ en een lijn met vergelijking $y = a$.

- Bereken de snijpunten van deze parabool met de beide coördinaatassen.
- Voor welke waarde van a heeft de lijn precies één snijpunt met de parabool?



- c Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool twee snijpunten?
- d Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Toepassen

Parabolen komen in de natuur regelmatig voor. Wel moet je daarbij vaak uitgaan van ideale omstandigheden die in de praktijk niet precies gelden. Voorbeelden zijn:

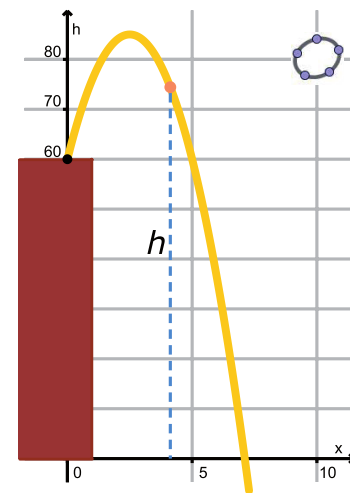
- de baan van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt);
- de hoogte van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt) afhankelijk van de tijd;
- de boog die de kabels van een hangbrug maken als die brug met behulp van zogenaamde tuidraden aan de kabels is opgehangen.

Afhankelijk van de omstandigheden (de kracht waarmee het voorwerp wordt afgeschoten, de afmetingen van de hangbrug) kun je bij die parabolen formules maken waarmee je dan weer berekeningen kunt uitvoeren.

Opgave 12

In een experiment wordt vanaf een 50 meter hoge toren een tennisbal afgeschoten die uiteindelijk zal neerkomen op het plein voor deze toren. De baan die de kogel volgt wordt gefilmd en met behulp van een computerprogramma wordt de baan van de bal berekend. De hoogte van de tennisbal boven de grond wordt bij benadering gegeven voor de formule $h = -4(x - 2,5)^2 + 85$, waarin h de hoogte van de bal boven de begane grond in meters en x de afstand van het punt op de grond recht onder de plaats van afschieten en het punt op de grond recht onder de bal is. Ook x is in m.

- a Waaraan kun je zien dat deze tennisbal nogal steil omhoog wordt geschoten?
- b Hoe hoog boven de grond komt deze tennisbal maximaal?
- c Hoeveel m vanaf het punt op de grond recht onder het afschietpunt komt de bal weer op de grond?



Figuur 7.6

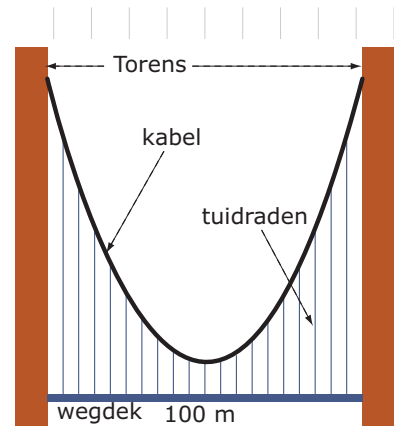


Opgave 13

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens op 100 m boven het wegdek. De kortste van de 19 tuidraden is 10 m lang.

Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de x -as samenvalt met het wegdek en de y -as over de kortste tuidraad loopt. Neem aan dat de eenheden op beide assen in 1 m zijn. De formule van de bijbehorende kwadratische functie is dan $y = \frac{9}{250}x^2 + 10$.

- Ga na dat de parabool bij deze formule past bij de tekening van de hangbrug.
- Hoe lang is de negentiende tuidraad gezien vanaf de linker toren?



Figuur 7.7

Testen

Opgave 14

Gegeven is de kwadratische functie $y = -0,05(x - 6)^2 + 2$.

- Bepaal de maximale waarde van deze functie. Waarom is hier van een maximum sprake?
- Teken de grafiek van y afhankelijk van x .
- Bereken de coördinaten van de snijpunten met beide assen van de parabool die de grafiek van deze functie is.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van deze functie met de lijn $y = 0,2$.

7.2 Ontbinden in factoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische functie herkennen aan de formules $y = a(x - m)(x - n)$ en $y = ax^2 + bx + c$;
- nulpunten en top van een kwadratische functie berekenen door ontbinden in factoren.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ berekenen;
- haakjes wegwerken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen waarin een kwadraat voorkomt.

Verkennen

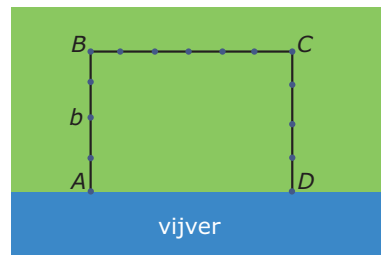
Opgave V1

Bekijk de applet: weiland tegen vijver

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.

b is de lengte van AB . Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?



Figuur 7.1

Uitleg 1

Een kwadratisch verband kan ook de vorm $y = x^2 + 2x$ hebben, bijvoorbeeld als de haakjes zijn weggewerkt. Maar ook dan wil je de nulpunten kunnen berekenen, dus $x^2 + 2x = 0$ oplossen.

In de figuur zie je dat $x^2 + 2x = x \cdot (x + 2)$.

Je hebt zo van een optelling van twee termen een vermenigvuldiging gemaakt. De vergelijking wordt daardoor $x \cdot (x + 2) = 0$. En van zo'n vergelijking kun je bijna meteen de oplossingen zien.

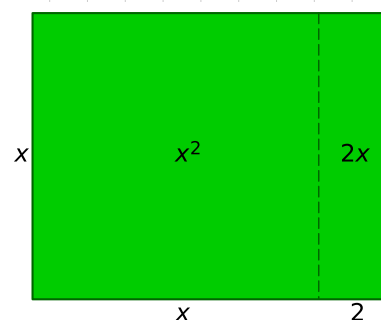
De uitkomst van het vermenigvuldigen van twee getallen kan namelijk alleen maar 0 zijn als één van die twee getallen zelf 0 is of beide getallen 0 zijn.

Voor $x \cdot (x + 2) = 0$ betekent dit dus: $x = 0$ of $x + 2 = 0$ of beide zijn 0.

Kortweg: $x \cdot (x + 2) = 0$ geeft $x = 0$ en/of $x + 2 = 0$.

Omdat voor 'en/of' het teken $\vee$ wordt gebruikt, kan het zelfs nog korter:

$x \cdot (x + 2) = 0$ geeft $x = 0 \vee x + 2 = 0$.



Figuur 7.2



De vergelijking $x + 2 = 0$ levert $x = -2$ op.

En de oorspronkelijke vergelijking heeft daarmee de oplossing $x = 0 \vee x = -2$.

Dat zijn twee waarden voor x die beide de gegeven vergelijking waar maken.

De gebruikte techniek heet een factor buiten haakjes halen.

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je hoe de vergelijking $x^2 + 2x = 0$ kan worden opgelost. Je haalt dan een x buiten haakjes. De volgende vergelijkingen kun je ook op die manier oplossen. Laat zien hoe.

- a $x^2 + 6x = 0$
- b $x^2 - 13x = 0$
- c $x^2 = 3x$
- d $5x - x^2 = 0$

Opgave 2

Los de vergelijkingen op door een factor buiten haakjes te halen.

- a $2x^2 - 5x = 0$
- b $8x = -3x^2$
- c $0,01x^2 - x = 0$
- d $x(x - 3) = 4x$

Uitleg 2

De nulpunten van een kwadratische functie als $y = x^2 + 5x + 6$ kun je vinden door $x^2 + 5x + 6 = 0$ op te lossen.

In de figuur zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 2)$.

Immers $3 + 2 = 5$ en $3 \cdot 2 = 6$. Je hebt zo van een optelling van drie termen een vermenigvuldiging van twee factoren gemaakt. De vergelijking wordt daardoor $(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$. En van zo'n vergelijking kun je bijna meteen de oplossingen zien.

$(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$ betekent namelijk: $x + 3 = 0$ of $x + 2 = 0$ of beide zijn 0.

Kortweg:

$(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$ is gelijkwaardig met $x + 3 = 0 \vee x + 2 = 0$.

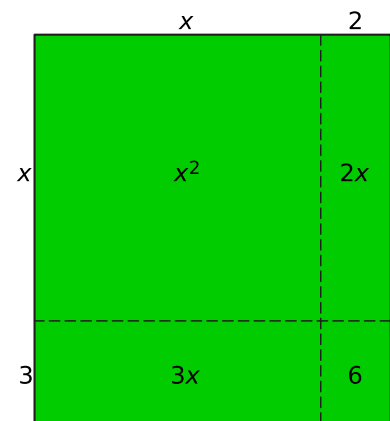
De vergelijking $x + 3 = 0$ levert $x = -3$ op.

En de vergelijking $x + 2 = 0$ levert $x = -2$ op.

De oorspronkelijke vergelijking heeft daarmee de oplossing $x = -3 \vee x = -2$.

Dat zijn twee waarden voor x die beide de gegeven vergelijking waar maken.

De gebruikte techniek heet de somproductmethode, omdat de twee waarden 3 en 2 kunnen worden gevonden uit het feit dat hun som $3 + 2 = 5$ is en hun product $3 \cdot 2 = 6$ is.



Figuur 7.3

Als je een factor buiten haakjes haalt of de som- en productmethode gebruikt, noem je dat ontbinden in factoren. Dat is een manier om sommige vergelijkingen snel op te lossen. Maar dan moet het ontbinden in factoren wel kunnen. En dat is lang niet altijd het geval.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je hoe de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$ wordt opgelost zonder een kwadraat af te splitsen. Er wordt een figuur gebruikt. Maar je kunt de somproductmethode ook toepassen zonder een figuur te maken.

- Werk in de uitdrukking $(x + 3)(x + 2)$ de haakjes weg en herleid hem zover mogelijk.
- Wat valt je op aan het getal voor de x als je de haakjes hebt weg-gewerkt? En wat valt op aan de term waar geen x in voorkomt?
- Maak een tabel van alle mogelijke combinaties van twee gehele getallen (ook negatieve) die als product 6 hebben.
- Hoe vind je met behulp van de tabel bij c de juiste ontbinding van $x^2 + 5x + 6$?
- Gebruik een vergelijkbare tabel om een ontbinding te vinden van $x^2 + 9x + 18$.
- Los op: $x^2 + 9x + 18 = 0$

Opgave 4

Los de vergelijkingen op door de somproductmethode te gebruiken.

- $x^2 + 6x + 5 = 0$
- $x^2 + 19x + 84 = 0$
- $x^2 + 7x + 12 = 0$
- $x^2 + 7x + 10 = 0$

Opgave 5

Je kunt het ontbinden in factoren met de somproductmethode ook toepassen als er negatieve getallen in je vergelijking voorkomen. Los daarmee de volgende vergelijkingen op.

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^2 + 5x - 6 = 0$
- $x^2 - 5x - 6 = 0$
- $x^2 - 6x + 5 = 0$



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: kwadratische functie

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aannemen:

- $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ waarin (p, q) de **top** van de parabool is.
- $y = a(x - m)(x - n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

Dat het hier voor $a \neq 0$ bij alledrie om kwadratische functies gaat, wordt duidelijk als je bij de eerste twee vormen de haakjes uitwerkt. De hoogste macht van x die dan in de formule voorkomt is 2.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x -as, de **nulpunten** doe je door $y = 0$ op te lossen.

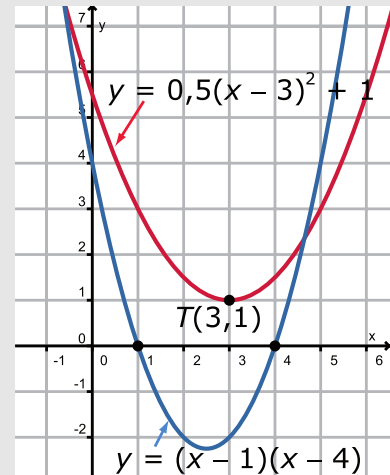
Bij kwadratische functies van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ kun je juist de nulpunten meteen zien: $(m, 0)$ en $(n, 0)$. De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een x -coördinaat heeft midden tussen m en n in.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ probeer je door **ontbinden in factoren** in de vorm te brengen waarin je de nulpunten meteen kunt zien:

$$a \text{ buiten haakjes halen: } ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 + px + q)$$

en de **somproductmethode** $x^2 + px + q = (x + m)(x + n)$ met $m + n = p$ en $m \cdot n = q$.

Dat lukt echter niet altijd...



Figuur 7.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bereken de nulpunten en het minimum van de kwadratische functie $y = 3x^2 + 8x$

Antwoord

Begin met de nulpunten: $3x^2 + 8x = 0$.

Beide termen bevatten een factor x .

Die kun je buiten haakjes halen: $x(3x + 8) = 0$.

Er blijft een product over waar 0 uit komt: $x \cdot (3x + 8) = 0$.

Omdat een product van twee getallen alleen 0 kan zijn als een van beide of beide getallen 0 zijn, kun je dit schrijven als $x = 0 \vee 3x + 8 = 0$. De gezochte oplossingen zijn daarom $x = 0$ en

$$x = -\frac{8}{3}.$$

De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = -\frac{8}{3}$, dus de symmetrieas is $x = -\frac{4}{3}$.

Het minimum is $-\frac{16}{3}$ bij $x = -\frac{4}{3}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking $3x^2 + 8x = 0$ snel kunt oplossen.

- Waaraan zie je dat deze vergelijking kan worden opgelost door een x buiten haakjes te halen?
- Laat zien hoe je aan het antwoord komt.

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk op.

- $2x^2 - 13x = 0$
- $3x^2 = 71x$
- $x(x - 3) = 2x$
- $x^2 = 81$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: kwadratische functie

Gegeven is de kwadratische functie $y = x^2 - 4x - 5$.

Bereken de snijpunten met de assen en de top van de bijbehorende parabool.

Antwoord

Het snijpunt met de y -as kun je berekenen door $x = 0$ in te vullen:
 $y = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$ geeft het punt $(0, -5)$.

Met de x -as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door $y = 0$ te nemen.

Dat geeft de vergelijking $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Met de somproductmethode vind je:

$(x - 5)(x + 1) = 0$ en dus:

$x - 5 = 0 \vee x + 1 = 0$ zodat $x = 5 \vee x = -1$.

Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven.

De top van de parabool ligt op de symmetrieas: $x = \frac{5+(-1)}{2} = 2$.

De top is dus $(2, -9)$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe een vergelijking wordt opgelost met de somproductmethode.

- Waarom maak je bij de somproductmethode een tabel voor het product -5 en niet voor de som -4 ?
- Laat zien dat de ontbinding klopt door zelf die tabel te maken.
- Kun je de vergelijking $x^2 - 4x - 6 = 0$ oplossen door ontbinden in factoren?



Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met de somproductmethode.

- a $x^2 + 6x + 8 = 0$
- b $x^2 + 3x = 18$
- c $x^2 + 15 = 8x$
- d $x^2 - 16 = 0$

Voorbeeld 3

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een rechthoekig stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.

b is de lengte van AB .

Bereken de maximale oppervlakte van dit weiland.

Antwoord

Voor BC krijg je dan een lengte van $100 - 2b$.

Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$$

Dit is een kwadratische functie met als grafiek een bergparabool.

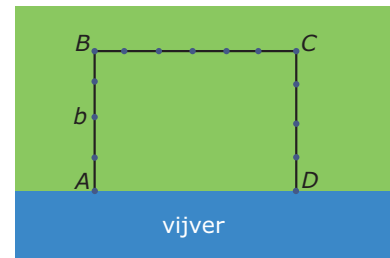
De top van die parabool kun je berekenen vanuit de nulpunten.

Voor de nulpunten geldt: $b(100 - 2b) = 0$.

Dit levert na splitsen op: $b = 0 \vee b = 50$.

De symmetrieas zit daarom bij $b = 25$.

Het bijbehorende maximum is $y = 1250$ en dit is dus de maximale oppervlakte van het weiland in m^2 .



Figuur 7.5

Opgave 10

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 3**.

- a Waarom is de lengte van BC gelijk aan $100 - 2b$?
- b De oppervlakte van het weiland wordt $A = 100b - 2b^2$.
Hoe zie je aan die formule dat er sprake is van een maximum?
- c Voer zelf de berekening van de maximale oppervlakte uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

Oefenen

Opgave 11

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

- a $x^2 - 27x = 0$
- b $x^2 + 18x + 80 = 0$
- c $x^2 + 3x = 10$
- d $x^2 - 10x + 24 = 0$
- e $x^2 = 5x + 14$
- f $2x^2 = 7x$

Opgave 12

Van twee getallen is het verschil 17 en het product 168.

Bereken beide getallen.

Opgave 13

Los de vergelijkingen op, als dat mogelijk is door ontbinden in factoren.

- a $2x^2 - 10x = 12$
- b $x(x + 4) = 2x + 8$
- c $(2x + 1)(x + 6) = 0$
- d $(2x + 1)(x + 6) = 6$
- e $(2x + 1)(x + 6) = 13x$

Opgave 14

Een parabolische boog is gegeven door de formule

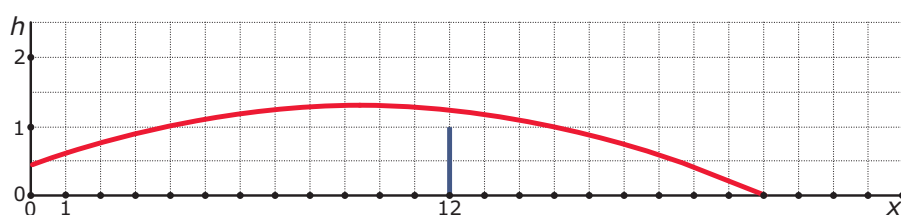
$$y = -0,01x^2 + 2x.$$

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x-as.
- b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.
- c Los de kwadratische vergelijking $-0,01x^2 + 2x = 19$ op.
- d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-0,01x^2 + 2x = 100$?

Opgave 15

Je ziet hier de baan van een tennisbal die door een tennisser op de baseline wordt geraakt en aan de andere kant van het net op de grond komt. Veronderstel dat de baan van de bal een zuivere parabool is. Er geldt:

$$h = -0,01x^2 + 0,19x + 0,42$$



Figuur 7.6

- a Op welke hoogte wordt de bal boven de baseline geraakt?
- b Na hoeveel m vanaf de baseline komt de bal (voor de andere baseline) weer op de grond?
- c Waar zit het hoogste punt van de bal?

Toepassen

Ook in de economie komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.

prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Tabel 7.1

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p .

Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekend door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 16

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in [Toepassen](#).

- Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.
- Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.
- Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan alsnog stijgen?
- Waarom zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waarom zie je dat de opbrengst een maximum heeft?
- Bereken het maximum van R . Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk opbrengst wil hebben?
- Is het verstandig om een zo groot mogelijk opbrengst te willen hebben?

Opgave 17

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijk opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

- Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?
Neem aan dat het maken van elke kop soep € 0,50 kost.
- Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)(340 - 2p)$.
- Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?



Figuur 7.7



- d** Bereken het maximum van W . Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk winst wil hebben?

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op de handigste wijze op.

- a** $x^2 = 16x$
b $x^2 = 16x + 17$
c $x^2 = 16x - 55$
d $(2x + 3)(x + 8) = 19x$

Opgave 19

Een parabolische boog is gegeven door de formule
 $y = -0,04x^2 + 4x$.

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x -as.
b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.
c Los de kwadratische vergelijking $-0,04x^2 + 4x = 36$ op.

7.3 De abc-formule

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische vergelijking oplossen met de abc-formule.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie berekenen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen (balansmethode) en/of ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x + 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 7 = 0$ oplossen.

Kun je deze vergelijking exact oplossen?

Uitleg

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Soms kun je een kwadratische vergelijking oplossen, bijvoorbeeld door ontbinden of door terugrekenen. Maar dat lukt lang niet altijd. Wiskundigen hebben zich al honderden jaren geleden over dit probleem gebogen. Ze hebben de 'abc-formule' gevonden:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ als } a \neq 0.$$

Als je nu $x^2 + 6x + 7 = 0$ wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af $a = 1$, $b = 6$ en $c = 7$. Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$$x = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

ofwel:

$$x = \frac{-6+\sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6-\sqrt{8}}{2}$$

Het is handiger om de vorm $b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat afzonderlijk te berekenen. Je noemt deze uitdrukking de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

- Los zelf de vergelijking $x^2 + 6x + 7 = 0$ op met behulp van de abc-formule.
- Vergelijk je antwoord met dat in de **Uitleg**. Komen ze overeen?
- Geef benaderingen van beide x -waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

In **Opgave V1** werd de oplossing van $x^2 + 6x + 8 = 0$ gevraagd.

- Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de abc-formule. Ga na, dat je oplossing overeen komt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

- Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?
- Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

- $x^2 + 12x + 4 = 0$
- $2x^2 + 5x - 10 = 0$
- $5x - x^2 + 7 = 0$
- $9x^2 = 17 - 10x$
- $2x^2 + 16 = -12x$
- $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Opgave 3

Bekijk in de **Uitleg** wat de discriminant van een kwadratische vergelijking is.

Bekijk de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

- Bereken de discriminant van deze vergelijking.
- Bereken vervolgens de oplossing.
- Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4,5 = 0$.

- Bereken eerst de discriminant. Leg uit dat je aan de discriminant kunt zien dat de oplossing van de vergelijking maar één waarde heeft. Bereken vervolgens die ene oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.



- e Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

- a $2x^2 + 5x - 20 = 0$
 b $11 + 3x^2 = 9x$
 c $3x^2 = 4x - 1$
 d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe $ax^2 + bx + c = 0$ in algemene zin oplossen. Je schrijft die formule daartoe eerst in de vorm $a(x - p)^2 + q = 0$ waarin (p, q) de top van de parabool is.

Die top ga je eerst berekenen. Daartoe bepaal je de symmetrieas. Deze lijn is de middelloodlijn tussen twee punten op gelijke hoogte op de parabool, bijvoorbeeld op hoogte $y = c$. Die twee punten bereken je dus uit $ax^2 + bx + c = c$, ofwel $ax^2 + bx = 0$. Dit geeft $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$. De symmetrieas is daarom $x = -\frac{b}{2a}$. Dit invullen levert de top op: $T\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Dus moet je oplossen

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0. \text{ Dit geeft } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Worteltrekken:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

En nu een beetje herleiden:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ te berekenen.

- Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D = 0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D < 0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip 'quadratic formula' in het [Practicum](#).

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $(x - 2)(x - 3) = 3$ op.

Antwoord

Haakjes uitwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking $x^2 - 5x + 3 = 0$ op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

Lees af: $a = 1$, $b = -5$ en $c = 3$.

En dus is $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$. De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Opgave 5

Bekijk in [Voorbeeld 1](#) hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst!

- Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?
- Laat zien, dat je door haakjes uitwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.
- Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?
- Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

- $3x^2 + 4 = 7$
- $(x + 1)(2x - 1) = 4$
- $4x = x^2 + 7$
- $(x + 3)^2 = 4$



e $(2x + 4)^2 = 32x$

f $(2x + 4)^2 = 32$

Opgave 7

De oppervlakte van een rechthoek is $23,6 \text{ cm}^2$ en zijn breedte is $3,10 \text{ cm}$ korter dan zijn lengte.

Bereken de afmetingen van deze rechthoek in drie significante cijfers.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn een kwadratische functie met formule

$y_1 = x^2 + 8x + 1$ en een lineaire functie met formule $y_2 = 2x - 4$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.

Antwoord

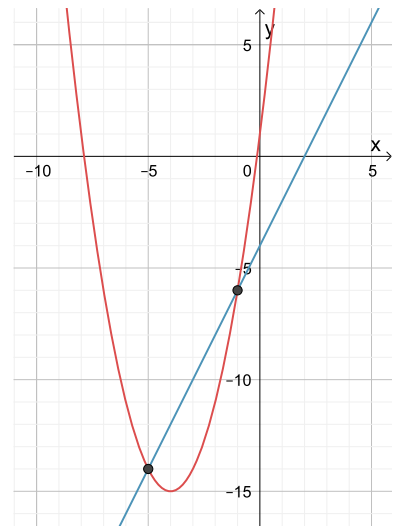
In de snijpunten geldt $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit $x^2 + 6x + 5 = 0$ lees je af: $a = 1$, $b = 6$ en $c = 5$.

De oplossing is $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. En dus vind je $x = -5 \vee x = -1$.

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten $(-5, -14)$ en $(-1, -6)$ oplevert.



Figuur 7.1

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

- In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de somproductmethode. Laat dat zien.
- Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?
- Als je de twee x-waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y-waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.
- Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

Opgave 9

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x + 2)(x - 3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.



Opgave 10

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x + 1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

- Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?
- Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?
- Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 11

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

- $x^2 + 5x + 1 = 0$
- $2x^2 - 3x - 2 = 0$
- $-5x^2 - 7x = 1$
- $x(2x + 3) = 3$
- $x(2x + 3) = 3x$
- $x(2x + 3) = 0$
- $(x + 3)(x - 5) = 2$
- $(x + 3)(x - 5) = 0$
- $(2x + 5)^2 = 5$

Opgave 12

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

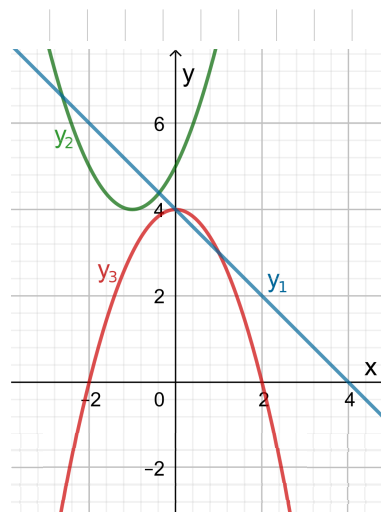
- $2x^2 + 5x - 1 = 0$
- $5x^2 - x = 1$
- $-2x^2 + 6x = 18$
- $(1 - 2x)^2 = 12$
- $(x - 1)^2 + 4 = 0$

Opgave 13

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.

Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.

- a $y_1 = y_3$
- b $y_1 = y_2$
- c $y_2 = y_3$
- d $y_3 = 0$
- e $y_2 = 0$
- f $y_2 = 4$



Figuur 7.2

Opgave 14

Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

- a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.
- b $y_1 = (x - 10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

Opgave 15

Bereken de diameter van een massieve cilinder met een hoogte van 82,0 cm en een totale oppervlakte van $2,0 \text{ m}^2$ in mm nauwkeurig.

De oppervlakte A van een cilinder met diameter d en hoogte h is:
 $A = \pi d h + 0,5 \pi d^2$.

Opgave 16

Oefen nu het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via het [Practicum](#).

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Kwadratische vergelijkingen komen veel voor in situaties waarin het over oppervlakte gaat.

Dat is niet zo vreemd: 'kwadraat' is eigenlijk een ander woord voor 'vierkant'.

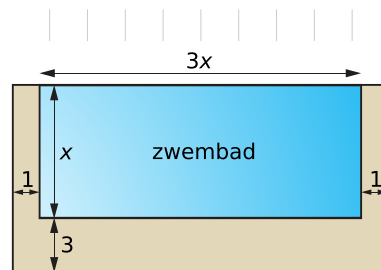
Hier zie je drie situaties die over oppervlakte gaan en waarin kwadratische vergelijkingen voorkomen.

Opgave 17

Annemie heeft een zwembad in haar tuin. De lengte van haar zwembad is drie keer zo lang als de breedte. Aan een lange kant van het zwembad staan bomen, dat laat ze zo. Aan de andere drie kanten laat ze tegels leggen. Aan de twee korte kanten van het zwembad komen de tegels 1 m breed te liggen, en aan de lange kant komen de tegels 3 m breed te liggen zodat ze daar ligstoelen neer kan zetten.

De oppervlakte van het zwembad met de tegels erbij wordt anderhalf keer de oppervlakte van het zwembad zonder tegels.

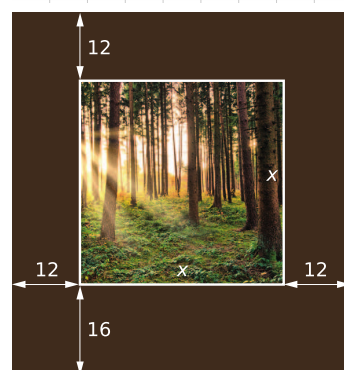
Bereken de afmetingen van het zwembad in meters op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 7.3

Opgave 18

Om een vierkante foto komt een brede rechthoekige lijst. De breedte van de lijst aan de onderkant van de foto is 16 cm. Aan de andere drie kanten is de lijst 12 cm breed. De foto met lijst krijgt daardoor een twee keer zo grote oppervlakte dan de foto zonder lijst heeft.



Figuur 7.4

- Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van de foto met lijst. Noem de lengte en de breedte van de foto x .
- Bereken de waarde van x in mm nauwkeurig.

Opgave 19

Op een groot terrein wordt voor een tennisclub een aantal tennisvelden aangelegd. Voor elk van die velden is 950 m^2 nodig, hoewel elk tennisveld 24 bij 11 m is. Dat komt door een overal even brede looprand om elk veld.

Hoe breed wordt die looprand?

Testen

Opgave 20

Los de volgende vergelijkingen op de handigste wijze op. Gebruik de abc-formule alleen als dat nodig is.

- $3x^2 = 16x$
- $x^2 = 8x + 17$
- $x(2x - 3) = 6x - 9$
- $2x(6 - x) = 12x - 16$
- $(2x + 3)(x + 8) = 24$

7.4 Handig oplossen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische vergelijking of ongelijkheid handig oplossen;
- de top van een parabool snel bepalen.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie berekenen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren en/of de abc-formule.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ oplossen.

Doe dit op zoveel mogelijk verschillende manieren. Welke manier is het handigst?

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$.

Hoe bereken je de top van de bijbehorende parabool?

Uitleg

Bekijk de applet: kwadratische functie

Een kwadratische functie is gegeven door $y = 2x^2 - 6x - 1$.

De grafiek is een dalparabool waarvan je snel de top wilt weten.

Dat doe je door de nulpunten te bepalen met de abc-formule:

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \text{ geeft } x = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{4}.$$

$$\text{Dus je krijgt } x = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{44}}{4} \text{ en } x = \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{44}}{4}.$$

De symmetrieas is daarom $x = \frac{6}{4} = 1,5$.

Dat is direct uit de abc-formule af te lezen: bij een kwadratische functie als $y = ax^2 + bx + c$ zit de symmetrieas altijd bij $x = -\frac{b}{2a}$,

want de nulpunten zijn $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Belangrijk is vooral dat dit ook geldt als er helemaal geen nulpunten zijn omdat de discriminant negatief is.

Bij het oplossen van de vergelijking die nodig is om de nulpunten te berekenen is de abc-formule vaak handig. Maar zeker niet altijd, je zult ook regelmatig werken met ontbinden in factoren en terugrekenen. En er zijn nog meer handige methoden.



Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je snel de top van een parabool bepaalt.
Gegeven is de kwadratische functie $y = 2x^2 + 4x + 5$.

- a Bepaal de top van de bijbehorende parabool.
- b Leg uit hoe je aan de top van deze parabool kunt zien dat de kwadratische functie geen nulpunten heeft.
- c Hoe kun je aan de parabool zien dat de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 5$ twee oplossingen heeft?
- d Los de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 5$ zo handig mogelijk op.
- e Los de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 21$ zo handig mogelijk op.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk op.

- a $x^2 + 12x + 4 = 0$
- b $2x^2 + 5x = 0$
- c $5x - x^2 + 7 = 0$
- d $9x^2 = 18 - 9x$
- e $2x^2 + 16 = 12x$
- f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke kwadratische functie van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ heeft een symmetrieas $x = -\frac{b}{2a}$.

Dat is tevens de **x-waarde van de top**.

Je vindt de top door deze x-waarde in te vullen in de formule.

Dat komt omdat de nulpunten $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en

$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ zijn en de symmetrieas daar midden tussendoor gaat.

Dit geldt ook als er helemaal geen nulpunten zijn omdat de discriminant negatief is.

Je kunt met die top eenvoudig vaststellen of er nulpunten zijn:

- Als $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
 - Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
 - Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
 - Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.
- Als $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
 - Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
 - Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
 - Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.



Voorbeeld 1

Bereken de top van de paraboolboog die wordt gegeven door de formule $y = -2x^2 + 16x + 2$ en teken deze boog.

x is de horizontale afstand in meter recht onder een punt van deze boog,

y is de hoogte in meter boven de grond ($y = 0$).

Antwoord

De gegeven formule heeft de vorm $y = ax^2 + bx + c$ met $a = -2$, $b = 16$ en $c = 2$.

De symmetrieas van zo'n parabool heeft vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.

In dit geval is die symmetrieas dus $x = -\frac{16}{2 \cdot -2} = 4$.

De top van de parabool is daarom $(4, 34)$.

Nu kun je een tabel maken rondom $x = 4$ en de parabool tekenen.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de top van een bergparabool kunt vinden.

- Reken zelf de coördinaten van de top van deze parabool na.
- Maak een geschikte tabel en teken deze parabool.
- Bereken in cm nauwkeurig hoe ver de twee punten waarvoor $y = 0$ uit elkaar liggen.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies het maximum of het minimum.

Ga vervolgens na of er nulpunten zijn en zo ja, bereken die zo handig mogelijk.

- $y = 3x^2 - 15x$
- $y = 2x^2 - 8x + 16$
- $y = -0,1x^2 - 4x + 1$
- $y = x^2 - 8x + 16$

Opgave 5

Een kogelstootster stoot haar kogel volgens een mooie parabolische baan. Die baan is door haar coach gefilmd en hij heeft er een formule van op laten stellen. Bij deze baan past de formule $h = -0,026x^2 + 0,52x + 1,80$. Hierin is h de hoogte van het midden van de kogel boven een punt op de grond dat x m verwijderd is van het punt recht onder het midden van de kogel op het moment van loslaten.

- Op welke hoogte werd de kogel losgelaten?
- Bereken het hoogste punt van de baan van de kogel.
- Teken zelf de volledige baan van deze kogel in een assenstelsel. Schat daarmee de afstand die deze kogelstootster haalt.



Voorbeeld 2

De hoogte h in meter van een massa die verticaal omhoog wordt geschoten bedraagt na t seconden:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Hierin is:

- v_0 de beginsnelheid van 30 m/s
- $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ de gravitatieconstante

Hoe hoog komt deze massa maximaal en hoe lang is de hoogte meer dan 16 m?

Antwoord

Er geldt: $h = 30t - 4,905t^2$.

Hoewel de werkelijke baan van de massa niet parabolisch is, is de grafiek van h als functie van t dit wel.

De symmetrieas van die bergparabool is $t = -\frac{30}{-9,81} \approx 3,06 \text{ s}$.

De maximale hoogte is dus $h \approx 45,87 \text{ m}$.

De hoogte van deze massa is 16 m als $30t - 4,905t^2 = 16$, of $4,905t^2 - 30t + 16 = 0$.

Dit los je het handigst op met de abc-formule.

Je vindt $t \approx 5,53 \vee t \approx 0,59$.

Dus de massa zit ongeveer 4,9 seconde boven de 16 m.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Waarom is de baan van de gegeven kwadratische functie een parabool, terwijl de massa alleen loodrecht omhoog en weer naar beneden gaat?
- Reken de maximale hoogte zelf na.
- Hoe lang zit de massa boven de 30 m? (Antwoord in tienden van seconden.)

Opgave 7

Stel je voor dat iemand van een hoog gebouw een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg s (in meter) en de snelheid v (in meter per seconde) af van de tijd t (in seconden) volgens de formules $s = 4,9t^2$ en $v = 9,8t$.

- Geef een formule voor de hoogte h van het steentje boven de grond als functie van t .
- Bereken het tijdstip waarop het steentje op de grond komt op één decimaal nauwkeurig.
- Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord in km/h.

Oefenen

Opgave 8

Je ziet hier een aantal kwadratische formules. Bereken telkens de top van de bijbehorende parabool en ga na of er nulpunten zijn. Zo ja, bereken die nulpunten op een zo handig mogelijke manier.

- a $y = 2x^2 + 5x$
- b $y = -0,4(x - 10)^2 + 16$
- c $y = x(x - 4) + 20$
- d $y = 0,2x^2 - 5x - 10$
- e $y = 3(x - 5)(2x - 6)$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

- a $(2x - 3)(x - 1) = 3$
- b $(2x - 3)(x - 1) = 0$
- c $(s - 3)^2 + 5 = 0$
- d $4(s + 1)^2 - 7 = 2$
- e $t - (t - 1)^2 = -4$
- f $(x - 2)^2 = (4 - 3x)^2$

Opgave 10

Je ziet hier de beroemde hangbrug de Golden Gate Bridge in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

De afstand tussen beide torens is 1280 m. En de afstand van het wegdek tot de bovenkant van de torens is ongeveer 152 m.

Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule:

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x de afstand tot het midden van de torens en y de hoogte van de staalkabels boven het wegdek, beide in meters.

Ga ervan uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

- a Er zijn twee even lange tuidraden die 615 m uit elkaar aan de brug zijn bevestigd. Hoe lang zijn die tuidraden?
- b Er zijn twee tuidraden die 111,2 m lang zijn. Hoe ver zitten die twee tuidraden uit elkaar aan de brug bevestigd? Bepaal het antwoord door een bijpassende vergelijking op te lossen.



Figuur 7.1



Opgave 11

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

- Maak de grafiek van h .
- Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten?
- Bereken na hoeveel seconden de vuurpijl weer op diezelfde hoogte is.
- Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?
- Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?
- Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Deze twee portieken zijn ontworpen door een architect die hoorde tot de Amsterdamse School. Er wordt beweerd dat ze een mooie paraboolvorm hebben. Je zou die vorm van de rand van het metselwerk langs beide kozijnen moeten kunnen beschrijven met formules. Neem je in het midden tussen beide portieken een verticale h -as en verder de horizontale x -as precies over de stoep, dan vind je $h_1 = -5x^2 + 11x - 2,85$ en $h_2 = -5x^2 - 11x - 2,85$.

- Van welke hoogte van de kozijnen is daarbij uitgegaan?
- Hoe breed is dan de opening van elk portiek op de grond?
- Teken beide portieken als deze formules kloppen. Is er werkelijk sprake van een paraboolvorm?



Figuur 7.2

Toepassen

Je ziet hier een rechte kegel (de hoogte zit loodrecht boven het middelpunt van de grondcirkel).

r is de straal van het grondvlak (een cirkel);

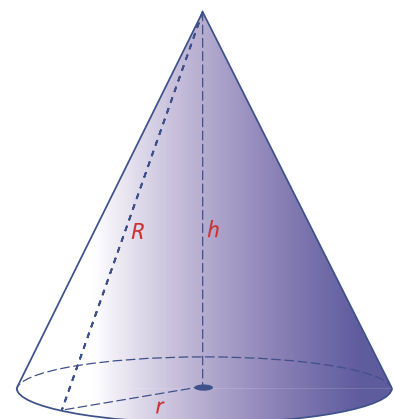
h is de hoogte (afstand van het midden van het grondvlak tot de top);

R is de 'lengte' van de buitenmantel gemeten vanaf de top tot de grondcirkel.

Voor zo'n kegel geldt:

- het volume V is $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- de oppervlakte A is $A = \pi r^2 + \pi r R$

Je ziet, dat met de oppervlakte in dit geval de totale buitenoppervlakte wordt bedoeld, inclusief de grondcirkel.



Figuur 7.3

Opgave 13

De totale buitenoppervlakte van een massieve kegel is $486,2 \text{ cm}^2$ en de lengte van de mantel is $15,3 \text{ cm}$.

Bereken de diameter van de grondcirkel.

Opgave 14

Een glazen vaas heeft de vorm van een omgekeerde kegel waar een iets kleinere omgekeerde kegel uit is gehaald. De binnendiameter is bovenaan gemeten $1,4 \text{ cm}$ kleiner dan de buitendiameter. De hoogte van de buitenste kegel is 40 cm en die van de binnenste kegel is 38 cm .

De gebruikte hoeveelheid glas is $4,16 \text{ cm}^3$.

- Bereken de binnendiameter en de buitendiameter van de vaas in mm nauwkeurig.
- Bereken hoeveel cm^3 water er maximaal in de vaas gaat.



Figuur 7.4

Testen

Opgave 15

Los op.

- $x - x^2 = 0,25$
- $x(x + 4) = 2x + 8$
- $2x(x - 4) = 3 - 8x$
- $0,01x^2 - x = 0$

Opgave 16

Tussen de woonkamer en de keuken van Jan en Mascha zit een parabolische boog volgens de formule: $h = -2,5x^2 + 4,5x$. Hierin is h de hoogte van de boog in meters en x de horizontale afstand gemeten vanaf linksonderaan de boog.

Bij een verhuizing moet er een kast door de boog getild worden. De kast is $0,5 \text{ m}$ diep, en zowel $1,80 \text{ m}$ hoog als $1,80 \text{ m}$ breed.

Controleer met een berekening of de kast door de boog kan.

7.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met formules heb je al leren werken. In dit onderwerp is het begrip kwadratische functie in een drietal formulevormen ingevoerd. Het oplossen van kwadratische vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen (met terugrekenen, ontbinden in factoren en de abc-formule) is voorbij gekomen. En je hebt geleerd snel de top van de parabool die de grafiek van een kwadratische functie is te bepalen.

Je hebt nu alle theorie van **Kwadratische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwadratische functie — parabool, top en nulpunten
- ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — somproductmethode
- de abc-formule — de discriminant
- formule voor de symmetrieas van een parabool

Activiteitenlijst

- een kwadratische functie herkennen aan de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ en de grafiek ervan tekenen door de top af te lezen en een geschikte tabel te maken — nulpunten berekenen;
- de nulpunten van de kwadratische functie $y = a(x - m)(x - n)$ aflezen — nulpunten berekenen door ontbinden in factoren;
- de abc-formule gebruiken om nulpunten te berekenen van een kwadratische functie van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ — de discriminant gebruiken;
- de top van een parabool snel berekenen vanuit de formule $y = ax^2 + bx + c$ — handig kwadratische vergelijkingen oplossen.

Testen

Opgave 1

De brug over de rivier de Tyne in het noordoosten van Engeland wordt vaak als voorbeeld genoemd voor een parabolische boog, een boog in de vorm van een parabool. Uitgaande van een assenstelsel waarin de y-as langs de verticale rechterwand van de linkertoren ligt en de x over de bovenkant van het horizontale wegdek ligt, zou dit op grond van afstand tussen beide torens en de plaats van de top van de parabool de bijbehorende formule

$$y = -0,0084(x - 81)^2 + 33$$

moeten zijn. In deze opgave ga je uit van deze formule.

- a Hoeveel meter zit de top van de parabool boven het wegdek?



Figuur 7.1

- b** Hoeveel meter is de afstand tussen beide torens?
- c** Op hoeveel meter onder het wegdek zit de parabool aan de torens bevestigd?
- d** Hoeveel meter zit er tussen de punten die de parabool met de bovenkant van het wegdek gemeen heeft? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven zijn de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

- a** Bereken de snijpunten van de parabool met de x -as.
- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van beide functies.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef daarna de eindantwoorden exact of (waar nodig) in twee decimalen nauwkeurig.

- a** $x^2 + 3x = 4$
- b** $2x^2 + 15x = 36$
- c** $3x^2 = 48$
- d** $(2x - 4)(x - 3) = 12$
- e** $(2x - 4)(x - 3) = 0$
- f** $(x - 4)^2 + x^2 = 40$
- g** $16 - (3 - x)^2 = 0$
- h** $2x^2 = x + 8$

Opgave 4

Een boer heeft een stuk land dat zuiver rechthoekig is en aan de twee lange zijden en aan één van de twee korte zijden omgeven is door een boswal van 5 m breed. Alleen aan de kant van de weg zit geen boswal, maar een sloot voor de afwatering. Het stuk land is twee keer zo lang als het breed is.

Als deze boer de boswal volledig bij zijn land trekt, wordt de oppervlakte precies twee keer zo groot.

Bereken de afmetingen van het stuk land als de boswal nog intact is. Gebruik daarbij een vergelijking en rond je antwoord af op dm nauwkeurig.

Opgave 5

De geitenfokvereniging van Oldeberkoop wil bij een reisbureau een busreis boeken naar Zwitserland, een bekend geitenland in Europa. Die reis kost elk van de 40 leden van die vereniging € 600,00. Omdat het reisbureau echter een bus voor 54 personen moet inzetten, melden zij de geitenfokkers dat elke extra passagier waarvoor zij kunnen zorgen voor elke deelnemer aan de reis een korting van € 10,00 betekent.

Onderzoek of dit voor het reisbureau gunstig is. Bij welk aantal deelnemers is de opbrengst voor het reisbureau zo hoog mogelijk?



Opgave 6

Een balk steekt loodrecht op de muur naar buiten. Het punt waar hij de muur verlaat is het steunpunt van deze balk.

Het buigmoment M in een bepaald punt van een balk is $M = \frac{1}{2} \cdot 3x(20 - x)$ waarin x de afstand is tot het steunpunt in meter.

Bereken de waarden van x waarbij het buigmoment 50 Nm (newtonmeter) bedraagt.

Toepassen

Bekijk de applet: kwadratische functie

Je ziet hier de grafieken van de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

Je ziet hier in de figuur een lijnstuk PQ dat evenwijdig is aan de verticale as en waarvan punt P op de grafiek van de lineaire functie en punt Q op de grafiek van de kwadratische functie ligt. De x -coördinaat van de punten P en Q is een getal tussen -5 en 0 .

Als je het punt Q verplaatst dan wordt de lengte van het lijnstuk PQ langer of korter. Met de applet kun je uitzoeken voor welke waarde van x de lengte van dit lijnstuk maximaal is.

Maar je kunt dit ook exact berekenen...

Opgave 7: Maximale lengte

Tussen de grafieken van de functies die je hierboven ziet bevindt zich lijnstuk PQ .

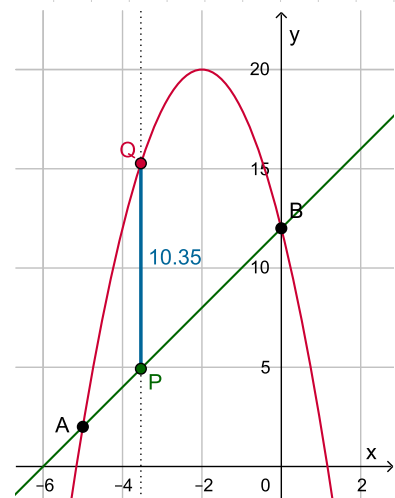
De lengte van dit lijnstuk kan variëren, je wilt de maximale lengte weten, want de minimale lengte is 0.

- Waarom is het minimum van de lengte van het daar beschreven lijnstuk 0?
- Noem de x -waarde van beide punten p . Welke coördinaten hebben P en Q dan?
- Leg uit dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan $L = -2p^2 - 10p$.
- De grafiek van L als functie van p is een bergparabool. Bereken het maximum van die functie.

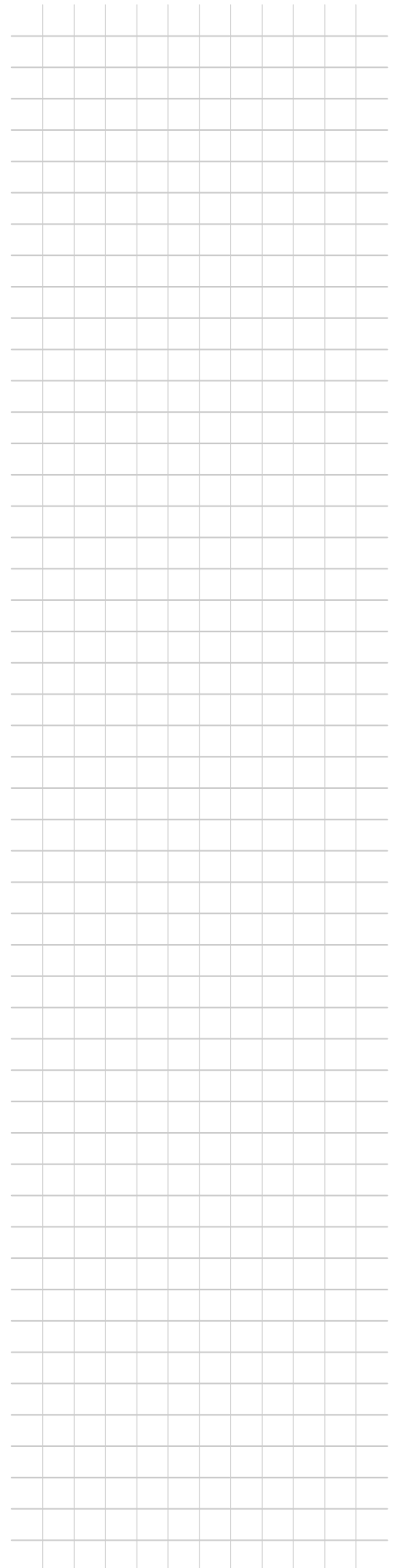
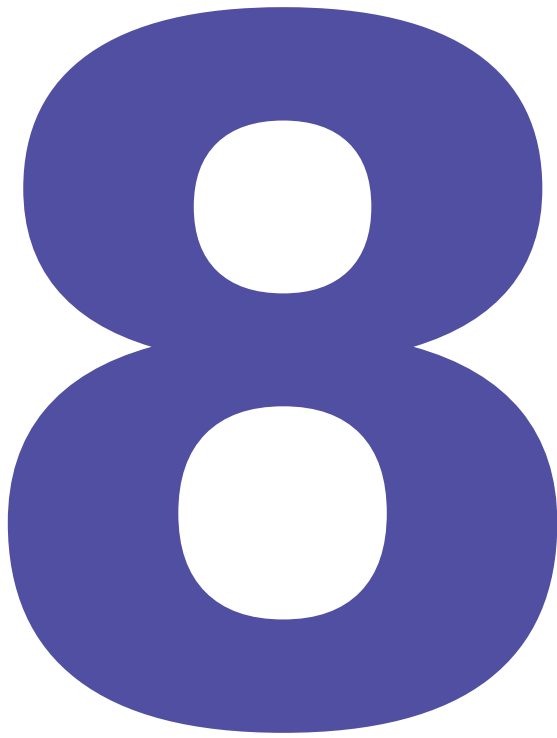
Opgave 8: Maximale lengte van een lijnstuk tussen twee parabolen

Gegeven zijn de kwadratische functies met formules $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = x^2 - 2x$. Op de grafiek van y_1 ligt het punt P waarvan de x -coördinaat tussen -1 en 2 ligt. Op de grafiek van y_2 ligt het punt Q met dezelfde x -coördinaat als punt P . Het lijnstuk PQ verbindt beide punten.

- Maak een schets van deze situatie. (Of - nog mooier - teken deze situatie in GeoGebra of Desmos.)
- Als je punt P varieert, verandert ook de lengte van lijnstuk PQ . Bereken de maximale lengte van dit lijnstuk.



Figuur 7.2



Goniometrie

8.1	Goniometrische verhoudingen	44
8.2	Omtrek en oppervlakte	51
8.3	Vectoren	58
8.4	Sinusregel	66
8.5	Cosinusregel	72
8.6	Totaalbeeld	78

8.1 Goniometrische verhoudingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen.

Voorkennis

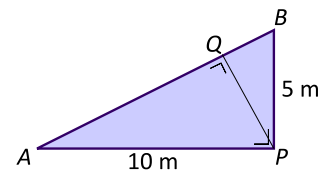
- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een rechthoekige driehoek APB . De hoogtelijn PQ stelt de afstand van punt P tot lijnstuk AB voor.

- Hoe lang is deze afstand in cm nauwkeurig?
- Hoe groot is $\angle QPB$ in graden nauwkeurig?



Figuur 8.1

Uitleg 1

Je ziet een rechthoekige driehoek APB . De hoogtelijn PQ stelt de afstand van punt P tot lijnstuk AB voor.

Deze afstand PQ kun je berekenen met behulp van gelijkvormigheid: twee driehoeken zijn gelijkvormig als hun hoeken gelijk zijn. Dat is het geval bij de driehoeken APB en PQB . Je noteert $\triangle APB \sim \triangle PQB$ met de overeenkomstige hoekpunten op dezelfde plaats.

Je weet dan dat de verhoudingen van de overeenkomstige zijden gelijk zijn:

$AP = 10$	$PB = 5$	AB
PQ	QB	$PB = 5$

Tabel 8.1

Je ziet nu dat je van $\triangle APB$ nog de lengte van AB moet berekenen.

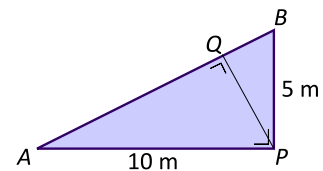
Daarvoor gebruik je de stelling van Pythagoras in $\triangle APB$:

$AP^2 + PB^2 = AB^2$ geeft $10^2 + 5^2 = 125 = AB^2$, zodat $AB = \sqrt{125} \approx 11,180$.

Deze waarde van AB kun je in de tabel invullen. Er geldt:

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{PB}{AB}, \text{ dus } \frac{PQ}{10} \approx \frac{5}{11,180} \approx 0,447.$$

Dit levert op $PQ \approx 4,47$ m.



Figuur 8.2



Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

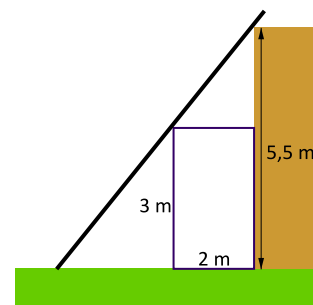
Er wordt gesteld dat $\triangle APB \sim \triangle PQB$ omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

- Welke hoeken zijn dat?
- Driehoeken zijn gelijkvormig als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.
Geldt dat ook voor andere figuren?
Je kunt deze berekening ook uitvoeren met de driehoeken APB en APQ .
- Laat zien, dat je dan op dezelfde waarde van PQ uitkomt.

Opgave 2

Je ziet hier hoe iemand een ladder tegen een 5,5 m hoge muur plaatst over een schuurtje heen waarvan de hoogte 3 m en de diepte tot de muur 2 m is.

- Hoe ver minimaal van de muur moet die ladder op de grond worden geplaatst?
- Hoe lang moet de ladder minimaal zijn?



Figuur 8.3

Uitleg 2

Dit is dezelfde figuur als in **Uitleg 1**.

De afmetingen die je daar hebt berekend, staan nu in de figuur.

Als je hierin hoeken wilt berekenen, maak je gebruik van de bekende goniometrische verhoudingen sinus, cosinus of tangens.

Bijvoorbeeld kun $\angle QPB$ berekenen in de rechthoekige driehoek PQB .

Je weet dan de aanliggende rechthoekszijde PQ van $\angle QPB$ en je weet de langste zijde PB .

Dus: $\cos(\angle QPB) \approx \frac{4,47}{5} \approx 0,894$.

En daarmee bereken je $\angle QPB \approx 26,6^\circ \approx 27^\circ$.

Daarbij moet je terugrekenen vanuit cosinus. Op rekenmachines wordt daarvoor arccos, of inv cos, of $\cos^{-1}$ gebruikt.

Belangrijk is dat goniometrie vooralsnog alleen in rechthoekige driehoeken kan worden toegepast.

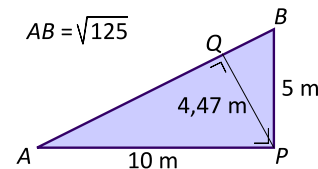
Je moet daarom telkens goed opletten waar zo'n driehoek is te vinden. En dan moet je de goniometrische verhoudingen nog weten, je vind ze nog eens in de **Theorie**.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

Je ziet hoe $\angle QPB$ wordt berekend.

- Misschien moet je eerst even de goniometrische verhoudingen even opzoeken.



Figuur 8.4



Schrijf even op wat je verstaat onder sinus, onder cosinus en onder tangens.

- b) Waarom kun je bij de gegevens in de figuur de grootte van $\angle QPB$ alleen met behulp van cosinus berekenen?
- c) Bereken met behulp van goniometrie en de gegevens in de figuur de grootte van $\angle A$ op twee manieren.

Opgave 4

$\triangle ABC$ heeft zijden $AB = 6$ cm en $AC = BC = 10$ cm.

Bereken de grootte van elk van de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet hier een rechthoekige driehoek. De lengtes van de zijden worden met kleine letters aangeduid die corresponderen met de hoofdletters van de hoekpunten er tegenover. De groottes van de hoeken worden met griekse letters aangeduid die corresponderen met de hoekpunten. In dit geval is $\beta = 90^\circ$. In zo'n rechthoekige driehoek geldt:

De **stelling van Pythagoras**:

$$(\text{éne rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = (\text{hypotenusa})^2.$$

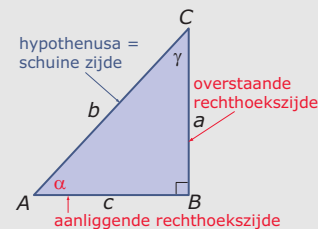
De **goniometrische verhoudingen**:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Verder gebruik je vaak het feit dat driehoeken **gelijkvormig** zijn als hun overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Hun overeenkomstige zijden hebben dan gelijke verhoudingen. De éne driehoek is een **vergroting** van de andere. Er is een vaste **vergrotingsfactor** van de lengtes van de éne driehoek naar de overeenkomstige lengtes van de andere driehoek.



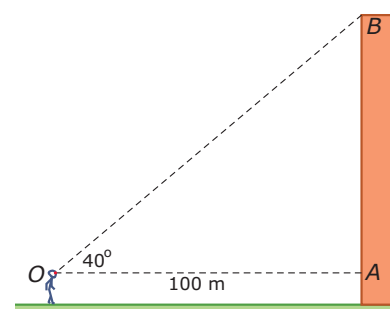
Figuur 8.5

Voorbeeld 1

Hiernaast zie je hoe iemand de hoogte van een flatgebouw berekent.

Hij gaat 100 m van een verticale gevel van de flat staan en meet de hoek waaronder hij de top van die gevel ziet. Dat is de hoek tussen een horizontale lijn en de kijklijn vanuit zijn oog naar de top van de gevel. Zo'n hoek heet een hellingshoek. Hier wordt een hellingshoek van 40° gemeten.

Hoe hoog is het flatgebouw als de hellingshoek op 1,50 m boven de grond wordt gemeten?



Figuur 8.6



Antwoord

In de rechthoekige driehoek OAB geldt: $\tan(\angle AOB) = \frac{AB}{OA}$.

Dit betekent $\tan(40^\circ) = \frac{AB}{100}$.

Nu is $\tan(40^\circ) \approx 0,839$, dus $0,839 \approx \frac{AB}{100}$ zodat $AB \approx 83,9$ m.

De hoogte van het flatgebouw is dus ongeveer $83,9 + 1,5 = 85,4$ m.

Opgave 5

Een landmeter staat 50 m van een cilindervormige koeltoren af en meet de hellingshoek naar de top. Hij vindt 31° . Zijn hoekmeter staat op een statief en zit 1,50 m boven de grond.

Bereken de hoogte van deze koeltoren.

Opgave 6

Een vuurtorenwachter zit boven in zijn vuurtoren 40 m boven de zeespiegel. Hij ziet twee schepen die zich met de vuurtoren precies in één vlak bevinden. De man ziet deze boten onder hellingshoeken van 22° en 16° .

Bereken de afstand tussen beide schepen.

Voorbeeld 2

Je ziet hier een symmetrisch profiel, alle afmetingen zijn in mm. Bereken de afmeting waar het vraagteken bij staat.

Antwoord

Zoek weer eerst een geschikte rechthoekige driehoek, bijvoorbeeld $\triangle ABC$.

Van deze driehoek weet je $\angle A = 70^\circ$ en $BC = 7,5$ mm.

Dus is $\tan(70^\circ) = \frac{BC}{AB} = \frac{7,5}{AB}$.

En dit betekent: $AB = \frac{7,5}{\tan(70^\circ)} \approx 2,7$ mm.

De gezochte afmeting is daarom 15,4 mm.

Opgave 7

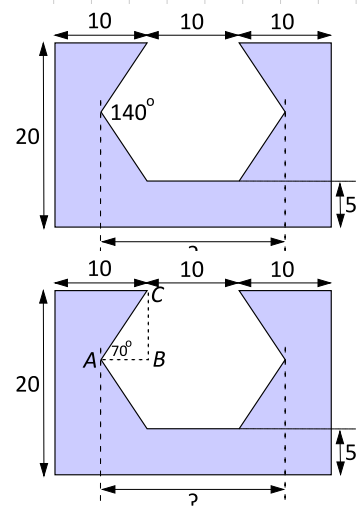
Bekijk het profiel in **Voorbeeld 2**.

- Waarom is $BC = 7,5$?
- Waarom is de gevraagde afmeting 15,4 mm?
- Hoeveel bedraagt de totale omtrek van dit profiel?
- Hoe groot zijn de twee hoeken onderin de zeshoek?

Opgave 8

Een driehoekige plaat ABC heeft als hoogte $CD = 1,2$ m. Verder is $AC = 1,8$ m en $\angle C = 70^\circ$.

Hoe lang zijn de overige zijden van deze driehoek?



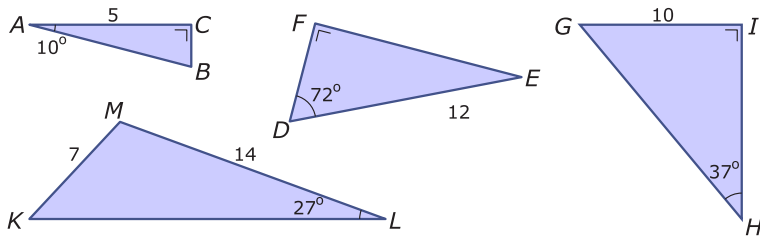
Figuur 8.8



Oefenen

Opgave 9

Je ziet hier vier driehoeken.

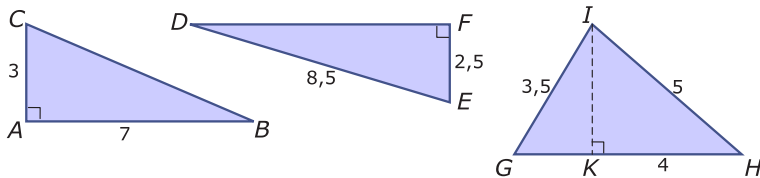


Figuur 8.9

Bereken alle onbekende zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet hier drie driehoeken.



Figuur 8.10

Bereken alle onbekende hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 11

De toren van Pisa staat al jaren scheef. De toren is 82 m lang, maar als je een steen neerlaat aan een touw vanaf het laagste punt van de scheve bovenrand, dan raakt de steen de grond als het touw 80 m lang is.

Hoe groot is dan de hoek die de scheve toren van Pisa met de begane grond maakt?



Figuur 8.11

Opgave 12

Je ziet hier het SmartCover van een iPad2. Dit SmartCover bedekt de iPad volledig, de afmetingen ervan zijn 18,5 bij 24 cm. Hij bestaat (zoals je ziet) uit vier aaneengesloten banen van 24 cm lengte, die echter niet allemaal even breed zijn. De tweede baan van links is ongeveer 5,6 cm breed en de andere drie zijn 4,3 cm breed.

Als je het SmartCover oprolt zoals in de figuren hieronder is te zien, dan maakt het scherm een hoek met de tafel waar hij op

ligt. Neem voor deze opgave aan dat de iPad en de SmartCover geen dikte hebben.



Figuur 8.12

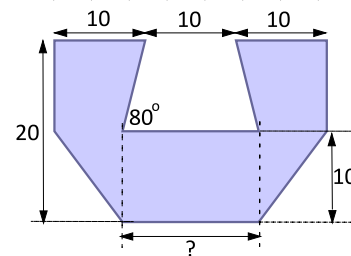
- a Hoe groot is de hellingshoek van de iPad met de tafel?
- b Je kunt de driehoekige steun nog verder scharnieren en zo de iPad in de kijkstand zetten. Een strook van 4,3 cm breedte ligt nu op het tafelblad en de tablet leunt tegen een andere strook van 4,3 cm. Welke hoek maakt de iPad nu met het tafelblad? En hoe hoog zit de bovenrand van de iPad nu boven het tafelblad?

Opgave 13

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een profiel.

Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de afmeting waar het vraagteken bij staat in tienden van mm nauwkeurig.



Figuur 8.13

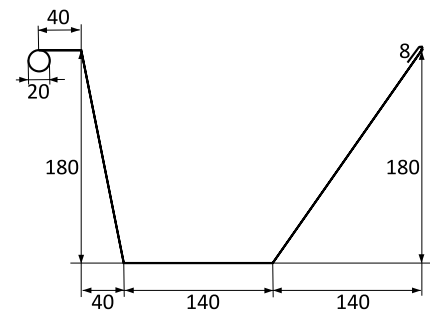
Opgave 14

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een zinken goot.

Alle afmetingen zijn in mm.

De omtrek van een cirkel met diameter d is $\pi \cdot d$.

Bereken de breedte van de plaat zink die nodig is om deze goot te vormen en bereken de grootte van de hoeken waaronder de plaat moet worden gebogen.



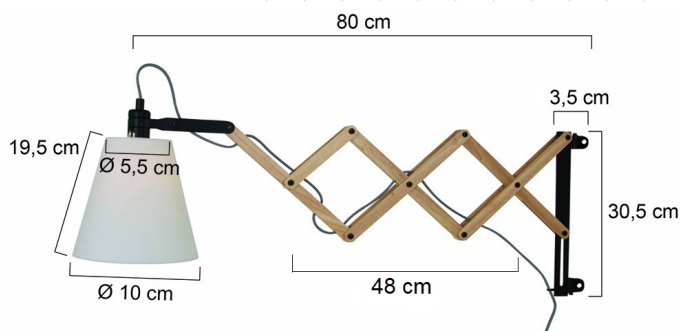
Figuur 8.14

Toepassen

Je ziet hier een schaarlamp met een latwerk van twee ruiten. Het latwerk heet de schaar van de lamp. Je kunt de lamp daardoor in horizontale richting bewegen. De lamp staat nu op zijn uiterste stand, de schaarlengte is 80 cm, zoals in de figuur is te zien.

De breedte van de schaar (tussen de twee scharnierpunten op de bevestigingsstang) is dan 18 cm.

De maximale breedte van de schaar is 28,5 cm.



Figuur 8.15



Opgave 15

Bekijk de tekst over de schaarlamp.

- a Hoe groot is de hoek die deze lange latjes in hun middens met elkaar maken als de lamp in de stand van de figuur staat?
- b Hoe lang zijn de lange latjes?
- c Hoe groot is de schaarlengte als de hoek die de lange latjes in hun middens met elkaar maken 100° is?

Testen

Opgave 16

Een vliegtuig vliegt 2500 m vanaf de startbaan onder een vaste hoek naar een hoogte van 800 m.

Onder welke hellingshoek verliep dat deel van de vlucht?

Opgave 17

Een spoorwegovergang wordt omgebouwd tot een spooronderdoorgang.

Het wegdek dat ongeveer horizontaal over de spoorwegovergang loopt moet daartoe onder een hoek van 4° naar beneden worden gelegd tot het laagste punt op 5 m onder het spoor. Vanaf dat punt moet het onder dezelfde hoek weer omhoog gaan.

Hoe lang zijn de twee hellende stukken wegdek samen?

Opgave 18

Een plaatje in de vorm van een rechthoekige driehoek ABC heeft een rechte hoek bij C en rechthoekszijden $AC = 12$ cm en $BC = 8$. Het plaatje wordt in twee rechthoekige driehoeken ADC en DBC gezaagd.

Bereken de lengtes van de rechthoekszijden van die twee rechthoekige driehoeken in mm nauwkeurig.

8.2 Omtrek en oppervlakte

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- omtrek en oppervlakte van vlakke figuren berekenen, ook met behulp van goniometrie.

Voorkennis

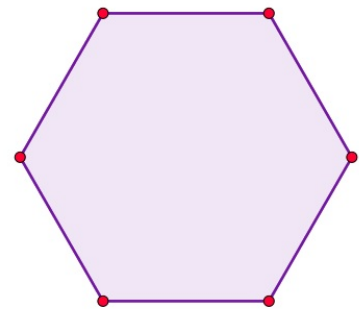
- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige zeshoek. Alle zijden zijn even lang, in dit geval 2 cm. Ook alle hoeken zijn even groot.

- Hoe groot is de omtrek van deze zeshoek?
- Hoe groot is de oppervlakte van deze zeshoek?



Figuur 8.1

Uitleg

Een regelmatige zeshoek is een zeshoek met gelijke zijden en gelijke hoeken.

Van deze zeshoek is elke zijde 2 cm.

De omtrek ervan is dus gemakkelijk $6 \cdot 2 = 12$ cm, gewoon de totale lengte van alle zijden samen.

Hoe je de oppervlakte van zo'n zeshoek berekent, zie je in de figuur.

De zeshoek bestaat uit zes gelijke driehoeken, die beslist gelijkbenig zijn en een basis van 2 cm hebben. Verder weet je de tophoek van zo'n driehoek, want alle zes gelijke tophoeken zitten bij M tegen elkaar en vormen samen een hoek van 360° . Dus bijvoorbeeld $\angle AMB = 360^\circ/6 = 60^\circ$.

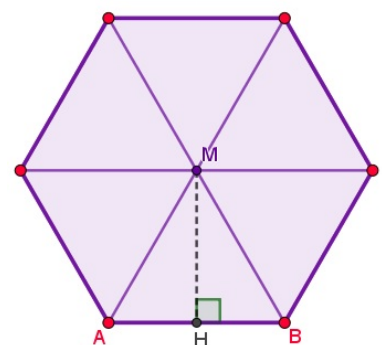
Nu kun je op meerdere manieren verder redeneren:

- Met goniometrie: $\tan(30^\circ) = \frac{HB}{MH} = \frac{1}{MH}$ geeft $MH \approx 1,732$.

$\triangle MHB$ is een halve rechthoek met oppervlakte

$$1 \cdot 1,732/2 \approx 0,866.$$

De hele zeshoek bestaat uit 12 van die driehoeken, dus de oppervlakte is $12 \cdot 0,866 \approx 10,39 \text{ cm}^2$.



Figuur 8.2

- Met de stelling van Pythagoras: omdat $\angle AMB = 60^\circ$ moeten de andere hoeken van $\triangle ABM$ ook wel 60° zijn. Dus is $\triangle ABM$ gelijkzijdig, alle zijden zijn 2 cm.

Voor de hoogte MH van deze driehoek geldt $MH^2 + 1^2 = 2^2$.

$$\text{Dus } MH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

De oppervlakte van $\triangle ABM$ is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

De oppervlakte van de zeshoek is $6 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}^2$.

De oppervlakte van de meeste figuren kun je vinden door ze ofwel te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken en eventueel delen van cirkels, ofwel te omlijsten met een rechthoek en daarvan dan rechthoeken, halve rechthoeken en delen van cirkels af te trekken.

De omtrek van de meeste figuren kun je vinden door de rand in lijnstukken en delen van cirkels te verdelen en de lengte van al die stukken op te tellen.

Soms is het handig om gebruik te maken van formules.

Bijvoorbeeld geldt voor de oppervlakte van elke driehoek $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, waarin A de oppervlakte (engels: 'area'), b de lengte van de basis en h de lengte van de hoogte op die basis is. In de **Theorie** vind je een overzicht van die formules.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

De oppervlakte van de zeshoek wordt bepaald door van $\triangle ABM$ de tophoek $\angle AMB$ te berekenen.

Je kunt echter ook in plaats daarvan $\angle BAM$ berekenen en daarmee de oppervlakte uitrekenen.

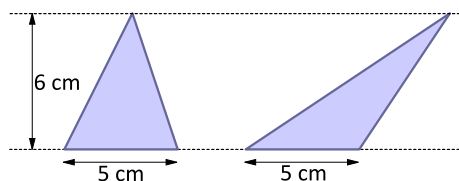
- Hoe kun je $\angle BAM$ berekenen?
- Hoe kun je met behulp van $\angle BAM$ de oppervlakte van de zeshoek berekenen?

Ook een regelmatige vijfhoek kun je opdelen in driehoeken, zie de figuur.

- Bereken de oppervlakte van deze vijfhoek als alle zijden 3 cm lang zijn.

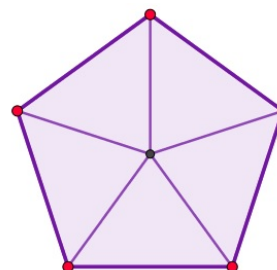
Opgave 2

Je ziet hier twee verschillende driehoeken.



Figuur 8.4

- Waarom hebben ze dezelfde oppervlakte?
Hoe groot is die oppervlakte?
- Welke van beide driehoeken heeft de grootste omtrek?



Figuur 8.3



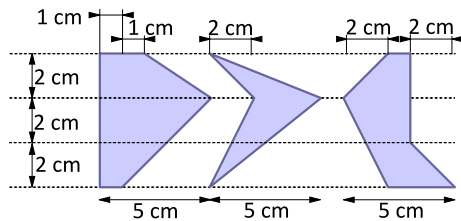
Van een driehoek $\triangle ABC$ is $AB = 7$ cm, $AC = 4$ cm en $\angle A = 40^\circ$.

- c Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze driehoek.

Opgave 3

Van veel figuren kun je de oppervlakte berekenen door opdelen of omlijsten.

Bekijk deze figuren.



Figuur 8.5

Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze drie figuren.

Theorie en voorbeelden

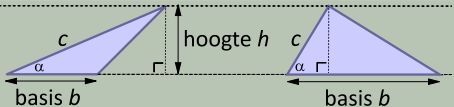
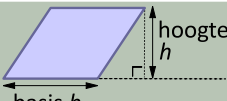
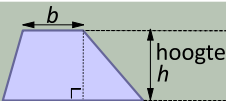
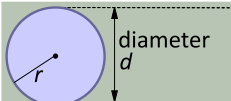
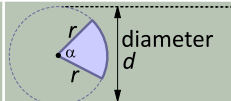
Om te onthouden

De **oppervlakte** van de meeste figuren kun je vinden door ze ofwel te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken en eventueel delen van cirkels, ofwel te omlijsten met een rechthoek en daarvan dan rechthoeken, halve rechthoeken en delen van cirkels af te trekken.

De **omtrek** van de meeste figuren kun je vinden door de rand in lijnstukken en delen van cirkels te verdelen en de lengte van al die stukken op te tellen.

Soms is het handig om gebruik te maken van formules.

Hier vind je een overzicht van de belangrijkste formules.

rechthoek	halve rechthoek	driehoek	
 breedte b lengte l oppervlakte: $l \cdot b$ omtrek: $2 \cdot l + 2 \cdot b$	 breedte b lengte l oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot l \cdot b$ omtrek: $l + b + \sqrt{l^2 + b^2}$	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ of $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	
parallellogram	trapezium	cirkel	cirkelsector
 basis b hoogte h oppervlakte: $b \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 basis a basis b hoogte h oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 diameter d oppervlakte: $\pi \cdot r^2$ of $\frac{1}{4} \pi \cdot d^2$ omtrek: $2 \pi \cdot r$ of $\pi \cdot d$	 diameter d oppervlakte: $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$ omtrek: $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \pi \cdot r + 2r$

Tabel 8.1

**Voorbeeld 1**

Gegeven $\triangle ABC$ met $\angle A = 50^\circ$, $AB = 8$ cm en $AC = 5$ cm.

Bereken de oppervlakte van deze driehoek in mm^2 nauwkeurig.

Antwoord

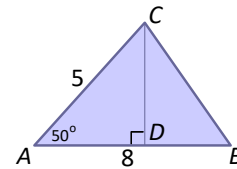
Maak een schets en zet er meteen een handig gekozen hoogtelijn in.

In dit geval is dat CD .

In $\triangle ADC$ geldt:

$$\sin(50^\circ) = \frac{CD}{5}, \text{ zodat } CD = 5 \cdot \sin(50^\circ) \approx 3,830 \text{ cm.}$$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is dus: $\approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3,830 \approx 15,32 \text{ cm}^2$.



Figuur 8.6

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je van $\triangle ABC$ de oppervlakte berekent.

- Bereken de omtrek van deze driehoek.
- Toon aan dat voor de oppervlakte van $\triangle ABC$ dan geldt:
 $opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$.

Opgave 5

Van $\triangle PQR$ is $\angle R = 67^\circ$, $PR = 10$ cm en $QR = 12$ cm.

Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze driehoek in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Je ziet hier een afdekplaatje, alle afmetingen zijn in mm.

R10 betekent dat de cirkel een straal van 10 (hier: mm) heeft.

Bereken de oppervlakte van dit plaatje in mm^2 nauwkeurig.

Antwoord

Verdeel de figuur en zet letters bij hoekpunten.

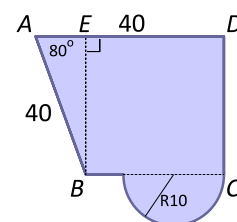
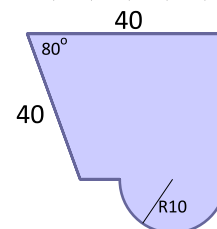
Van $\triangle ABE$ weet je $\angle A = 80^\circ$ en $AB = 40$ mm.

Dus is $\sin(80^\circ) = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{40}$, zodat $BE = 40 \cdot \sin(80^\circ) \approx 39,4$ mm.

Zo is ook: $AE \approx 6,9$ mm.

De gezochte oppervlakte is daarom

$$\frac{1}{2} \cdot 39,4 \cdot 6,9 + 39,4 \cdot (40 - 6,9) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 1597 \text{ mm}^2.$$



Figuur 8.8

Opgave 6

Bekijk het plaatje in **Voorbeeld 2**.

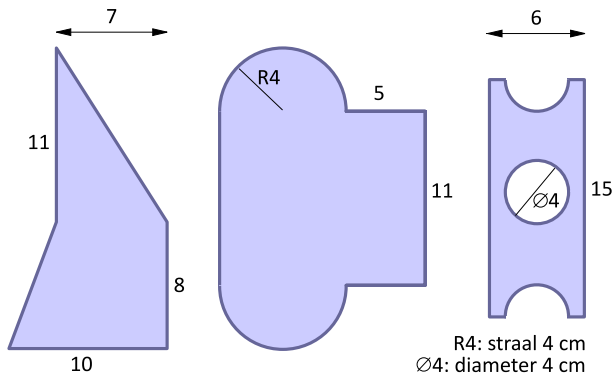
- Waarom is $AE \approx 6,9$?
- Leg uit hoe uiteindelijk de oppervlakte van het plaatje is berekend.
- Hoeveel bedraagt de totale omtrek van dit plaatje in tienden van mm nauwkeurig?



Oefenen

Opgave 7

Je ziet hier drie vormen. Neem aan dat alle hoeken die recht lijken dat ook zijn en alle bogen die op cirkelbogen lijken echte cirkelbogen zijn. Alle afmetingen zijn in cm.

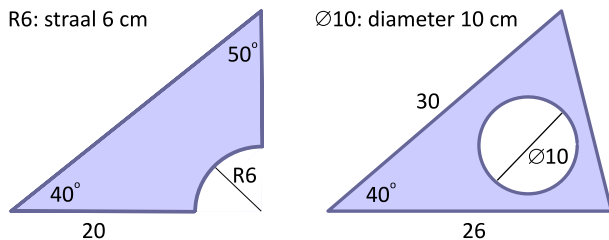


Figuur 8.9

Bereken van elke vorm de oppervlakte in mm^2 en de omtrek in mm nauwkeurig.

Opgave 8

Je ziet hier twee vormen. Neem aan dat alle hoeken die recht lijken dat ook zijn en alle bogen die op cirkelbogen lijken echte cirkelbogen zijn. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 8.10

Bereken van elke vorm de oppervlakte in mm^2 en de omtrek in mm nauwkeurig.

Opgave 9

Een atletiekbaan bestaat uit twee rechte stukken van 100 m en twee halve cirkels die ook elk een lengte hebben van 100 m. Het middenterrein van die atletiekbaan is een rechthoek met op beide uiteinden halve cirkels.

Hoe groot is de oppervlakte van dit binnenterrein?

Opgave 10

Een driehoekig afdekplaatje heeft twee zijden van 412 mm die een hoek van 30° met elkaar maken.

Hoe groot is de oppervlakte van dit plaatje?

Opgave 11

Je ziet hier een foto van een huis met een zogenaamd mansarde-dak. Het dak bestaat uit vier delen die allemaal de vorm van een rechthoek van 2,5 m bij 10 m hebben (houd geen rekening met de dakkapel boven de voordeur en de schoorsteen). De onderste twee delen van het dak maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak. De vloer van het huis is een rechthoek van 6 m bij 10 m. De dakgoot zit op 3 m boven de grond.

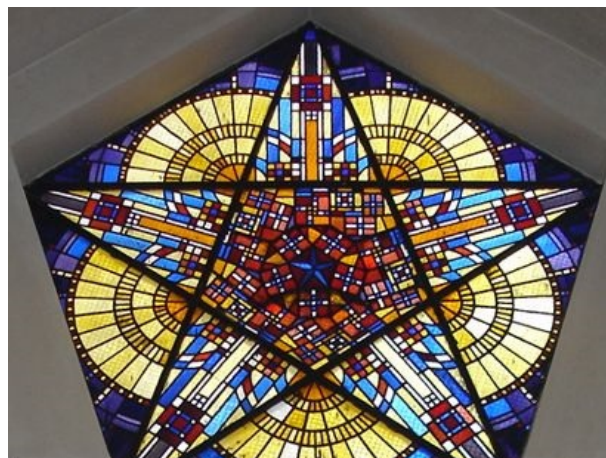


Figuur 8.11

- Maak een tekening van de zijgevel op schaal met de maten erin. Je kunt ze afleiden uit bovenstaande tekst.
- Bereken de hoogte van het huis in cm nauwkeurig.
Vanwege de druk van eventuele sneeuw op het dak, mag volgens de aannemer het dak geen hellingshoek lager dan 35° hebben, want anders dan moet het dak verstevigd worden.
- Bereken de hellingshoek van de bovenste twee delen van het dak in graden nauwkeurig en beslis of het dak verstevigd moet worden.

Opgave 12

In de Amsterdamse St. Gabriëlskerk vind je dit veelkleurige vijfhoekige glas-in-loodraam. Het is ontworpen en vervaardigd door de Haarlemse glazenier W. Bogtman. Het complete vijfhoekige raam (dus de buitenste vijfhoek) past precies in een cirkel met een straal van 1 m. Alle zijden van het raam zijn even lang.



Figuur 8.12

- Teken deze vijfhoek en licht toe hoe je dat doet.
- Bereken de lengtes van de zijden van deze vijfhoek in mm nauwkeurig.
- Bereken de totale oppervlakte van het glas-in-loodraam in cm^2 nauwkeurig.
In het vijfhoekige raam zit een vijfpuntige ster van metalen strips.
- Hoeveel meter van die strips is er in totaal nodig voor deze vijfpuntige ster? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
- In feite bestaat deze ster uit 15 lijnstukken met twee verschillende lengtes. Bereken die twee verschillende lengtes in mm nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet

Met deze applet maak je regelmatige veelhoeken. Ze passen in een cirkel met straal 1. Je kunt een regelmatige n -hoek opdelen in n gelijke en gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek het middelpunt van de cirkel is waar de andere hoekpunten op liggen. Met behulp van goniometrie kun je van zo'n driehoek de oppervlakte berekenen. En daarmee bereken je ook de oppervlakte van de veelhoek. En zo kun je zelfs π benaderen...



Opgave 13

Bekijk de applet. Als je $n = 5$ instelt zie je een regelmatige vijfhoek.

- a In hoeveel gelijke en gelijkbenige driehoeken kun je deze figuur opdelen?
- b Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek?
- c Bereken de oppervlakte van zo'n driehoek.
- d Hoe groot is de oppervlakte van de vijfhoek?

Opgave 14

Bekijk de applet nog eens. Als je $n = 6$ instelt zie je een regelmatige zeshoek.

- a Bereken op dezelfde manier als in de voorgaande opgave de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.
Neem nu $n = 8$.
- b Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek.
Neem nu $n = 10$.
- c Bereken de oppervlakte van de regelmatige tienhoek.
Neem nu $n = 100$.
- d Bereken de oppervlakte van de regelmatige honderdhoek.
- e Als je n steeds kon blijven vergroten, welk getal ga je dan steeds meer benaderen?

Testen

Opgave 15

Van $\triangle ABC$ is gegeven $AB = 30$ mm, $BC = 12$ mm en $\angle B = 65^\circ$. Bereken van deze driehoek de omtrek in mm en de oppervlakte in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 16

Een regelmatige zevenhoek heeft zijden die 2 cm lang zijn.

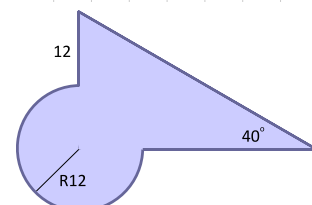
Bereken de oppervlakte van de zevenhoek in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 17

Deze vorm bestaat uit een rechthoekige driehoek waaraan driekwart van een cirkel is bevestigd.

Alle afmetingen zijn in cm.

Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze vorm in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 8.13

8.3 Vectoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip vector;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90° ;
- vectoren ontbinden in twee componenten met behulp van goniometrie.

Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen.

Verkennen

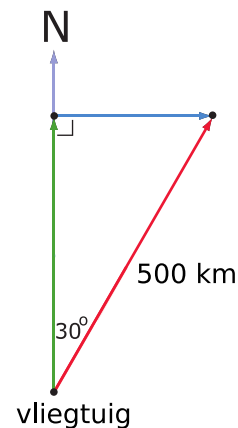
Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de afstand). Hij is op te splitsen in een Noordelijke component en een Oostelijke component.

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.

- Bereken de Noordelijke component en de Oostelijke component met behulp van sinus en/of cosinus.
- Bereken ook de Noordelijke component bij een richtingshoek van 120° . Waarom is hij negatief?
- Bij welke richtingshoeken zijn beide componenten negatief?



Figuur 8.1

Uitleg

Bekijk de applet.

Wanneer zowel grootte als richting een rol speelt, gebruik je een vector. Bijvoorbeeld $\vec{v}$ om de verplaatsing van een vliegtuig weer te geven. De lengte van de verplaatsingsvector is de afstand in km, de richting is de richtingshoek ten opzichte van het noorden. Voor de verplaatsingsvector $\vec{v} = (\alpha, d)$ geldt:

- α is de hoek met het noorden;
- d is de afstand in km.

Zo'n vector $\vec{v}$ heeft twee componenten: een noordelijke component en een oostelijke component. Deze twee componenten kun je bepalen door de vector te ontbinden in de twee richtingen (noord en oost):

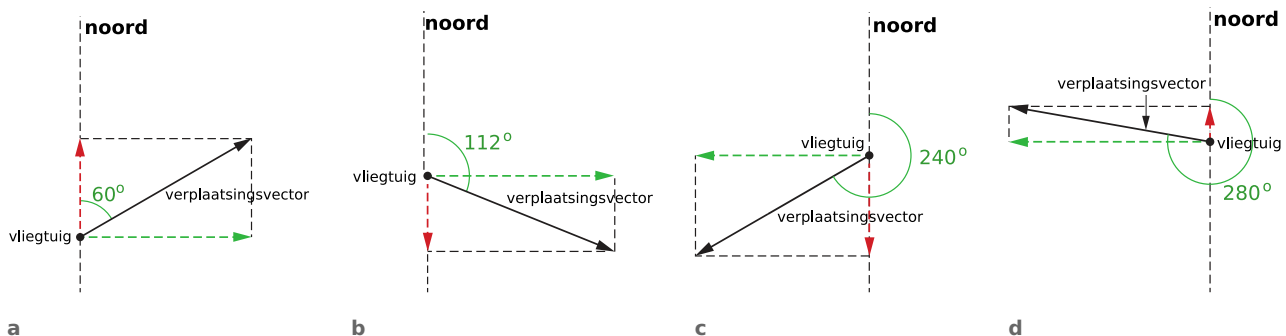
- de noordelijke component is $v_N = d \cdot \cos(\alpha)$
- de oostelijke component is $v_O = d \cdot \sin(\alpha)$

Die componenten kunnen ook negatief zijn, afhankelijk van hun richting. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.

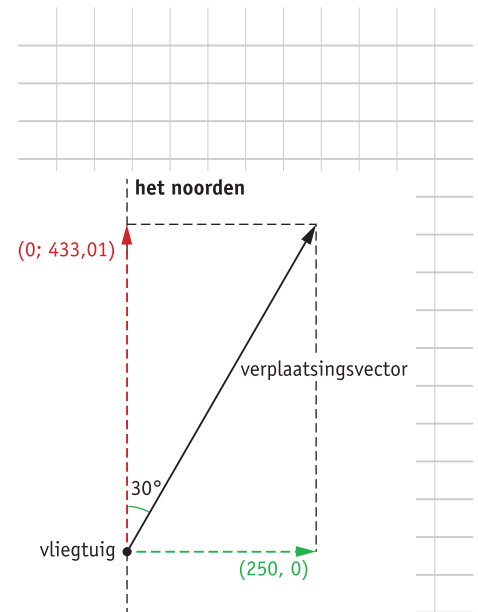
Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Als er meerdere vliegtuigen op verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend. Toch kunnen de verplaatsingsvectoren wel gelijk zijn.

Opgave 1

Je ziet vier keer een verplaatsingsvector getekend. Ga er van uit dat elke verplaatsingsvector een lengte heeft van 40 km. Bereken bij elke situatie de lengtes van de noordelijke component en de oostelijke component. Geef met behulp van mintekens de richting aan. Rond indien nodig af op één decimaal.



Figuur 8.3



Figuur 8.2

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bereken ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (met behulp van de tangens).

- noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km
- noordelijke component: -300 km, oostelijke component: 400 km
- noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 300 km
- noordelijke component: -200 km, oostelijke component: -150 km
- noordelijke component: 0 km, oostelijke component: -100 km
- noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 0 km

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting. Je kunt hem beschrijven door:

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α , de hoek die de vector met de gekozen hoofdrichting maakt.

In deze figuur is de hoofdrichting de positieve x -as en wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten. De vector kun je dan beschrijven door aan te geven hoe groot de **x -component** v_x en de **y -component** v_y zijn. De x -component is positief als hij in de positieve x -richting wijst, anders negatief. De y -component is positief als hij in de positieve y -richting wijst, anders negatief.

- $v_x = r \cos(\alpha)$
- $v_y = r \sin(\alpha)$

De lengte van deze vector is $r = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De richtingshoek kun je vanuit de componenten berekenen:

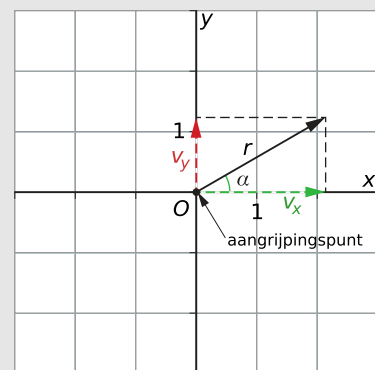
$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}.$$

Hierbij gebruik je geen mintekens, maar let je goed op welke hoek je precies berekent.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben.

In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn.

De vector die van de oorsprong O naar punt A wijst, schrijf je als $\overrightarrow{OA}$.



Figuur 8.4

Voorbeeld 1

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h en een koers 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij gewond is geraakt. Er wordt een helikopter gestuurd.

Bereken de koershoek van de helikopter en de te vliegen afstand.

Antwoord

De plaats waar de piloot van koers veranderde is V en de plaats waar de noodlanding plaatsvond is N .

De noordelijke component van $\overrightarrow{TV}$ is $420 \cdot \cos(30^\circ) \approx 363,7$ km en de oostelijke component is $420 \cdot \sin(30^\circ) = 210$ km.

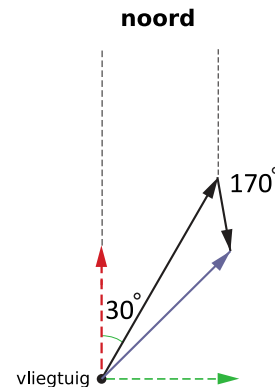
De noordelijke component van $\overrightarrow{VN}$ is $180 \cdot \cos(170^\circ) \approx -177,3$ en de oostelijke component is $180 \cdot \sin(170^\circ) \approx 31,3$.

De noordelijke component van vector $\overrightarrow{TN}$ is ongeveer $363,7 + -177,3 = 186,4$ en de oostelijke component is ongeveer $210 + 31,3 = 241,3$.

De helikopter moet dus ongeveer 186,4 km naar het noorden en 241,3 km naar het oosten.

Dat betekent voor de koershoek α dat $\tan(\alpha) \approx \frac{186,4}{241,3}$, zodat $\alpha \approx 37,7^\circ$.

En voor de te vliegen afstand r dat $r = \sqrt{186,4^2 + 241,3^2} \approx 305$ km.



Figuur 8.5

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je vectoren kunt optellen door ze aan elkaar te leggen.

Teken zelf de beschreven situatie op schaal 1 : 4.000.000.

Controleer de gevonden antwoorden door meting.

Opgave 4

Een piloot vertrekt met zijn vliegtuig van vliegveld T en vliegt 2 uur met een constante snelheid van 130 km/h en een koers 150° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 200° en de snelheid in 100 km/h. Na 1 uur is hij op zijn bestemming, vliegveld A .

- Bereken de ligging van vliegveld A ten opzichte van vliegveld T . Dezelfde piloot vliegt later rechtstreeks terug van A naar T .
- Welke koers moet hij dan aanhouden en hoeveel km moet hij vliegen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die beide in punt A aangrijpen.

De krachten in N (newton) en de hoeken die de krachten maken met de positieve x-as zijn gegeven.

Bereken de resulterende kracht $\vec{F}_r$. (Geef het aantal N en de bijbehorende hoek.)

Antwoord

Je kunt hierbij gebruik maken van de horizontale x- en de verticale y-componenten van beide krachten. Er geldt:

- $F_{1,x} = 40 \cdot \cos(20^\circ) \approx 37,6$ N.
 $F_{2,x} = 30 \cdot \cos(100^\circ) \approx -6,9$ N.
 Dus: $F_{r,x} \approx 37,6 + -6,9 = 30,7$ N.
- $F_{1,y} = 40 \cdot \sin(20^\circ) \approx 13,7$ N.
 $F_{2,y} = 30 \cdot \sin(100^\circ) \approx 29,5$ N.
 Dus: $F_{r,y} \approx 13,7 + 29,5 = 43,2$ N.

Nu je de componenten van de resultante hebt, kun je de grootte van de kracht en de grootte van de hoek berekenen:

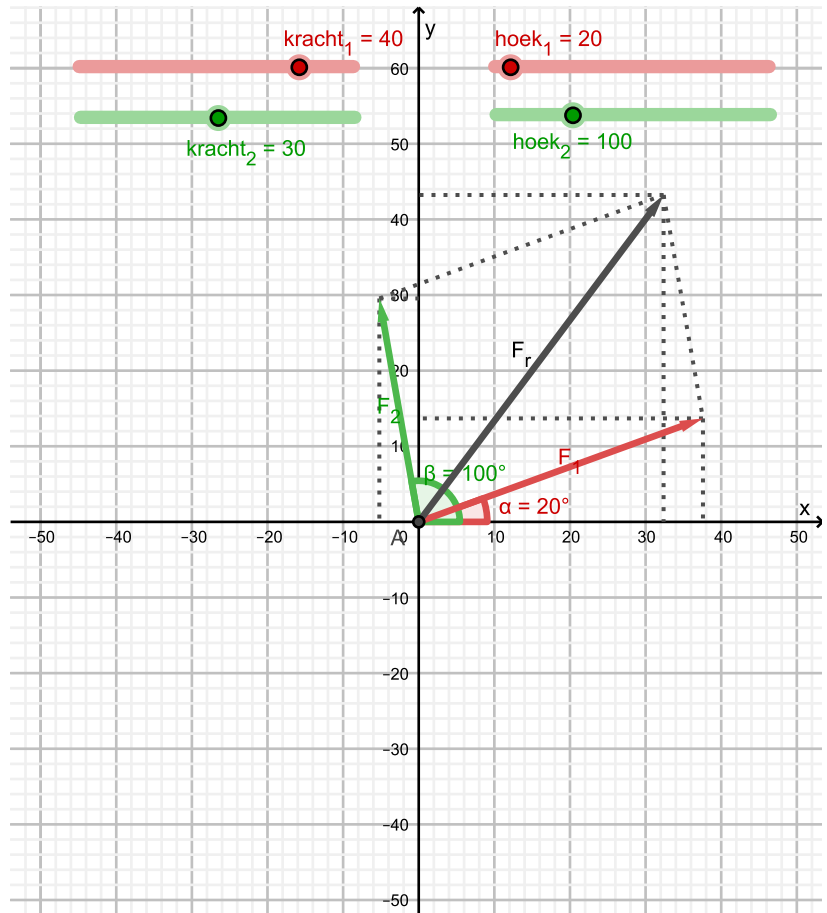
$$F_r \approx \sqrt{30,7^2 + 43,2^2} \approx 53 \text{ N.}$$

Uit $\tan(\gamma) \approx \frac{43,2}{30,7} \approx 1,407$ volgt $\gamma \approx 55^\circ$ voor de hoek van de resultante met de positieve x-as.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** het berekenen van een resulterende kracht. Alle hoeken zijn ten opzichte van de positieve x-as en alle krachten hebben A als aangrijpingspunt.

- a Neem de krachten $\vec{F}_1$ van 25 N en een hoek van 30° en $\vec{F}_2$ van 40 N en een hoek van 160° .
 Bereken de grootte van de resultante.
 De resultante die je bij a hebt gevonden heeft een negatieve x- en een positieve y-component.
 De draaihoek ligt daarom tussen 90° en 180° .
 Bij het berekenen van die hoek γ kun je dan beter werken met $\tan(180^\circ - \gamma)$ omdat je dan niet met mintekens hoeft te rekenen.
- b Bereken de grootte van de hoek die de resultante met de positieve x-as maakt.



Figuur 8.6

- c Neem de krachten $\vec{F}_1$ van 30 N en een hoek van 135° en $\vec{F}_2$ van 20 N en een hoek van 190° .
Bereken de grootte en de hoek van de resultante.
- d Hoe bereken je de draaihoek γ als hij tussen 180° en 270° in ligt?
- e Je kunt met de applet diverse krachten instellen.
Bereken steeds de grootte en de draaihoek van de resultante.

Oefenen

Opgave 6

Deze krachten $\vec{F}$ grijpen aan in de oorsprong van het assenstelsel. De grootte van de kracht is gegeven, evenals de draaihoek ten opzichte van de positieve x-as.
Bereken de bijbehorende x- en y-componenten. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a Grootte $F = 3$ N en richtingshoek $\alpha = 115^\circ$.
- b Grootte $F = 1$ N en richtingshoek $\alpha = 193^\circ$.
- c Grootte $F = 4$ N en richtingshoek $\alpha = 311^\circ$.
- d Grootte $F = 5$ N en richtingshoek $\alpha = 44^\circ$.

Opgave 7

Deze krachten $\vec{F}$ grijpen aan in de oorsprong van het assenstelsel. De bijbehorende x- en y-componenten zijn gegeven. Bereken de grootte F (in N) en de richtingshoek α ervan.

- a $F_x = 12$ N en $F_y = 15$ N.
- b $F_x = -10$ N en $F_y = 20$ N.
- c $F_x = -10$ N en $F_y = -5$ N.
- d $F_x = 15$ N en $F_y = -5$ N.

Opgave 8

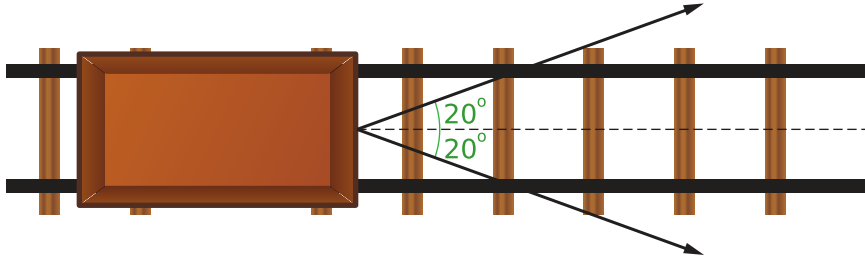
Een piloot stijgt op van een vliegveld R en vliegt 20 minuten met een snelheid van 150 km/uur en een koershoek van 110° ten opzichte van het noorden. Daarna volgt het vliegtuig een kwartier een koers van 250° met een snelheid van 120 km/uur en vervolgens wordt bij T geland.

Hoeveel km is het vliegtuig van R verwijderd?

Welke koershoek moet de piloot aanhouden voor een rechtstreekse retourvlucht?

Opgave 9

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is 40° . De grootte van elke kracht is 7 N.



Figuur 8.7

- Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.
- Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van 20° ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van 15° ten opzichte van de rails.
- In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 10

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar heeft last van de stroming. Daardoor komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar op een punt B dat verder stroomafwaarts ligt. De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in vijf minuten de overkant van de rivier.

Bereken de snelheid waarmee hij AB aflegt in km/h. Rond af op drie decimalen.

Opgave 11

Twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ werken in hetzelfde aangrijpingspunt op een bepaald voorwerp.

Het voorwerp gaat verschuiven.

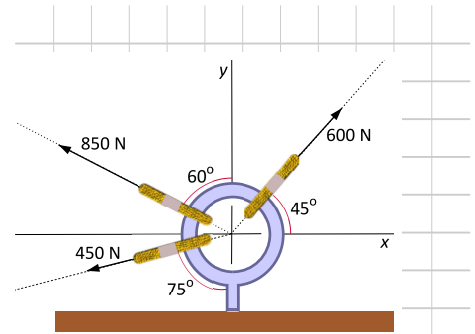
$\vec{F}_1$ is 15 N en maakt een hoek van 20° met de bewegingsrichting.

$\vec{F}_2$ maakt een hoek van 330° met de bewegingsrichting.

Hoe groot moet $\vec{F}_2$ dan zijn en hoe groot is de resultante van beide krachten?

Toepassen

Aan een ring in een balk zijn drie touwen bevestigd. Op elk van die drie touwen werkt een bepaalde kracht, het middelpunt van de ring kun je als hun aangrijpingspunt opvatten. De hoofdrichting is de x -as die evenwijdig loopt met de balk. $\vec{F}_1$ is de kracht van 600 N, $\vec{F}_2$ die van 850 N en $\vec{F}_3$ die van 450 N. In deze situatie kun je allerlei resultantes berekenen.



Figuur 8.8

Opgave 12

Bekijk het plaatje bij [Toepassen](#).

- Bepaal de componenten van de krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$.
- Bepaal hiermee de resultante van $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ en ook de hoek die deze resultante met de positieve x -as maakt.
- Bereken de resultante van $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ en de bijbehorende hoek met de positieve x -as.

Testen

Opgave 13

Een schip vaart vanuit de haven in R een afstand van 120 km met een koers van 340° ten opzichte van het noorden.

Hoeveel km is het schip in noordelijke en in oostelijke richting verplaatst?

Opgave 14

Een ander schip vaart vanuit H in een rechte lijn. Het zit op zeker moment 34 km ten noorden van H en 15 km ten oosten van H .

Welke koershoek ten opzichte van het noorden heeft de kapitein aangehouden?

Hoeveel km heeft hij gevaren?

Opgave 15

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 2 uur met een constante snelheid van 180 km/h in een koers van 40° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 160° en de snelheid in 150 km/h. Na 1 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

8.4 Sinusregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de sinusregel in (niet-rechthoekige) driehoeken.

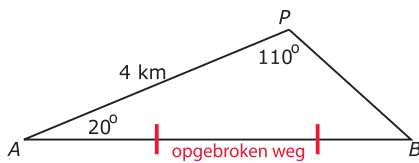
Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90° .

Verkennen

Opgave V1

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P . De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110° . De weg van A naar P is 4 km.



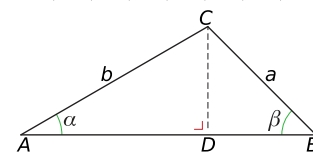
Figuur 8.1

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB ?

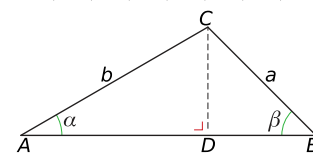
Opgave V2

Bekijk de driehoek.

Laat zien, dat $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.



Figuur 8.2



Figuur 8.3

Uitleg

Je kunt een verband afleiden tussen a , b , $\sin(\alpha)$ en $\sin(\beta)$ door de hoogtelijn CD op twee manieren te schrijven:

- In $\triangle ADC$ is $CD = b \sin(\alpha)$.
- In $\triangle BDC$ is $CD = a \sin(\beta)$.

Dit betekent: $b \sin(\alpha) = a \sin(\beta)$.

Dit kun je schrijven als: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

Met behulp van een andere hoogtelijn kun je ook zo'n verband tussen a , c , $\sin(\alpha)$ en $\sin(\gamma)$ afleiden. Hierin is $c = AB$ en $\gamma = \angle C$.

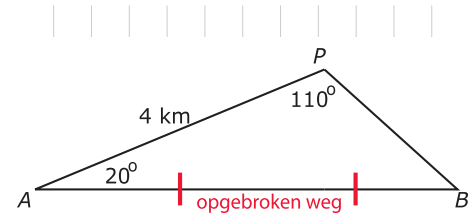
Dit verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek heet de 'sinusregel'.

Opgave 1

Gebruik de sinusregel om het volgende (reeds bekende) probleem op te lossen.

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P . De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110° . De weg van A naar P is 4 km.

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AP ?



Figuur 8.4

Opgave 2

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 5$ cm, $\angle A = 40^\circ$ en $\angle C = 65^\circ$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 5$ cm, $\angle D = 40^\circ$ en $\angle E = 65^\circ$. Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

De algemene afspraak voor het geven van namen aan onderdelen van driehoek ABC is:

$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$

Nu kun je ook afleiden: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laat dat zien.

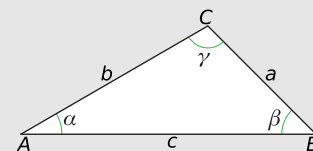
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In elke $\triangle ABC$ noem je $\angle A = \alpha$ en a is de zijde tegenover $\angle A$. Op dezelfde wijze doe je dit met de andere hoeken en zijden, zie figuur.

In elke $\triangle ABC$ geldt de **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

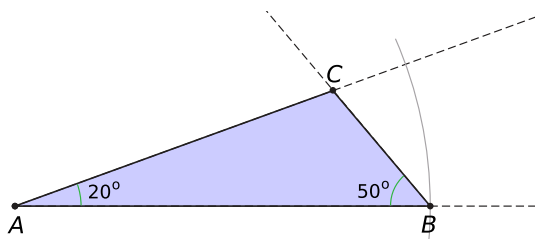


Figuur 8.5

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $AB = 6$.

Bereken de lengte van AC .



Figuur 8.6

Antwoord

Merk eerst op dat $\angle C = 110^\circ$.

$$\frac{AC}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(110^\circ)}$$

Hieruit volgt: $AC \approx 4,89$.

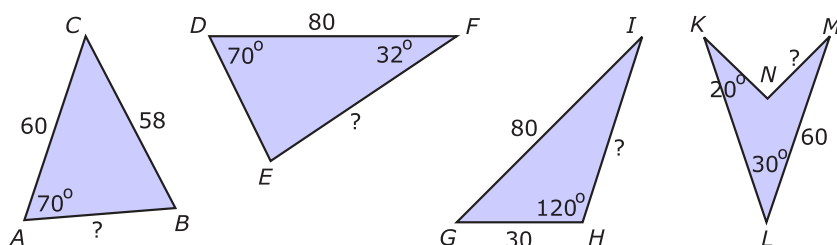
Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van $\triangle ABC$ als gegeven is $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $AB = 6$ cm.

- Construeer zelf deze driehoek.
- Waarom is het voor het berekenen van de lengte van AC nodig om $\angle C$ te berekenen?
- Controleer dat inderdaad $AC \approx 4,89$.

Opgave 6

Bereken de zijde waar een vraagteken bij staat.



Figuur 8.7

Opgave 7

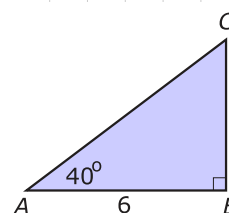
Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven. Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 8

In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van AC berekenen met behulp van de sinusregel.

- Laat zien hoe dat gaat.
- Bereken AC ook zonder de sinusregel te gebruiken.



Figuur 8.8

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 55^\circ$ en $AB = 5$. Bereken AC en BC in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

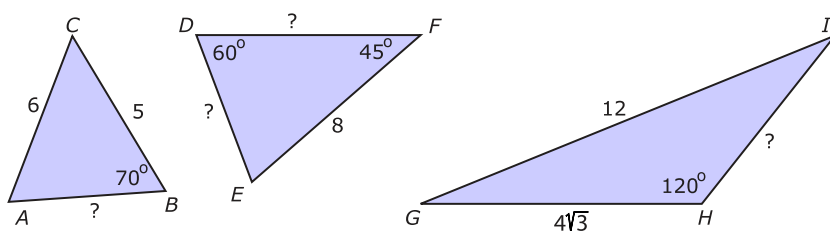
Gegeven is $\triangle KLM$ met $\angle K = 40^\circ$, $KM = 6$ en $LM = 8$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Laat met een berekening zien dat een driehoek ABC met $AB = 12$, $AC = 8$ en $\angle B = 45^\circ$ onmogelijk is.

Opgave 12

Bereken de zijde waar een vraagteken bij staat in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 8.9

Opgave 13

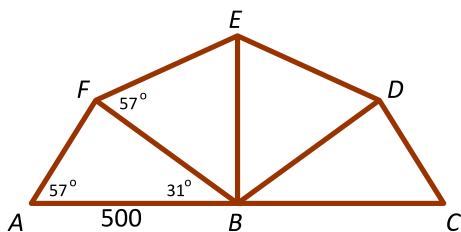
Je wilt de afstand bepalen tussen A en B , maar tussen deze punten ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Vanuit punt A loop je 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met AB . Zo houd je droge voeten.
- Je bent op een punt dat je P noemt en meet de hoek tussen AP en PB . Die is 80° .
- Vervolgens bereken je de lengte van AB .

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van AB .

Opgave 14

Dit is een symmetrische kaspant, de lengte van de gegeven balk is in cm.



Figuur 8.10

Bereken de lengte van balk BF en de afstand tussen de punten F en D in cm nauwkeurig.

Toepassen

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen, werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette 'voorwaartse insnijding'. Deze methode werkt alleen in de 'lagere geodesie,' de landmeetkunde waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Opgave 15

Stel dat A en B de bekende punten zijn. Ze liggen 125,3 m uit elkaar. Je wilt de positie van P bepalen. Je meet de hoeken BAP en ABP : $\angle BAP = 68,3^\circ$ en $\angle ABP = 77,4^\circ$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP .

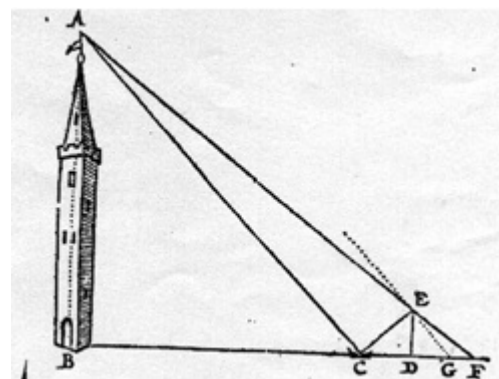
Opgave 16

Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren (punt A). Deze hoek C is 32° . Dan loopt hij 50 m verder van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de nieuwe hoek D is nu 15° .

- Maak een schets van deze situatie met de gegevens die bekend zijn. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op 1,80 m boven de grond zijn gemeten.
- Bereken de hoogte van de toren in meter nauwkeurig. (Opmerking: er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is ook een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)

De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578-1647) bedacht een manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is AB en er ligt een spiegel op de grond in C . Je zet bij D een verticale stok DE zo, dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E . Vervolgens bepaal je de plaats van punt F zo, dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Als je de lengtes van CD , DE en DF kent, kun je de hoogte van de toren AB berekenen.

- Bereken de hoogte van de toren als $CD = 8$, $DE = 6$ en $DF = 9$.



Figuur 8.11

8.5 Cosinusregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de cosinusregel in (niet-rechthoekige) driehoeken.

Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens en de sinusregel toepassen;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90° .

Verkennen

Opgave V1

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B . De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

- Bereken hoeveel verschil er is tussen de route AB door het bos en de route van A naar B via P en het fietspad.
- Waarom lukt dit met de sinusregel niet?

Uitleg

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B . De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.

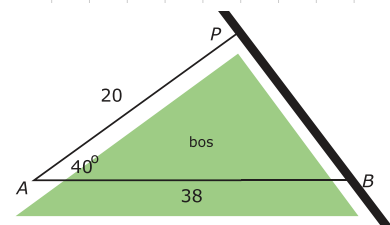
Nu is de sinusregel niet bruikbaar. Je kunt dit alleen oplossen door een hoogtelijn PD op AB te tekenen. Dat is nog behoorlijk wat rekenwerk. Handiger is het om de cosinusregel te gebruiken in $\triangle ABP$.

In elke driehoek ABC geldt:

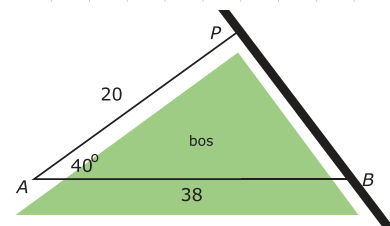
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha).$$

In de driehoek bij de crosscountry-wedstrijd is $C = P$ en dus $\alpha = 40^\circ$, $PB = a$, $AB = c$ en $AP = b$.

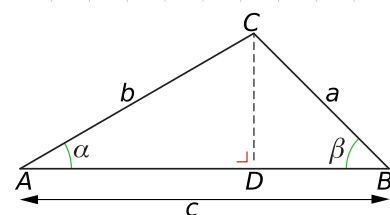
Even invullen en je vindt $PB = a \approx 26,1$ m.



Figuur 8.1



Figuur 8.2



Figuur 8.3

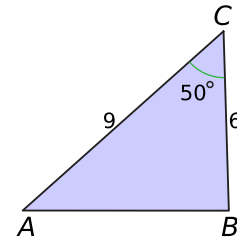
Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat de cosinusregel is. Laat zien hoe je aan de lengte van PB komt met behulp van de cosinusregel.

Opgave 2

Bekijk driehoek ABC . Twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.

- Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek eruit?
- Bereken de derde zijde van deze driehoek.

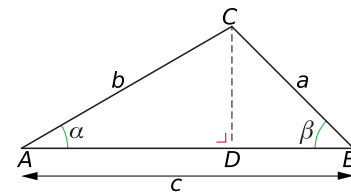


Figuur 8.4

Opgave 3

Wil je in deze figuur a uitrekenen terwijl α , b en c bekend zijn, dan lukt dit niet met behulp van de sinusregel. Je kunt echter een verband afleiden tussen a , α , b en c .

- Laat zien, dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.
- Laat zien dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ door haakjes weg te werken.
- Laat tenslotte zien, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



Figuur 8.5

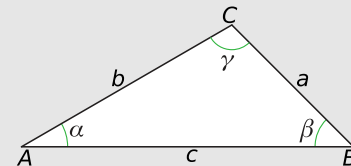
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In elke $\triangle ABC$ geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

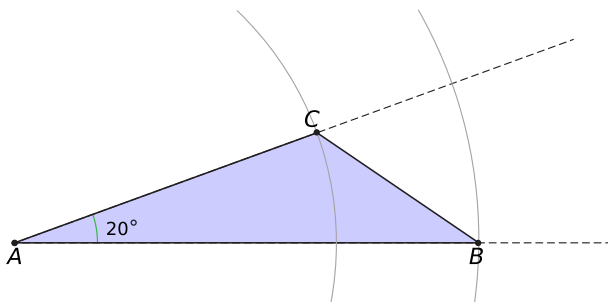
Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.



Figuur 8.6

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20^\circ$, $AB = 6$ en $AC = 4$. Bereken de lengte van BC .



Figuur 8.7

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Dit geeft: $BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(20^\circ) = 6,89...$

Hieruit volgt: $BC \approx 2,6$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de constructie van $\triangle ABC$ als gegeven is $\angle A = 20^\circ$, $AB = 6$ cm en $AC = 4$ cm.

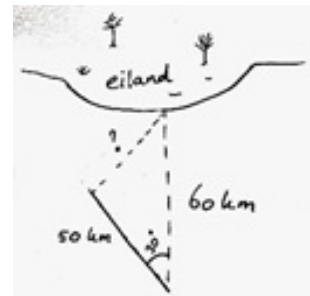
- Construeer zelf deze driehoek.
- Controleer met de cosinusregel dat inderdaad $BC \approx 2,63$.

Opgave 5

Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 6

Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip vergaat. Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren gegaan. Natuurlijk probeer je rechtstreeks naar het eiland te peddelen, maar zodra je begonnen bent, komt er een dichte mist op. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je het in de gaten hebt, staat er een stroming die ervoor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naartoe gepeddeld was. Saskia maakte deze schets van de situatie.



Figuur 8.8

Hoe ver ben je in werkelijkheid van het eiland af?

Opgave 7

Van een $\triangle ABC$ is gegeven dat $AB = 10$, $AC = 6$ en $\angle C = 60^\circ$. Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die beide in hetzelfde punt A aangrijpen.

Ze maken een gegeven hoek met elkaar.

En hun groottes zijn in N gegeven.

Bereken de grootte van de resulterende kracht F_r .

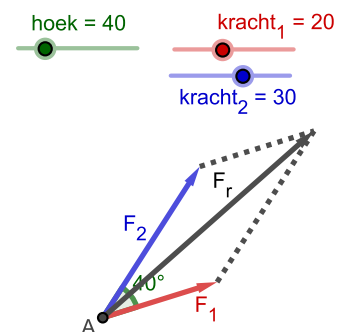
Antwoord

Noem het eindpunt van $\vec{F}_1$ punt B en dat van $\vec{F}_r$ punt C.

In $\triangle ABC$ is $\angle B = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Cosinusregel: $F_r^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos(140^\circ)$.

Dus: $F_r \approx 47,1$ N.



Figuur 8.9



Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** de berekening van de grootte van de resultante F_r .

- a Waarom is $\angle B = 180^\circ - 40^\circ$?
- b Voer zelf de berekening uit.
- c Bereken ook de hoek die $\overrightarrow{F_r}$ met $\overrightarrow{F_1}$ maakt.

Opgave 9

Gegeven de vectoren $\overrightarrow{F_1}$ met grootte 35 N en $\overrightarrow{F_2}$ met grootte 15 N.

Ze grijpen beide aan in hetzelfde punt onder een hoek van 63° .

$\overrightarrow{F_r}$ is hun resultante.

Bereken de grootte van $\overrightarrow{F_r}$ en de hoek die $\overrightarrow{F_r}$ maakt met $\overrightarrow{F_1}$.

Oefenen

Opgave 10

Elke $\triangle ABC$ heeft zes afmetingen, te weten:

- de lengtes van de zijden $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

Hier zijn steeds drie maten van $\triangle ABC$ gegeven. Bereken de andere maten met de sinusregel of de cosinusregel.

- a $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65^\circ$
- b $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65^\circ$
- c $c = 150$, $\gamma = 120^\circ$ en $\beta = 45^\circ$
- d $a = 6$, $b = 10$ en $c = 8$
- e $a = b = 15$ en $\gamma = 20^\circ$

Opgave 11

Laat met een berekening zien dat een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B$, $\angle C = 20^\circ$, $AC = 10$ en $AB = 5$ onmogelijk is.

Opgave 12

Gegeven de vectoren $\overrightarrow{F_1}$ met grootte 520 N en $\overrightarrow{F_2}$ met grootte 340 N.

Ze grijpen beide aan in hetzelfde punt onder een hoek van 100° .

$\overrightarrow{F_r}$ is hun resultante.

Bereken de grootte van $\overrightarrow{F_r}$ en de hoek die $\overrightarrow{F_r}$ maakt met $\overrightarrow{F_1}$.

Opgave 13

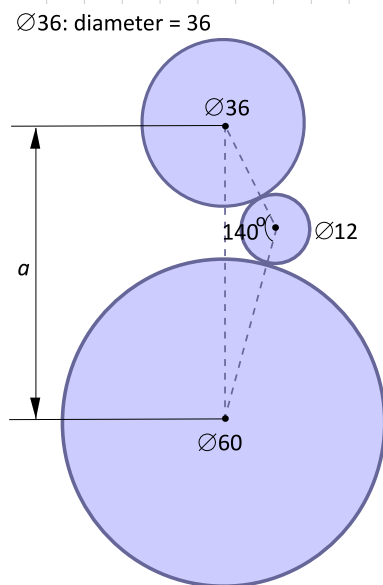
Je gaat op ballonvaart. De weersvoorspelling geeft aan dat de windrichting je van punt A rechtstreeks naar punt B brengt. Je legt 7 km per uur af. Zonder dat je dat weet, staat de windrichting niet zoals voorspeld, zodat je 25° uit koers raakt. Na 5 uur zou je nog 15 km van punt B verwijderd moeten zijn als je er inderdaad recht naartoe gezweefd was.

Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf? Maak eventueel eerst een schets.

Opgave 14

Je ziet hier twee tandwielen met een tussentandwiel. Alle lengtematen zijn in mm.

Bereken de grootte van de afstand a tussen de middelpunten van de twee grootste tandwielen in mm nauwkeurig.



Figuur 8.10

Toepassen

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In de eerste figuur zijn twee standen getekend.

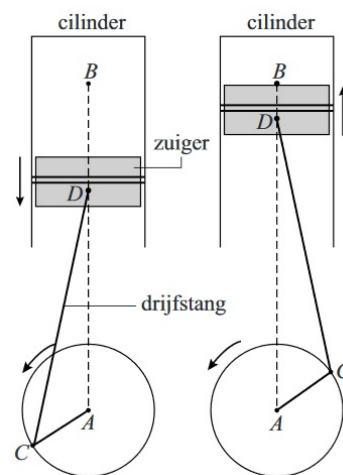
In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

In de tweede figuur zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 dm en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 dm heeft.

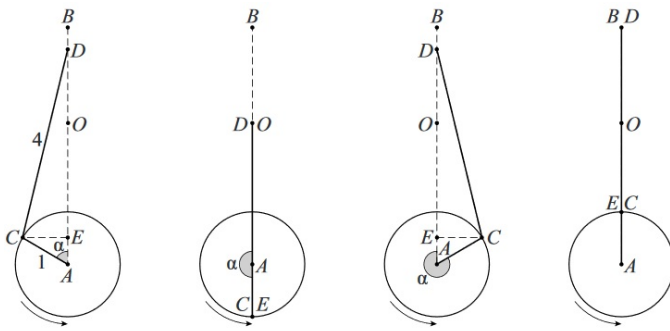
De grootte van hoek CAD (in graden) is α .

De grootte van hoek ACD (in graden) is γ .

Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD .



Figuur 8.11



Figuur 8.12

Je kunt nu de lengte van AD bij allerlei hoeken α of γ berekenen.

Opgave 15

Bekijk de figuren hierboven. Alle afmetingen zijn in dm.

- Bereken AD als $\gamma = 110^\circ$ in mm nauwkeurig.
- Bereken AD als $\alpha = 55^\circ$ in mm nauwkeurig.

Opgave 16

De zuiger kent een stand waarbij AD maximaal is en een stand waarbij AD minimaal is.

- Tussen welke waarden ligt de lengte van AD ?
- Hoe groot zijn AD en γ als $\alpha = 100^\circ$?

Testen

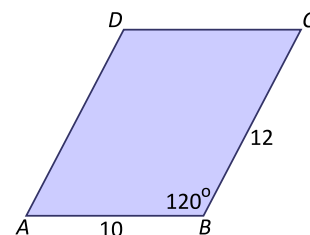
Opgave 17

Van een driehoek ABC is gegeven $AC = b = 12$, $AB = c = 15$ en $\angle A = \alpha = 55^\circ$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Je ziet hier parallellogram $ABCD$ met $AB = 10$, $BC = 12$ en $\angle B = 120^\circ$.

- Bereken AC in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken de oppervlakte van het parallellogram in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 8.13

8.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp gaat het over gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel. Dit wordt toegepast op het berekenen van omtrek en oppervlakte en het in componenten verdelen van vectoren.

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- gelijkvormig — stelling van Pythagoras — sinus, cosinus, tangens
- omtrek — oppervlakte — oppervlakteformule
- vector — componenten van een vector
- sinusregel
- cosinusregel

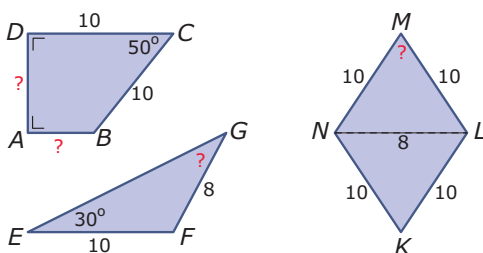
Activiteitenlijst

- in rechthoekige driehoeken gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie gebruiken;
- omtrek en oppervlakte van (samengestelde) figuren berekenen;
- werken met hoeken boven de 90° — vectoren in componenten ontbinden en dit toepassen;
- de sinusregel gebruiken voor berekeningen in (niet-rechthoekige) driehoeken;
- de cosinusregel gebruiken voor berekeningen in (niet-rechthoekige) driehoeken.

Testen

Opgave 1

Bereken in de volgende figuren alle lijnstukken en hoeken waar een vraagteken bij staat. Bereken de lengtes van de lijnstukken in één decimaal en de hoeken in graden nauwkeurig. Bereken ook van elke figuur de oppervlakte in gehele getallen.



Figuur 8.1

Opgave 2

Er wordt op Cape Canaveral een raket gelanceerd. De raket stijgt 8 km loodrecht op en krijgt dan een koerscorrectie, waarna hij 5 km onder een hoek van 40° met zijn oorspronkelijke richting vliegt. Dan wordt een deel van de raket afgestoten. Dit deel keert onder een hoek van 120° met de vorige vliegrichting terug naar de aarde.

Hoe ver van het vertrekpunt komt dit afgestoten deel van de raket in zee terecht? (Neem voor het gemak aan dat de aarde plat is.)

Opgave 3

Twee krachten van 56 N en 31 N grijpen in hetzelfde punt aan en maken een hoek van 141° met elkaar.

Bereken resultante van beide krachten.

Opgave 4

Bereken alle overige zijden en hoeken van $\triangle ABC$ als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig):

- a $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120^\circ$
- b $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120^\circ$
- c $c = 12$, $\alpha = 50^\circ$ en $\beta = 60^\circ$
- d $a = 12$, $b = 6$ en $\alpha = 90^\circ$
- e $a = c = 10$ en $\gamma = 81^\circ$

Opgave 5

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenoverliggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat, zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB . Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65^\circ$ en $\angle ABP = 54^\circ$.

Opgave 6

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan, is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,5 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Toepassen

Opgave 7: Oppervlakte van een rechthoek

Van een rechthoek is de omtrek 20 cm en maken de diagonalen een hoek van 40° met elkaar.

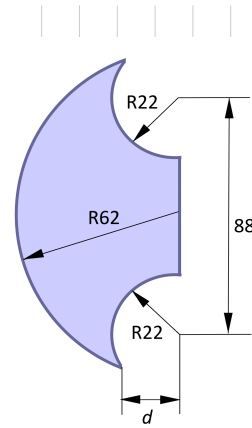
Hoe groot is de oppervlakte van die rechthoek? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 8: Bijzonder plaatje

Je ziet hier een symmetrische figuur die uit delen van cirkels bestaat.

Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de lengte van d in tienden van mm nauwkeurig.



Figuur 8.2

Register

a

aangrijpingspunt **60**

abc-formule **25**

x_{top} **33**

b

bergparabool **8**

c

component **60**

cosinusregel **73**

d

dalparabool **8**

discriminant **24, 26**

e

extreme waarde **8**

g

gelijkvormig **46**

goniometrische verhoudingen
46

k

kwadratische functie **8**

kwadratische vergelijking
23, 25

l

lengte **60**

m

maximum **8**

minimum **8**

n

nulpunten **8, 17**

o

ontrek **53**

ontbinden in factoren **17**

oppervlakte **53**

p

parabool **7, 8**

r

richtingshoek **60**

s

sinusregel **67**

somproductmethode **17**

stelling van pythagoras **46**

symmetrieas **7, 8**

t

top **7, 8, 17**

tweedegraads vergelijking
23, 25

u

uiterste waarde **8**

v

vector **60**

vergroting **46**

vergrotingsfactor **46**

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All



www.math4all.nl



www.math4mbo.nl