# Wiskunde voor het technisch MBO

## Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

# Katern 5

## Inhoud

Machten en wortels
Exponenten en logaritmen

Context College

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

# Inhoud

# Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

# 9

# Machten en wortels

# 9.1 Recht evenredig met een macht

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met machtsfuncties met reële positieve exponenten;
- wortels weergeven als machten en omgekeerd machten met een gebroken exponent schrijven als wortels;
- de rekenregels voor machten gebruiken.

**Voorkennis**

- werken met lineaire en kwadratische functies;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

## Verkennen

### Opgave V1

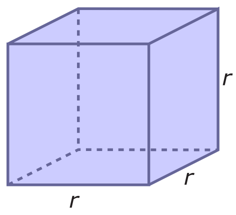
De soortelijke massa van een massief ijzeren kubus is 7,87 kg/dm$^3$.
Voor de massa van deze kubus geldt: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin $r$ de lengte van een ribbe is in dm.

**a** Waarom kun je zeggen dat de massa recht evenredig is met $r^3$?

**b** Waarom kun je niet zeggen dat de massa recht evenredig is met $r$?

**c** Bereken de massa van zo'n kubus als $r = 5$ dm in kg nauwkeurig.

**d** Bereken de lengte van de ribben van zo'n kubus als hij een massa van 500 kg heeft. Geef je antwoord op één decimaal nauwkeurig in dm.



Figuur 9.1

## Uitleg

De inhoud van een kubus met ribben van lengte $r$ is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$.

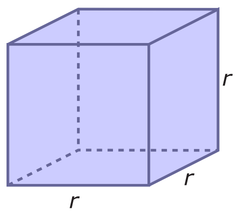
Dit is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele $r$ moet tot de derde macht worden verheven om de uitkomsten te vinden.

De massa van een kubus $m$ is recht evenredig met de derde macht van $r$.
De soortelijke massa van een massief ijzeren kubus is 7,87 kg/dm$^3$.
Voor het gewicht van deze kubus geldt: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin $r$ is uitgedrukt in dm.
Het getal 7,87 is de evenredigheidsconstante.

Als je de lengte van de ribben van een massief ijzeren kubus van 500 kg wilt uitrekenen, dan moet je oplossen:

$7{,}87 \cdot r^3 = 500$

Dat kun je doen door eerst beide zijden door 7,87 te delen: $r^3 = 63{,}532...$.



Figuur 9.2

Vervolgens neem je de derdemachts wortel:
$r = \sqrt[3]{63{,}532...} \approx 3{,}990 \approx 4{,}0$ dm.

Deze laatste stap kan ook anders.

Uit de rekenregel $(r^a)^b = r^{a \cdot b}$ volgt $\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$.

Dus kun je $r^3 = 63{,}532...$ oplossen door beide zijden tot de macht $\frac{1}{3}$ te verheffen:
$r = (63{,}532...)^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}990 \approx 4{,}0$ dm.

Je ziet dat $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

En dit geldt heel algemeen: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
En dat betekent dat we ook breuken als machten kunnen toelaten. In feite kan elk decimaal getal als exponent van een macht optreden.

## Opgave 1

De inhoud van een kubus wordt beschreven met de formule: $I = r^3$.

**a** Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

**b** Maak de ribben twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

**c** Waarom is de inhoud van een kubus wel recht evenredig met $r^3$, maar niet recht evenredig met $r$?

Bekijk de formule voor de massa van de massieve ijzeren kubus in de **Uitleg**.

**d** Bereken $r$ bij een kubus met een massa van 200 kg.

**e** Laat zien dat je die formule kunt herleiden tot: $r \approx 0{,}50 \cdot m^{\frac{1}{3}}$.

**f** Bereken $r$ met de formule $r \approx 0{,}50 \cdot m^{\frac{1}{3}}$ als de massa van de kubus 200 kg is.
Vind je hetzelfde antwoord als bij d?

## Opgave 2

Ook het verband tussen de ribbe $r$ en de oppervlakte $A$ van een kubus is een machtsverband.

**a** Waarom is de oppervlakte recht evenredig met $r^2$?
Waarom is de soortelijke massa van het materiaal waar de kubus van is gemaakt niet van belang?

**b** Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 4 cm.

**c** Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een 4 maal zo grote oppervlakte?

**d** Laat zien dat de formule bij a is te herleiden tot $r \approx 0{,}408 A^{\frac{1}{2}}$.

**e** Bereken $r$ met de formule $r \approx 0{,}408 A^{\frac{1}{2}}$ als de oppervlakte van de kubus 150 cm$^2$ is.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

**Bekijk de applet: machtsfuncties**

Als $y$ **recht evenredig met een macht** van $x$ is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante $c$ is de **evenredigheidsconstante**.

Je kunt hier voorbeelden van grafieken van machtsfuncties bekijken. Daarbij is $p$ steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

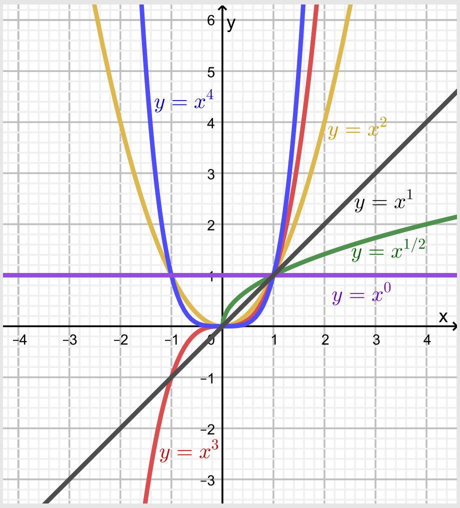
Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$

Afhankelijk van de waarde van $p$ heb je één of twee antwoorden.

De **rekenregels voor machten** zijn:

- $x^0 = 1$
- $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$.
- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

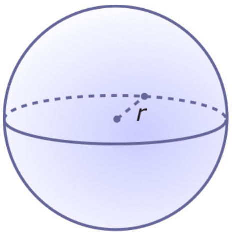


Figuur 9.3

## Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derde macht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Bereken de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000 \text{ cm}^3$.



Figuur 9.4

Antwoord

Daarvoor moet je oplossen: $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$. En dus: $r^3 = 238{,}73...$

Je vindt: $r = \sqrt[3]{238{,}73...} = (238{,}73...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

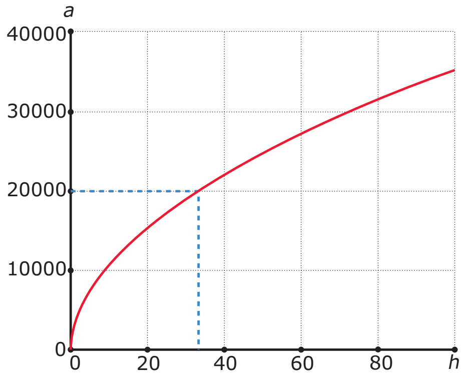
Het is ook mogelijk eerst de formule voor de inhoud van een bol zo om te rekenen, dat de straal wordt uitgedrukt in de inhoud. Dat gaat zo:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = I$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot I$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}}$$

Je vindt: $r \approx 0{,}62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$, dus $r$ is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.
De evenredigheidsconstante is (ongeveer) 0,62.




Figuur 9.5

## Opgave 3

De formule voor de inhoud van een bol is: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

**a** $I$ is recht evenredig met $r^3$. Bereken de evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

**b** $r$ is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$. Laat zien dat de evenredigheidsconstante ongeveer 0,62 is

## Opgave 4

Bij welke van de volgende formules is $y$ recht evenredig met een macht van $x$? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

**a** $y = 2x$

**b** $y = 2x^4 + 5$

**c** $y = 5x^4$

**d** $y = -5x^4$

## Voorbeeld 2

Met behulp van de rekenregels voor machten kun je functies met wortels herleiden tot machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot x^b$. Doe dit met de functies:

- $y = 2x\sqrt{x}$
- $y = \sqrt[4]{5x}$

Omgekeerd kun je machtsfuncties met gebroken exponenten herleiden tot functies met wortels. Doe dit met de functies:

- $y = 2x^{\frac{1}{3}}$
- $y = (3x)^{1\frac{1}{2}}$

Antwoord

Je vindt:

- $y = 2x\sqrt{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{1\frac{1}{2}}$
- $y = \sqrt[4]{5x} = (5x)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}50x^{\frac{1}{4}}$

En omgekeerd:

- $y = 2x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$
- $y = (3x)^{1\frac{1}{2}} = 3^{1\frac{1}{2}} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \approx 5{,}20x\sqrt{x}$

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe functies met wortelvormen kunnen worden geschreven als machtsfuncties.
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = 3x^2\sqrt{x}$

**b** $y = 4\sqrt[3]{x^2}$

**c** $y = \sqrt[5]{4x^2}$

### Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je ook hoe je machtsfuncties kunt schrijven zonder gebroken exponenten.
Doe dit bij de volgende functies.

**a** $y = 4x^{\frac{1}{2}}$

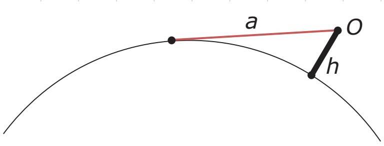
**b** $y = (3x)^{\frac{1}{4}}$

**c** $y = 2{,}5x^{\frac{2}{3}}$

### Voorbeeld 3

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand $a$ (in meter) als functie van de hoogte $h$ (in meter) geldt: $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$.

Laat zien, dat $a$ recht evenredig is met een macht van $h$.
Bereken de hoogte waarbij een kijkafstand van 20 km hoort.



Figuur 9.6

Antwoord

Deze functie kun je schrijven als $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$ m.

Dus is $a$ recht evenredig met $h^{\frac{1}{2}}$ met een evenredigheidsconstante van 3572.

Bij een kijkafstand van 20 km hoort $a = 20000$ m.

Dan geldt: $3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 20000$.

Deze vergelijking kun je oplossen door delen door 3572 en vervolgens kwadrateren:

$h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$ m.

### Opgave 7

Bekijk de formule voor de kijkafstand $a$ (in meter) als functie van de hoogte $h$ (in meter) in **Voorbeeld 3**.

**a** Bereken hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

**b** Laat zien dat de gegeven formule is te herleiden tot $h \approx 7{,}84 \cdot 10^{-8} \cdot a^2$.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

**c** Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- aflezen uit de grafiek van $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$;
- in de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele $a$ vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen;
- berekenen met de formule $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

## Oefenen

### Opgave 8

Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = 4\sqrt{x^3}$

**b** $y = (0{,}4x)^3$

**c** $y = \sqrt[4]{3x^3}$

### Opgave 9

Schrijf de volgende functies zonder gebroken exponenten.

**a** $y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

**b** $y = x^{\frac{3}{5}}$

**c** $y = (4x)^{\frac{1}{3}}$

### Opgave 10

Gegeven is de machtsfunctie $y = 120x^5$.

**a** Bereken $y$ als $x = 4$.

**b** Bereken voor welke waarde van $x$ geldt $y = 20000$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**c** Als de waarde van $x$ vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende uitkomst dan vermenigvuldigd?

## Opgave 11

Er is een verband tussen de snelheid $v$ (in km/h) van een auto en de bijbehorende remweg $s$ (in m).
De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt.

Een vuistregel voor dit verband is: $s = \frac{v^2}{100} \cdot 0{,}75$.

**a** $s$ is recht evenredig met een macht van $v$. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

**b** In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

**c** Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Beschrijf in woorden wat voor verband dit is.

**d** Geef commentaar op de volgende uitspraak: “Bij een zicht van 100 meter kun je twee maal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter.”

## Opgave 12

De slingertijd $T$ (in s) van een massa die aan een touw heen en weer slingert wordt gegeven door:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

waarin $L$ de lengte van het touw (in m) en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante is.

**a** Bereken de slingertijd als $L = 0{,}8$ m.

**b** Laat zien, dat je de formule kunt schrijven als $T \approx 2{,}01 \cdot L^{\frac{1}{2}}$.

**c** Bereken de lengte van het touw als de slingertijd 1 s bedraagt.

**d** Geef een formule voor $L$ afhankelijk van $T$.

## Opgave 13

Ga uit van een massieve ijzeren balk met ribben $r$, $r$ en $10r$ in cm.
De soortelijke massa van ijzer is 7,89 g/cm$^3$.

**a** Stel een formule op voor de massa $m$ van de balk als functie van $r$.

**b** Stel een formule op voor de oppervlakte $A$ van de balk als functie van $r$.

**c** Laat zien dat $A \approx 2{,}28m^{\frac{2}{3}}$.

**d** Bereken de massa van zo'n balk als de totale buitenoppervlakte 150 cm$^2$ is.

## Toepassen

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsmassa en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun massa zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten. Meeh heeft een formule gevonden die het verband tussen massa en huidoppervlakte aangeeft: $H = c \cdot m^{\frac{2}{3}}$. Hierin is $H$ de huidoppervlakte (in $dm^2$) en $m$ de massa (in kg) van het dier.

Je ziet dat voor dit verschijnsel de huidoppervlakte rechtevenredig is met de 2/3-de macht van de lichaamsmassa. De factor $c$ is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de Meeh-coëfficiënt genoemd. In de tabel is voor een aantal diersoorten de Meeh-coëfficiënt gegeven.

| **diersoort** | muis | rat | kat | konijn | schaap | varken | koe | paard | mens |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 9,0 | 9,1 | 10,0 | 9,8 | 8,4 | 9,0 | 9,0 | 10,0 | 11,2 |

Tabel 9.1

Voor elke diersoort kun je ook een grafiek tekenen. Je ziet dan dat het verband dat Meeh gevonden heeft vooral aangeeft dat hoe zwaarder een dier is, hoe groter het huidoppervlakte is. Dat is logisch, maar je ziet ook dat de huidoppervlakte minder snel toeneemt dan de massa: de stijging neemt af. Dat komt door de macht in de formule. Als je grafieken van twee diersoorten naast elkaar zet, kun je soorten vergelijken. Welke diersoort zal verhoudingsgewijs meer eten nodig hebben?

### Opgave 14

De tabel met Meeh-coëfficiënten in **Toepassen** is ontstaan vanuit tabellen voor de huidoppervlakte $H$ (in $dm^2$) en de massa $m$ (in kg) van de diersoort. In deze tabel zie je vijftal waarden van $m$ en $H$ van Schotse Hooglanders, een soort koeien.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ (kg) | 430 | 450 | 490 | 500 | 420 |
| $H$ ($dm^2$) | 507 | 523 | 553 | 560 | 500 |

Tabel 9.2

**a** Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander.

**b** De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 $dm^2$. Hoe zwaar was die koe?

**c** Als je deze formule omrekent zodat de lichaamsmassa uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

**d** Als de lichaamsmassa twee keer zo groot wordt, wordt de huid-oppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

### Opgave 15

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte $A$ en de massa $m$. Ga uit van een massieve ijzeren bol, de soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm$^3$.

**a** Zoek de formules voor de inhoud van een bol met straal $r$ en de oppervlakte van zo'n bol op.

**b** Welke formule geldt voor de massa $m$ als functie van de straal $r$ van de bol? Neem $r$ in cm en $m$ in gram.

**c** Door de formules voor de massa en de oppervlakte van een bol met straal $r$ te combineren vind je $A = c \cdot m^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van $c$.

## Testen

### Opgave 16

Schrijf deze functies als machtsfuncties, dus in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = \frac{3}{7}\sqrt{x}$

**b** $y = \sqrt[3]{4x^2}$

Herleid deze functies tot een vorm zonder gebroken exponenten.

**c** $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

**d** $y = (4x)^{\frac{1}{2}}$

### Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is $r$ de straal van het grondvlak en $h$ de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

**a** Welke formule geldt bij deze blikken voor $V$ als functie van $r$?

**b** Herleid deze formule tot $r \approx 0{,}54 \cdot V^{\frac{1}{3}}$.

**c** De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte $A$ als functie van $r$.

**d** Laat zien dat $A \approx 5{,}54V^{\frac{2}{3}}$.

# 9.2 Omgekeerd evenredig met een macht

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met machtsfuncties met negatieve exponenten;
- breuken weergeven als machten en omgekeerd machten met een negatieve exponent schrijven als breuken;
- de rekenregels voor machten uitbreiden met negatieve exponenten.

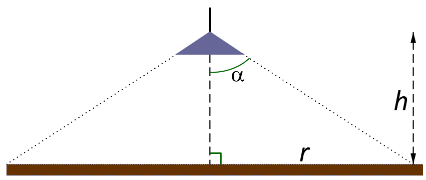
**Voorkennis**

- werken met lineaire, kwadratische functies en machtsfuncties met positieve exponent;
- de rekenregels voor machten gebruiken, inclusief die voor gebroken exponenten;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

## Verkennen

### Opgave V1

Je ziet hier hoe een kegelvormige lamp een cirkelvormig lichtschijnsel op een tafel werpt. De straal van deze cirkel is recht evenredig met de hoogte $h$ van de lichtbron boven de tafel.



Figuur 9.1

**a** Waarom kun je zeggen dat de straal $r$ van deze cirkel recht evenredig is met $h$?

De hoeveelheid licht die de lamp per seconde uitstraalt heet de lichtstroom $\Phi$ en wordt uitgedrukt in lumen, in lm. De verlichtingssterkte $E$ op een oppervlak is het aantal lumen per m$^2$. Deze eenheid heet wel lux: 1 lux = 1 lm/m$^2$. Er geldt:

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

Hierin is:

- $E$ de verlichtingssterkte in lux
- $\Phi$ de lichtstroom in lm (lumen)
- $A$ de oppervlakte van de verlichte cirkel in m$^2$

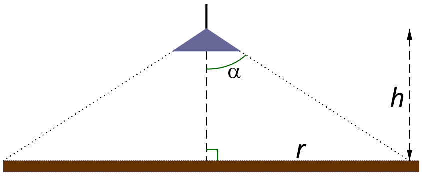
Verder is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$, waarin $c$ een constante is.

**b** Voor een bepaalde lamp geldt $\Phi = 600$ lm en $c = 1{,}5$.
Welke formule geldt voor $E$ als functie van $h$?

**c** Wat kun je zeggen over de verlichtingssterkte $E$ als $h$ drie keer zo groot wordt?

**d** Waarom is nu $E$ omgekeerd evenredig met $h^2$?

## Uitleg



**Figuur 9.2**

De hoeveelheid licht die de lamp per seconde uitstraalt heet de lichtstroom $\Phi$ en wordt uitgedrukt in lumen, in lm. De verlichtingssterkte $E$ op een oppervlak is het aantal lumen per $m^2$.
Deze eenheid heet wel lux: 1 lux = 1 $lm/m^2$. Er geldt:

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

Hierin is:

- $E$ de verlichtingssterkte in lux
- $\Phi$ de lichtstroom in lm (lumen)
- $A$ de oppervlakte van het verlichte deel in $m^2$

Bij een kegelvormige lamp is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$, waarin $h$ (in m) de hoogte van de lamp boven het verlichte oppervlak en $c$ een constante is.

Als bijvoorbeeld $\Phi = 600$ lm en $c = 1$ is:

$$E = \frac{\Phi}{c \cdot \pi \cdot h^2} = \frac{600}{\pi \cdot h^2} \approx \frac{191}{h^2}$$

Als $h$ groter wordt, neemt $E$ juist af (omdat je dan door een groter getal deelt).
Je zegt wel dat $E$ omgekeerd evenredig is met het kwadraat van $h$, dus met $h^2$.
Bij een formule waarin de variabele (ook) in de noemer van een breuk zit heb je te maken met een gebroken functie.

Je kunt de formule echter (met de rekenregels voor machten) ook zo schrijven:

$$E = \frac{191}{h^2} = 191 \cdot \frac{1}{h^2} = 191 \cdot \frac{h^0}{h^2} = 191 \cdot h^{-2}$$

En dus is $E$ ook recht evenredig met een macht van $h$, namelijk met $h^{-2}$.
Je kunt zo'n gebroken functie als machtsfunctie schrijven.

Bij dit soort functies heb je te maken met bijzondere gevallen: als $h$ heel groot wordt, benadert $E$ de waarde 0, maar $E$ kan nooit echt 0 worden.

### Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de formule voor de verlichtingssterkte $E$ op een tafeloppervlak. Ga uit van een lamp met een lichtstroom van $\Phi = 600$ lm.

**a** Waarom is het logisch dat $E$ omgekeerd evenredig is met de oppervlakte $A$ van het gebied dat wordt verlicht?

**b** Er wordt van een kegelvormige lichtbundel uitgegaan. Dan is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$.
Er wordt gekozen voor $c = 1$. Wat zegt dit over de kegelvorm?

**c** Maak de grafiek van $E = \frac{191}{h^2}$. Neem alleen positieve waarden voor $h$.

**d** Bereken $E$ als $h = 2{,}8$ m.

**e** Bij welke waarde van $h$ is $E > 100$ lux?

**f** Herleid de formule $E = \frac{191}{h^2}$ tot $h$ is uitgedrukt in $E$.
Laat zien dat ook hier van een machtsfunctie sprake is.

### Opgave 2

Beschrijf de volgende verbanden met de termen ‘recht evenredig’ of ‘omgekeerd evenredig’. Schrijf bij omgekeerd evenredigheid ook de bijbehorende machtsfunctie op.

**a** $F = \frac{300}{r^2}$

**b** $P = 0{,}52 \cdot v^3$

**c** $s = 1{,}2 \cdot t$

**d** $t = \frac{60}{v}$

### Opgave 3

De basisformule voor een omgekeerd evenredig verband is de functie: $y = \frac{c}{x^p}$, waarin $p$ een willekeurig (positief) getal is.

**a** Bekijk de grafieken van deze functie voor $c = 1$, $p = 1,2,3,4,5$ en voor $-10 \le x \le 10$.

**b** Bij welke waarde van $x$ hebben deze functies geen uitkomst?
Wat is er dan met hun grafiek aan de hand?

**c** Neem aan dat je $x$ oneindig groot (zowel positief als negatief) zou kunnen maken.
Wat is er dan met de grafiek aan de hand?

**d** Neem nu $c = 1$, $p = 0{,}5$ en bekijk de grafiek voor $-10 \le x \le 10$.
Waarom zijn er nu bij negatieve waarden van $x$ geen uitkomsten?

**e** Laat zien, dat de formules bij deze functies te schrijven zijn als $y = c \cdot x^{-p}$.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

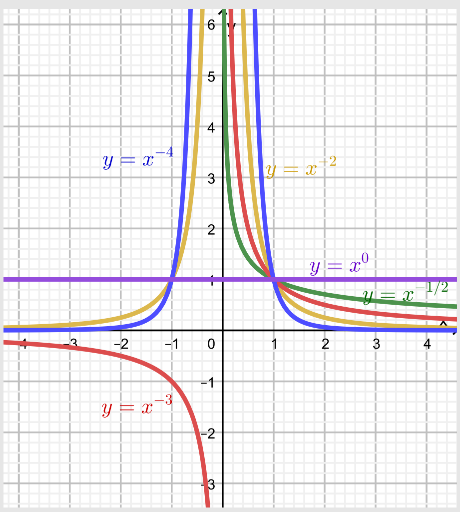
Bekijk de applet: machtsfuncties 2

Als $y$ **omgekeerd evenredig met een macht** van $x$ is, geldt $y = \frac{c}{x^p}$. De constante $c$ is de **evenredigheidsconstante**. Je kunt deze functies als machtsfuncties schrijven: $y = c \cdot x^{-p}$.

Je kunt hier voorbeelden van grafieken van deze functies bekijken. Daarbij is $p$ steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

Je ziet dat de grafieken in de buurt van $x = 0$ steeds dichter tegen de $y$-as gaan lopen, de $y$-as is een **verticale asymptoot** van de grafiek.

Je ziet dat de grafieken voor hele grote $x$-waarden (positief en soms ook negatief) steeds dichter tegen de $x$-as gaan lopen, de $x$-as is een **horizontale asymptoot** van de grafiek.




Figuur 9.3

Vanuit dergelijke functies kun je op meerdere manieren terugre-kenen:

- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $c \cdot x^{-p} = y$ en dan delen door $c$ en de omgekeerde macht gebruiken;
- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $x^p = \frac{c}{y}$ en dan de omgekeerde macht of de $p$-de machtswortel gebruiken.

Afhankelijk van de waarde van $p$ heb je één of twee antwoorden.

Bij de **rekenregels voor machten** komt nog:

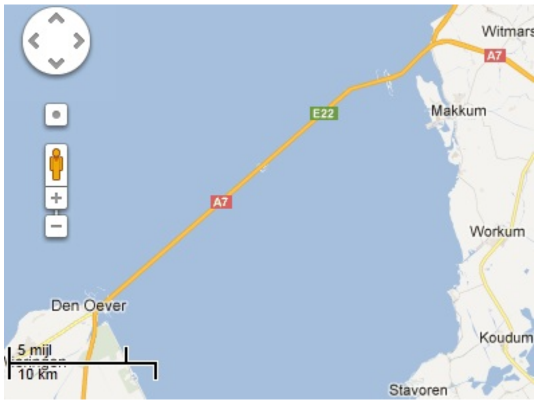
- $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

## Voorbeeld 1

De afsluitdijk is 32 km lang. Stel dat je er met een constante snelheid $v$ (in km/h) zou kunnen rijden, dan geldt voor de tijd $t$ (in uur) die je er over doet:

$t = \frac{32}{v}$

Laat zien, dat $t$ een machtsfunctie is van $v$ en bepaal de bij de grafiek horende asymptoten.
Bereken de snelheid die je zou moeten hebben als je er 0,5 uur over doet.



Figuur 9.4

Antwoord

$t$ is een machtsfunctie van $v$ omdat

$t = \frac{32}{v} = 32 \cdot \frac{1}{v^1} = 32 \cdot v^{-1}$.

Bekijk voor de asymptoten indien nodig de grafiek van de gegeven functie voor $v$-waarden vanaf 0.
Je ziet dat die grafiek voor $v$-waarden in de buurt van 0 steeds dichter bij de verticale as gaat lopen, de $t$-as is de verticale asymptoot.
Je ziet dat die grafiek voor hele grote $v$-waarden steeds dichter bij de horizontale as gaat lopen, de $v$-as is de horizontale asymptoot.

Om $v$ te berekenen bij $t = 0{,}5$ moet je oplossen: $\frac{32}{v} = 0{,}5$.

Dit kan met de balansmethode: $32 = 0{,}5v$ en dus $v = 64$ km/h.

Je kunt dit ook oplossen vanuit de machtsfunctie: $32 \cdot v^{-1} = 0{,}5$ geeft $v^{-1} = \frac{0{,}5}{32} = 0{,}015625$ en $v = 0{,}015625^{\frac{1}{-1}} = 64$.

## Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

**a** Laat zien hoe je uit de rekenregel $\frac{v^a}{v^b} = v^{a-b}$ kunt afleiden dat $\frac{1}{v} = v^{-1}$.

**b** Maak zelf de grafiek van de gegeven functie.
Ga na, dat de asymptoten in je grafiek zichtbaar zijn.

**c** Hoe lang doe je over een rit over de Afsluitdijk als je constant 100 km/h kunt rijden?
Voer je berekening uit met de gegeven formule en ook met de machtsfunctie die erbij hoort. Geef je antwoord in minuten en seconden.

**d** Je legt de 32 km in 15 minuten af door met een constante snelheid te rijden.
Hoe hard heb je gereden? Laat dit zien door met beide vormen van de formule de bijbehorende vergelijking op te lossen.

## Voorbeeld 2

Met behulp van de rekenregels voor machten kun je functies met breuken vaak herleiden tot machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot x^b$.
Doe dit met de functies:

- $y = \frac{2}{x^3}$
- $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Omgekeerd kun je machtsfuncties met negatieve exponenten herleiden tot functies met breuken en soms ook wortels. Doe dit met de functies:

- $y = 5x^{-4}$
- $y = (2x)^{-\frac{1}{2}}$

Antwoord

Je vindt:

- $y = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$
- $y = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

En omgekeerd:

- $y = 5x^{-4} = 5 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{5}{x^4}$
- $y = (2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe functies met breuken kunnen worden geschreven als machtsfuncties.
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = \frac{3}{x^2}$

**b** $y = \frac{4}{x\sqrt{x}}$

**c** $y = \frac{1}{2x}$

### Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je ook hoe je machtsfuncties kunt schrijven zonder gebroken en/of negatieve exponenten.
Doe dit bij de volgende functies.

**a** $y = 4x^{-\frac{1}{2}}$

**b** $y = (3x)^{-1}$

**c** $y = 2{,}5x^{-2}$

### Voorbeeld 3

De kracht die twee massa's $m_1$ en $m_2$ op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de zwaartekracht is

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Hierin is:

- $F$ de zwaartekracht (in N)
- $G$ de gravitatieconstante, $G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$
- $m_1$ en $m_2$ de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- $r$ de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

Figuur 9.5

Gebruik de volgende gegevens en laat zien dat $F \approx 2{,}93 \cdot 10^{37} r^{-2}$ voor de aantrekkingskracht tussen de aarde en de maan.

De massa van de aarde is ongeveer $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg en de diameter is ongeveer 12.756 km.

De massa van de maan is ongeveer $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg en de diameter is ongeveer 3476 km.

Bereken de aantrekkingskracht tussen aarde en maan op het moment dat de kleinste afstand tussen een punt op het aardoppervlak en een punt op het maanoppervlak 363.000 km is.

Antwoord

Uit de gegevens volgt:

- $m_1 \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
- $m_2 \approx 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
- $r = \frac{12756}{2} + \frac{3476}{2} + 363000 = 371116$ km en dat is ongeveer $371 \cdot 10^6$ m

Dus

$F \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{r^2} \approx \left(2{,}93 \cdot 10^{37}\right) \cdot \frac{1}{r^2} = 2{,}93 \cdot 10^{37} \cdot r^{-2}$.

De gevraagde aantrekkingskracht is $F \approx \frac{2{,}93 \cdot 10^{37}}{\left(371 \cdot 10^6\right)^2} \approx 2{,}13 \cdot 10^{20}$ N.

### Opgave 7

Bekijk de formule voor de aantrekkingskracht $F$ (in N) tussen twee massa's in **Voorbeeld 3**.

**a** Leg uit, hoe je aan de waarde voor $r$ komt.
Welke aanname moet je doen?

**b** Voer zelf de herleiding van de algemene formule tot machtsfunctie uit.

**c** De afstand van de aarde tot de maan verandert in de loop van een omwenteling van de maan om de aarde.
Bij welke afstand tussen hun middelpunten is de zwaartekracht $2 \cdot 10^{20}$ N?

Je kunt de gegeven zwaartekrachtformule ook gebruiken voor het berekenen van de kracht die de aarde op objecten op zijn oppervlakte uitoefent.

**d** Laat zien dat voor een object met massa $m_2$ geldt $F \approx 9{,}80 \cdot m_2$ N.

## Oefenen

### Opgave 8

Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = \frac{4}{x^3}$

**b** $y = \frac{1}{0{,}4x}$

**c** $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

### Opgave 9

Schrijf de volgende functies zonder gebroken exponenten.

**a** $y = \frac{1}{2}x^{-2}$

**b** $y = (3x)^{-\frac{1}{4}}$

**c** $y = \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$

### Opgave 10

Gegeven is de machtsfunctie $y = 120x^{-3}$.

**a** Bereken $y$ als $x = 2$.

**b** Bereken voor welke waarde van $x$ geldt $y = 12000$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**c** Als de waarde van $x$ twee keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende uitkomst dan vermenigvuldigd?

**d** Licht toe dat $y$ omgekeerd evenredig is met $x^3$.

**e** Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

### Opgave 11

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{750}{p}$. Hierin is $a$ de verkoop per dag in kg en $p$ de prijs per kg in euro.

**a** Je ziet dat $a$ omgekeerd evenredig is met $p$. Schrijf de formule zo, dat $a$ recht evenredig is met een macht van $p$.

**b** Teken de grafiek van deze machtsfunctie voor prijzen tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft?

**c** Het bedrijf heeft een voorraad van 550 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

**d** Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

### Opgave 12

Ga uit van een massieve ijzeren balk met twee ribben van $r$ cm en een derde ribbe van $h$ cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm$^3$. Het gewicht van deze balk is 15,8 kg.

**a** Laat zien, dat $h$ omgekeerd evenredig is met het kwadraat van $r$ en stel een bijpassende formule op.

**b** Laat zien, dat $r$ omgekeerd evenredig is met de wortel van $h$ en stel een bijpassende formule op.

### Opgave 13

Voor de elektrische weerstand $R$ in een draad geldt de wet van Pouillet:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

Hierin is:

- $R$ de weerstand in Ω (Ohm)
- $l$ de lengte van de draad in m
- $A$ de oppervlakte van de doorsnede in m$^2$
- $\rho$ de soortelijke weerstand van het materiaal

**a** In welke eenheid druk je $\rho$ uit?

Neem aan dat de draad zuiver rond is, dan geldt $A = \frac{1}{4}\pi D^2$, waarin $D$ de diameter (in m) van de draad is.
Verder geldt voor koper dat $\rho \approx 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ωm is.

**b** Bereken de weerstand van een koperdraad met een diameter van 1 mm en een lengte van 5 m.

**c** Bereken de diameter van een koperdraad met een lengte van 5 m en een gemeten weerstand van 0,02 Ω.

**d** Laat voor een koperdraad met een lengte van 1 m zien, dat $R \approx 2{,}23 \cdot 10^{-8} \cdot D^{-2}$.

**e** Waarom kun je zeggen dat $R$ recht evenredig is met de lengte $l$ en omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de diameter $D$ van de koperdraad?

## Toepassen

Een bekende maat voor iemands gezondheid is de **bodymass index** ($BMI$), ook wel queteletindex ($QI$) genoemd. De $BMI$ is een maat voor het al dan niet hebben van onder- of overgewicht. De bijbehorende formule is

$BMI = \frac{m}{l^2}$

Hierin is:

- $m$ het lichaamsgewicht in kilogram
- $l$ de lengte in meter
- $BMI$ de bodymass index

| BMI (kg/m²) | Classificering | Gezondheidsrisico |
|---|---|---|
| < 18,5 | Ondergewicht | Gezondheidsrisico |
| 20 - 25 | Gezond gewicht | Gezond |
| 25 - 30 | Overgewicht | Nog geen verhoogd risico |
| 30 - 35 | Obesitas | Risico neemt toe |
| 35 - 40 | Ernstige obesitas | Verhoogde kans op lichamelijke risico's |
| 40 > | Morbide obesitas | Risico op gezondheidsproblemen en ernstige ziektes door overgewicht stijgt aanzienlijk |

Figuur 9.6

Bij een $BMI$ vanaf 20 tot 25 heb je een normaal lichaamsgewicht. In de tabel vind je meer gegevens.

### Opgave 14

Bekijk de formule voor de bodymass index.

**a** Hoe kun je aan de formule zien, dat de $BMI$ recht evenredig met het lichaamsgewicht (in kg) en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de lengte (in m) is?

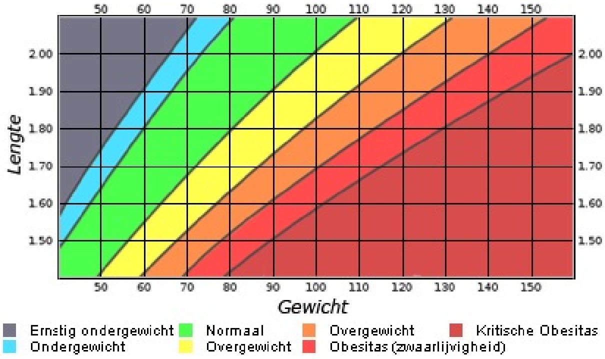
**b** Bereken jouw eigen $BMI$. In welke categorie val je?

**c** Stel je voor dat $l = 1{,}95$. Welke formule geeft het verband tussen $QI$ en $m$? Maak de grafiek van $QI$ als functie van $m$. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

**d** Stel je voor dat $G = 65$. Welke formule geeft het verband tussen $QI$ en $l$? Maak de grafiek van $QI$ als functie van $l$. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

**e** Stel je voor dat $QI = 20$. Welke formule geeft het verband tussen $m$ en $l$? Maak de grafiek van $m$ als functie van $l$. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

Je ziet hier de mogelijke waarden van de $BMI$ weergegeven in grafieken.




Figuur 9.7

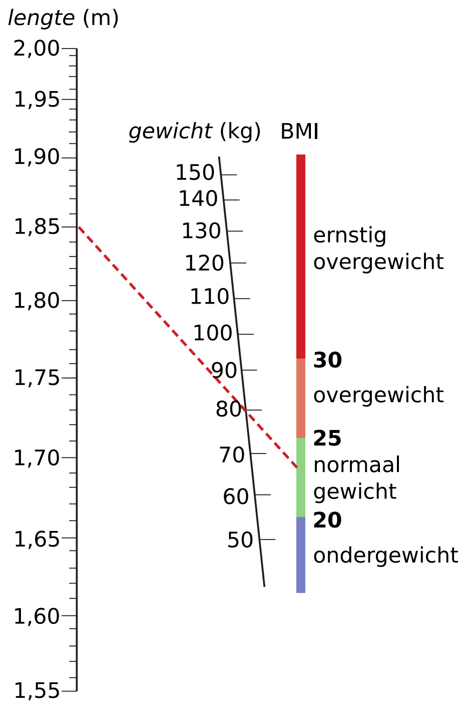
**f** Hoe zien de formules bij deze grafieken er uit?

### Opgave 15

Je ziet hier een figuur waarmee je de $BMI$ snel kunt bepalen.

**a** Welke $BMI$ heeft iemand van 1,85 meter met een lichaamsgewicht van 80 kg?
Controleer de uitkomst met de formule.

**b** Hoe zwaar is iemand van 1,90 m met een normaal lichaamsgewicht?




Figuur 9.8

## Testen

### Opgave 16

Schrijf deze functies als machtsfuncties, dus in de vorm $y = ax^b$.

**a** $y = \frac{3}{x^2}$

**b** $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Herleid deze functies tot een vorm zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

**c** $y = \frac{2}{3}x^{-3}$

**d** $y = (4x)^{-\frac{1}{2}}$

### Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$. Hierin is $d$ de diameter van het grondvlak en $h$ de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken met een inhoud van $V = 1$ liter.

**a** Laat zien, dat $h$ dan omgekeerd evenredig is met het kwadraat van $d$ en geef de bijbehorende formule.

**b** Herschrijf deze formule tot een formule waarin $h$ recht evenredig is met een macht van $d$. Bepaal de evenredigheidsconstante.

**c** Maak een grafiek bij deze formule en bepaal de twee asymptoten.

**d** Bereken de diameter als de hoogte van deze cilinder 10 cm is.

# 9.3 Grafieken verschuiven en vervormen

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- in een formule herkennen uit welke machtsfunctie hij is ontstaan;
- aangeven door welke transformaties (verschuivingen of vermenigvuldigen) de grafiek uit die van de bijbehorende machtsfunctie kan ontstaan.

**Voorkennis**

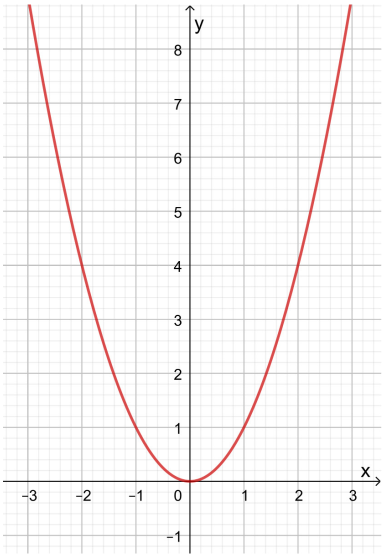
- werken met machtsfuncties met alle mogelijke exponenten;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

## Verkennen

### Opgave V1

**Bekijk de applet**

Hier zie je de grafiek van $y = x^2$, min of meer de eenvoudigste machtsfunctie.
Alle kwadratische functies kunnen uit deze machtsfunctie ontstaan.
Je kunt die grafieken maken met een grafische rekenmachine of programma's als GeoGebra en Desmos.



Figuur 9.1

**a** Maak de grafiek van $y_2 = (x - 4)^2$.

Beschrijf hoe de grafiek van $y_2$ ontstaat uit die van $y = x^2$.

**b** Maak de grafiek van $y_2 = x^2 + 3$.

Beschrijf hoe de grafiek van $y_2$ ontstaat uit die van $y = x^2$.

**c** Maak de grafiek van $y_2 = 1{,}5 \cdot x^2$.

Beschrijf hoe de grafiek van $y_2$ ontstaat uit die van $y = x^2$.

**d** Maak de grafiek van $y_2 = (3 \cdot x)^2$.

Beschrijf hoe de grafiek van $y_2$ ontstaat uit die van $y = x^2$.

**e** Maak de grafiek van $y_2 = 1{,}5(x - 4)^2 + 3$.

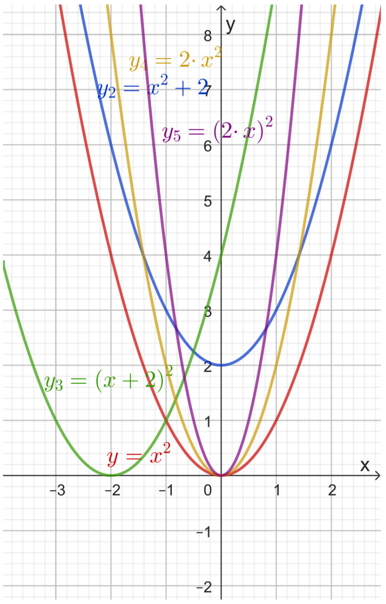
Beschrijf hoe de grafiek van $y_2$ ontstaat uit die van $y = x^2$.

## Uitleg

Dit is de grafiek van de standaard machtsfunctie met macht 2, dus formule $y = x^2$.
Je ziet ook enkele vervormingen van de grafiek.
Door in de formule met een getal te vermenigvuldigen en/of op te tellen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Je verschuift of vermenigvuldigt de grafiek. Dat heet ook wel het transformeren van de grafiek.

Je moet vier transformaties kunnen herkennen.

- De grafiek van $y_2 = x^2 + 2$ ontstaat door alle $y$-waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden hoger in de $y$-richting te liggen, de grafiek verschuift 2 in de $y$-richting.
- De grafiek van $y_3 = (x + 2)^2$ ontstaat door alle $x$-waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links te liggen. Dit is hetzelfde als - 2 eenheden verschuiven in de $x$-richting.
- De grafiek van $y_4 = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle $y$-waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zover van de $x$-as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen in de $y$-richting.
- De grafiek van $y_5 = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle $x$-waarden met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zover van de $y$-as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de $x$-richting.



**Figuur 9.2**

Soms moet je meerdere transformaties na elkaar doen, bijvoorbeeld bij $y = 0{,}5(x - 4)^2 + 2$ horen drie transformaties: eerst 4 verschuiven in de $x$-richting, dan met 0,5 vermenigvuldigen in de $y$-richting en tenslotte 2 omhoog schuiven (dus ook in de $y$-richting).

### Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door vervormen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn. Maak eventueel zelf hun grafieken in GeoGebra, Desmos, of met de grafische rekenmachine.

**a** $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

**b** $y_3 = (x - 4)^2$

**c** $y_4 = x^2 + 3$

**d** $y_5 = (3x)^2$

### Opgave 2

Ga uit van de standaard machtsfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

**a** $y_2 = 3 \cdot x^3$

**b** $y_3 = (x+4)^3 + 2$

**c** $y_4 = 2x^3 + 5$

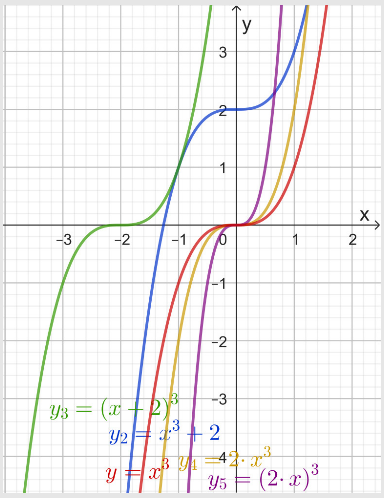
**d** $y_5 = 0{,}5(x-1)^3 + 2$

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Ga uit van een standaard machtsfunctie zoals $y = x^3$ (de rode grafiek in de figuur).

- De blauwe grafiek $y = x^3 + 2$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de $y$-richting 2 eenheden te verschuiven.
- De groene grafiek $y = (x+2)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de $x$-richting -2 eenheden te verschuiven.
- De oranje grafiek $y = 2 \cdot x^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de $y$-richting met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De paarse grafiek $y = (2 \cdot x)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de $x$-richting met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.



Figuur 9.3

Dit zijn **transformaties van een grafiek**.

Door het optellen van een getal in de formule verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**.

Door het vermenigvuldigen met een getal in de formule wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging in de $x$-richting of de $y$-richting**. De eigenschappen van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.

## Voorbeeld 1

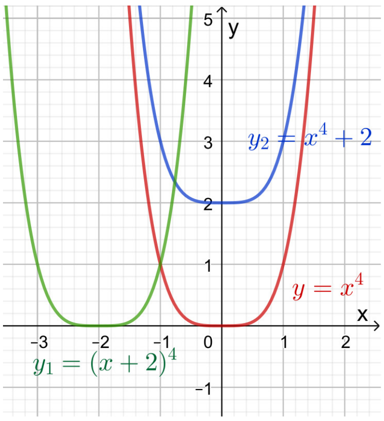
**Bekijk de applet: Grafieken verschuiven**

Gegeven is de standaardfunctie $y = x^4$.
De grafiek heeft top (0,0).

De grafiek van $y_1 = (x+2)^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door verschuiving van -2 in de $x$-richting.

De grafiek van $y_2 = x^4 + 2$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door verschuiving van 2 in de $y$-richting.

De karakteristieken van de grafiek verschuiven mee.
De top verschuift bij $y_1$ naar (-2,0).
De top verschuift bij $y_2$ naar (0,2).




Figuur 9.4

### Opgave 3

Neem als standaardfunctie $y = \sqrt{x}$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \sqrt{x-3}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**b** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \sqrt{x-3} + 1$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**c** De grafiek van de standaardfunctie heeft als startpunt (0,0).
Welk startpunt heeft de grafiek van $y_3$?

### Opgave 4

Neem als standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \frac{1}{(x+4)^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**b** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \frac{1}{(x+4)^2} - 2$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**c** De grafiek van de standaardfunctie heeft beide assen als asymptoten.
Welke asymptoten heeft de grafiek van $y_3$?

## Voorbeeld 2

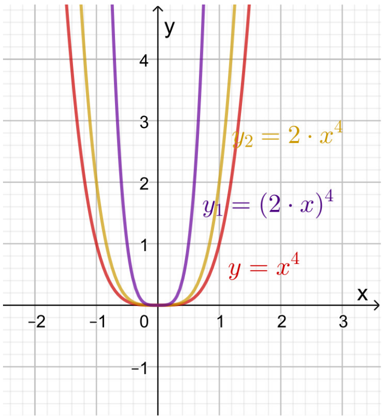
**Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen**

Gegeven is de standaardfunctie $y = x^4$.
De grafiek heeft top (0,0).

De grafiek van $y_1 = (2 \cdot x)^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ in de $x$-richting.

De grafiek van $y_2 = 2 \cdot x^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door vermenigvuldiging met 2 in de $y$-richting.

De karakteristieken van de grafiek veranderen nauwelijks, ze lopen vooral meer of minder steil, afhankelijk van het getal waarmee je vermenigvuldigt.




Figuur 9.5

### Opgave 5

Neem als standaardfunctie $y = \sqrt{x}$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = 3\sqrt{x}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**b** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \sqrt{3x}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**c** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_4 = 0{,}5\sqrt{x-3} + 1$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**d** De grafiek van de standaardfunctie heeft als startpunt (0,0).
Welk startpunt heeft de grafiek van $y_3$?

### Opgave 6

Neem als standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

**a** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \frac{4}{x^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**b** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \frac{1}{(0{,}5x)^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

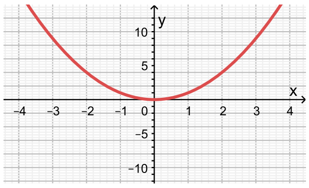
**c** Door welke transformaties kan de grafiek van $y_4 = \frac{3}{(x+4)^2} - 2$ uit die standaardfunctie ontstaan?

**d** De grafiek van de standaardfunctie heeft beide assen als asymptoten.
Welke asymptoten heeft de grafiek van $y_4$?

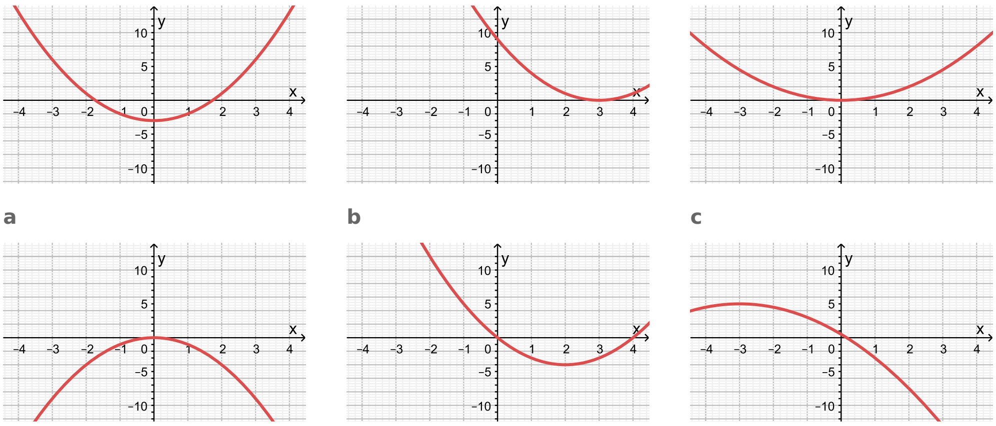
## Opgave 7

Je ziet hier de grafiek $y_1 = x^2$ gemaakt in GeoGebra.

Bekijk de volgende zes grafieken bij a, b, c, d, e en f met dezelfde instellingen van de assen.
Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek $y_1$.




Figuur 9.6



a

b

c

d

e

f

Figuur 9.7

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast en geef de bijbehorende formule.

## Oefenen

## Opgave 8

Ga uit van de standaardfunctie $y = x^4$. De grafieken van de volgende functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

**a** $y_2 = 0{,}5 \cdot x^4$

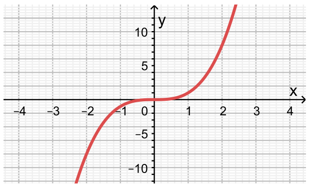
**b** $y_3 = (x-4)^4 + 2$

**c** $y_4 = 2 - x^4$

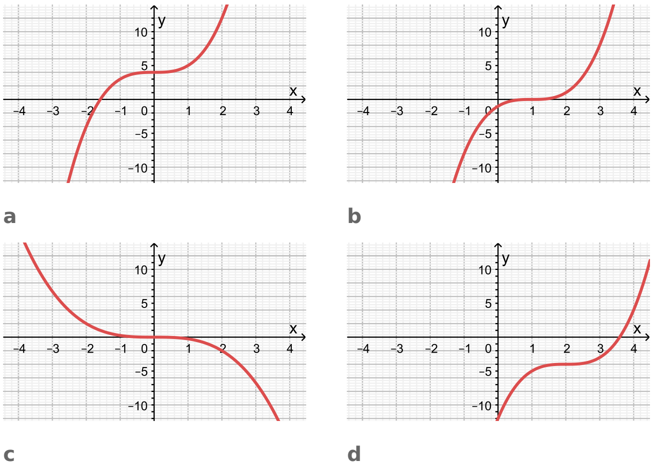
**d** $y_5 = (3x)^4 - 5$

## Opgave 9

Je ziet de standaardfunctie $y_1 = x^3$ gemaakt in GeoGebra.
De overige vier grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan.



Figuur 9.8




Figuur 9.9

Geef bij elke grafiek de juiste formule.

## Opgave 10

Een kogel die door een kogelstoter wordt geworpen beschrijft in een $Oxy$-assenstelsel de baan $y = -0{,}02(x-8)^2 + 3{,}5$.
Het moment van loslaten is bij $x = 0$.
$y$ en $x$ zijn beide in meter uitgedrukt.

**a** Door welke transformaties ontstaat de baan van deze kogel uit de grafiek van de bijbehorende standaardfunctie?
Geef geschikte instellingen van de assen zodat je de volledige baan van de kogel in beeld kunt krijgen.

**b** Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

**c** Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

## Opgave 11

Gegeven is de functie $y = \sqrt{x}$.

**a** De grafiek van $y_1$ ontstaat door op de grafiek van de gegeven functie een verschuiving van $-2$ in de $y$-richting en een verschuiving van 5 in de $x$-richting toe te passen. Geef de formule van $y_1$.

**b** De grafiek van $y_2$ ontstaat door de grafiek van de gegeven functie eerst te spiegelen in de $x$-as, vervolgens een verschuiving van 3 in de $x$-richting toe te passen en tot slot nog een verschuiving van $-4$ in de $y$-richting door te voeren. Geef de formule van $y_2$.

**c** De grafiek van $y_3$ ontstaat door de grafiek van de gegeven functie eerst te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ in de $x$-richting en daarna een verschuiving van 4 in de $y$-richting door te voeren. Geef de formule van $y_3$.

### Opgave 12

Voor de afstand $a$ (in m) die je kunt kijken vanaf een ooghoogte $h$ (in m) is $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$ m.
Hierbij wordt aangenomen dat $h$ de ooghoogte boven het aardoppervlak is.

**a** Een vuurtoren staat op een duin van 15 m hoog.
Je meet je ooghoogte $h$ vanaf de voet van de vuurtoren.
Hoe moet de formule voor de kijkafstand worden aangepast?

**b** Hoe ver kun je nu kijken als het uitkijkpunt van de vuurtoren 30 m boven het duin zit en jouw oog nog 1,80 m hoger?

**c** $h$ kan nu ook negatieve waarden hebben.
Welke betekenis hebben die waarden en welke waarden kan $h$ aannemen?

### Opgave 13

De kracht die twee massa's $m_1$ en $m_2$ op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de aantrekkingskracht tussen twee massa's is

$$F = g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Hierin is:

- $F$ de zwaartekracht (in N)
- $g$ de gravitatieconstante, $g \approx 6{,}674 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$
- $m_1$ en $m_2$ de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- $r$ de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

De massa van de aarde is ongeveer $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg en de diameter is ongeveer 12.756 km.

Je wilt de aantrekkingskracht van de aarde berekenen van voorwerpen op of vlak boven (minder dan 10 km hoog) het aardoppervlak.

**a** Welke formule beschrijft de zwaartekracht van een voorwerp met massa 1 kg op een afstand $a$ (in m) boven het aardoppervlak?

**b** De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $y = x^{-2}$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

**c** Bij welke instellingen van de assen krijg je de grafiek van de functie bij a zo in beeld dat beide asymptoten zichtbaar zijn?

## Toepassen

De Wilhelminabrug in Deventer is een boogbrug over de IJssel. De eerste versie van deze brug stamt uit 1943. Na de Tweede Wereldoorlog is hij herbouwd. De brug kent twee grote bogen waarvan de vorm parabolisch is.

Neem aan dat het wegdek van de brug de $x$-as voorstelt en $h$ de hoogte van een punt van zo'n boog boven het wegdek is. Zowel $x$ als $h$ wordt in meter uitgedrukt. Neem ook aan dat $x = 0$ het midden van de brug is en dat het totale wegdek tussen de punten waar $h = 0$ een lengte heeft van 100 m. Voor het hoogste punt van de boog geldt $h = 16$ m.

Bij een parabool hoort een kwadratische functie, die door transformatie kan ontstaan uit die van $y = x^2$.

Je kunt nu zelf een formule opstellen die de vorm van de parabolische boog beschrijft.

Figuur 9.10

### Opgave 14

Bekijk de gegevens van de Wilhelminabrug in Deventer.

**a** Welke transformaties moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de boog van de Wilhelminabrug te krijgen?

**b** Leg uit dat bij de boog van de brug een formule past van de vorm $h = ax^2 + 16$.

**c** Bereken nu $a$ en stel zo een formule op voor de boog.

Tussen beide bogen zitten horizontale dwarsbalken. Om vrachtverkeer goed mogelijk te maken moeten deze balken minstens 5 m boven het wegdek zitten.

**d** Op welke afstand van het midden van de brug kunnen de laagste dwarsbalken nog zitten?

## Testen

### Opgave 15

Ga uit van de standaard machtsfunctie $y = x^r$.
Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

**a** $y_2 = (x - 3)^r + 5$

**b** $y_3 = 0{,}5 \cdot x^r + 1$

**c** $y_4 = (3x)^r$

### Opgave 16

Om de grafiek van $y = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, met GeoGebra of Desmos, is het handig om te weten hoe deze ontstaat uit transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

**a** Welke standaardfunctie is dat?

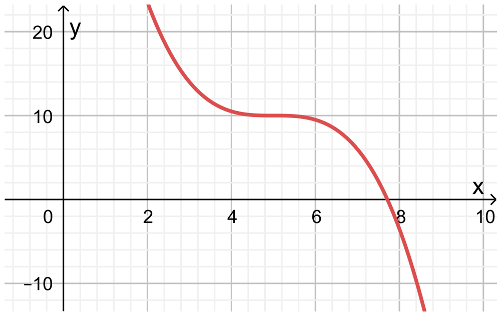
**b** Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

**c** Schrijf op bij welke instelling van de assen de grafiek van de gegeven functie goed in beeld komt.

### Opgave 17

Je ziet de grafiek van een functie die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $y = x^3$. Het centrale punt van $y = x^3$ is verschoven van (0,0) naar (5,10).
De grafiek van de nieuwe functie gaat door het punt (7,6).

Schrijf de bijpassende formule op.




Figuur 9.11

# 9.4 Wortelfuncties en gebroken functies

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- herkennen of een wortelfunctie uit een standaard machtsfunctie is ontstaan en welke transformaties daar bij horen;
- herkennen of een gebroken functie uit een standaard machtsfunctie is ontstaan en welke transformaties daar bij horen.

**Voorkennis**

- werken met machtsfuncties met alle mogelijke exponenten en de rekenregels voor machten daarbij gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen;
- aan een formule herkennen of de bijbehorende grafiek door transformaties uit die van een standaardfunctie kan ontstaan.

## Verkennen

### Opgave V1

Je staat bij een uitkijktoren op een heuvel die een hoogte heeft van 25 m boven het aardoppervlak.
Voor de afstand $a$ (in m) die je kunt kijken vanaf een ooghoogte $h$ (in m) geldt $a = 3572 \cdot \sqrt{h + 25}$ m.
Hierbij wordt aangenomen dat $h$ de ooghoogte boven de heuvel is.
Wil je de grafiek bij deze functie maken, dan voer je in $y = 3572 \cdot \sqrt{x + 25}$.

**a** Licht toe dat de grafiek bij deze formule kan worden afgeleid uit de grafiek van $y = x^{0,5}$.

**b** Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $y = x^{0,5}$ om de grafiek bij de gegeven formule te krijgen?

Je kunt in de functie $y = x^{0,5}$ geen negatieve getallen invullen, want dat is eigenlijk een wortelfunctie.

**c** Wat betekent dit voor de waarden van $h$ die je in de formule kunt invullen?

**d** Is $a$ recht evenredig met $h^{0,5}$?

### Opgave V2

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in °C (graden Celsius) gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is $T$ de temperatuur in °C en $t$ de tijd in dagen.

Wil je de grafiek bij deze functie maken, dan voer je in $y = \frac{89}{x-2}$.

**a** Licht toe dat de grafiek bij deze formule kan worden afgeleid uit de grafiek van $y = x^{-1}$.

**b** Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $y = x^{-1}$ om de grafiek bij de gegeven formule te krijgen?

Je kunt in de functie $y = x^{-1}$ niet $x = 0$ invullen, want delen door 0 levert geen reële waarde op.

**c** Wat betekent dit voor de waarden van $T$ die je in de formule kunt invullen?

**d** Is $t$ recht evenredig met $T^{-1}$?

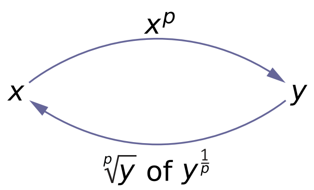
## Uitleg 1

Alle functies van de vorm $y = x^p$ met $p$ een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Als $p = \frac{1}{n}$ met $n = 2,3,4,5,...$ dan spreek je van wortelfuncties:

- $a = 3572\sqrt{h+25} = 3572(h+25)^{\frac{1}{2}}$
- $y = 40 + \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}} + 40$

De grafieken ervan kun je door transformatie afleiden uit die van de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen.



Figuur 9.1

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht (of de wortelvorm) geïsoleerd aan één kant van het isgelijkteken en de rest aan de andere kant van het isgelijkteken staat.

Er bestaan ook functies waar wel wortelvormen in voorkomen, maar daarnaast ook andere uitdrukkingen. Een voorbeeld is de functie $y = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Dit is geen wortelfunctie, maar je kunt de formule herleiden tot een verschil van twee machtsfuncties. Zo kun je er toch goed aan rekenen...

### Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je dat wortelfuncties als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende functies als machtsfunctie als dat kan.

**a** $y = 4\sqrt{x} + 3$

**b** $y = \sqrt{4 + x^2}$

**c** $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

### Opgave 2

De functie $y = -3\sqrt{x-8}+6$ is een wortelfunctie.

**a** Maak de grafiek van deze functie en beschrijf met welke transformaties die grafiek kan worden verkregen uit de grafiek van $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

**b** Bereken algebraïsch het nulpunt van deze functie.
(Let er op dat je eerst de wortel isoleert.)

**c** Je kunt in $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geen negatieve $x$-waarden invullen.
Welke waarden kun je in de gegeven formule invullen?

**d** Los op: $-3\sqrt{x-8}+6 \leq -12$.

## Uitleg 2

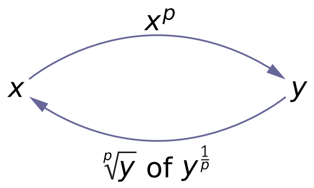
Alle functies van de vorm $y = x^p$ met $p$ een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Als $p = -n$ met $n = 1,2,3,4,5,...$ dan spreek je van gebroken functies:

- $t = \frac{89}{T-2} = 89 \cdot (T-2)^{-1}$
- $y = \frac{15}{(x-1)^2} + 40 = 15 \cdot (x-1)^{-2} + 40$

De grafieken ervan kun je door transformatie afleiden uit die van de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen, zoals asymptoten die je kunt afleiden uit die van de standaard machtsfunctie.

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht geïsoleerd aan één kant van het isgelijkteken en de rest aan de andere kant van het isgelijkteken staat.




Figuur 9.2

Er bestaan ook functies waar wel breuken in voorkomen, die niet tot een machtsfunctie zijn te herleiden. Een voorbeeld is de functie $y = x^2 - \frac{3}{x}$. Soms kun je daar toch goed aan rekenen...

### Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat sommige gebroken functies als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende gebroken functies als machtsfunctie als dat kan.

**a** $y = \frac{1}{x^2} + 4$

**b** $y = \frac{1}{4+x^2}$

**c** $y = \frac{2}{(x-3)^4} + 10$

**d** $y = \frac{4+x}{x}$

### Opgave 4

Gegeven is de gebroken functie $y = \frac{3}{(x-4)^2} + 1$.

**a** Uit welke standaardfunctie kan de grafiek hiervan door transformatie ontstaan?
En welke transformaties moet je dan achtereenvolgens toepassen?

**b** Welke twee asymptoten heeft de grafiek van de gegeven functie?
Welke $x$-waarde mag je er dus niet invullen?

**c** Los op: $\frac{3}{(x-4)^2} + 1 \geq 4$.

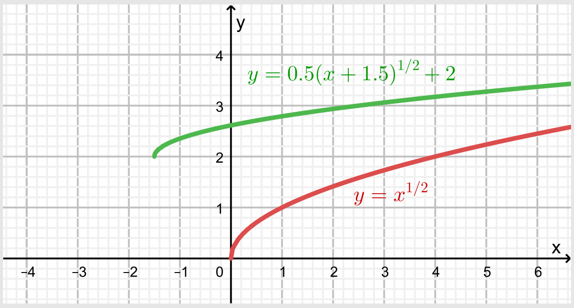
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

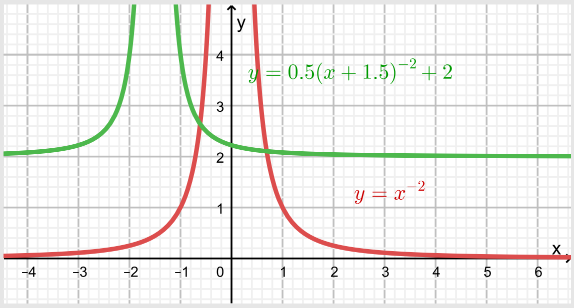
Als een **wortelfunctie** kan worden geschreven als een machtsfunctie van de vorm $y = a(x+b)^{\frac{1}{n}} + c$, waarin $n = 2,3,4,\ldots$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{\frac{1}{n}}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.

Als een **gebroken functie** kan worden geschreven als een machtsfunctie van de vorm $y = a(x+b)^{-n} + c$, waarin $n = 1,2,3,4,\ldots$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{-n}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.

**Bekijk de applet**




wortelfuncties




gebroken functies

Figuur 9.3

## Voorbeeld 1

De trillingstijd van een trillende massa aan een veer hangt af van de veerconstante. Er geldt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Hierin is:

- $T$ de trillingstijd in seconden
- $m$ de massa in kg
- $c$ de veerconstante in N/m

Van een veer is de veerconstante bekend: $c = 7{,}5$ N/m.
Laat zien dat $T$ een wortelfunctie is van $m$ en bereken $m$ als $T = 2$.

Antwoord

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\left(\frac{m}{7{,}5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{7{,}5^{\frac{1}{2}}} \cdot m^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}29 \cdot \sqrt{m}.$$

Nu duidelijk is dat $T$ recht evenredig is met $\sqrt{m}$ kun je er gemakkelijk mee rekenen:

$T = 2$ betekent $2{,}29 \cdot \sqrt{m} = 2$.

Je vindt dan $m \approx 0{,}76$ kg.

### Opgave 5

Bekijk de formule in **Voorbeeld 1**.

**a** Je ziet dat $T$ recht evenredig is met $\sqrt{m}$.
Bereken de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

**b** Door welke transformatie kan de grafiek van $T = 2{,}29\sqrt{m}$ uit de bijbehorende standaardfunctie ontstaan?

**c** Los de vergelijking $2{,}29 \cdot \sqrt{m} = 2$ zelf op.

### Opgave 6

De formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ kun je ook gebruiken om de veerconstante $c$ te berekenen.

**a** Laat zien, dat je de formule kunt schrijven als $c = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$.

**b** Hoe groot is de veerconstante als een gewicht van 1 kg een trillingstijd van 2 s oplevert?

## Voorbeeld 2

Een school heeft een kopieerapparaat voor zijn studenten waarmee ook in kleur kan worden afgedrukt. De jaarlijkse huur (inclusief onderhoud) van dit apparaat bedraagt € 840,00 en elke kleurenkopie kost de school € 0,45.

De studenten moeten per kopie € 0,60 betalen.

Om te berekenen bij hoeveel kopieën per jaar de school uit de kosten komt, maakt een administrateur een formule voor de kosten $k$ per kopie, afhankelijk van het aantal kopieën $a$.

Stel zelf zo'n formule op en laat zien dat $k$ een getransformeerde machtsfunctie is van $a$.

Antwoord

$k = \frac{840+0{,}45a}{a} = \frac{840}{a} + \frac{0{,}45a}{a} = \frac{840}{a} + 0{,}45 = 840 \cdot a^{-1} + 0{,}45$.

De school komt uit de kosten als $\frac{840}{a} + 0{,}45 \leq 0{,}60$.

Ga na dat dit het geval is als $a \geq 5600$.

### Opgave 7

Bekijk de formule in **Voorbeeld 2**.

**a** Je ziet dat $k$ een getransformeerde machtsfunctie is van $a$.
Door welke transformatie kan de grafiek van $k = 840 \cdot a^{-1} + 0{,}45$ uit de bijbehorende standaardfunctie ontstaan?

**b** Welke twee asymptoten heeft de grafiek van $k$?

**c** Los de ongelijkheid $\frac{840}{a} + 0{,}45 \leq 0{,}60$ zelf op.

### Opgave 8

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in °C (graden Celsius) gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is $T$ de temperatuur in °C en $t$ de tijd in dagen.

**a** Laat zien, dat deze functie een getransformeerde machtsfunctie is.

**b** Welke twee asymptoten heeft de grafiek van $t$?

**c** Bij welke temperatuur is binnen 5 dagen 50 % van het zaad ontkiemt?

## Oefenen

### Opgave 9

Gegeven is de functie $y = 40 - 10\sqrt{x+12}$.

**a** Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

**b** Benoem de transformaties die nodig zijn om de grafiek van deze functie uit de bijbehorende standaardfunctie af te leiden.

**c** Welke waarden van $x$ kun je in deze functie invullen?

**d** Bepaal de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide assen in twee decimalen als nodig.

**e** Los algebraïsch op: $40 - 10\sqrt{x+12} \geq 10$.

## Opgave 10

Gegeven de functie $y = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$.

**a** Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

**b** Bepaal de asymptoten van de grafiek van de gegeven functie.

**c** Bereken het nulpunt van de grafiek van de gegeven functie.

## Opgave 11

Fruittelers bespuiten hun bomen regelmatig met insecticiden, stoffen om insecten die schadelijk zijn voor hun fruit te bestrijden. De opbrengst $P$ (in kg) per appelboom hangt af van de hoeveelheid insecticide $a$ (in liter) volgens de formule:

$$P = 160 - \frac{65}{1+a}$$

Hier is $a \leq 0 \leq 10$.

**a** Hoeveel bedraagt de opbrengst per appelboom als er geen insecticide wordt gespoten?

**b** Welke asymptoten heeft de grafiek van $P$ als functie van $a$?
Licht je antwoord toe met behulp van transformaties.

**c** Hoeveel liter insecticide moet er worden gespoten om de opbrengst per appelboom hoger dan 140 kg te laten zijn?

## Opgave 12

De bovenzijde van deze poort heet wel een ‘tudorboog’.

Neem aan dat de $y$-as door het midden van de poort loopt, evenwijdig aan de opstaande zijden. Neem ook aan dat de $x$-as loopt door de twee onderste punten van de boog. Dan geldt voor de rechterkant van een bepaalde tudorboog de formule:

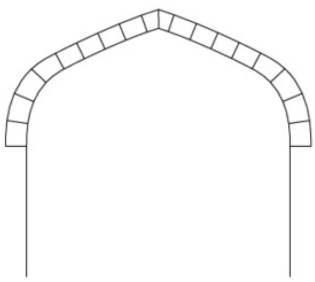
$$y = \sqrt{3 - 2x}$$

Hierin is:

- $x$ de horizontale afstand van een punt van de boog tot het midden ervan in m
- $y$ de verticale afstand van een punt van de boog tot de $x$-as in m

Voor deze formule geldt $0 \leq x \leq 1{,}5$.

Verder is het linkerdeel van de boog het spiegelbeeld van het rechterdeel.



**Figuur 9.4**

**a** Maak een schets van de tudorboog met behulp van een grafiek van de gegeven formule.
Welke formule geldt voor het linkerdeel van de tudorboog?

**b** Bereken hoe hoog het hoogste punt van de tudorboog boven de $x$-as zit.

**c** Hoe groot is de afstand tussen de twee punten van de boog die 1 m boven de $x$-as zitten?

### Opgave 13

De kracht die twee massa's $m_1$ en $m_2$ op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de zwaartekracht is

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Hierin is:

- $F$ de zwaartekracht (in N)
- $G$ de gravitatieconstante, $G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ m$^3$s$^{-2}$kg$^{-1}$
- $m_1$ en $m_2$ de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- $r$ de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

De massa van de maan is ongeveer $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg en de diameter is ongeveer 3476 km.

Je wilt de zwaartekracht van de maan berekenen van voorwerpen op of vlak boven (minder dan 10 km hoog) het maanoppervlak.

**a** Laat zien dat de zwaartekracht van een voorwerp met massa 1 kg op een afstand $a$ (in m) boven het maanoppervlak wordt beschreven door de formule:

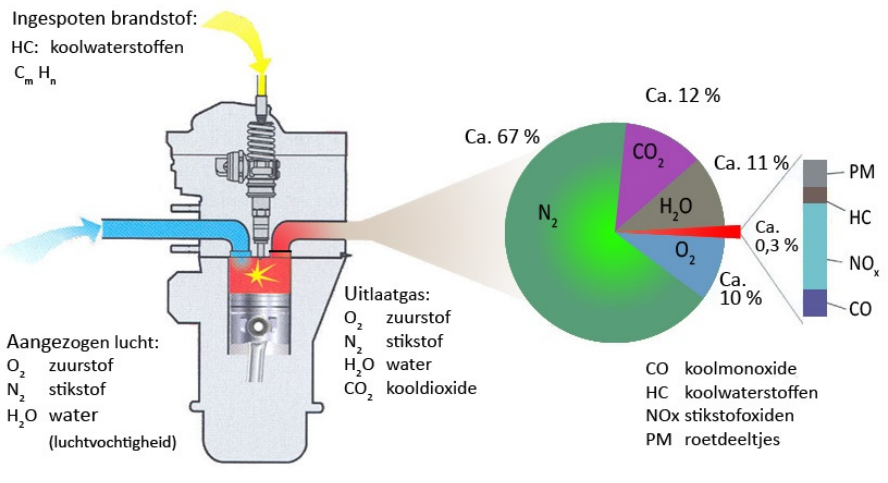
$F = \frac{49{,}1 \cdot 10^{11}}{(a+1738000)^2}$

**b** De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $F = a^{-2}$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

**c** Welke asymptoten heeft de grafiek van $F = \frac{49{,}1 \cdot 10^{11}}{(a+1738000)^2}$?

## Toepassen

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een benzineauto de lucht in komt. Deze figuur van de site van de ANWB laat dat zien.




**Figuur 9.5 Bron: ANWB**

Volgens onderzoek is de hoeveelheid CO die uitgestoten wordt afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid. Voor de CO-uitstoot bij een warme motor geldt:

$u = 4{,}4 + \frac{196{,}0}{v}$

Bij een koude motor geldt:

$u = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{v}$.

Hierin is $u$ de uitstoot in gram per kilometer en $v$ de snelheid in kilometer per uur.
Deze formules zijn alleen geldig voor $v \geq 10$.

### Opgave 14

Bekijk de gegevens van CO-uitstoot bij de motor van een rijdende auto.

**a** Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot afneemt als de snelheid toeneemt?

**b** De uitstoot van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?

**c** Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid. Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

**d** Hoe kun je aan beide formules zien dat de koude motor altijd een hogere CO-emissie heeft dan de warme motor?

### Opgave 15

Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4{,}4L + 0{,}054T$. Hierin is $u_{\text{tot}}$ de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, $L$ de ritlengte in kilometers en $T$ de rijtijd in seconden.

Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

## Testen

### Opgave 16

Gegeven is de functie $y = 3\sqrt{x} - 6$.

**a** Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

**b** Benoem de transformaties die nodig zijn om de grafiek van deze functie uit de bijbehorende standaardfunctie af te leiden.

**c** Bepaal de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide assen.

**d** Los algebraïsch op: $3\sqrt{x} - 6 \leq 9$.

## Opgave 17

Gegeven de functie $y = \frac{300-10x}{2x}$.

**a** Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

**b** Bepaal de asymptoten van de grafiek van de gegeven functie.

**c** Bereken het nulpunt van de grafiek van de gegeven functie.

**d** Los op in twee decimalen nauwkeurig: $\frac{300-10x}{2x} \geq 40$.

# 9.5 Totaalbeeld

## Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met machten en heb je ontdekt dat veel functies met wortels en/of breukvormen als machtsfunctie met gebroken en/of negatieve exponenten zijn te schrijven. Verder heb je kennis gemaakt met verschuivingen en vermenigvuldigingen van grafieken. Veel functies kunnen daarmee ontstaan uit een standaardfunctie waarvan de eigenschappen bekend zijn.

Je hebt nu alle theorie van **Machten en wortels** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — evenredigheidsconstante — machtsfunctie — rekenregels voor machten
- omgekeerd evenredig met een macht — verticale/horizontale asymptoot — extra rekenregel voor machten
- standaardfunctie — transformaties — verschuiven in de $x$- of de $y$-richting — vermenigvuldigen in de $x$- of de $y$-richting
- wortelfunctie — gebroken functies

## Activiteitenlijst

- een machtsfunctie herkennen aan de vorm $y = c \cdot x^p$ — terugrekenen vanuit een machtsfunctie met de omgekeerde macht — functies met wortelvormen herleiden naar machtsfuncties — machtsfuncties met gebroken exponent herleiden naar wortelfuncties;
- functies die omgekeerd evenredig zijn met een macht herleiden naar machtsfuncties — asymptoten bepalen — functies met gebroken vormen herleiden naar machtsfuncties — machtsfuncties met negatieve exponent herleiden naar functies met breuken;
- op functies transformaties zoals verschuiven in de $x$- of de $y$-richting en vermenigvuldigen in de $x$- of de $y$-richting toepassen;
- herkennen wanneer een functie met een wortel als machtsfunctie is te schrijven — herkennen wanneer een functie met een breuk als machtsfunctie is te schrijven — wortelfuncties en gebroken functies goed in beeld brengen zodat alle eigenschappen zichtbaar zijn.

## Testen

### Opgave 1

Geef van de volgende functies aan of $y$ recht evenredig is met een macht van $x$ of juist omgekeerd evenredig met een macht van $x$ of geen van beide. Laat zien hoe de functie als machtsfunctie kan worden geschreven.

**a** $y = 3{,}45 \cdot x^{1{,}2}$

**b** $y = 12 \cdot \sqrt{2x}$

**c** $y = \frac{360}{x^2}$

**d** $y = 2x + \frac{3}{x}$

### Opgave 2

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied. Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen.


**Figuur 9.1** bron: Wikipedia

Ze ontdekten een verband tussen de oppervlakte $A$ van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen ($S$) op dat eiland: $S = 3 \cdot A^{0{,}30}$.

Het eiland **Jamaica** is ongeveer 1300 vierkante mijlen groot. Er zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van deze formule verwacht mag worden.

**a** Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

**b** Binnen de theorie geldt als ruwe regel: ‘Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.’ Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van één groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van twee kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als 'eilanden' beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0{,}30}$ gebruikt worden. Welke mogelijkheid gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheid kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

**c** Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

### Opgave 3

Gegeven is de functie $y = 10 - 2(x-1)^5$.

**a** Laat zien door welke transformaties de grafiek van $f$ kan ontstaan uit die van $y = x^5$.

**b** Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide coördinaatassen.

**c** Los algebraïsch op: $y = 496$.

**d** Los algebraïsch op: $y > 8$.

### Opgave 4

Herleid de volgende functies naar de vorm $y = a \cdot x^b$.

**a** $y = 3\sqrt{x}$

**b** $y = \frac{5}{2x^4}$

**c** $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

**d** $y = \sqrt[3]{\frac{729}{x}}$

### Opgave 5

Herleid de volgende functies naar wortelfuncties en/of gebroken functies.

**a** $y = 5x^{\frac{1}{3}}$

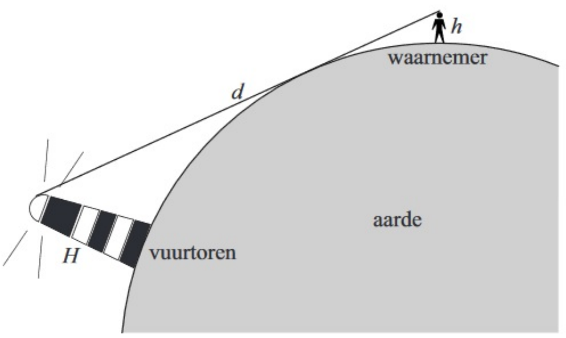
**b** $y = 2{,}5x^{-3}$

**c** $y = 3x^{-\frac{1}{2}}$

**d** $y = (2x)^{-\frac{1}{2}}$

### Opgave 6

Het licht van de Lange Jaap, een vuurtoren bij Den Helder, reikt 30 zeemijl ver. Een zeemijl is 1852 m. De lamp van de Lange Jaap bevindt zich op een hoogte van 57 m. Vanaf een kijkhoogte van 2 m is het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl niet (rechtstreeks) te zien, omdat de vuurtoren zich dan achter de horizon bevindt.




Figuur 9.2

De maximale afstand $d$ waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken is afhankelijk van de hoogte $H$ waarop de lamp van een vuurtoren zich bevindt en van de kijkhoogte $h$ van de waarnemer. Bij benadering geldt:

$d = 3{,}74 \cdot \left(\sqrt{H} + \sqrt{h}\right)$

Hierin is:

- $d$ de maximale afstand in km waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken
- $H$ de hoogte van het licht van de vuurtoren in m
- $h$ de kijkhoogte in m

**a** Laat zien dat voor de Lange Jaap geldt $d \approx 28{,}24 + 3{,}74 \cdot \sqrt{h}$ m.

**b** De formule voor de kijkafstand van de Lange Jaap (zie a) is een getransformeerde machtsfunctie.
Leg uit welke machtsfunctie dat is en om welke transformaties het gaat.

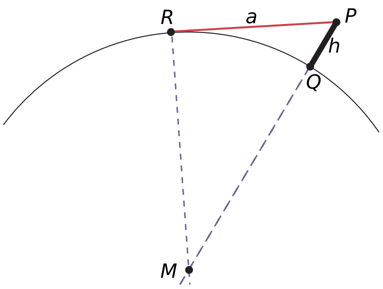
**c** Op welke kijkhoogte is de lamp van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl nog zichtbaar?

## Toepassen

### Opgave 7: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’ kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte $h$ (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand $a$ (in m) is dan de lengte van $PR$ (eigenlijk van de boog $QR$ maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 9.3

**a** Hoe kun je nu $a$ berekenen? Maak zo een formule voor $a$ afhankelijk van $h$, rond af op honderdtallen.

Omdat $h^2$ heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je $h^2$ verwaarlozen.

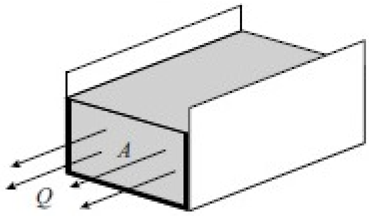
**b** Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

**c** De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’. Hoe zou dat kunnen komen?

**d** Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

**e** Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

## Opgave 8: Koelwater




Figuur 9.4

Via een rechthoekige goot loost een fabriek koelwater op een rivier. De hoeveelheid koelwater die per seconde een dwarsdoorsnede van een goot passeert, wordt het debiet van de goot genoemd.
Het debiet van de goot van de fabriek is te berekenen met de formule:

$$Q = 0{,}73 \cdot \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}}$$

Hierin is:

- $Q$ het debiet in $m^3$ per seconde
- $A$ de oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van het water in $m^2$

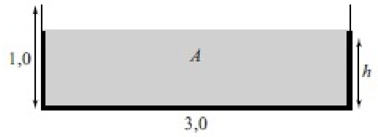
$P$ is de totale lengte van de randen van de dwarsdoorsnede die onder water liggen in m. In de tweede figuur zijn die randen dikgedrukt.


Figuur 9.5

De rechthoekige goot waarmee de fabriek het koelwater loost, is 3,0 meter breed en 1,0 meter hoog. In de derde figuur is de dwarsdoorsnede van deze goot getekend bij een maximaal debiet.

De fabriek loost 5000 $m^3$ koelwater per uur.

**a** Bereken het maximale debiet en leid daaruit af of de goot tijdens deze lozing zal overstromen.




Figuur 9.6

De waterhoogte in de goot noemen we $h$, met $h$ in m.

Bij normale lozing stroomt er continu 1,0 $m^3$ koelwater per seconde door de goot.

**b** Bereken in dit geval de waterhoogte in de goot. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

# 10

## Exponenten en logaritmen

# 10.1 Exponentiële groei

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor, groeifactoren omrekenen;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

**Voorkennis**

- werken met lineaire en exponentiële groei;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

## Verkennen

### Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer 9,5 miljoen inwoners. Dit aantal groeide toen met een vast percentage van 4,5% per jaar.

**a** In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld als de groei zo doorzet?

Noem het aantal inwoners in miljoenen $A$ en laat $t$ de tijd in jaren na 2005 zijn.

**b** Welke formule kun je opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?

**c** Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?


Figuur 10.1

## Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 1998 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat. Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan
$200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$.
In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat. Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1{,}05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden.
Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van 1,05 per jaar.

Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan $A$ het aantal leden in land A, $B$ het aantal leden in land B en $t$ de tijd in jaren na 2010.

### Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

**a** Welke formule kun je opstellen voor $A$ afhankelijk van $t$?

**b** Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.

**c** Stel een formule op voor $B$ afhankelijk van $t$.

**d** Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.

**e** In B groeit het aantal leden van voetbalclubs met 5% per jaar. Hoeveel procent per maand is dat?

### Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

**a** Teken de grafieken van $A$ en $B$ in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.

**b** In welk jaar zijn er in land A meer leden van voetbalclubs dan in land B?

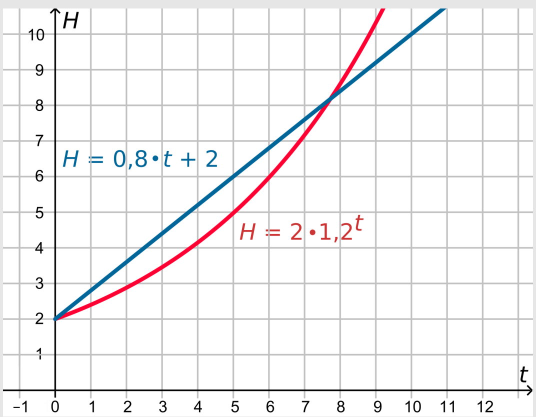
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

**Bekijk de applet: lineaire en exponentiële groei**

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid $b$ en een vaste toename per eenheid van $a$.
  Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
  Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal $a$.
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid $b$ en een vaste groeifactor per eenheid van $g$.
  Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
  Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0,b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0,b)$ als $0 < g < 1$.



Figuur 10.2

Bij lineaire groei met een vaste toename van $a = 0$ spreek je van een **constante functie**.
En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor $g^0 = 1$.

Je kunt **groeifactoren omrekenen**:
als de groeifactor per dag 1,5 is, dan is hij per week $1{,}5^7$ en per uur $1{,}5^{\frac{1}{24}}$.

## Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met 2,6% toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.
Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op.
Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is 1,026. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534.
Is het aantal zeehonden $Z$ en de tijd in maanden $t$ dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1{,}026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeide.

**a** Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.

**b** Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?

**c** Stel een formule op voor het aantal zeehonden $Z$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.

**d** Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

## Opgave 4

In de **Theorie** zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

**a** Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1{,}10^t$ en $H_2 = 0{,}6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

**b** Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bepaal het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

**c** Als je de groeifactor van $H_1$ verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?

**d** Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0{,}80^t$ en $H_2 = -0{,}5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

**e** Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bepaal het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwoneraantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren.
Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben."
De burgemeester mevr. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

**a** Maak grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mevr. Jansma.

**b** Geef een passende formule voor het aantal inwoners $N$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.

**c** Geef een passende formule voor het aantal inwoners $N$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.

**d** Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.

**e** Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

### Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van B dat van A overschrijden als de groei zo door gaat?

| jaartal | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aantal inwoners A | 79600 | 81100 | 82600 | 84200 | 85600 | 87100 | 88500 | 90100 | 91600 |
| aantal inwoners B | 72100 | 73900 | 75800 | 77600 | 79600 | 81600 | 83600 | 85700 | 87800 |

Tabel 10.1

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin $A$ het aantal inwoners van A en $t$ de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor 1,025. Er geldt $B = 72100 \cdot 1{,}025^t$ waarin $B$ het aantal inwoners van A en $t$ de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad B meer inwoners heeft dan stad A.

## Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

**a** Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.

**b** Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

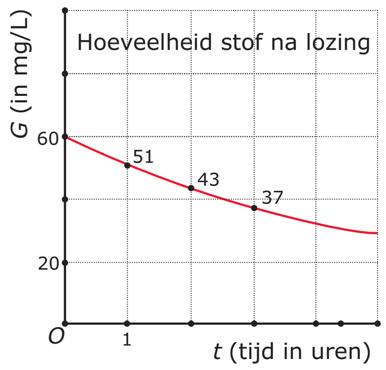
**c** Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.

**d** Hoe leid je voor stad B de formule af uit de tabel?

**e** Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van B dat van A gaat overschrijden als de groei zo door gaat.

## Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif $G$ (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. De hoeveelheid gif wordt steeds ongeveer met eenzelfde factor vermenigvuldigd die kleiner is dan 1, dus de hoeveelheid wordt steeds minder. Je spreekt dan van exponentieel verval.




Figuur 10.3

**a** Laat met een berekening zien, dat er (ongeveer) sprake is van exponentieel verval.

**b** Leid een formule af voor $G$ afhankelijk van $t$.

**c** Na hoeveel uur is er minder dan 10% van deze giftige stof over?

## Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid $N$ is het volgende gegeven:
Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor $N$ als functie van $t$ er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor $g$ per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800/1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor $g$ vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.

Je vindt $g = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 0{,}95$.

Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0{,}95^t$.
Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid $b$ te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$. Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0{,}95^t$.

### Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid $N$ wordt gevonden op basis van de waarden van $N$ op twee verschillende tijdstippen.

**a** Bereken zelf de groeifactor per tijdseenheid.

**b** Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.

**c** Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

### Opgave 9

Bij de gegevens in **Voorbeeld 3** past ook een lineaire formule voor $N$ als functie van $t$.

**a** Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

**b** Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van $N$ als $t = 20$.

**c** Bij de lineaire functie is de hoeveelheid $N$ op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?

**d** Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid $N$ ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.

## Oefenen

### Opgave 10

Een hoeveelheid $H$ heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor $H$ afhankelijk van $t$ (in dagen) en bereken de waarde van $H$ op $t = 10$ in gehelen nauwkeurig.

**a** $H$ neemt dagelijks toe met 15%.

**b** $H$ neemt dagelijks toe met 15.

**c** $H$ neemt dagelijks af met 15%.

**d** $H$ neemt dagelijks af met 15.

**e** $H$ neemt wekelijks toe met 15%.

**f** $H$ neemt wekelijks af met 15%.

## Opgave 11

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

| jaartal | bevolking |
|---|---|
| 2008 | 154000 |
| 2009 | 156300 |
| 2010 | 158700 |
| 2011 | 161000 |

**Tabel 10.2**

Eén van de medewerkers zegt: “Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo'n 2300 inwoners bijkomen.”

**a** Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.

**b** Neem aan dat $t$ de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners $I$ volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: “Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar.”

**c** Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.

**d** Welke formule kun je opstellen voor $I$ als functie van $t$ uitgaande van deze exponentiële groei?

**e** Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?

**f** Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

## Opgave 12

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

| jaartal | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|
| aantal konijnen | 1450 | 1261 | 1097 | 954 | 830 |

**Tabel 10.3**

**a** Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?

**b** Welke formule kun je opstellen voor het aantal konijnen $K$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren?

Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.

**c** Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?

### Opgave 13

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt 32,7% van het blauwe licht tegengehouden door het water.

Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?

Figuur 10.4

### Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

**a** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 12 uur af?

**b** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?

**c** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?

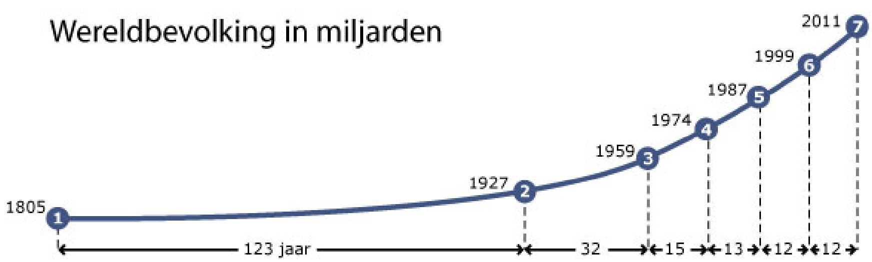
**d** Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?

**e** Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.

**f** Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

### Opgave 15

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denken aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.




Figuur 10.5

**a** Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer 0,56% per jaar toenam.

Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.

**b** Met hoeveel procent per jaar ongeveer?

**c** Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.

**d** Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

## Toepassen

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. De tabel symboliseert de 'wet van Moore'. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde 'processor' (een minuscuul printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...

| Intel-processor | introductiejaar | # transistoren |
|---|---|---|
| 4004 | 1971 | 2300 |
| 8008 | 1972 | 2500 |
| 8080 | 1974 | 4500 |
| 8086 | 1978 | 29.000 |
| 286 | 1982 | 134.000 |
| 386 | 1985 | 275.000 |
| 486 | 1989 | 1.200.000 |
| Pentium | 1993 | 3.100.000 |
| Pentium II | 1997 | 7.500.000 |
| Pentium III | 1999 | 9.500.000 |
| Pentium 4 | 2000 | 42.000.000 |
| Itanium | 2001 | 25.000.000 |
| Itanium 2 | 2003 | 220.000.000 |
| Itanium 2 9M | 2004 | 592.000.000 |

Tabel 10.4

Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terecht komen.

Maar niet alleen de rekenkracht van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het is niet duidelijk of de grenzen van die groei in zicht komen...

### Opgave 16: De wet van Moore

Bekijk de figuur in **Toepassen**.

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2500 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

**a** In 1993 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?

**b** In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?

Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat $R$ die rekenkracht voorstelt afhankelijk van $t$ het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2500$.

**c** Stel een formule op voor $R$ als functie van $t$.

**d** Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.

**e** Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.

Figuur 10.6

### Opgave 17: Facebook

In december 2012 stond op Wikipedia:
"In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. December 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers."

**a** Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.

**b** Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

## Testen

### Opgave 18

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.


Figuur 10.7

**a** Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?

**b** Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning? En welke groeifactor per uur?

**c** Stel een formule op voor de bandenspanning $p$ van deze autoband afhankelijk van de tijd $t$ in dagen.

**d** Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 0,1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?

### Opgave 19

Het aantal WhatsApp-berichten $W$ is sinds 2001 flink toegenomen. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten $W$ in miljoenen):

Figuur 10.8

| jaartal | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|
| $W$ | 4,9 | 9,8 | 19,6 | 39,2 |

Tabel 10.5

**a** Met hoeveel procent neemt het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?

**b** Welke formule kun je opstellen voor het aantal WhatsApp-berichten $W$ per jaar (in miljoenen) afhankelijk van het aantal jaren $t$ na 2005?

**c** Hoeveel van deze berichten verwachtte men in 2012?

# 10.2 Exponentiële functies

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met exponentiële functies en herkennen of er van exponentiële groei sprake is;
- verdubbelingstijd en halveringstijd berekenen.

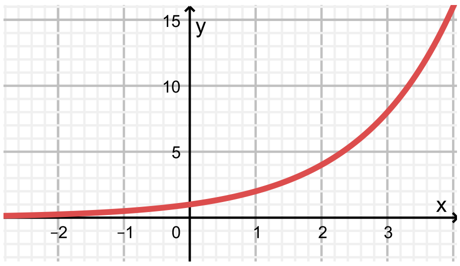
**Voorkennis**

- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

## Verkennen

### Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van $x$.



Figuur 10.1

**a** Wat gebeurt er met de uitkomst als $x$ met 1 toeneemt?

**b** Wat gebeurt er met de uitkomst als $x$ met 1 afneemt?

**c** Hoeveel is $2^0$? Kun je dat verklaren?

**d** Hoeveel is $2^{-1}$?

**e** Krijg je ooit een uitkomst 0?

### Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van $x$.

**a** Hoe ziet die grafiek er uit?

Maar bekijk nu $y = (-2)^x$

**b** Vul de volgende tabel in:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | |

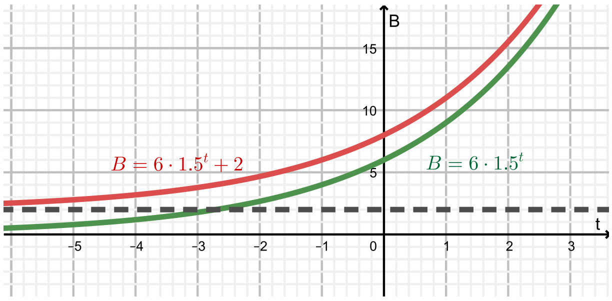
Tabel 10.1

**c** Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

## Uitleg

**Bekijk de applet: exponentiële functie**

Hier zie je de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t$.
Er is sprake van exponentiële groei met beginwaarde 6 en groeifactor 1,5. Elke toename van $x$ met 1 betekent dat de hoeveelheid 1,5 keer zo groot wordt. Elke afname van $t$ met 1 betekent dat de hoeveelheid door 1,5 wordt gedeeld. De uitkomsten naderen naar 0, maar blijven toch altijd positief. De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek.




Figuur 10.2

Ook de functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$ is een exponentiële functie.
Maar nu is er van exponentiële groei geen sprake.
De grafiek van $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ is 2 omhoog geschoven.
De lijn $y = 2$ is nu de horizontale asymptoot.

Bij $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ is er sprake van een vaste verdubbelingstijd: hoe groot de hoeveelheid op zeker moment ook is, er telkens evenveel tijd nodig om het dubbele te krijgen, namelijk ongeveer 1,71 tijdseenheden.
Bij $y = 6 \cdot 1{,}5^x + 2$ is dat niet het geval.

### Opgave 1

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ in de **Uitleg**.

**a** Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?

**b** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ met 1 toeneemt?
En als $t$ met 1 afneemt?

**c** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ oneindig groot wordt?
En als $t$ oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

**d** Op welk tijdstip $t$ zit $y$ voor het eerst minder dan $10^{-6}$ van 0 af?
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

**e** Bereken de verdubbelingstijd die hoort bij deze exponentiële groei.

**f** Laat zien dat deze verdubbelingstijd niet afhangt van de $y$-waarde waar je mee begint.

### Opgave 2

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$ in de **Uitleg**.

**a** Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?

**b** Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?

**c** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ oneindig groot wordt?
En als $t$ oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

**d** Op welk tijdstip $t$ zit $y$ voor het eerst minder dan $10^{-6}$ van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

**e** Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

### Opgave 3

Neem eens aan, dat je een glas met water van 70 °C in een kamer met een temperatuur van 20 °C zet.
Volgens de warmtewet van Newton neemt het temperatuurverschil met de omgeving met een vast percentage per uur af. Neem aan dat dit met 60% per uur is.

**a** Hoeveel graden is de watertemperatuur na 1 uur?

Neem aan dat $T$ de temperatuur in °C en $t$ de tijd in uren is.

**b** Waarom is de formule $T = 70 \cdot 0{,}4^t$ geen goede formule voor dit afkoelingsproces?

**c** Bedenk een formule die wel past bij dit afkoelingsproces.

**d** Is hier sprake van exponentiële afname, exponentieel verval?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

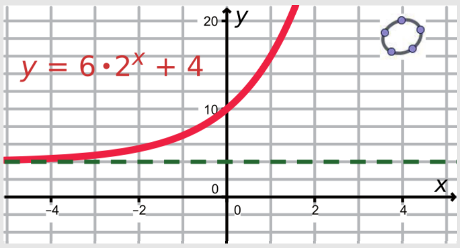
**Bekijk de applet: exponentiële functie**

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $g < 1$.

Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichter bij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Alleen als $a = 0$ is er sprake van exponentiële groei.
De **verdubbelingstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid verdubbelt.
De **halveringstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid halveert.
Deze tijdsduren kun je vooralsnog alleen met inklemmen of een grafische rekenmachine of GeoGebra vinden.




Figuur 10.3

### Voorbeeld 1

De brandstof van kerncentrales bestaat uit staven uranium. Dit uranium wordt in de reactor omgezet naar plutonium. Deze stof zendt radioactieve straling uit met een halveringstijd van 10.000 jaar. Omdat de tijd waarin de hoeveelheid plutonium halveert zo groot is, is het bewaren van dit radioactieve afval een probleem.

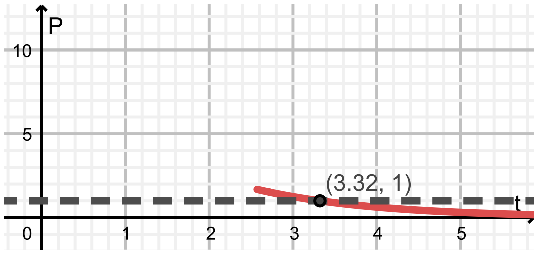
Hoe lang moet je 10 kg plutonium als radioactief afval opslaan om te zorgen dat er nog 1 kg van over is?

Antwoord

Neem je de tijd $t$ in eenheden van één halveringstijd, dan is de hoeveelheid plutonium $P$ in kg:

$P = 10 \cdot 0{,}5^t$

Je hebt dan nog 1 kg over als $10 \cdot 0{,}5^t = 1$.
Dat levert met GeoGebra op: $t \approx 3{,}32$.
Je moet het plutonium dan ongeveer $3{,}32 \cdot 10000 = 33200$ jaar bewaren.




Figuur 10.4

Je kunt ook de tijd $t$ in jaren nemen.
Dan moet je eerst de groeifactor $g$ per jaar berekenen vanuit de halveringstijd, dus vanuit:

$10 \cdot g^{10000} = 5$ ofwel $g^{10000} = 0{,}5$.

Je vindt $g = 0{,}5^{\frac{1}{10000}} = 0{,}9999306... \approx 0{,}99993$. (Neem vooral veel decimalen.)

Vervolgens moet je oplossen $10 \cdot 0{,}99993^t = 1$.
Je vindt dan $t \approx 33219$ jaar.

### Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt het verloop van de hoeveelheid plutonium in de loop van de tijd beschreven door een beginwaarde en een halveringstijd.

**a** Waarom is er dan sprake van exponentieel verval?

**b** Welke eenheid van tijd hoort er bij de formule $P = 10 \cdot 0{,}5^t$?

**c** Welke horizontale asymptoot heeft deze formule?

**d** Bereken zelf de groeifactor per jaar.
Ga met behulp van GeoGebra of de grafische rekenmachine na dat na 33219 jaar de hoeveelheid plutonium minder dan 1 kg is.

### Opgave 5

Bij het huidige groeitempo is de verdubbelingstijd van de wereldbevolking 58 jaar.
Eind 2011 bedroeg de wereldbevolking 7 miljard mensen.

**a** Stel een formule op voor het aantal mensen $N$ als functie van de tijd $t$.
Neem als tijdseenheid de verdubbelingstijd.

**b** Na hoeveel jaar zouden er 10 miljard mensen op aarde zijn?

**c** Stel ook een formule op voor $N$ als functie van $t$ in jaren.

**d** Laat zien dat deze formule hetzelfde resultaat oplevert als bij b.

### Voorbeeld 2

Je ziet hier het verloop van de temperatuur $T$ in °C van theewater in een warmhoudbeker die wordt geplaatst in een omgevingstemperatuur van 20 °C afhankelijk van de temperatuur $t$ in uren.

| $t$ in uur | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ in °C | 90,0 | 48,0 | 31,2 | 24,5 | 21,8 | 20,7 | 20,3 | 20,1 | 20,0 |

Tabel 10.2

Laat zien, dat de formule $T = 70 \cdot 0{,}4^t + 20$ redelijk past bij deze tabel.

Als het theewater onder de 30 °C komt kun je er geen bruikbare thee meer van maken. Na hoeveel uur is dat niet meer mogelijk?

Antwoord

Maak een tabel met de gegeven formule en vergelijk hem met de tabel hierboven.
Je zult zien dat ze goed overeenkomen.

Bruikbare thee kun je maken tot $70 \cdot 0{,}4^t + 20 < 30$.
Zo'n vergelijking kun je nog niet algebraïsch oplossen en dus kun je net zo goed meteen GeoGebra of een grafische rekenmachine inzetten. Je krijgt dan gemakkelijk de juiste oplossing $t > 2{,}12$ uur.

### Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

**a** Maak zelf een tabel en een grafiek bij de formule.

**b** Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van $T$?

**c** Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?

**d** Laat zien dat je geen bruikbare thee meer kunt maken na $t > 2{,}12$.

### Opgave 7

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule

$A = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$

geeft de hoeveelheid $A$ in mg van het medicijn die na $t$ minuten in het bloed van de patiënt is opgenomen.

**a** Is de grafiek van $A$ als functie van $t$ dalend of stijgend?
Hoe zie je dat aan de formule?

**b** Geef een formule voor de asymptoot van de grafiek van $A$.

**c** Laat zien dat er geen sprake is van exponentiële groei.

**d** Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

## Oefenen

### Opgave 8

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 50 \cdot 0{,}92^t$.

**a** Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek dalend is?

**b** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ met 1 toeneemt?
En als $t$ met 1 afneemt?

**c** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ oneindig groot wordt?
En als $t$ oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

**d** Op welk tijdstip $t$ zit $y$ voor het eerst minder dan $10^{-2}$ van 0 af?
Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

**e** Bereken de halveringstijd die hoort bij deze exponentiële groei.
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 9

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 20 - 14 \cdot 0{,}8^t$.

**a** Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek stijgend is?

**b** Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?

**c** Wat gebeurt er met de $y$-waarde als $t$ oneindig groot wordt? En als $t$ oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

**d** Op welk tijdstip $t$ zit $y$ voor het eerst minder dan $10^{-2}$ van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

**e** Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

### Opgave 10

Salmonella is een darmbacterie. Die komt door uitwerpselen van mens en dier terecht in het milieu, in het water en in levensmiddelen. Mensen lopen meestal een besmetting op door rauwe dierlijke producten, zoals vlees, vis, eieren en zuivel. Ook groenten en fruit kunnen salmonella bevatten.

Bij een temperatuur van 20 °C wordt het aantal bacteriën elk half uur verdrievoudigd.

**a** Als het aantal salmonellabacteriën elk half uur drie keer zo groot wordt, met welke groeifactor per uur neemt dit aantal dan toe?

**b** Hoe groot is de groeifactor (drie decimalen) per minuut?

Neem aan dat $A$ het aantal salmonella bacteriën en $t$ de tijd in minuten is. De omgevingstemperatuur is 20 °C .
Op $t = 0$ zitten er in een salade 20 salmonella bacteriën per ml.

**c** Welke formule geldt voor $A$ afhankelijk van $t$?

**d** Bereken de verdubbelingstijd bij deze groei in tienden van minuten nauwkeurig.

Als er meer dan $1{,}0 \cdot 10^5$ bacteriën per ml in het voedsel voorkomen, kun je ziek worden als je ervan eet.

**e** Na hoeveel tijd kun je je salade niet meer eten?

### Opgave 11

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en hij moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van 0,6. Als het promillage lager is dan 0,5 mag hij weer rijden.

Hoe lang moet Jelte wachten?


Figuur 10.5

### Opgave 12

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van 3,2 bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer 1,0 bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk $p$ (in bar) afhankelijk van de tijd $t$ (in dagen) na het oppompen.

Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $p = 2{,}2 \cdot 0{,}96^t + 1$.

**a** Welke asymptoot heeft de grafiek van $p$ als functie van $t$? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?

**b** Waarom hebben negatieve waarden van $t$ hier geen betekenis?

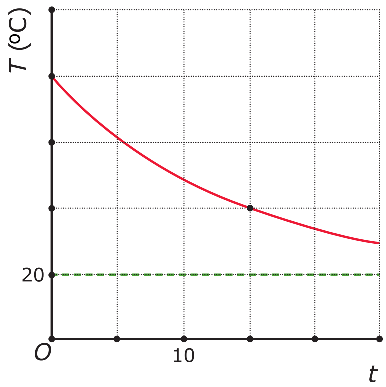
**c** Een autoband is te zacht als de druk lager is dan 1,6 bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

## Toepassen

Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T - 20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T - 20$ en dus ook voor $T$ als functie van $t$ in minuten.




Figuur 10.6

### Opgave 13: Afkoelende thee

Voor het temperatuurverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

**a** Licht dit toe.

**b** Bereken $g$ in twee decimalen nauwkeurig.

**c** Stel een formule op voor $T$ als functie van $t$.

**d** Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25 °C?

### Opgave 14: Opwarmende melk

Melk komt met een temperatuur van 6 °C uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur (20 °C). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 13 °C heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

## Testen

### Opgave 15

In 1999 waren er 6 miljard mensen en in 2011 waren dat er 7 miljard.
Neem aan dat de wereldbevolking exponentieel groeide in die periode.

**a** Welke groeifactor per jaar hoort er bij die exponentiële groei? Met hoeveel procent nam de wereldbevolking jaarlijks toe? Geef je antwoord in tienden van procenten.

**b** Ga er vanuit dat de groei van de wereldbevolking vanaf 2011 met diezelfde groeifactor door gaat.
Welke formule kun je dan opstellen voor het aantal mensen $N$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren?

**c** Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van $N$?

**d** In welk jaar zou volgens dit groeimodel de wereldbevolking de 10 miljard gaan overschrijden?

### Opgave 16

In een glas bevindt zich een liter water dat zojuist nog heeft gekookt. De temperatuur bij inschenken in het glas $t = 0$ bedroeg 95 °C. Het glas staat in een kamer waarbinnen de temperatuur 20 °C is. De temperatuur $T$ in °C van het water daalt volgens de formule

$T = 75 \cdot 0{,}9^t + 20$

waarin $t$ de tijd in minuten na het inschenken is.

**a** Laat zien, dat de temperatuur bij inschenken inderdaad 95 °C bedroeg.

**b** Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?

**c** Welke formule hoort er bij de horizontale asymptoot?

**d** Na hoeveel tijd is de temperatuur lager dan 30 °C? Geef je antwoord in tienden van minuten nauwkeurig.

# 10.3 Het begrip logaritme

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- logaritmen berekenen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

**Voorkennis**

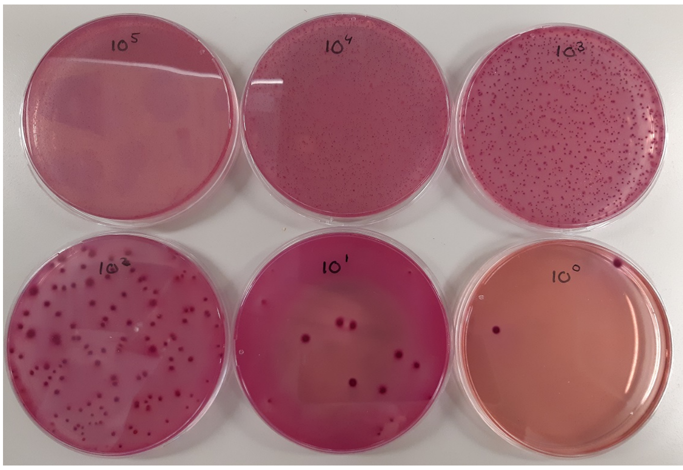
- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

## Verkennen

### Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.
De afspraak is dat een voedingsbodem waarop tussen de 15 en 150 bacteriekolonies ontstaan, wordt geteld.



Figuur 10.1

**a** Op de voedingsbodem waarbij het monster $10^2$ keer is verdund, zijn er na 18 uur (bij 37 °C) 80 bacteriekolonies ontstaan.
Hoeveel kolonievormende eenheden zitten er dan in 1 mL onverdund monster?

Tijdens de exponentiële groeifase (de zogenaamde 'logfase') blijkt dat de bacterie zich iedere 20 minuten verdubbelt. Hierbij past de groeiformule:

$$B = 1 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$$

waarin $B$ het aantal bacteriën en $t$ de tijd in minuten is.

**b** Bereken het aantal bacteriën na 40, 60 en 120 minuten.

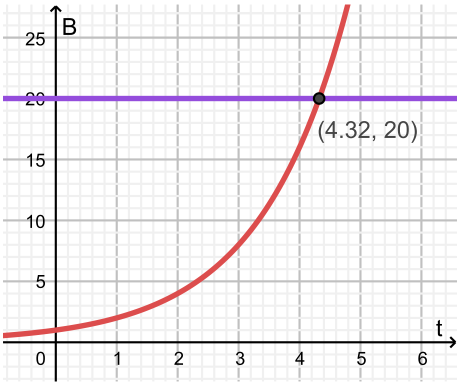
**c** Hoe wordt de formule bij b als je de tijd in uren neemt? Controleer je formule door het aantal bacteriën te berekenen na 2 uur. Krijg je hetzelfde antwoord als bij b?

**d** Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 6000 bacteriën gevormd?

## Uitleg 1

**Bekijk de applet: logaritme**

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën $B$ in een petrischaaltje geldt $B = 2 \cdot 10^t$ met $t$ in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1200 bacteriën?
$2 \cdot 10^t = 1200$ geeft: $10^t = 600$
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 2{,}78$.
Dit antwoord is afgerond.
De exacte oplossing schrijf je als: $t = \log(600)$.
Dit is de logaritme van 600 met grondtal 10.
Het grondtal 10 schrijf je niet op, ook op een rekenmachine zie je dit grondtal niet.




Figuur 10.2

### Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in **Uitleg 1**.

**a** Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 5000 is. Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.

**b** Los nu met behulp van een logaritme op: $10^t = 1000$.
Waarom komt de waarde van $t$ op een geheel getal uit?

**c** Controleer dat ook met de applet deze waarde voor $t$ wordt gevonden.

### Opgave 2

Je hebt gezien hoe je een vergelijking zoals $10^t = c$ kunt oplossen met behulp van een logaritme met grondtal 10.

**a** In welke gevallen wordt de oplossing een geheel getal?

**b** Laat door berekening zien, dat $\log\left(10^3\right) = 3 \cdot \log(10)$.

**c** Waarom geldt in het algemeen $\log\left(10^t\right) = t \cdot \log(10)$?

**d** Ga met je rekenmachine na, dat ook $\log\left(2^3\right) = 3 \cdot \log(2)$.
Controleer dit ook voor andere getallen.

**e** Welke eigenschap van logaritmen geldt dus?

## Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is $B$ het aantal bacteriën en $t$ de tijd in uren.

Als je nu wilt weten na hoeveel tijd je 1000 bacteriën hebt, dan moet je oplossen:

$4 \cdot 1{,}5^t = 1000$

Eerst beide zijden delen door 4 geeft:

$1{,}5^t = 250$

Ook een dergelijke vergelijking kun je met behulp van logaritmen oplossen.
Je gebruikt dan de eigenschap $\log\left(g^t\right) = t \cdot \log(g)$.

$1{,}5^t = 250$ los je op door aan beide zijden de logaritme te nemen: $\log\left(1{,}5^t\right) = \log(250)$.
De eerder genoemde eigenschap geeft dan $t \cdot \log(1{,}5) = \log(250)$.

En dus is $t = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)}$.

En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: $t = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)} \approx 13{,}62$.

De oplossing van $1{,}5^t = 250$ wordt wel kortweg genoteerd als $t = {}^{1{,}5}\log(250)$.
Dit is een logaritme met grondtal 1,5.
Met de oplossing die je eerder zag betekent dit

${}^{1{,}5}\log(250) = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)}$.

### Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

**a** Los zelf de vergelijking $4 \cdot 1{,}5^t = 2000$ op met behulp van de 10-logaritme.

**b** Schrijf de oplossing van de vergelijking $1{,}5^t = 500$ op als één logaritme.

**c** Hoe bereken je ${}^{1{,}5}\log(500)$ op je rekenmachine?

### Opgave 4

Een bacteriekolonie groeit volgens de formule $B = 6 \cdot 5^t$ met $t$ de tijd in uren en $B$ het aantal bacteriën.

**a** Bereken met behulp van logaritmen na hoeveel tijd er 6000 bacteriën zijn.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

**b** Bereken met behulp van logaritmen de verdubbelingstijd in twee decimalen nauwkeurig.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

De **10-logaritme** $x = \log(c)$ is de oplossing van $10^x = c$.

Dus geldt dan ook:

$\log(10^c) = c$ en $10^{\log(c)} = c$

De 10-logaritme is de terugrekenbewerking van de exponentiële functie met grondtal 10 en omgekeerd.

De ***g*-logaritme** $x = {}^g\log(c)$ is de oplossing van $g^x = c$.

Ook hier geldt:

${}^g\log(g^c) = c$ en $g^{{}^g\log(c)} = c$

De logaritme ${}^g\log(c)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $c > 0$.

Het verband tussen ${}^g\log(c)$ en $\log(c)$ is:

${}^g\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

Hiermee kun je logaritmen met een willekeurig grondtal op een rekenmachine berekenen.
Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan rechts onder de log: $\log_g(c)$.

## Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas met een lage soortelijke massa. Dat gas staat onder druk en er lekt een klein deel van weg.
Een luchtschip met een inhoud van 3000 m$^3$ verliest elke tien dagen ongeveer 2% van het gas. Als er minder dan 2400 m$^3$ over is, kan het luchtschip niet meer vliegen. Hoeveel dagen kan het luchtschip vliegen als het geheel is gevuld met gas? Geef je antwoord met een logaritme, en als een benadering afgerond op twee decimalen.

Figuur 10.3

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met $G$ in m$^3$ en $t$ in eenheden van tien dagen.

Los op: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$.

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 0{,}98^t &= 2400 \\ 0{,}98^t &= 0{,}8 \\ t &= {}^{0{,}98}\log(0{,}8) = \frac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}98)} \approx 11{,}05 \end{aligned}$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op dag 111 kan het luchtschip niet meer vliegen.

### Opgave 5

Uit een luchtschip met een inhoud van 3000 $m^3$ vervliegt per tien dagen 4% van het gas.
Na hoeveel dagen is de inhoud van het luchtschip verminderd tot 2800 $m^3$?

**a** Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze zo ver mogelijk.

**b** Geef de oplossing van de vergelijking als logaritme. Geef ook een benadering afgerond op twee decimalen.

### Opgave 6

Een hoeveelheid bacteriën neemt per dag met 20% toe.

**a** Bepaal de bijbehorende groeifactor.

**b** Een bioloog wil weten na hoeveel dagen het aantal bacteriën is verdubbeld. Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze vergelijking zo ver mogelijk.

**c** Schrijf de oplossing van de vergelijking als een logaritme en beantwoord daarmee de vraag.

### Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt:

$p = 1013 \cdot 10^{-0{,}065h}$

Hierin is:

- $p$ de druk in hectopascal
- $h$ de hoogte in km boven zeeniveau

In deze formule wordt het standaard grondtal 10 gebruikt, de groeifactor is niet onmiddellijk zichtbaar. Hoe kun je aan deze formule zien dat er van exponentiële afname sprake is? Bereken de bijbehorende halveringshoogte, de hoogte waarin de luchtdruk wordt gehalveerd.

Antwoord

Je kunt de formule schrijven als $p = 1013 \cdot \left(10^{-0{,}065}\right)^h$.

De groeifactor is dus $10^{-0{,}065} \approx 0{,}86$.
Deze groeifactor is kleiner dan 1 en dus is er van exponentiële afname sprake.

De halveringshoogte vind je uit $10^{-0{,}065h} = 0{,}5$.
Dit betekent: $-0{,}065h = \log(0{,}5) \approx -0{,}301$ (standaard grondtal 10).

En dus wordt de halveringshoogte: $h \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}065} \approx 4{,}63$ km.

### Opgave 7

Bekijk de formule voor de luchtdruk $p$ (in hectopascal) als functie van het hoogte $h$ (in km) in **Voorbeeld 2**.

**a** De groeifactor is $10^{-0{,}065}$. Waarom kun je al meteen aan het negatiefteken zien dat er sprake is van exponentiële afname?

**b** Waarom is het gebruik van het standaardgrondtal 10 handig?

**c** Op welke hoogte is nog maar een kwart van de luchtdruk op zeeniveau over?

**d** Op welke hoogte is nog maar éénvijfde van de luchtdruk op zeeniveau over?

### Opgave 8

Voor een bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is $B$ het aantal bacteriën en $t$ de tijd in uren.

**a** Laat met je rekenmachine zien, dat $1{,}5 = 10^{\log(1{,}5)} \approx 10^{0{,}176}$.

**b** Laat hiermee zien dat de formule voor de bacteriegroei kan worden geschreven als $B = 4 \cdot 10^{0{,}176t}$.

**c** Vanaf welk tijdstip zijn er meer dan 150 bacteriën?
Gebruik de formule bij b.

## Oefenen

### Opgave 9

Een hoeveelheid bacteriën groeit volgens de formule $B = 3 \cdot 7^t$ waarin $t$ de tijd in uren is en $B$ de hoeveelheid bacteriën.

**a** Bereken in twee decimalen nauwkeurig met behulp van logaritmen na hoeveel uur er 6000 bacteriën zijn.

**b** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de verdubbelingstijd van de bacteriegroei.

### Opgave 10

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

**a** $10 \cdot 10^x = 0{,}1$

**b** $0{,}5 \cdot 2^x = 30$

**c** $54 \cdot 0{,}8^t = 27$

### Opgave 11

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

### Opgave 12

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3% per jaar.
Geef de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

### Opgave 13

Een radioactieve stof vervalt volgens deze formule: $N = N_0 \cdot 0{,}93^t$.

$N$ is de hoeveelheid in milligram en $t$ de tijd in jaar.
$N_0$ is de hoeveelheid op $t = 0$.

**a** Bereken de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.

**b** Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram. Rond af op één decimaal.

**c** Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

## Toepassen

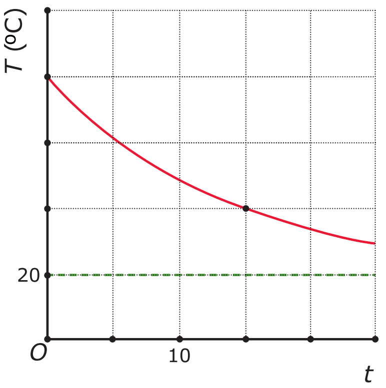
Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Er geldt: $T = 60 \cdot 0{,}93^t + 20$.

Hierin is:

- $T$ de temperatuur in °C
- $t$ de tijd in minuten



Figuur 10.4

### Opgave 14: Afkoelende thee

Bekijk de formule voor de afkoelende thee.

**a** Bereken op welk tijdstip de thee kouder is dan 30 °C.
Geef je antwoord als logaritme en in minuten nauwkeurig.

**b** Het verschil van $T$ en de omgevingstemperatuur neemt exponentieel af.
Bereken de halveringstijd die daarbij hoort in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 15: Opwarmend water

Water uit de koelkast heeft een temperatuur van 6 °C.
Als het uit de koelkast komt, warmt het langzaam op naar kamertemperatuur van 20 °C.
Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat het water 5 minuten nadat het uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 15 °C heeft.

Na hoeveel minuten is het water warmer dan 18 °C?
Geef je antwoord als logaritme en benaderd in minuten nauwkeurig.

## Testen

### Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

**a** $6 \cdot 4^x = 35$

**b** $1050 \cdot 1{,}08^t = 1800$

### Opgave 17

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze verontreiniging wordt verwijderd door elke minuut één keer te spoelen met water. Hierdoor verdwijnt telkens 15% van de verontreiniging. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter van de verontreiniging over is.

Bereken hoe lang men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

# 10.4 Logaritmische functies

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

**Voorkennis**

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

## Verkennen

### Opgave V1

Een logaritmische functie heeft een formule zoals $y = \log(x)$.

Het grondtal van deze logaritme is 10, dus je kunt deze grafiek vergelijken met die van $y = 10^x$.

**a** Maak de grafiek van deze functies in één figuur.

**b** Je ziet dat beide grafieken erg op elkaar lijken, ze zijn elkaars spiegelbeeld.
In welke lijn moet je dan spiegelen?

**c** Welke asymptoten hebben de beide grafieken?

**d** Laat met een paar getallenvoorbeelden zien, dat $\log(10^x) = x$ en dat $10^{\log(x)} = x$.

## Uitleg

**Bekijk de applet.**

Je ziet hier de grafieken van $y = \log(x)$ en $y = 10^x$.
Ze zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

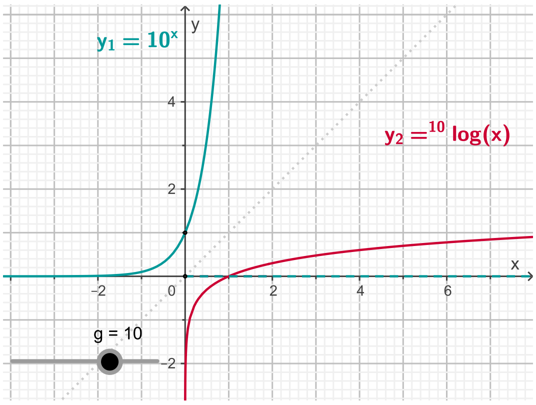
$y = \log(x)$ is een logaritmische functie met:

- nulpunt bij $x = 1$;
- een stijgende grafiek;
- verticale asymptoot $x = 0$.

Je kunt er alleen positieve $x$-waarden invullen.

Je ziet dat de eigenschappen $y = \log(x)$ het spiegelbeeld zijn van die van $y = 10^x$.
Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: $\log(10^x) = x$ en $10^{\log(x)} = x$.

Voor logaritmische functies met andere grondtallen geldt $y = {}^{g}\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(g)}$.




**Figuur 10.1**

Ze hebben daarom als $g > 1$ dezelfde eigenschappen als $y = \log(x)$.
Als $0 < g < 1$ zijn hun grafieken dalend.

### Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 10^x$ en $y_2 = \log(x)$.

**a** Het punt (10,1) ligt op de grafiek van $y_2$. Welk punt op de grafiek van $y_1$ is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

**b** Noem nog twee punten op de grafiek van $y_2$ en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van $y_1$.

**c** Laat met een voorbeeld zien dat $y_1$ en $y_2$ elkaars terugrekenfunctie zijn.

**d** Los op $\log(x) \leq 3$.
Houd rekening met de $x$-waarden die je in een logaritme mag invullen.

### Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

**a** Maak beide grafieken.

**b** Het punt (4,2) ligt op de grafiek van $y_2$. Welk punt op de grafiek van $y_1$ is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

**c** Noem nog twee punten op de grafiek van $y_2$ en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van $y_1$.

**d** Los op ${}^2\log(x) \leq 3$.

**e** Laat zien, dat $y = {}^2\log(x) \approx 3{,}32 \cdot \log(x)$.

### Opgave 3

Plot de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.
De eigenschappen van $y_2$ kun je afleiden uit die van $y_1$.

**a** Welke asymptoot heeft de grafiek van $y_2$?

**b** Voor welke waarde van $x$ is $y_2 = 2$?

**c** Los op ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) \leq 3$.

**d** Laat zien, dat $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \approx -3{,}32 \cdot \log(x)$.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

**Bekijk de applet.**

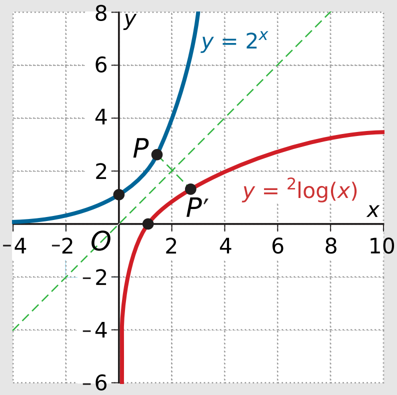
Een functie van de vorm $y = {}^{g}\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

$g$ is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- alleen $x$-waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de $y$-as is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



Figuur 10.2

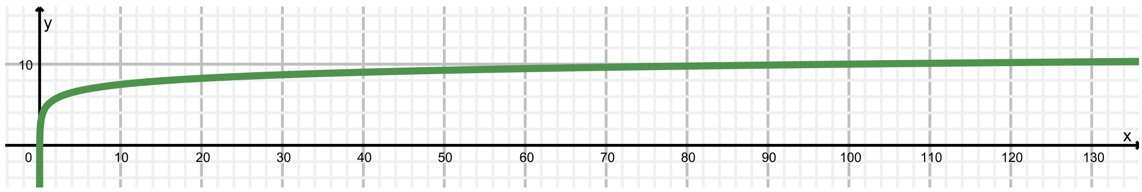
## Voorbeeld 1

Gegeven is de logaritmische functie $y = 2{,}5 \cdot \log(x) + 5$.

Maak de grafiek van deze functie en los op $y \leq 10$.

Antwoord

De grafiek zie je hier.



Figuur 10.3

$2{,}5 \cdot \log(x) + 5 = 10$ los je zo op:

$$\begin{aligned} 2{,}5 \cdot \log(x) + 5 &= 10 \\ 2{,}5 \cdot \log(x) &= 5 \\ \log(x) &= 2 \\ x &= 10^2 = 100 \end{aligned}$$

beide zijden $-5$
beide zijden delen door 2,5
beide zijden exponentiële functie met grondtal 10

In de grafiek zie je dat de oplossing van de ongelijkheid is $0 < x \leq 100$.

### Opgave 4

Bekijk de in **Voorbeeld 1** gegeven functie.

**a** Welke asymptoot heeft deze functie?
Welke waarden van $x$ mag je er invullen?

**b** Voor welke waarden van $x$ is $y \leq 0$?

### Opgave 5

Gegeven is de functie $y = 3 \cdot {}^{2}\log(x) - 1$.

**a** Laat zien dat deze functie te schrijven is als $y \approx 9{,}97 \cdot \log(x) - 1$.

**b** Los op: $3 \cdot {}^{2}\log(x) - 1 \leq 4$. Geef een benadering in twee decimalen.

### Voorbeeld 2

In een luchtballon kun je de hoogte bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. In het gebied waar de ballon vliegt geldt bij een gegeven temperatuur op de grond:

$h = 57 - 19 \cdot \log(p)$

Hierin is:

- $p$ de luchtdruk in hectopascal
- $h$ de hoogte in km boven zeeniveau

Er wordt een luchtdruk van ongeveer 920 hPa gemeten.
Op welke hoogte zit de ballon dan?

Hoe groot is de luchtdruk als je hoger dan 1 km zit?

Antwoord

$p = 920$ invullen geeft $h = 57 - 19 \cdot \log(920) \approx 0{,}688$ km.

Als je hoger dan 1 km zit, geldt: $57 - 19\log(p) > 1$.
De bijbehorende vergelijking kun je oplossen: $p \approx 886$.
Dus de luchtdruk is dan lager dan 886 hPa.

### Opgave 6

Bekijk de logaritmische functie in **Voorbeeld 2**.

**a** Laat zien hoe je $57 - 19\log(p) > 1$ oplost.

**b** Hoeveel bedroeg de luchtdruk op de begane grond?

### Opgave 7

Een andere formule voor het berekenen van de hoogte $h$ in km afhankelijk van de luchtdruk $p$ in hPa is:

$h = {}^{0{,}886}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$

**a** Laat zien dat je dit kunt schrijven als $h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

**b** Hoeveel bedraagt de luchtdruk op de begane grond?

**c** Op welke hoogte wordt de luchtdruk in dit gebied lager dan 900 hPa?

# Oefenen

## Opgave 8

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 2 \cdot \log(x) - 2{,}5$.

**a** Maak de grafiek van deze functie.

**b** Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?

**c** Los op: $y \leq 0$.

## Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32{,}8 \cdot {}^{0{,}9}\log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule met een logaritme met het standaardgrondtal 10.

## Opgave 10

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ISO/ASA-systeem. Vroeger werd vaak een ander gevoeligheidsgetal gebruikt, de DIN-waarde. Het verband tussen ISO en DIN wordt gegeven door de formule:

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft $x$ de lichtgevoeligheid in ISO aan en $y$ de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ISO heeft een DIN-waarde van 21.

**a** Bereken $a$.

**b** Maak de bijbehorende grafiek. Laat $x$ lopen tot 1500.

**c** Welke ISO-waarde heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

## Opgave 11

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.
In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met $L$. De waarde van $L$ bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we $N$. Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$20 \cdot \log(N) = 202 - \frac{4}{3}L$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau $L$ van vliegtuigen af.

**a** In een zekere periode nam $L$ af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat $N$ in die periode meer dan verdubbelde.

**b** Bereken de maximale waarde van $L$ waarbij er een half miljoen (500000) vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:
$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$
De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van $N$ op.

**c** Bereken welke waarde $L$ in 2001 had.

## Toepassen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde 'veilige norm' op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft.
Dit maximum wordt $N_{max}$ genoemd en hangt af van de breedte van de weg. Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. Gerlough kwam tot de volgende formule:
$N_{max} = \frac{8289{,}3(1{,}778 - \log(B))}{B}$.

Hierin is $B$ de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kun je enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

### Opgave 12

Bekijk de formule van Gerlough voor het maximale aantal passerende auto's om voetgangers de gelegenheid te geven veilig over te steken.

**a** Een weg is 5,40 meter breed. Tijdens de spits passeren er 1740 auto's per uur.
Voldoet deze weg aan de veilige norm? Licht je antwoord toe.

**b** De formule van Gerlough heeft alleen betekenis als $N_{max}$ positief is.
Bereken voor welke waarden van $B$ dit het geval is. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

### Opgave 13

Een weg waarover volgens de veilige norm per uur maximaal 1648 auto's mogen passeren, wordt 0,50 meter smaller gemaakt. Dit heeft tot gevolg dat het maximum aantal auto's dat per uur mag passeren groter wordt.

Bereken hoeveel auto's er per uur méér mogen passeren in de nieuwe situatie.

## Testen

### Opgave 14

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 3 - 0{,}5 \cdot \log(x)$.

**a** Maak de grafiek van deze functie.

**b** Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?

**c** Los op: $y \geq 0$.

### Opgave 15

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte $L$ in cm en het (gemiddelde) gewicht $G$ in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten $G_0$ en $k$ hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

Mark (8 jaar) en Helen (10 jaar) wonen in Nederland en zijn wat lengte en gewicht betreft gemiddelde Nederlandse kinderen.

**a** Mark heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken $k$ in gehelen nauwkeurig.

**b** Helen is 1,40 m lang. Schat haar gewicht in kg.

# 10.5 Logaritmische schalen

## Inleiding

**Je leert in dit onderwerp**

- met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier te werken;
- de formule van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

**Voorkennis**

- werken met exponentiële en logaritmische functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- vergelijkingen met exponentiële en logaritmische functies oplossen.

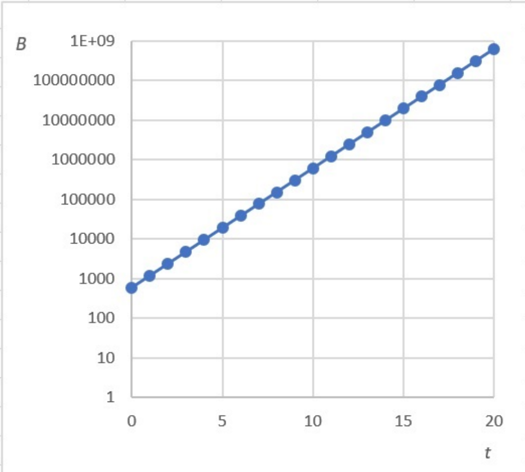
## Verkennen

### Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën $B$ worden gegeven door de formule $B = 600 \cdot 2^t$ met $t$ in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van $B$ als functie van $t$. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

**a** Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

**b** Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van $B$ als functie van $t$.



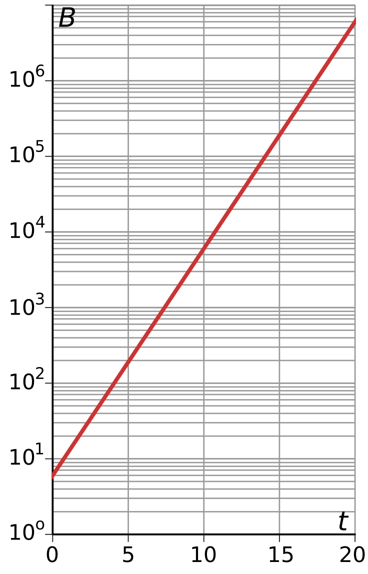

**Figuur 10.1**

## Uitleg

Als je de getallen 1, 10, 100 en 1000 op een getallenlijn wilt zetten, zie je dat de kleinere getallen erg dicht bij elkaar liggen en niet te onderscheiden zijn.

In plaats van een lineaire schaalverdeling zoals 0,1,2,3,4,..., kun je dan een schaalverdeling met machten van 10: $10^0$,$10^1$,$10^2$,$10^3$,$10^4$,... gebruiken. Dit heet een logaritmische schaalverdeling.

Bekijk de grafiek. Op de $B$-as is zo'n schaalverdeling gebruikt. Dit is de grafiek van een bacteriegroei. Het verloop van het aantal bacteriën $B$ in gram wordt gegeven door de exponentiële formule: $B = 6 \cdot 2^t$ met $t$ in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.



Figuur 10.2

Het getal dat je in de grafiek wilt zetten, moet dus worden 'vertaald' naar een macht van 10. Daarvoor neem je de 10-logaritme van het getal. Bijvoorbeeld:

- Op $t = 12$ zijn er $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën.
- $\log(24576) \approx 4{,}39$ dus 24576 kun je schrijven als $10^{4,39}$.
- Dan kun je het getal in het logaritmische assenstelsel zetten.

Door de horizontale hulplijnen in het assenstelsel is deze omrekening niet meer nodig.
Je weet dat 24576 tussen $10^4 = 10000$ en $10^5 = 100000$ komt te liggen.
De eerste lijn boven $10^4$ stelt $2 \cdot 10^4 = 20000$ voor.
De tweede lijn boven $10^4$ stelt $3 \cdot 10^4 = 30000$ voor.
Het getal 24576 ligt tussen deze lijntjes in (recht boven $t = 12$).

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn.

Er bestaat voor dit soort grafieken speciaal **enkellogaritmisch papier**. Ook in Excel kun je gemakkelijk grafieken met een logaritmische schaal maken.

## Opgave 1

In de **Uitleg** is een grafiek van de exponentiële functie $B = 6 \cdot 2^t$ getekend. Op de $B$-as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

**a** Laat zien dat de punten die horen bij $t = 5$ en $t = 10$ goed zijn getekend.

**b** De tweede horizontale lijn boven $10^2$ stelt 300 voor. Laat zien dat dit op de juiste hoogte is getekend.

**c** Maak een tabel voor $B$ uitgezet tegen $t$.
Teken daarmee zelf de grafiek op enkellogaritmisch papier.

## Opgave 2

Gegeven is de functie $y = 2 \cdot 3^x$.

**a** Teken op enkellogaritmisch papier een bijpassende grafiek. Neem $0 \leq x \leq 7$.

**b** Lees uit de grafiek af hoe groot de $y$-waarde bij $x = 5{,}5$ is en controleer het antwoord met de gegeven formule.

# Theorie en voorbeelden

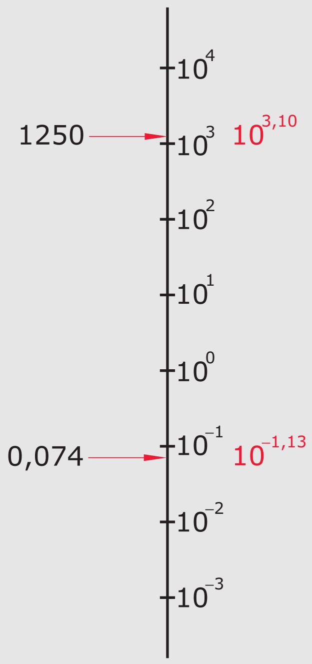
## Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen plaatsen. Met behulp van de logaritmeknop op de rekenmachine kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$
  Je plaatst 1250 op 3,10 eenheden boven $10^0$, dat is tussen $10^3$ en $10^4$.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$
  Je plaatst 0,074 op 1,13 eenheden onder $10^0$, dat is tussen $10^{-1}$ en $10^{-2}$.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn. Er bestaat speciaal **enkellogaritmisch papier** dat bestaat uit een as met een logaritmische schaalverdeling.

Omdat een rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat. Bij de grafiek kun je in dat geval een bijpassende formule opstellen.



Figuur 10.3

## Voorbeeld 1

Zet op de logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 uit. Lees ook af welke waarden $a$ en $b$ hebben.

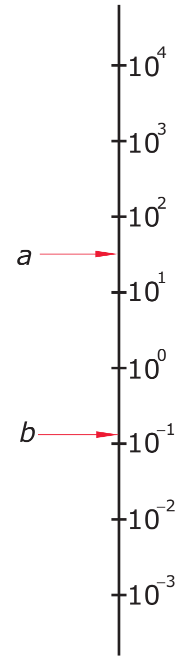
Antwoord

Reken eerst de getallen 7250 en 0,002 om.

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ en hieruit volgt $7250 \approx 10^{3,86}$.
  Plaats 7250 op 3,86 eenheden boven $10^0$, dat is tussen $10^3$ en $10^4$.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ en hieruit volgt $0{,}002 \approx 10^{-2,70}$.
  Plaats 0,002 op 2,70 eenheden onder $10^0$, dat is tussen $10^{-2}$ en $10^{-3}$.

Lees nu af:

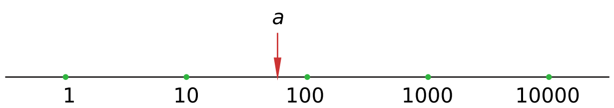
- $a \approx 10^{1,5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0,9} \approx 0{,}13$



Figuur 10.4

## Opgave 3

Lees het getal $a$ op deze logaritmische schaal af.



Figuur 10.5

## Opgave 4

Teken een logaritmische schaal met waarden van $10^{-6}$ tot $10^7$.

**a** Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

**b** Een mens is ongeveer 1,80 meter groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan. Neem aan dat de schaal in meters is gegeven.

**c** De Mount Everest is ongeveer 8884 meter hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

**d** Een amoebe is een ééncellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter. Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

**e** Op de schaalverdeling is $a$ het getal dat midden tussen $10^3$ en $10^4$ in zit. Bereken $a$ in gehelen.

## Voorbeeld 2

Jodium-131 is een onstabiele radioactieve en zeer gevaarlijke stof. Jodium-131 komt van nature niet op aarde voor, maar is wel vrijgekomen tijdens de kernrampen in Tsjernobyl en Fukushima. Ook wordt Jodium-131 geproduceerd in een kernreactor om het te kunnen gebruiken in de nucleaire geneeskunde ter behandeling van onder andere schildklierkanker. Jodium-131 heeft als eigenschap dat het 'vervalt', er verwijnt steeds een beetje van de stof. Bekijk de vervaltabel van Jodium-131.

| *tijd* (dagen) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *hoeveelheid* ($\mu$ g) | 400 | 336 | 282 | 238 | 202 | 166 | 142 | 116 | 98 |

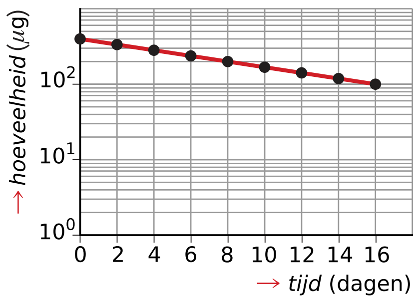
**Tabel 10.1**

Teken bij deze tabel een grafiek op **enkellogaritmisch papier** en onderzoek of er sprake is van exponentiële groei (verval).

Antwoord

$400 = 4 \cdot 10^2$; het eerste punt komt bij het derde streepje boven $10^2$.
$336 = 3{,}36 \cdot 10^2$
$282 = 2{,}82 \cdot 10^2$
$238 = 2{,}38 \cdot 10^2$
$202 = 2{,}02 \cdot 10^2$
$166 = 1{,}66 \cdot 10^2$
$142 = 1{,}42 \cdot 10^2$
$116 = 1{,}16 \cdot 10^2$
$98 = 9{,}8 \cdot 10^1$

Er is sprake van exponentiële groei, want de punten van de grafiek liggen (bij benadering) op een rechte lijn.




**Figuur 10.6**

### Opgave 5

Bekijk de twee vervaltabellen met daarin de hoeveelheid $M$ van stof M en de hoeveelheid $P$ van stof P in microgram ($\mu$ g).

| *tijd* (h) | 1 | 4 | 16 | 64 |
|---|---|---|---|---|
| $M$ ($\mu$ g) | 1000 | 250 | 62,5 | 15,6 |

| *tijd* (h) | 0 | 24 | 48 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ ($\mu$ g) | 1000 | 250 | 62,5 | 15,6 |

**Figuur 10.7**

Onderzoek met behulp van grafieken op **enkellogaritmisch papier** of er sprake is van exponentiële groei.

### Opgave 6

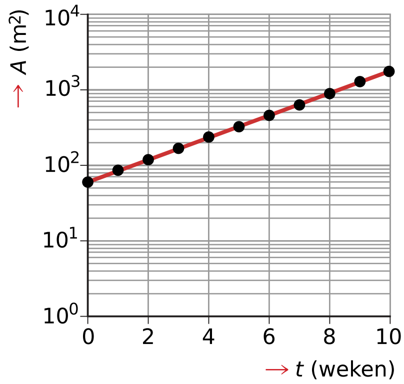
Maak een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik **enkellogaritmisch papier**. Gegeven is nu de functie $N = 12000 \cdot 0{,}8^t$.

**a** Teken de grafiek van $N$ in het assenstelsel of op het enkellogaritmische papier.

**b** Lees uit de figuur de waarden van $t$ af waarvoor $N < 3000$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

### Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van de groei van een waterplant.
De oppervlakte $A$ (m$^2$) is een functie van de tijd $t$ (weken). Stel een bijpassende formule op.




**Figuur 10.8**

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband
tussen $A$ en $t$: $A = b \cdot g^t$

Lees uit de figuur af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 6 \cdot 10^1 \approx 60$.
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 9 \cdot 10^2 \approx 900$.

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}4$.

De formule is: $A \approx 60 \cdot 1{,}4^t$.

### Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daarbij kun je een functievoorschrift opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

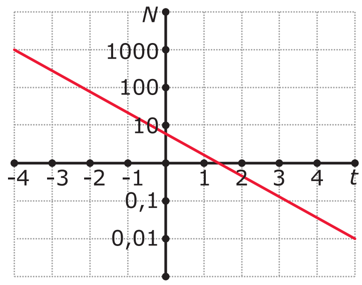
**a** Lees de waarden af voor $A$ bij $t = 5$ en $t = 7$.

**b** Stel met behulp van deze waarden een formule voor $A$ op met dezelfde beginwaarde als in het voorbeeld. Ga na dat je ongeveer dezelfde formule vindt.

**c** Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

### Opgave 8

Bekijk deze grafiek van $N$ als functie van $t$.



Figuur 10.9

**a** Welke coördinaten heeft het snijpunt van de horizontale en verticale as?

**b** Lees twee waarden voor $N$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N$.

**c** Bereken ter controle met de formule van b het snijpunt met de getekende $t$-as.

**d** Waarom heeft het geen nut om te vragen naar de $t$-waarden waarvoor $N = 0$?

## Oefenen

### Opgave 9

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

**a** Stel een formule op voor het aantal inwoners $A$ afhankelijk van de tijd $t$ in jaren vanaf 1 januari 2010.

**b** Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

**c** Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2025. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

### Opgave 10

Bekijk de tabel die bij gegevens over een bacteriecultuur hoort. $t$ is gegeven in uren en $N$ in aantallen.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 50 | 84 | 141 | 237 | 398 | 670 | 1125 |

Tabel 10.2

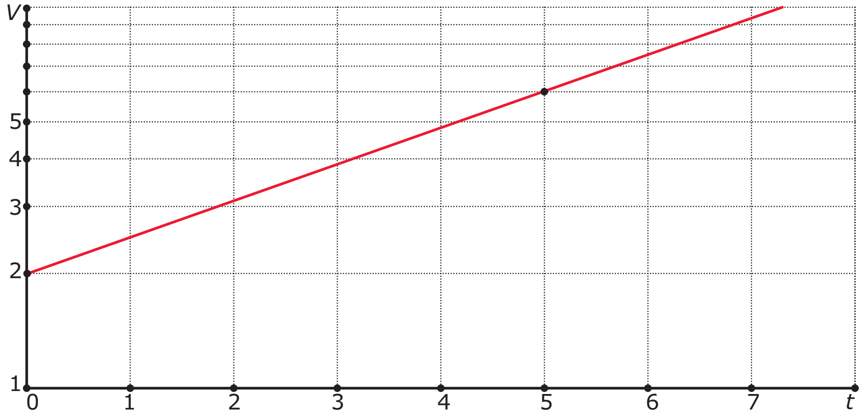
**a** Maak met behulp van de gegeven tabel een grafiek $N$ uitgezet tegen $t$ op enkellogaritmisch papier. Is er sprake van exponentiële groei?

**b** Stel een formule op voor $N$ als functie van $t$.

**c** Bereken $N$ als $t = 10$ uur.

## Opgave 11

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid $V$ als functie van de tijd $t$.




Figuur 10.10

**a** Geef een formule voor $V$.

**b** Bereken in twee decimalen de waarde van $t$ waarvoor $V = 10$. Controleer je antwoord met de grafiek.

**c** De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de $t$-as te hebben.
Bereken de bijbehorende waarde van $t$ in twee decimalen.

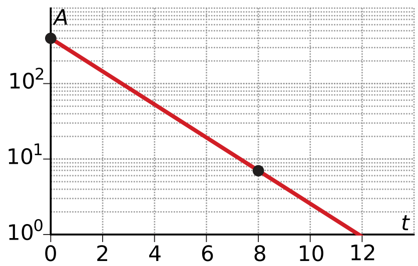
## Opgave 12

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een afnemende hoeveelheid $A$ als functie van de tijd $t$.

**a** Geef een formule voor $A$.

**b** Bereken in twee decimalen de waarde van $t$ waarvoor $A = 20$. Controleer je antwoord met de grafiek.

**c** De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de $t$-as te hebben. Bereken de bijbehorende waarde van $t$ in twee decimalen.

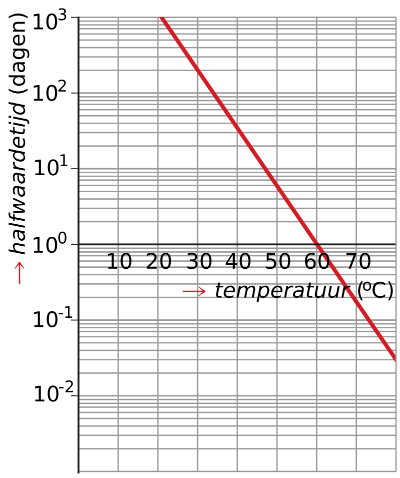



Figuur 10.11

## Opgave 13

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.




Figuur 10.12

**a** Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30.
Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht.
Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28.
Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C.
Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

**b** Laat met behulp van de grafiek zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing.
Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten.
Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden.
Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

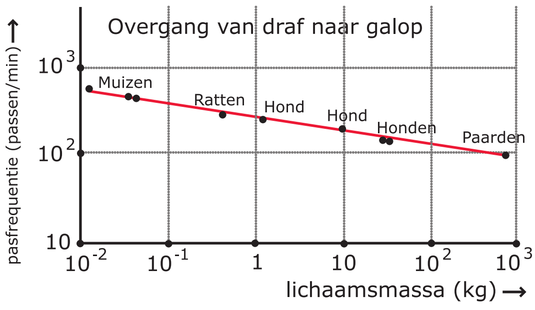
**c** Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

## Toepassen

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa.
Noem de lichaamsmassa $m$ (in kilogram) en de pasfrequentie $P$.
De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.
Op beide assen is nu een logaritmische schaal gebruikt.

Daardoor hoort bij deze rechte lijn een formule van de vorm $\log(P) = a \cdot \log(m) + b$.

Dit kun je herleiden tot $P = 10^b \cdot m^a$, zodat $P$ een machtsfunctie is van $m$.




Figuur 10.13

### Opgave 14

Bekijk de grafiek van de pasfrequentie $P$ afhankelijk van de lichaamsmassa $m$ in kg.

**a** Waar kun je aan zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

**b** Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij ‘kleine hond’?

**c** Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij ‘paard’?

### Opgave 15

De grafiek in **Toepassen** kan worden benaderd met de formule $P = 259 \cdot m^{-0,14}$.

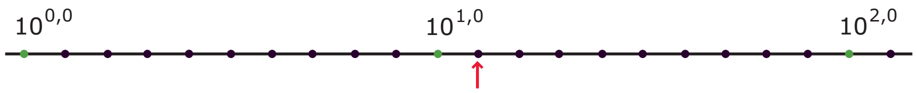
**a** Laat zien dat de waarden die je in de vorige opgave hebt afgelezen voor ‘kleine hond’ en ‘paard’ hieraan voldoen.

**b** Het gewicht van een savanneolifant is gemiddeld 6000 kg.
Bij welke pasfrequentie gaat deze olifant van draf naar galop?

## Testen

### Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).




**Figuur 10.14**

**a** Welk getal hoort bij het pijltje?

**b** Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

**c** Geef aan waar 5,5 en waar $10^{0,5}$ moeten staan. Doe dit ook bij 55 en $10^{1,5}$.

**d** Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

### Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

| aantal weken | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| oppervlakte ($dm^2$) | 40 | 57 | 89 | 134 | 200 | 305 | 447 |

**Tabel 10.3**

**a** Zet de punten (0,40),(1,57),...,(6,447) uit op enkellogaritmisch papier.

**b** Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

**c** Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

**d** Stel een formule op voor de oppervlakte $A$ die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd $t$ in weken. Ga er van uit dat de grafiek door (0,40) en (4,200) gaat.

# 10.6 Totaalbeeld

## Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met exponenten en logaritmen en heb je met name gewerkt aan situaties waarin exponentiële groei of exponentieel verval belangrijk is. Je hebt de eigenschappen van exponentiële en logaritmische functies leren kennen. En je hebt gewerkt met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier.

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

## Begrippenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei — groeifactor
- exponentiële functie — horizontale asymptoot — verdubbelingstijd en halveringstijd
- logaritme — verveelvoudigingstijd
- logaritmische functie — terugrekenfunctie
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch grafiekenpapier

## Activiteitenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken — de groeifactor vaststellen bij exponentiële groei — groeifactoren omrekenen;
- een exponentiële functie herkennen — horizontale asymptoot herkennen — bijbehorende vergelijkingen grafisch oplossen — verdubbelingstijd, halveringstijd berekenen;
- logaritme gebruiken om een exponentiële vergelijking op te lossen — eigenschappen van logaritmen benoemen — logaritmen berekenen met behulp van de rekenmachine;
- een logaritmische functie herkennen — grafieken van logaritmische functies maken — vergelijkingen met logaritmen oplossen door terugrekenen met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal;
- logaritmische schalen aflezen — grafieken tekenen op enkellogpapier — formule opstellen van een exponentiële functie op enkellogpapier.

## Testen

### Opgave 1

Paracetamol is wereldwijd het meest gebruikte pijnstillende en koortsverlagende middel. Het wordt onder andere verkocht in pillen van 500 mg. Na inname in het lichaam (een pilletje paracetamol slikken) wordt deze stof ook weer langzaam afgebroken. De halveringstijd is (afhankelijk van de omstandigheden) ongeveer 3 uur.

Figuur 10.1

**a** Hoeveel uur na inname is nog 12,5% van de paracetamol in het lichaam over?

**b** Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur in drie decimalen nauwkeurig? En het afnamepercentage per uur?

Als de hoeveelheid paracetamol in je lichaam onder de 50 mg is, gaat er geen werking meer van uit.

**c** Je slikt twee paracetamolpillen van 500 mg. Na hoeveel uur zijn ze uitgewerkt?

### Opgave 2

**Samoa** is een republiek in Polynesië die bestaat uit de westelijke Samoa-eilanden. In 2006 bedroeg het aantal inwoners volgens een officiële volkstelling 179186. $N$ is het aantal inwoners van Samoa afgerond op honderdtallen en $t$ is de tijd in jaren vanaf 2006.
Het aantal inwoners werd voor het jaar 2012 geschat op 194300.

**a** Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor $N$ afhankelijk van $t$?

**b** Ga na dat bij de gegevens ook exponentiële groei past met een percentage van ongeveer 1,36% per jaar.

**c** Welke formule geldt voor $N$ afhankelijk van $t$ als je van exponentiële groei uitgaat?

**d** Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal inwoners van Samoa voor het eerst de 200000 zal overschrijden.

### Opgave 3

In 2000 was het aantal inwoners van het werelddeel Afrika ongeveer 872 miljoen en in 2010 was dit aantal ongeveer 1138 miljoen. Het aantal inwoners groeide exponentieel.
Azië had in 2000 meer inwoners, namelijk 3864 miljoen, maar het groeipercentage was 1,5% per jaar.

In welk jaar zal - mits de groei zo door gaat - het aantal inwoners van Afrika dat van Azië gaan overstijgen? Schrijf de bijbehorende ongelijkheid op.

## Opgave 4

Een pakje boter wordt in de koelkast geplaatst. Daardoor daalt de temperatuur van de boter. Neem aan dat voor die temperatuur geldt $T = 14 \cdot 0{,}8^t + 6$, met $t$ in minuten en $T$ in °C.

**a** Hoeveel bedroeg de temperatuur van de boter voordat ze in de koelkast werd geplaatst?

**b** Hoeveel bedraagt de temperatuur in de koelkast?

**c** Maak een grafiek van $T$ als functie van $t$.

**d** Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de boter minder dan 1 °C van de temperatuur binnen de koelkast verschilt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

## Opgave 5

De luchtdruk $p$ in millibar hangt af van de hoogte $h$ (kilometer) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt:

$$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

waarin $p_0$ de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

**a** Neem aan dat $p_0 = 1010$ millibar. Maak de grafiek van $h$ als functie van $p$.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 millibar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 millibar.

**b** Bereken hoe hoog het vliegtuig vliegt in km nauwkeurig.

**c** Neem aan dat $p_0 = 1010$. Druk $p$ uit in $h$. Rond waar nodig af op drie decimalen.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 millibar op zeeniveau en berekent dat het vliegtuig zich op 3 kilometer hoogte bevindt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 millibar.

**d** Hoe hoog bevindt het vliegtuig zich in werkelijkheid? Rond af op meters.

## Opgave 6

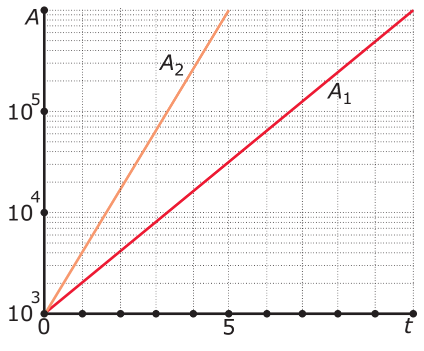
In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 gram salade afhankelijk is van de temperatuur. Bekijk in de grafiek de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius. $t$ is de tijd in dagen. Bij een hogere temperatuur groeit het aantal bacteriën sneller.

**a** Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

**b** Geef zowel voor $A_1$ als $A_2$ de formule van het aantal bacteriën $A$ na $t$ dagen.

**c** Bereken hoeveel keer zo veel bacteriën er na tien dagen bij 4 °C zijn vergeleken met de situatie bij 0 °C.

**d** Bereken hoeveel de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C bedraagt.




Figuur 10.2

## Toepassen

### Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip 'zuurgraad' gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $\left[H_3O^+\right]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $\left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van $10^{-7}$: pH = $-\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH = $-\log\left[H_3\,O^+\right]$.

**a** Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H_3O^+\right] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

**b** Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de $H_3O^+$-concentratie in mol/L?

**c** Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de $H_3O^+$-concentratie van zure regen?

**d** Vanaf welke $H_3O^+$ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

**e** De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijke pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de $H_3O^+$-concentratie dan?

### Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

**a** Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

**b** Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

**c** In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

**d** Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

# Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl