

Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 6

Inhoud

Periodieke functies

Ruimtelijke figuren

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

11 Periodieke functies 5

11.1 Periodiciteit 6

11.2 Graden en radialen 14

11.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie 21

11.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand 30

11.5 Totaalbeeld 38

12 Ruimtelijke figuren 43

12.1 Lichamen 44

12.2 Aanzichten 52

12.3 Doorsneden 62

12.4 Oppervlakte en inhoud 70

12.5 Totaalbeeld 79

Register 84

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Periodieke functies

11.1 Periodiciteit	6
11.2 Graden en radialen	14
11.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie	21
11.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand	30
11.5 Totaalbeeld	38

11.1 Periodiciteit

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- periodieke verschijnselen en hun periode herkennen;
- rekenen met de periode bij het bepalen van uitkomsten bij een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

- werken met (draai)hoeken die groter zijn dan 90° .
- werken met sinus, cosinus en tangens, ook bij hoeken die groter zijn dan 90° .

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang in 1 seconde rond.

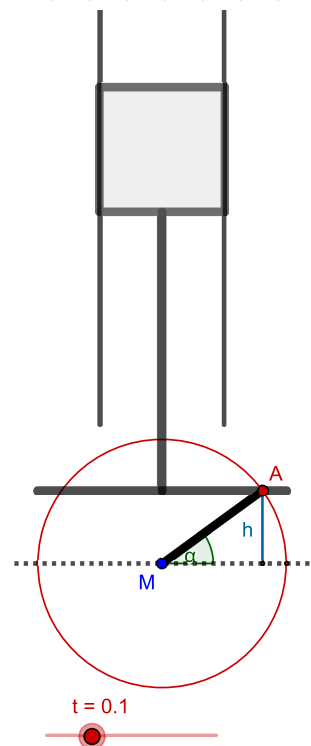
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.

Gegeven is $MA = 5$ centimeter.

De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, α is de draaihoek.

- Hoe groot is α als $t = 0,1$?
- Hoe groot is α als de zuiger voor het eerst na $t = 0$ op zijn laagste punt zit?
En hoe groot is t dan?
- Op welke tijdstippen zit de zuiger nog meer op zijn laagste punt?
- De hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn verandert steeds.

Maak een schets van de grafiek van h afhankelijk van t .



Figuur 11.1



Uitleg

Bekijk de applet: wiel.

Een wiel draait met steeds dezelfde snelheid rond (eenparige cirkelbeweging) en maakt één omwenteling in 10 seconden. Op tijdstip $t = 0$ zit punt A uiterst rechts. Het draait tegen de wijzers van de klok in.

De positie van A is een periodiek (zich herhalend) verschijnsel. De periode is 10 s.

Op welke tijdstippen zit punt A weer uiterst rechts?

Omdat het wiel in 10 seconden ronddraait, is dat op $t = 0, 10, 20, \dots$

Als het wiel al aan het draaien was, is dat ook op $t = -10, -20, \dots$

Kortweg op: $t = 0 + k \cdot 10$ met k een geheel getal. Of nog korter: $t = k \cdot 10$.

Als $k = 1$ dan geldt $t = 1 \cdot 10 = 10$.

k mag ook negatief zijn: als $k = -2$ dan geldt $t = -2 \cdot 10 = -20$.

Op welke tijdstippen staat punt A helemaal onderaan?

Dit gebeurt op drie vierde van een omwenteling, op 7,5 seconden.

Daar kan steeds weer 10 bij of af.

$t = \dots; -12,5; -2,5; 7,5; 17,5; \dots$

Anders gezegd: $t = 7,5 + k \cdot 10$ met k een geheel getal.

Omdat de periode van draaiing 10 seconden is, draait het wiel per seconde $\frac{1}{10}$ deel.

Dit heet de frequentie van de draaiing.

Opgave 1

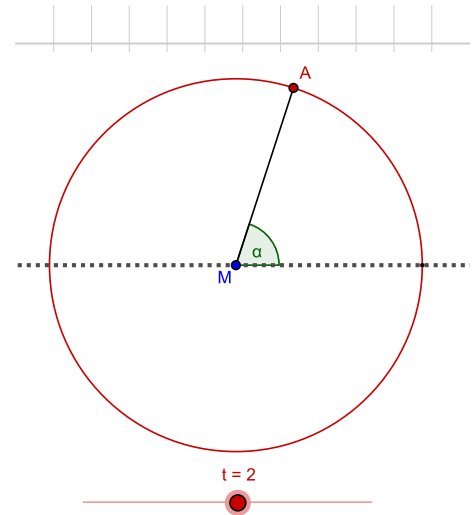
Ga uit van het ronddraaiend rad in de **Uitleg**.

- a Op welke tijdstippen zit punt A bovenaan?
- b Geef in de figuur aan waar punt A zit op $t = 7 + k \cdot 10$.
- c De frequentie van draaiing is $\frac{1}{10}$ per seconde.
Hoe groot is de frequentie van dit wiel per minuut?

Opgave 2

Een wiel draait met dezelfde snelheid in 15 seconden helemaal rond.

- a Bereken de frequentie per minuut.
- b Bereken de frequentie per kwartier.
- c Een ander wiel draait in 20 minuten 400 keer rond.
Hoe groot is de frequentie per seconde?

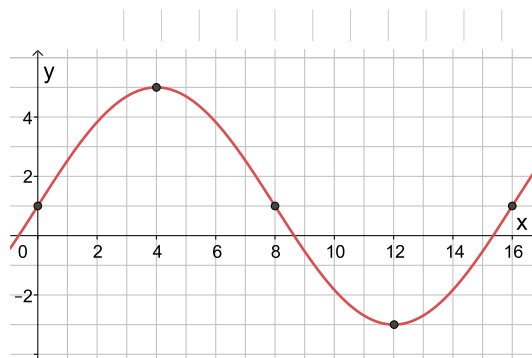


Figuur 11.2

Opgave 3

Bekijk deze grafiek van een periodieke functie.
De grafiek loopt aan beide kanten oneindig ver door.

- Bepaal de periode van dit periodieke verschijnsel.
- Bepaal de uitkomst bij $x = 36$.
- Bij welke x -waarden met $45 \leq x \leq 65$ geldt $y = 1$?



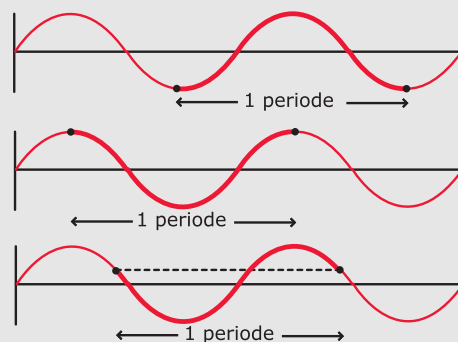
Figuur 11.3

Om te onthouden

De **periode** van een **periodiek verschijnsel** is de lengte van het kortste interval op de horizontale as dat hoort bij het deel van de grafiek dat zich steeds herhaalt.

In de grafiek zie je een zich herhalende golfbeweging. Er zijn verschillende intervallen voor de periode mogelijk:

- van een maximum tot het eerstvolgend maximum.
- van een minimum tot het eerstvolgend minimum.
- een willekeurig punt tot het volgende punt waarop de grafiek dezelfde hoogte én dezelfde daling of stijging heeft als in het andere punt.



Figuur 11.4

Voor de lengte van het interval waarop de grafiek zich herhaalt is het niet belangrijk uit welk deel van de grafiek het interval komt. Die lengte is altijd gelijk als de grafiek zuiver periodiek is.

Als op tijdstip t een bepaalde uitkomst voorkomt, komt diezelfde uitkomst ook voor op $t + k \cdot \text{periode}$, waarin k een geheel getal is.

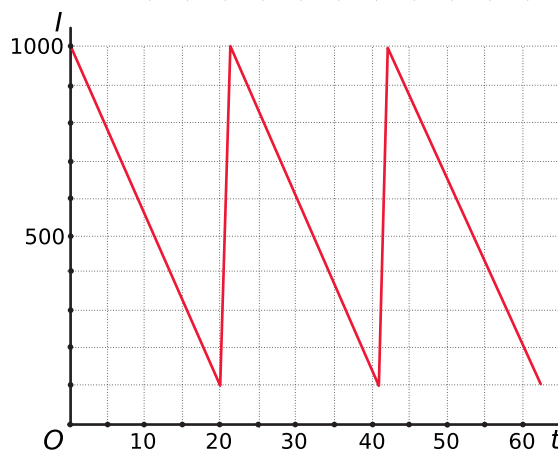
Het aantal periodes per tijdseenheid heet de **frequentie**:

$$\text{frequentie} = \frac{1}{\text{periode}}$$

Voorbeeld 1

Een opslagtank bevat 1000 liter brandstof op dag $t = 0$. In 20 dagen neemt die hoeveelheid gelijkmatig af tot 100 liter. Dan wordt de tank in een dag bijgevuld tot 1000 liter, enzovoort.

Hoeveel liter brandstof bevat de tank na 75 dagen?



Figuur 11.5



Antwoord

De periode van de inhoud is 21 dagen.

Er is een gelijke inhoud bij: $t = 75 + k \cdot 21$.

Omdat $t = 75 = 12 + 3 \cdot 21$ heeft de tank op dag 12 dezelfde inhoud als op dag 75, want hier zitten precies drie periodes tussen.

In 20 dagen gaat er 900 liter uit de tank, dat is 45 liter per dag minder. Van $t = 0$ naar $t = 12$ gaat er $45 \cdot 12$ liter uit.

Er was 1000 liter. Er is $1000 - 540 = 460$ liter over op $t = 12$ en ook op $t = 75$.

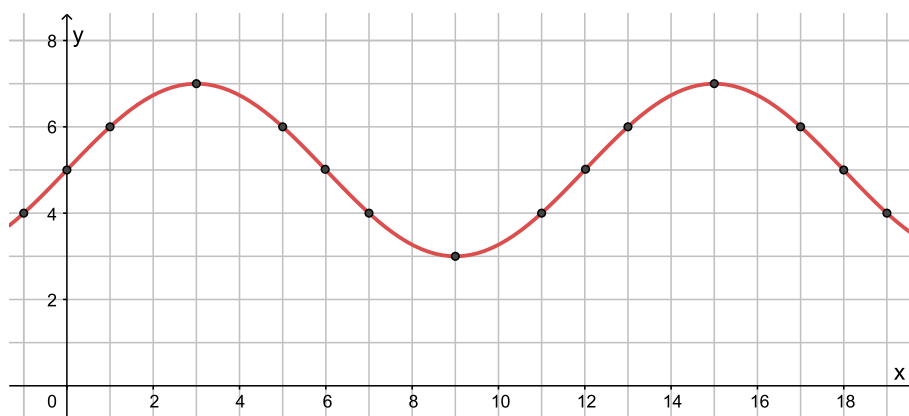
Opgave 4

Bekijk het leeglopen en weer vullen van de brandstoftank in **Voorbeeld 1**. De hoogte van de brandstof in de tank is een periodiek verschijnsel.

- a Hoeveel bedraagt de periode?
- b Leg uit waarom er 550 liter in de tank zit op $t = 10 + k \cdot 21$ en op $t = 20,5 + k \cdot 21$.
- c Voor welke waarden van t zit er 100 liter in de tank?
- d Hoeveel zit er in de brandstoftank na 500 dagen?

Opgave 5

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie.



Figuur 11.6

- a Bepaal de periode van deze functie.
- b Bepaal de uitkomsten bij $x = 81$ en $x = 91$.
- c Bepaal de x -waarden bij $y = 6$ als $75 \leq x \leq 85$.
- d Bepaal de uitkomst bij $x = -5$.
- e Bepaal de x -waarden bij $y = 4$ als $-100 \leq x \leq -90$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bekijk de figuur. Het geeft schematisch een waterrad weer dat in 20 seconden ronddraait.

Punt A is helemaal rechts op de cirkel op het tijdstip $t = 0$.

Gegeven is dat de straal MA van het waterrad 100 centimeter is. Het waterrad draait tegen de wijzers van de klok in.

Meet de hoogte h van punt A ten opzichte van de as van het rad, zodat op tijdstip $t = 0$ de hoogte ook 0 cm is.

Hoe hoog is het punt op $t = 83$? Rond je antwoord af op centimeters.

Antwoord

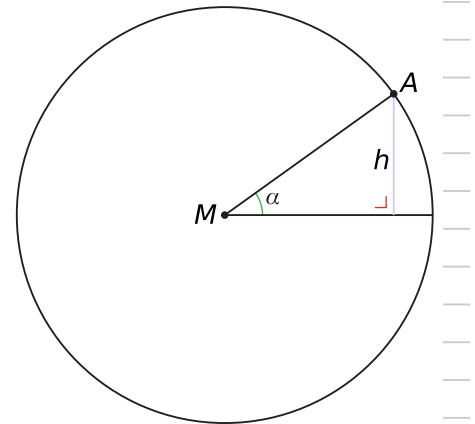
De periode van h is 20, de hoogtes zijn gelijk bij $t = 83 + k \cdot 20$.

De hoogte bij $t = 83$ is hetzelfde als bij $t = 3$.

Bij $t = 3$ heeft punt A $\frac{3}{20}$ van de cirkel doorlopen en is $\frac{3}{20} \cdot 360 = 54^\circ$ gedraaid:

$$\sin(54^\circ) = \frac{h}{100} \text{ geeft } h = 100 \cdot \sin(54^\circ) \approx 80,9 \text{ cm.}$$

Op $t = 83$ is de hoogte ongeveer 81 cm.



Figuur 11.7

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2** over het ronddraaiende punt A in het waterrad.

- Op welke tijdstippen is punt A op de top van het waterrad?
- Bereken in centimeter de hoogte van A na 44 seconden. Rond af op één decimaal.
- Bereken in centimeter de hoogte van punt A na 119 seconden. Rond af op één decimaal.
- Met welke frequentie draait dit waterrad? Ga uit van een tijdseenheid van een uur.

Opgave 7

Bekijk het punt P op de tip van een rotorblad van een ronddraaiende windmolen.

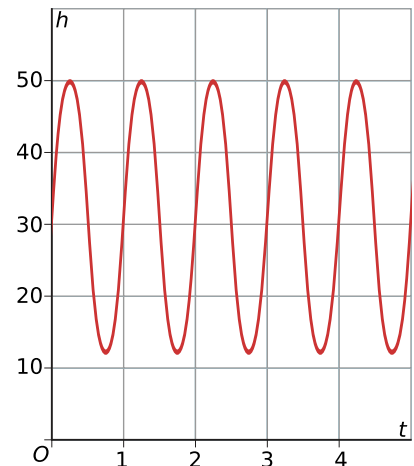


Figuur 11.8



De grafiek van h als functie van t is getekend, waarin h de hoogte van punt P boven de grond in meter voorstelt en t de tijd in seconden.

- Met welke periode draait het rotorblad van de windmolen? Met welke frequentie (per minuut) draait het rotorblad?
- Hoe hoog zit de as van de windmolen boven de grond? En hoe lang is het rotorblad?
- Teken de grafiek van de hoogte van de tip van één van de twee andere rotorbladen.
- De wind neemt af, de windmolen gaat een half keer zo snel draaien. Teken de bijbehorende grafiek.



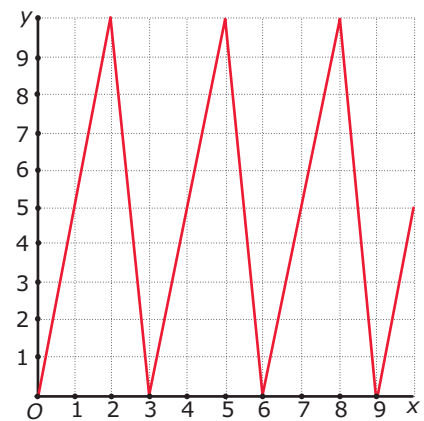
Figuur 11.9

Oefenen

Opgave 8

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie.

- Bereken de uitkomst bij $x = 25$.
- Voor welke waarden van x is $y = 10$?
- Bepaal de waarden van x waarvoor $y = 5$ met $0 \leq x \leq 9$



Figuur 11.10

Opgave 9

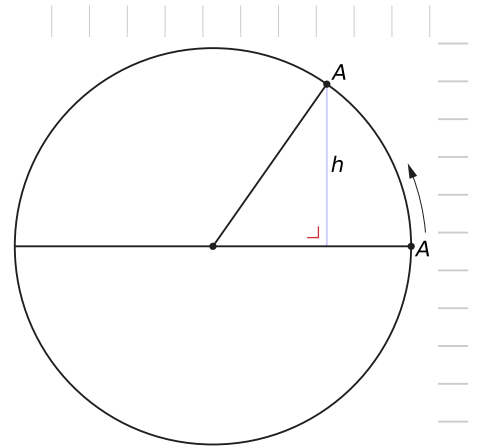
Een grafiek bestaat in een Oxy -assenstelsel uit rechte lijnstukken tussen de punten $(100,1000)$, $(110,600)$, $(140,1000)$, $(150,600)$, $(180,1000)$, enzovoort. Het patroon gaat oneindig ver door.

- Hoe groot is de periode van deze grafiek?
- Bereken de waarde van y bij $x = 250$.
- Teken de grafiek met $0 \leq x \leq 100$.
- Bereken de waarde van y bij $x = -250$.
- Hoeveel getallen x met $0 \leq x \leq 100$ bestaan er bij $y = 900$?

**Opgave 10**

Punt A ligt op een wiel op afstand 1 van het middelpunt. Noem de hoogte van punt A ten opzichte van de horizontale as door het middelpunt h met t de tijd in seconden. Punt A begint rechts, $h = 0$ bij $t = 0$. Het wiel draait in 6 seconden rond, linksom.

- Hoe groot is h als $t = 1,5$?
- Bereken de hoogtes bij $t = 4,5$, $t = 10,5$ en $t = 16,5$.
- Op welke tijdstippen zit punt A even hoog als op $t = 0,75$?
- Op welke tijdstippen zit punt A op een hoogte van $h = 0,5$?



Figuur 11.11

Opgave 11

Een torenklok heeft een grote wijzer met een lengte van 1,5 m. De beide wijzers zitten bevestigd op de as van de klok op 45 m boven de grond. Punt T stelt de punt van deze grote wijzer voor. De hoogte h in meter van T boven de grond hangt af van de draaihoek α . Neem aan dat $\alpha = 0$ om 12:00 uur. De wijzer draait rechtsom.

- Hoe hoog zit T boven de grond op 2:10 uur?
- Teken de grafiek van h afhankelijk van α .
- Er zijn twee tijdstippen waarop $h = 46$. De bijbehorende punten waar T dan zit zijn A en B . Hoe ver zitten die punten A en B van elkaar?

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je opnieuw een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang in 1 seconde rond.

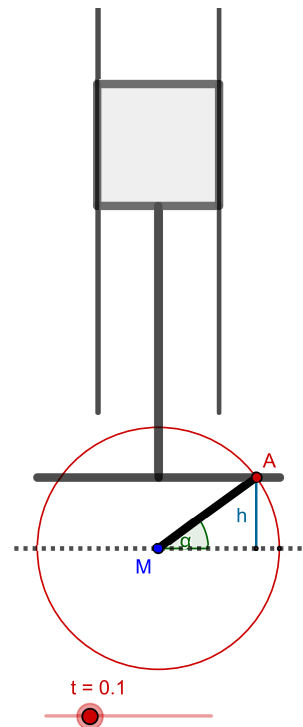
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.

Gegeven is $MA = 5$ centimeter.

De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, α is de draaihoek.

Je kunt je afvragen wat het verband is tussen de hoogte van de zuiger en de hoek waaronder het punt A is gedraaid.

Of het verband tussen de hoogte van de zuiger en de tijd t .



Figuur 11.12



Opgave 12

Kijk bij de krukstang eerst naar de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

- a Hoe kun je h berekenen vanuit de draaihoek α ?
- b Hoe kun je h berekenen vanuit de tijd t ?
- c Welke draaitijden horen bij $h = 2,5$?

Opgave 13

De onderkant van de zuiger zit 11 cm boven punt A .

Noem de hoogte van de onderkant van de zuiger boven de horizontale stippellijn H .

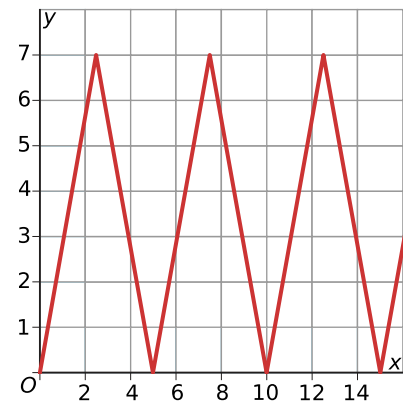
- a Welke formule kun je nu opstellen voor H als functie van t ?
- b Op welke tijdstippen geldt $H = 16$ cm?
- c Op welke tijdstippen is H zo klein mogelijk?
- d Hoe ziet de grafiek van H als functie van t er uit?

Testen

Opgave 14

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie. Binnen iedere periode is de grafiek symmetrisch.

- a Bepaal y als $x = 7,5$.
- b Voor welke waarden van x is $y = 0$?
- c Bereken de uitkomst bij $x = 22,5$.



Figuur 11.13

Opgave 15

Een wiel met een straal van 30 centimeter draait met constante snelheid linksom rond. Aan de buitenkant van het wiel zit een punt A . De omlooptijd van het wiel is 20 seconden. De hoogte h (cm) van A na t seconden wordt gemeten ten opzichte van de horizontale lijn door het middelpunt van het wiel. Op $t = 0$ zit A boven aan het wiel, dus er geldt $h(0) = 30$.

- a Met welke frequentie draait punt A ? Gebruik minuten als tijds-eenheid.
- b Bereken de hoogte op $t = 35$ s.
- c Bereken de hoogte op $t = 18$ s. Rond af op één decimaal.
- d Geef alle tijdstippen t met $-40 \leq t \leq 40$ waarvoor geldt $h = 0$.

11.2 Graden en radialen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met positieve en negatieve draaihoeken;
- hoeken afmeten aan de lengte van hun boog op de eenheidscirkel;
- omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

Voorkennis

- werken met (draai)hoeken die groter zijn dan 90° .
- werken met sinus, cosinus en tangens, ook bij hoeken die groter zijn dan 90° .

Verkennen

Opgave V1

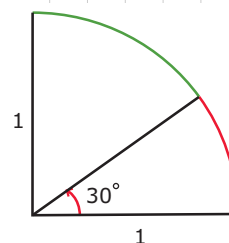
Bekijk de applet

In de figuur is een kwart cirkel getekend, waarvan de straal 1 is. De hele cirkel is in 360° verdeeld, hoeken heb je tot nu toe in graden uitgedrukt.

- a Hoe lang is de rode cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in radialen. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.

- b Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?
- c Reken om van graden naar radialen: 60° , 90° , 180° , 50° .



Figuur 11.1

Uitleg

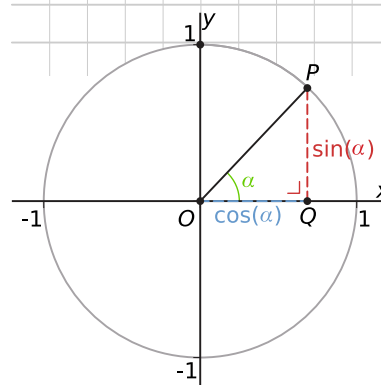
Bekijk de applet.

De grootte van hoeken kun je weergeven in graden, maar ook in booglengte. Het gaat dan om de lengte van de boog die in een cirkel met straal 1 bij die hoek hoort. De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.

De cirkel heet de eenheidscirkel. De omtrek van een eenheidscirkel is gelijk aan 2π .

Bij een booglengte van π (halve cirkel, 180°) hoort een hoek van π rad.

Bij een booglengte van 2π (hele cirkel, 360°) hoort een hoek van 2π rad.



Figuur 11.2



Bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel hoort een hoek van 1 rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen. Je ziet:

- $\sin(\pi) = 0$ en $\cos(\pi) = -1$
- $\sin(1,5\pi) = -1$ en $\cos(1,5\pi) = 0$
- $\sin(2,5\pi) = \sin(0,5\pi + 2\pi) = 1$ en $\cos(4\pi) = \cos(2 \cdot 2\pi) = 1$

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je $180^\circ = \pi$ rad.

Bijvoorbeeld: $40^\circ = \frac{40}{180}\pi$ rad $= \frac{2}{9}\pi$ rad.

Opgave 1

Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal van 1 eenheid).

- Teken P als de draaihoek $\alpha = 30^\circ$. Bereken de coördinaten van P . Hoeveel radialen is α ?
- Teken Q als de draaihoek $\alpha = 150^\circ$. Bereken de coördinaten van Q . Hoeveel radialen is α ?
- Teken R als de draaihoek $\alpha = 210^\circ$. Bereken de coördinaten van R . Hoeveel radialen is α ?
- Teken S als de draaihoek $\alpha = 270^\circ$. Bereken de coördinaten van S . Hoeveel radialen is α ?
- Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$?
- Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$?

Opgave 2

- Hoeveel radialen horen er bij 360° ?
- Waarom is $\sin(0,4) = \sin(0,4 + 8\pi)$?
- Bij welke draaihoeken is de y -coördinaat van het ronddraaiende punt 0? Geef je antwoord in graden en in radialen.
- Bij welke draaihoeken is de y -coördinaat 1? Geef je antwoord in graden en in radialen.

Opgave 3

- Hoeveel radialen is 60° ?
- Hoeveel graden is $1,5\pi$ rad?



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met middelpunt in O . Punt P ligt op de eenheidscirkel.

Voor de **draaihoek** α van P is de **booglengte** genomen vanaf $(1,0)$ tot het draaiende punt, hier P . Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief.

Er geldt:

$$\sin(\alpha) = y_P$$

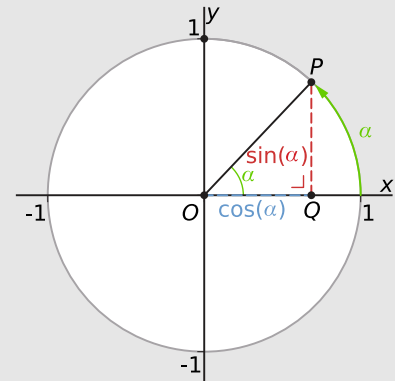
$$\cos(\alpha) = x_P$$

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad.

Op de eenheidscirkel hoort bij een draaihoek van 1 rad een booglengte van 1.

180° komt dan overeen met π radialen of π rad, ofwel de halve omtrek van de eenheidscirkel.

Tenzij anders aangegeven, wordt de hoekeenheid rad gebruikt. Let op de instelling van je rekenmachine.



Figuur 11.3

Voorbeeld 1

Bij het omrekenen van graden naar radialen geldt: 180° is gelijk aan π radialen

- $1^\circ = \frac{1}{180}\pi$ rad
- $90^\circ = \frac{90}{180} \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi$ rad

En omgekeerd:

- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57,295\dots^\circ$
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 30^\circ$

Opgave 4

Punt A beweegt tegen de klok in over een eenheidscirkel met middelpunt M . α is de draaihoek van MA in graden en x is de lengte van de cirkelboog die bij die draaihoek hoort.

- Hoeveel bedraagt x als $\alpha = 360^\circ$?
- Vul de tabel in.

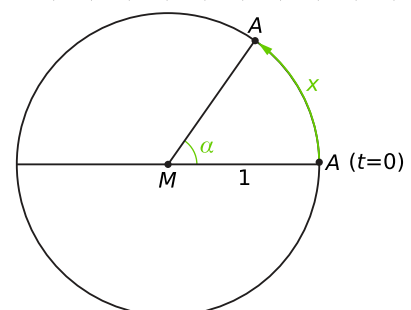
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	225°	270°	330°
x									

Tabel 11.2

- Hoeveel radialen is 10° ?
- Hoeveel graden is 10 radialen?

graden	180	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180}{\pi}$
radialen	π	1	$\frac{1}{6}\pi$

Tabel 11.1



Figuur 11.4

Opgave 5

Neem de tabel over en vul in.

graden	0	18		220		540
radialen			$\frac{5}{9}\pi$		2π	

Tabel 11.3

Voorbeeld 2

Bepaal met een rekenmachine of met Desmos of GeoGebra:

$$\sin\left(\frac{1}{36}\pi\right), \sin\left(\frac{5}{9}\pi\right), \sin\left(5\frac{5}{9}\pi\right) \text{ en } \sin\left(55\frac{5}{9}\pi\right)$$

Rond af op drie decimalen.

Waarom zijn de laatste twee uitkomsten hetzelfde?

Antwoord

Reken in radialen, want er zijn geen gradentekens.

Laat de (grafische) rekenmachine, Desmos, of GeoGebra dan ook in radialen rekenen. Ga na, hoe je dat moet instellen.

Ga na dat:

$$\sin\left(\frac{1}{36}\pi\right) \approx 0,087$$

$$\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right) \approx 0,985$$

$$\sin\left(5\frac{5}{9}\pi\right) \approx -0,985$$

$$\sin\left(55\frac{5}{9}\pi\right) \approx -0,985$$

De laatste twee uitkomsten zijn gelijk omdat tussen $5\frac{5}{9}\pi$ en $55\frac{5}{9}\pi$ precies $50\pi = 25 \cdot 2\pi$ zit. Dat zijn precies 25 periodes.

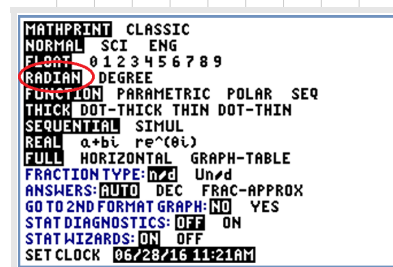
Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- Bepaal afgerond op drie decimalen $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.
- Leg uit waarom $\sin\left(40\frac{1}{55}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.
- Geef nog twee verschillende waarden voor α waarvoor geldt $\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

Opgave 7

- Leg uit waarom $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ en $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$, waarbij k een geheel getal is.
- Welke waarden kunnen $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ aannemen?
- Geef twee verschillende waarden voor α waarvoor geldt: $\cos(0,1\pi) = \cos(\alpha)$



Figuur 11.5 Op de TI-84 Plus

**Voorbeeld 3****Bekijk de applet.**

Je kunt vaststellen dat $\sin(0,52) \approx 0,5$.

Verklaar waarom $\sin(\pi - 0,52) = \sin(0,52)$. Schrijf alle hoeken op waarvan de sinus 0,5 is.

Antwoord

Bekijk de figuur met twee posities van het draaiende punt P op een eenheidscirkel, achtereenvolgens met hoek $0,52$ en $\pi - 0,52$.

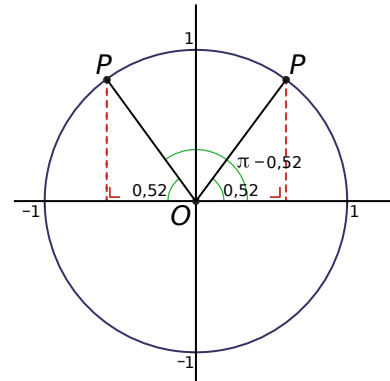
In de eenheidscirkel liggen de punten P bij de hoeken $0,52$ en $\pi - 0,52$ symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door het middelpunt.

Dus is: $\sin(\pi - 0,52) = \sin(0,52)$.

Verder kun je bij beide hoeken veelvouden van 2π optellen.

Alle hoeken met een sinus van 0,5 zijn dus:

$\alpha \approx 0,52 + k \cdot 2\pi \vee \alpha \approx \pi - 0,52 + k \cdot 2\pi \approx 2,62 + k \cdot 2\pi$.



Figuur 11.6

Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 3** dat er binnen één omwentelingsperiode twee hoeken zijn met dezelfde sinus.

- Leg uit waarom $\sin(0,4) = \sin(\pi - 0,4)$.
- Schrijf alle hoeken op waarvan de sinus gelijk is aan $\sin(0,4)$.
- Geldt altijd $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$?

Opgave 9

Je ziet in **Voorbeeld 3** dat er binnen één omwentelingsperiode twee hoeken zijn met dezelfde sinus.

- Leg uit waarom $\cos(0,4) = \cos(2\pi - 0,4)$.
- Schrijf alle hoeken op waarvan de cosinus gelijk is aan $\cos(0,4)$.
- Geldt altijd $\cos(\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$?

Oefenen**Opgave 10**

De hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

- $30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 270^\circ, 360^\circ, 455^\circ, 780^\circ$

De booglengtes zijn in de eenheidscirkel gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

- $\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi; 1; \pi; 3,1416; 10\pi$



Opgave 11

Teken een eenheidscirkel en lees daaruit af:

- a $\sin(0^\circ)$
- b $\sin(90^\circ)$
- c $\cos(180^\circ)$
- d $\sin(270^\circ)$
- e $\sin(-450^\circ)$
- f $\cos(-630^\circ)$

Opgave 12

Met je rekenmachine kun je nagaan dat $\sin(0,4) \approx 0,389$.

- a Bepaal alle waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ waarvan de sinus dezelfde waarde heeft.
- b Geef alle waarden van α waarvan de sinus 0,389 is met $-2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$, ook in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Gegeven is dat: $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Onderzoek welke waarden van α voldoen aan $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

- a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ aan die hieraan voldoen.
- b Geef alle waarden van α die hieraan voldoen met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Toepassen

Naast graden en radialen wordt in bijvoorbeeld de landmeetkunde of de bouw ook de **decimale graad** gebruikt.

Deze graad is gedefinieerd als $\frac{1}{400}$ deel van een cirkel en wordt aangegeven met gon, grad of gra.
Een volledige cirkel is 400 gon.

Opgave 14

Lees na wat een decimale graad is.

- a Hoeveel gon is 90° ?
En hoeveel gon is $\frac{\pi}{3}$ rad?
- b Toon aan dat $\alpha^\circ = \frac{10\alpha}{9}$ gon.
- c Geef een omzettingsformule om van radialen naar gon te gaan.



Opgave 15

Neem de volgende tabel over en vul hem verder in:

graden	0					200	240		
radialen			$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{7}{9}\pi$				4π
gon		20		100				620	

Tabel 11.4

Testen

Opgave 16

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen benaderd.

- a** Deze hoeken zijn gegeven in graden. Reken om naar radialen.
 $60^\circ, 45^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 350^\circ, -350^\circ$.
- b** Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.
 $\pi, \frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{4}\pi, 2\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{12}\pi, 2, \frac{5}{3}\pi$.

Opgave 17

Gegeven $\sin(0,25) \approx 0,25$.

- a** Teken in een eenheidscirkel alle waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ aan die hieraan voldoen.
- b** Schrijf alle waarden van α op die hieraan voldoen. Benaderingen in twee decimalen.

11.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken.

Voorkennis

- werken met radialen;
- een grafiek tekenen met GeoGebra en/of een grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Maak (bijvoorbeeld met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine) de grafiek van $y = \sin(x)$.

Denk er om dat vanaf nu x in radialen is, tenzij duidelijk wordt aangegeven dat er in graden moet worden gewerkt.

- De grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?
- Welke symmetrieassen heeft de grafiek?
- Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.
- Los op: $\sin(x) = 0,5$.
Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinusfunctie.

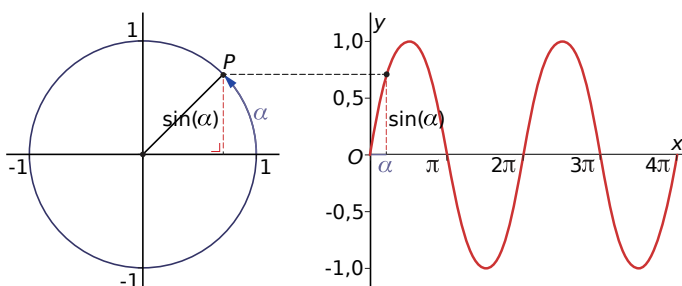
$y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode 2π .

Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y -as komt de waarde van h .

De grafiek loopt links en rechts van de y -as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek getekend zijn.

Hierin is $y = h = \sin(\alpha)$.



Figuur 11.1



Op de horizontale as is de eenheid π , zodat exact de snijpunten met de x -as en de toppen zijn af te lezen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = k \cdot \pi$.

Wil je alle waarden weten waarvoor bijvoorbeeld $h = y = 0,5$ dan los je de vergelijking $\sin(x) = 0,5$ op met je rekenmachine. Daar gebruik je (afhankelijk van je machine) de functie $\arcsin$, of inv $\sin$, of $\sin^{-1}$ voor.

Je vindt dan maar één antwoord $x = \arcsin(0,5) = 0,5235\dots$

Met behulp van de periode en de symmetrie van de grafiek bepaal je de andere x -waarden.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ in **Uitleg 1**.

Maak zelf deze grafiek met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

- Bepaal de coördinaten van de toppen van jouw sinusgrafiek.
- Bepaal de nulpunten van jouw sinusgrafiek.
- Waarom geldt $\sin(x) = \sin(\pi - x)$?

Opgave 2

Je wilt de vergelijking $\sin(x) = 0,6$ oplossen.

Je moet er dan van uit gaan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

- Welke waarde voor x geeft je rekenmachine in drie decimalen nauwkeurig? (Denk om radialen.)
- Welke waarden voor x voldoen aan de vergelijking?

Je wilt alleen de oplossingen in drie decimalen waarvoor geldt $0 \leq x \leq 20$.

- Welke oplossingen zijn dat?



Uitleg 2

Bekijk de applet: sinusfunctie.

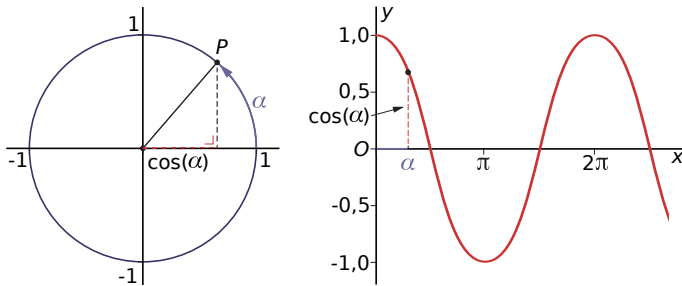
$y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode 2π .

Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y -as komt de waarde van h .

De grafiek loopt links en rechts van de y -as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek getekend zijn.

Hierin is $y = h = \cos(\alpha)$.



Figuur 11.2

Op de horizontale as is als eenheid π genomen.

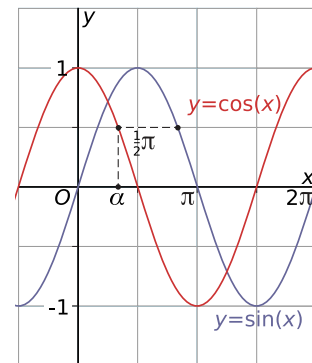
- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$.
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$.
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen lijkt op de standaard sinusgrafiek $y = \sin(x)$.

De grafiek is alleen met $-\frac{1}{2}\pi$ verschoven in de x -richting.

Dit betekent $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je door transformatie uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan.



Figuur 11.3

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ in [Uitleg 2](#).

Maak zelf deze grafiek met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

- Bepaal de coördinaten van de toppen van jouw cosinusgrafiek.
- Bepaal de nulpunten van jouw cosinusgrafiek.
- Waarom geldt $\cos(x) = \cos(-x)$?

Opgave 4

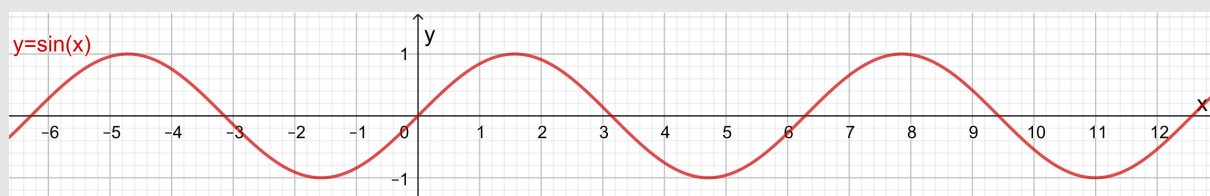
Je wilt de vergelijking $\cos(x) = 0,6$ oplossen.

Je moet er dan van uit gaan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

- Welke waarde voor x geeft je rekenmachine in drie decimalen nauwkeurig? (Denk om radialen.)
- Welke waarden voor x voldoen aan de vergelijking?
Je wilt alleen de oplossingen in drie decimalen waarvoor $0 \leq x \leq 20$.
- Welke oplossingen zijn dat?

Theorie en voorbeelden

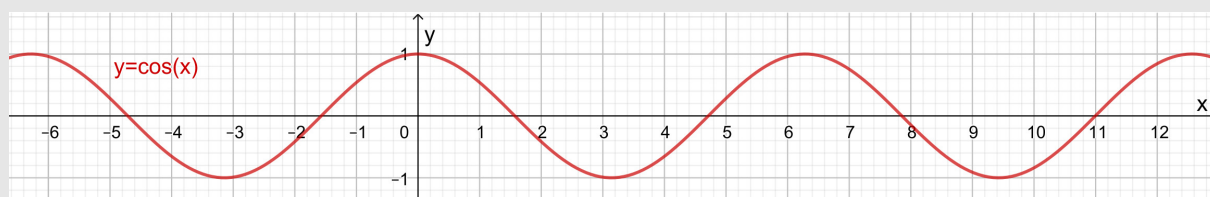
Om te onthouden



Figuur 11.4

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6,28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 11.5

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6,28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x -as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x -richting:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right).$$



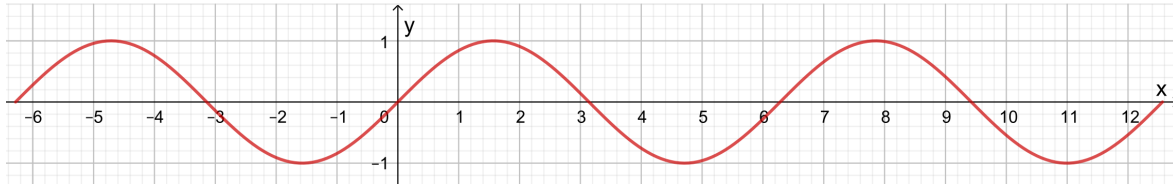
Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $y = \sin(x)$ op het gebied $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Je kunt met je rekenmachine bepalen dat $\sin(0,5) \approx 0,479$ in drie decimalen nauwkeurig.

Voor welke andere x -waarden op het gegeven gebied is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 11.6

Bekijk eerst de grafiek voor $0 \leq x \leq 2\pi$, dus binnen de 'eerste' periode.

Uit de symmetrie volgt: $\sin(0,5) = \sin(\pi - 0,5) = \sin(2,66) \approx 0,479$.

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π .

Daarom geldt dat $\sin(x) = 0,479$ als $x \approx 0,5 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 2,66 + k \cdot 2\pi$.

Op $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ geldt $\sin(x) = 0,479$ voor:

$x \approx -5,80 \vee x \approx -3,62 \vee x \approx 0,50 \vee x \approx 2,66 \vee x \approx 6,76 \vee x \approx 8,95$

Opgave 5

Je bekijkt de functie $y = \sin(x)$ met $0 \leq x \leq 6,5\pi$.

- a Hoeveel periodes zijn er dan zichtbaar?
- b Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \sin(0,1)$? Rond af op drie decimalen.
- c Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \sin(-0,1)$? Rond af op drie decimalen.

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

Gebruik dezelfde sinusgrafiek.

- a Bepaal afgerond op drie decimalen een waarde van x waarvoor $\sin(x) = 0,8$.
- b Leg uit welke x -waarde binnen dezelfde periode ook dezelfde uitkomst geeft.
- c Los op $\sin(x) = 0,8$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.
- d Los op $\sin(x) = -0,5$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

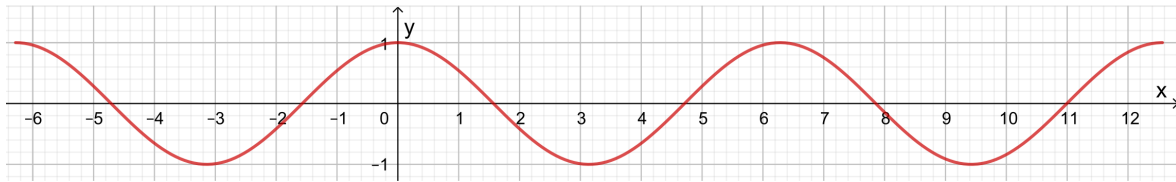


Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $y = \cos(x)$ op het gebied $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Los op: $\cos(x) = 0,1$. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Antwoord



Figuur 11.7

Met je rekenmachine (denk om radialen) vind je: $x \approx 1,471$.

Bekijk eerst de grafiek voor $0 \leq x \leq 2\pi$, dus binnen de 'eerste' periode.

Uit de symmetrie volgt:

$$\cos(1,471) = \cos(2\pi - 1,471) = \cos(4,813) = 0,1.$$

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π .

Daarom geldt dat $\cos(x) = 0,1$ als $x \approx 1,471 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 4,813 + k \cdot 2\pi$.

Op $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ geldt $\cos(x) = 0,1$ voor:

$$x \approx -4,813 \vee x \approx -1,471 \vee x \approx 1,471 \vee x \approx 4,813$$

$$x \approx 7,754 \vee x \approx 11,096$$

Opgave 7

Je bekijkt de functie $y = \cos(x)$ met $-0,5\pi \leq x \leq 6,5\pi$.

- Hoeveel periodes zijn er dan zichtbaar?
- Voor welke waarden van x in het gegeven gebied geldt $y = \cos(0,1)$? Rond af op drie decimalen.
- Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \cos(-0,1)$? Rond af op drie decimalen.

Opgave 8

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

Gebruik dezelfde cosinusgrafiek.

- Bepaal afgerond op drie decimalen een waarde van x waarvoor $\cos(x) = 0,8$.
- Leg uit welke x -waarde binnen dezelfde periode ook dezelfde uitkomst geeft.
- Los op $\cos(x) = 0,8$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.
- Los op $\cos(x) = -0,5$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.



Oefenen

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ met $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

Los op. Geef je antwoorden afgerond op drie decimalen.

- a $\sin(x) = 0,35$
- b $\sin(x) = -0,35$
- c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ met $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

Los op. Geef je antwoorden afgerond op drie decimalen.

- a $\cos(x) = 0,35$
- b $\cos(x) = -0,35$
- c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 11

Geef alle oplossingen.

- a $\sin(x) = 1$
- b $\sin(x) = \sin(1)$
- c $\sin(1) = x$

Opgave 12

Geef alle oplossingen. Rond zo nodig af op drie decimalen.

- a $\cos(x) = 1$
- b $\cos(x) = \cos(1)$
- c $\cos(1) = x$
- d $\cos(x) = \sin(1)$

Opgave 13

Maak de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ in één figuur.

Los op: $\sin(x) = \cos(x)$.



Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

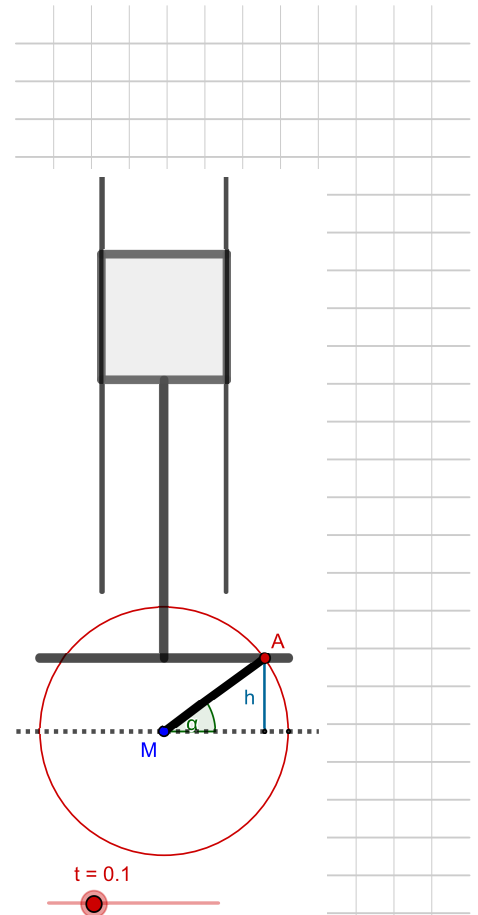
In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.

Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.

Gegeven is $MA = 1$ decimeter.

De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h = \sin(x)$.



Figuur 11.8

Opgave 14

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

- In welke eenheid is h uitgedrukt?
- Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?
- Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?
Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.
- Hoe wordt de formule voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 15

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt.

- Welke formule kun je opstellen voor h als functie van t ?
- Maak de grafiek bij de formule die je bij a hebt gevonden.
Hoe kun je die uit de standaardsinus afleiden?
- Op welke tijdstippen geldt $h = 8$ cm? Geef je antwoorden in honderdsten van seconden nauwkeurig.



Testen

Opgave 16

Gegeven is de grafiek van $y = \sin(x)$ met $20\pi \leq x \leq 24\pi$.

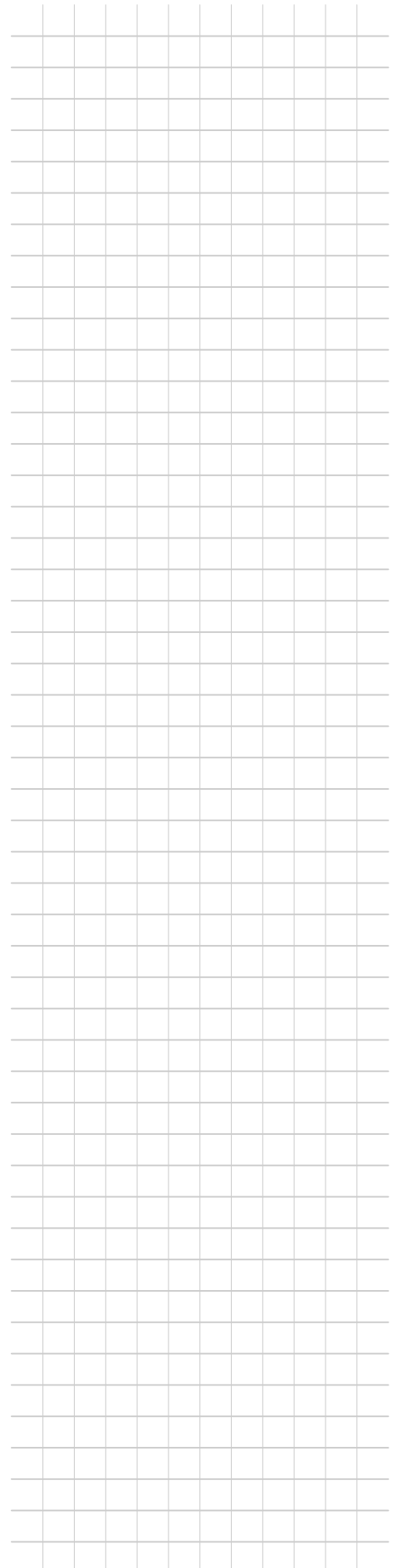
Je weet dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \approx 0,866$ op drie decimalen nauwkeurig.

Bij welke andere waarden van x binnen het gegeven gebied vind je dezelfde uitkomst? Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 17

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$. Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

- a** $\cos(x) = 0,95$
- b** $\cos(x) = -0,95$



11.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ tekenen met x in radialen;
- in dergelijke grafieken de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de frequentie van het bijbehorende periodieke verschijnsel benoemen en interpreteren;
- vergelijkingen van de vorm $a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d = p$ oplossen.

Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken.
- een grafiek tekenen met GeoGebra en/of een grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

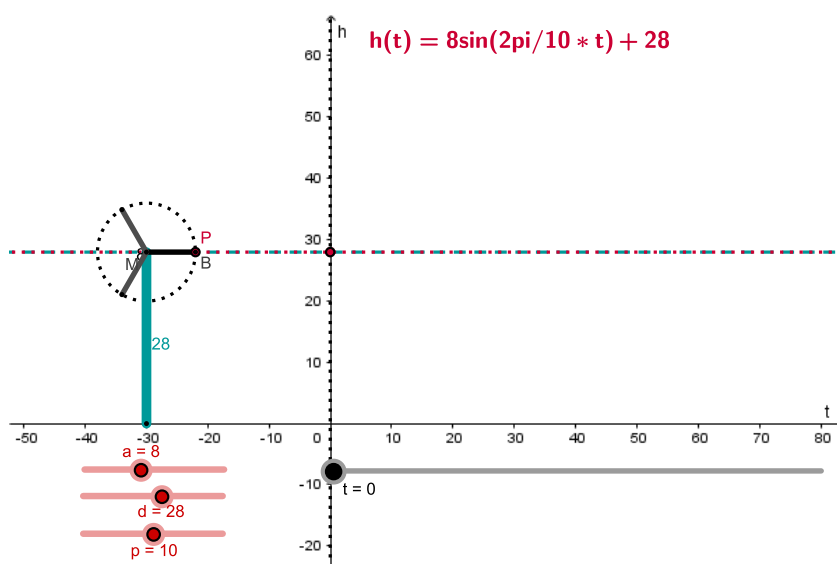
Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een schematische tekening van een windmolen. Punt P is een vleugeltip.

De hoogte van de molen is d (in m), de lengte van de wieken is a (in m) en de omwentelingstijd van een wiek is p (in s).

Bekijk de applet: windmolen.



Figuur 11.1

Als $a = 8$, $d = 28$ en $p = 10$, dan is:

$$h = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right) + 28$$



de formule die de hoogte h (in m) van punt P boven de grond beschrijft.

- Leg uit hoe je aan deze formule komt.
- Bekijk de grafiek van h . De horizontale stippellijn heet wel de evenwichtsstand van de grafiek.
Door welk getal wordt die evenwichtsstand bepaald?
- De maximale uitwijking uit de evenwichtsstand heet de amplitude.
Welk getal bepaalt de amplitude?
- Waar vind je in de formule van h de periode (de omwentelingstijd) terug?
- Het punt Q is de vleugeltip van de volgende wiel. De grafiek van de hoogte h_Q van die tip lijkt erg op die van h . Welk verschil is er? En welke formule hoort er bij h_Q ?

Uitleg

Hier zie je een schematische weergave van een windmolen. Neem aan dat punt P rondjes draait met een periode van 5 seconden, de omwentelingstijd. De hoogte van de molen (neem aan dat dit ook de hoogte van de draaias is) en de lengte van de wieken zijn gegeven in de figuur. De hoogte h (in m) van punt P boven de grond, hangt af van de tijd t in seconden:

$$h = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) + 28$$

Ga zelf na, hoe je deze formule kunt beredeneren en maak de bijbehorende grafiek.

Het wordt een sinusgrafiek die uit de standaard sinusfunctie ontstaat door:

- met $\frac{1}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2\pi}$ te vermenigvuldigen in de x -richting,
ofwel de periode 5 te maken;
- met 10 te vermenigvuldigen in de y -richting,
ofwel de maximale uitwijking, de amplitude, 10 te maken;
- met 28 te verschuiven in de y -richting,
ofwel de evenwichtsstand 28 te maken.

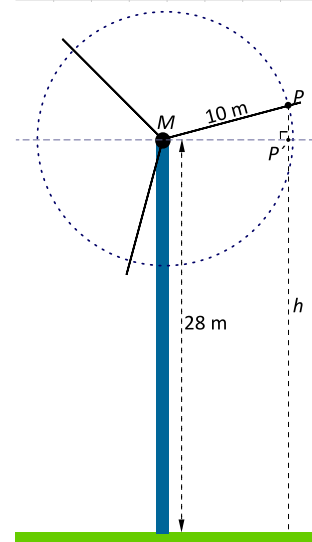
Om de grafiek goed in beeld te krijgen neem je op de horizontale as (de t -as) minstens twee periodes: $0 \leq t \leq 10$.

Op de verticale as zit de grafiek tussen $28 - 10 = 18$ en $28 + 10 = 38$.

Opgave 1

Bekijk de formule van de hoogte h van punt P afhankelijk van de tijd t in de **Uitleg**.

- Maak zelf de grafiek van h . Kies geschikte instellingen voor de assen.
- De evenwichtsstand van dit periodieke verschijnsel is een horizontale lijn.
Welke formule hoort daarbij?



Figuur 11.2



- c Welke maximale waarden heeft de grafiek van h ? En welke waarden voor t horen daarbij?
- d Welke minimale waarden heeft de grafiek van h ? En welke waarden voor t horen daarbij?
- e Welke positie heeft P als $t = 0$?
- f Waaraan zie je dat P tegen de klok in draait?

Opgave 2

Een andere windmolen heeft een hoogte van 35 m en wieken met een lengte van 15 m.

De omwentelingstijd van de wieken is 3 seconden.

Je bekijkt de hoogte h (in m) van de tip van een wiek afhankelijk van de tijd t (in s).

De wieken draaien linksom en op $t = 0$ wijst deze wiek precies horizontaal naar rechts.

- a Welke formule kun je voor h opstellen?
- b Welke transformaties moet je op de standaard sinusgrafiek toepassen om de grafiek van h te krijgen?
- c Hoe groot zijn de amplitude en de evenwichtsstand?
- d Op welke tijdstippen is $h = 25$ m? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- e Hoe lang elke periode is $h \geq 25$ m? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Bekijk de formule van h in de **Uitleg**.

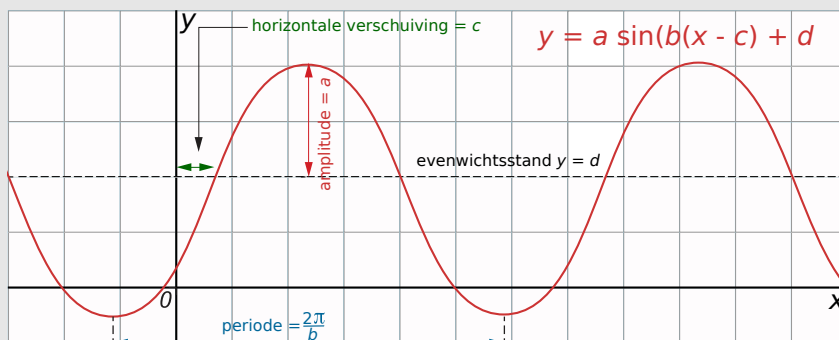
De windmolen heeft nog twee wieken. Q is de tip van de wiek die eenzelfde hoogtegrafiek heeft als P maar precies $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ seconde later.

- a Hoe loopt de grafiek van h_Q , de hoogtegrafiek van punt Q ?
- b Schrijf een formule voor h_Q op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: **transformaties sinusgrafiek**.



Figuur 11.3



Door transformaties van de grafiek van $y = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.

De grafieken van deze functies heten **sinusoiden**.

De grafiek van de functie $y = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoid, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a ;
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$; de **frequentie** is het aantal periodes per tijdseenheid;
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een verschuiving in de x -richting;
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een foto van het **reuzenrad** in het Prater in Wenen. Er bestaan reuzenraden van diverse afmetingen. Sommige zijn meer dan 150 m hoog.

P is de positie van een bakje van een reuzenrad. Voor de hoogte h van dit bakje boven de begane grond geldt:

$$h = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21$$

waarin t de tijd in seconden is.

Leid de afmetingen van dit reuzenrad en de omwentelingstijd van het bakje af uit de formule.

Bereken hoe lang je elke omwenteling meer dan 30 m boven de grond zit.

Antwoord

Van dit periodieke verschijnsel is de evenwichtsstand $h = 21$ en de amplitude 20.

Dat betekent dat de straal van het reuzenrad 20 m is en de totale hoogte $21 + 20 = 41$ m is.

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π .

Voor de tijd t voor één omwenteling moet $\frac{\pi}{15} \cdot t = \frac{2\pi}{30} \cdot t = 2\pi$.

Dit geeft voor de omwentelingstijd, de periode 30 s.

Je zit meer dan 30 m boven de grond als geldt

$$20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 > 30.$$

Je lost dus eerst op: $20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 = 30$.

Dit herleid je tot: $\sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) = 0,45$.

Daarna werk je de sinus weg met behulp van je rekenmachine en los je de ongelijkheid op met behulp van de grafiek.



Figuur 11.4



Opgave 4

Bekijk de formule van de hoogte h van een bakje van een reuzenrad boven de grond in **Voorbeeld 1**.

- Leg uit waarom dit reuzenrad 41 hoog moet zijn.
- Op welke hoogte moet je waarschijnlijk in het bakje instappen?
- Los de vergelijking $20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 = 30$ zelf stap voor stap op.
- Bereken hoe lang je elke omwenteling meer dan 30 m boven de grond zit.

Opgave 5

Bekijk de functie $h = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21$ met $0 \leq t \leq 60$.

- Hoeveel periodes zijn zichtbaar?
- Met welke transformaties kun je de grafiek van h laten ontstaan uit die van de standaard sinusfunctie?

Voorbeeld 2

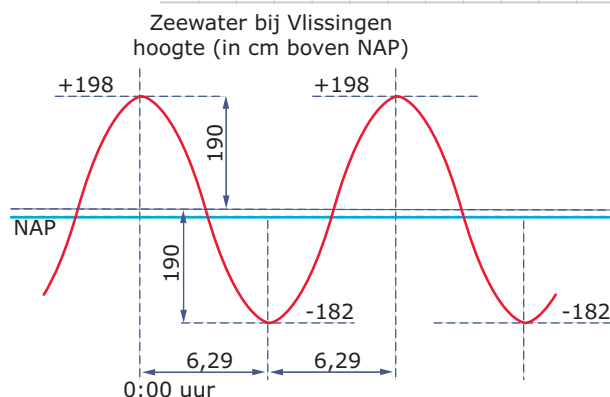
De grafiek in de figuur geeft globaal de getijdebeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de formule:

$h = 8 + 190 \cos\left(\frac{2\pi}{12,58} \cdot t\right)$ met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en h in cm ten opzichte van het NAP.

Met welke frequentie treedt per week hoogwater op?

Hoeveel uur per dag is de waterstand hoger dan 1 m boven NAP?



Figuur 11.5

Antwoord

De periode van dit periodiek verschijnsel is ongeveer 12,58 uur.

Een week heeft $7 \cdot 24 = 168$ uur.

De hoogwater frequentie per week is dus $\frac{168}{12,58} \approx 13,4$.

Je moet nu de vergelijking $8 + 190 \cos\left(\frac{2\pi}{12,58} \cdot t\right) = 100$ oplossen.

Dit kun je doen vanuit GeoGebra of een grafische rekenmachine, maar je kunt ook de balansmethode toepassen.



Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Waarom is deze sinusoid uit de standaard cosinusfunctie afgeleid?
- b Hoe hoog is de evenwichtsstand volgens de gegeven formule? En de amplitude?
- c Hoe groot is de frequentie van hoogwater per dag?
- d Op welke tijdstippen is het op 23 juni 2008 hoogwater geweest?

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de vraag gesteld hoe lang de waterstand dagelijks hoger dan 1 m boven NAP zit.

- a Los zelf de bijbehorende vergelijking stap voor stap op met de balansmethode.
- b Beantwoord nu de vraag.

Oefenen

Opgave 8

De grafieken van de functies zijn sinusoiden. Geef van iedere sinusoid de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.

- a $y = 12 \cdot \sin(x)$
- b $h = 50 \sin(2\pi t) + 10$
- c $y = 120 \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) - 20$
- d $P = 15 - 20 \sin(2x)$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op. Rond af op drie decimalen.

- a $10 \sin(x - 2) = 5$
- b $50 - 30 \cos\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 10

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$$h = 11 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$$

Hierin is h uitgedrukt in meter en t in seconden.

- a Maak de grafiek van h .
- b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke betekenis?
- c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.
- d Bereken hoelang een bakje van een reuzenrad zich hoger dan 18 meter boven de grond bevindt.

Opgave 11

De menselijke ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud V kan daarbij met zo'n halve liter toenemen. Het longvolume na inademen is 5,2 liter. Hierbij past bij benadering de formule:

$$V = 4,95 + 0,25 \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right)$$

met t de tijd in seconden en V het longvolume in liter.

- Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut? En hoe lang duurt elke ademhaling volgens de formule?
- Bepaal de evenwichtsstand, de periode en de amplitude van deze sinusöide.
- Op welke momenten is de longinhoud minimaal?

Opgave 12

Op 24 november 2015 werd voorspeld dat op 15 december 2016 het waterpeil bij Hoek van Holland hoog zou zijn om 3:05 uur en om 15:23 uur.

Er werd een model opgesteld van het getij, hierbij werd een sinusöide $h = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$ gebruikt voor de hoogte van de waterstand.

t wordt genomen in uren.

Hoe groot is b in dit model?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. Hoe vaker de snaar per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamerton', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling want de bijbehorende formule heeft de vorm van een sinusöide.

Bij deze A hoort een harmonische trilling met formule $u = 0,5 \cdot \sin(880\pi \cdot t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

Opgave 13

Bekijk de formule voor de harmonische trilling die hoort bij de A van een piano.

- Maak de bijbehorende grafiek, precies twee periodes.
Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.
- Geef een mogelijke formule voor de harmonische trilling die bij de eerste boventoon hoort.



Figuur 11.6



- c Neem aan dat de A en zijn eerste boventoon samen het geluid bepalen.
Hoe ziet de grafiek er uit als je hun bijbehorende trillingen optelt?
Krijg je opnieuw een harmonische trilling?

Testen

Opgave 14

Bepaal van de functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

- a $y = 4 \sin(4\pi x)$
b $y = 6 + 2 \sin(x + 8)$
c $y = 0,5 \cos(0,5\pi x) + 3$

Opgave 15

De wieken van een windmolen draaien rond. De hoogte h van de tip van één van die wieken boven de begane grond wordt gegeven door:

$$h = 45 + 18 \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

met t de tijd in seconden en h de hoogte in m.

- a Met welke omwentelingstijd draaien deze wieken rond?
b Hoe lang zijn de wieken van deze molen en op welke hoogte zit de draaias van het stel wieken?
c Maak een grafiek van h waarin precies twee periodes zichtbaar zijn.
Welke instellingen voor de assen zijn dan nodig?
d Hoeveel tijd is deze tip zichtbaar boven een fabriek die voor de molen staat en 35 m hoog is?

11.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met periodieke verschijnselen en ontdekt dat functies met sinus en cosinus standaard periodieke functies zijn. Daarbij hoort het werken met radialen in plaats van graden. Verder zijn de begrippen periode, frequentie, evenwichtsstand en amplitude voorbij gekomen. Deze zijn vaak goed te gebruiken bij het beschrijven van periodieke verschijnselen.

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- periodiek verschijnsel — periode — frequentie
- radiaal — positieve en negatieve draaihoeken
- standaard sinusfunctie — standaard cosinusfunctie
- sinusoïde — amplitude, evenwichtsstand

Activiteitenlijst

- een periodiek verschijnsel herkennen — rekenen met de periode en de frequentie van een periodiek verschijnsel;
- hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd — sinus en cosinus van hoeken in radialen bepalen;
- grafieken tekenen van de functies $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ met x in radialen — vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = c$ of $\cos(x) = c$ oplossen;
- aan de formule herkennen wanneer een functie een sinusoïde is — de periode, de frequentie, de amplitude en de evenwichtsstand benoemen en gebruiken — vergelijkingen van de vorm $a \cdot \sin(b(x + c)) + d = p$ oplossen.

Testen

Opgave 1

Reken de hoeken in graden om naar radialen tussen 0 en 2π , en omgekeerd. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a 120°
- b 700°
- c $\frac{5}{6}\pi$ rad
- d $\frac{5}{6}$ rad

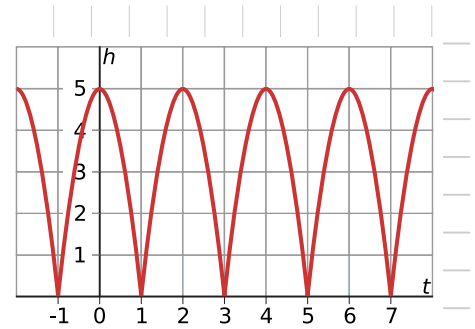


Opgave 2

Bekijk een periodieke grafiek.

Voor $-1 \leq t \leq 1$ geldt $h = 5 - 5t^2$

- a Bepaal de periode van de grafiek.
- b Voor welke waarden van t geldt $h = 0$?
- c Bereken h als $t = 6,5$.
- d Bereken h als $t = 112$.



Figuur 11.1

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

- a $2 \sin(x) = \sqrt{2}$
- b $\cos(x) = \cos(2)$
- c $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$
- d $25 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{7}t\right) = 17$

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse Zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$$y = 0,4 + 1,5 \sin\left(\frac{2\pi}{12,25} \cdot t\right)$$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP. Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

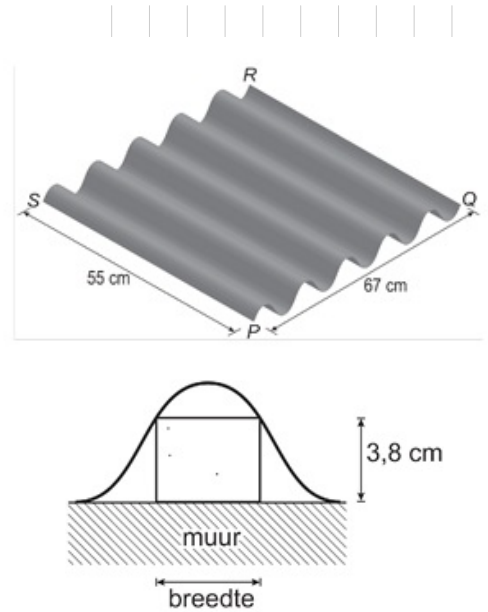
Hoe hoog moet de zeedijk van Petten minimaal zijn? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

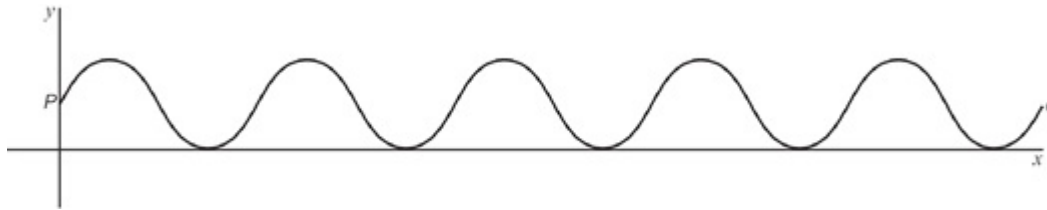
Golfplaat is een bouw materiaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hier naast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$$y = 3 + 3 \sin(0,469x)$$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In de figuur hiernaast is dit geschetst.



Figuur 11.2



Figuur 11.3

- a** Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat (zie de figuur rechtsboven) is een rechthoek $PQRS$. $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm. Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q . De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusöide.

- b** Stel een formule op van deze sinusöide als deze op ware grootte in een assenstelsel zoals in het vooraanzicht wordt weergegeven.

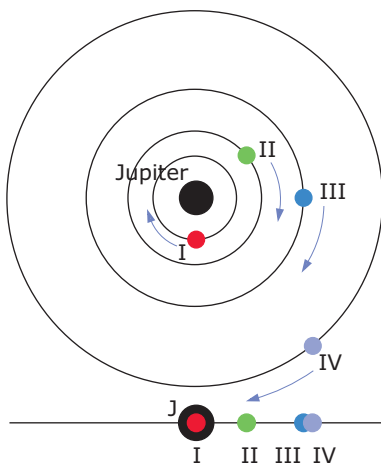
Toepassen

In 1610 werden **de vier helderste Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie hemel.waarnemen.com: **Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008**. Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008. Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u_G = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{7,2}(t - 10)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 september 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen. En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 september 2008 om 0:00 uur getekend.



Figuur 11.5



Figuur 11.4



Opgave 6

Bekijk de gegevens van de Jupitermanen en de figuur van hun stand op 1 september 2008.

- a Teken zelf een figuur voor deze vier manen met het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

De diameter van Jupiter is ongeveer 142.980 km.

- b Hoe ver is Ganymedes gemiddeld van Jupiter verwijderd?
- c Hoeveel dagen doet Ganymedes over één omwenteling rond Jupiter?

Opgave 7

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking u ten opzichte van Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen. Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0,378(t - 7,5))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

- a Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de grafiek in het slingerdiagram van september 2008.

Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

- b Stel zo'n formule op voor de Jupitermaan Europa.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

- c Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

1

2

Ruimtelijke figuren

12.1 Lichamen	44
12.2 Aanzichten	52
12.3 Doorsneden	62
12.4 Oppervlakte en inhoud	70
12.5 Totaalbeeld	79

12.1 Lichamen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren.

Voorkennis

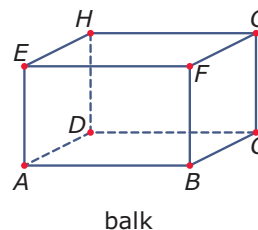
- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens, de sinusregel en de cosinusregel.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm en $AE = 5$ cm.

Bereken $\angle CAG$.



Figuur 12.1

Uitleg

Het probleem bij **Verkennen V1** heb je waarschijnlijk wel meteen kunnen oplossen. Daarbij heb je dan gebruik gemaakt van kennis over ruimtelijke figuren. Je moet weten wat een balk is, waar de rechte hoeken in een balk zitten, en dergelijke meer.

Je noemt een ruimtelijke figuur vaak een lichaam. Zo'n lichaam heeft één of meer grensvlakken, die vaak plat, maar ook gebogen kunnen zijn. Gebogen grensvlakken heb je bij een bol, een kegel, een cilinder.

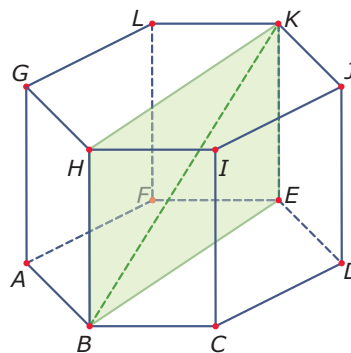
Lichamen die alleen uit platte grensvlakken bestaan heten veelvlakken. Deze hebben hoekpunten en ribben. Ook zijn er dan vaak diagonalen in twee soorten: zijvlaksdagonalen en lichaamsdiagonalen.

Het veelvlak $ABCDEF.GHIJKL$ hiernaast bijvoorbeeld heet een regelmatig zeshoekig prisma. Dat komt omdat van dit lichaam:

- het grondvlak en het bovenvlak congruente regelmatige zeshoeken zijn;
- alle opstaande zijvlakken rechthoeken zijn.

In feite is elke doorsnede van dit lichaam die evenwijdig is met het grondvlak een regelmatige zeshoek.

Verder zie je diagonaalvlak $BEKH$ met daarin lichaamsdiagonaal BK .



Figuur 12.2



In de **Theorie** vind je een overzicht van de belangrijkste lichamen en hun eigenschappen. Ook worden er de rekentechnieken die je al kent nog eens genoemd.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een voorbeeld van een prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn.

- Hoeveel hoekpunten, hoeveel ribben en hoeveel grensvlakken heeft dit prisma?
- Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma? En hoeveel lichaamsdiagonalen?
- Teken het grondvlak van dit prisma op ware grootte. Leg uit, waarom diagonaal $BE = 8$ cm en diagonaal $BF = 4\sqrt{3}$ cm.
- Teken het diagonaalvlak $BEKH$ op ware grootte. Bereken de grootte van $\angle EBK$ in graden nauwkeurig.
- Teken het diagonaalvlak $BFLH$ op ware grootte en bereken de grootte van $\angle FBL$ in graden nauwkeurig.

Opgave 2

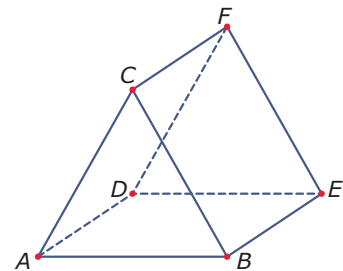
Je ziet hier een ander prisma, de figuur staat ook op het **werkblad**. Hier zijn het voorvlak en het achtervlak congruente gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm. Alle andere grensvlakken zijn vierkanten.

- Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?
- Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma?
- M is het midden van ribbe CF . Teken $\triangle ABM$ zowel in de figuur als op ware grootte.
- Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

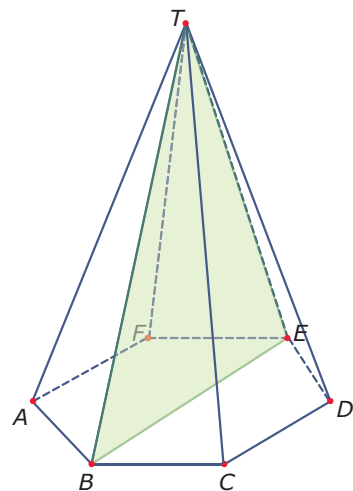
Opgave 3

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. Alle opstaande ribben zijn 24 cm.

- Heeft deze piramide lichaamsdiagonalen? En zijvlaksdagonalen? En diagonaalvlakken?
- Bereken de grootte van $\angle BTE$ in graden nauwkeurig.
- Bereken de grootte van $\angle BTF$ in graden nauwkeurig.



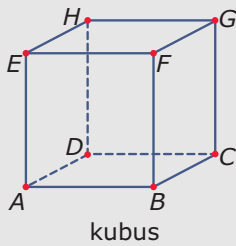
Figuur 12.3



Figuur 12.4

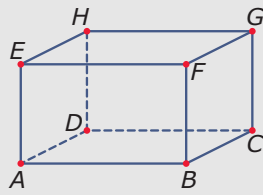
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



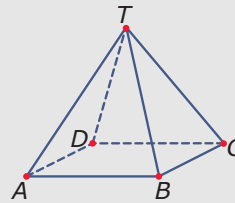
kubus

Alle ribben even lang, alle grensvlakken zijn vierkanten.



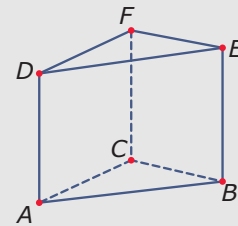
balk

Alle grensvlakken zijn rechthoeken (of vierkanten).



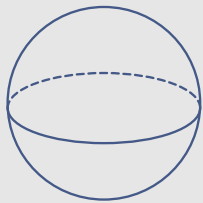
piramide

Eén grondvlak (een veelhoek), alle andere grensvlakken zijn driehoeken die samen komen in de top T .



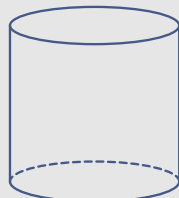
prisma

Twee overstaande congruente veelhoeken, alle andere grensvlakken zijn rechthoeken (of parallellogrammen als het prisma scheef is).



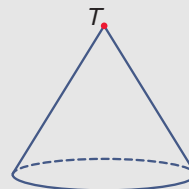
bol

Alle punten op de bol liggen even ver (de straal) van het middelpunt van de bol.



cilinder

Twee grensvlakken zijn congruente cirkels, daartussen zit één gebogen buisvormig grensvlak.



kegel

Het grondvlak is een cirkel en daarop staat één gebogen vlak met top T .

Figuur 12.5

Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken. Je ziet hier een overzicht van enkele veel voorkomende lichamen.

Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**. Piramides en prisma's hebben een **grondvlak** en een **hoogte**.

Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken;
- de sinusregel en de cosinusregel in willekeurige driehoeken.

**Voorbeeld 1**

Hier zie je een balk $ABCD.EFGH$. In het diagonaalvlak $ACGE$ is de lichaamsdiagonaal AG getekend. Ook zie je daarin lijnstuk CM , waarbij M het midden van EG is. In deze figuur is $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 5$ cm.

Bereken de lengte van lijnstuk CN in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Het lijnstuk waarvan je de lengte wilt berekenen ligt in diagonaalvlak $ACGE$ en dat is een rechthoek met zijden $AC = 10$ cm en $CG = 5$ cm.

Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je de lengte van zowel AG als CM berekenen. En dan kun je met gelijkvormigheid werken. Zie je al welke driehoeken gelijkvormig zijn?

Je vindt $CN \approx 4,71$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Leg uit waarom $AC = 10$ cm.
- Bereken nu zelf de lengtes van AG en CM .
- Welke twee gelijkvormige driehoeken vind je in diagonaalvlak $ACGE$? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van CN .
- Je kunt de lengte van CN ook berekenen door bijvoorbeeld in $\triangle ACN$ de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe je dan te werk gaat.

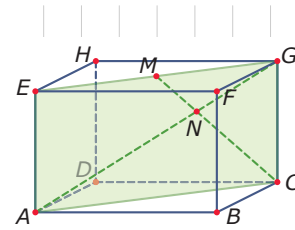
Opgave 5

Je ziet de nestkast van een torenvalk.

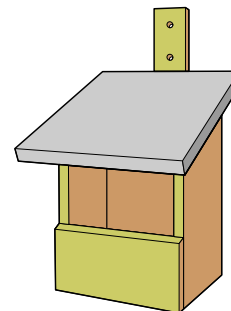
Het met zink beklede dak is een vierkant van 6 cm bij 6 cm.

De achterwand is een rechthoek van 5 bij 8 cm en het grondvlak een rechthoek van 5 bij 4 cm. Van de voorkant van de nestkast is de onderste helft dichtgemaakt met een rechthoekig plankje van 5,6 bij 3,3 cm. De plankjes en het zinken dak zijn 3 mm dik.

- Welke naam heeft het lichaam dat de binnenruimte van deze nestkast voorstelt?
- Hoe groot zijn de zijden van een zijwand van deze nestkast?
- Hoe groot zijn de hoeken van een zijwand van deze nestkast?



Figuur 12.6



Figuur 12.7

Voorbeeld 2

Deze tekening stelt een tent voor. De afmetingen zijn in de figuur gegeven. Ga er van uit dat de lichter gekleurde stippellijnen in een snijpunt loodrecht op elkaar staan.

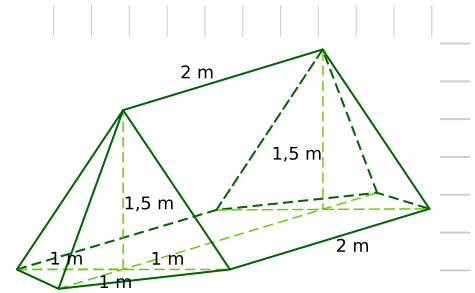
Welke ruimtelijke figuren herken je in de vorm van deze tent?
Aan de voorzijde zie je twee schuin staande driehoeken. Bereken daarvan de afmetingen.

Antwoord

De figuur bestaat uit twee halve piramides aan de voorkant en de achterkant. Het middenstuk is een driehoekig prisma.

De afmetingen van de zijden van zo'n driehoek zijn met behulp van de stelling van Pythagoras te berekenen.

Ga na, dat het een gelijkbenige driehoek is met benen van $\sqrt{3,25} \approx 1,80$ m en een basis van $\sqrt{2} \approx 1,41$ m.



Figuur 12.8

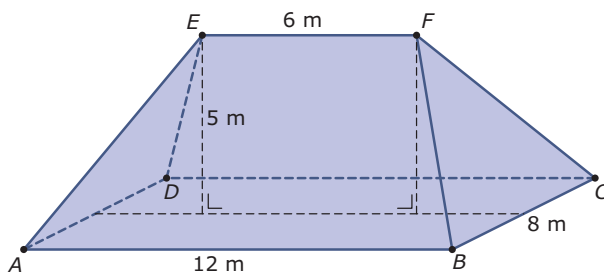
Opgave 6

Bekijk de tent in **Voorbeeld 2**. Hij heeft ook een grondzeil dat de hele bodem bedekt.

- Bereken zelf de afmetingen van één van de driehoeken aan de voorkant.
- Teken een uitslag van de tent.

Opgave 7

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE , DE , BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD .



Figuur 12.9

- Laat zien hoe je de figuur kunt verdelen in een prisma en twee piramides die je kunt samenvoegen tot één vierzijdige piramide. Wordt dit een regelmatige vierzijdige piramide?
- Bereken de lengtes van de vier opstaande ribben van dit stolpdak.
- Bereken de drie hoeken van elk van de twee driehoekige dakdelen.
- Bereken de vier hoeken van elk van de twee trapeziumvormige dakdelen.



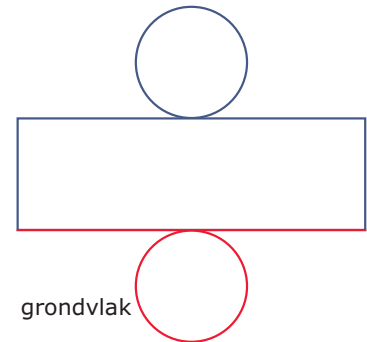
Voorbeeld 3

Een verpakking is vaak een hol lichaam dat in zijn vorm wordt gevouwen vanuit een uitslag. (Meestal is het meer een bouwplaat, een uitslag met plakranden en allerlei extra's om de vorm stevig te houden.)

Hoe ziet een uitslag van een cilindrisch blik met een diameter van 8,6 cm en een hoogte van 8,6 cm er uit?

Antwoord

Als een rechthoek met een lengte die net zo groot is als de omtrek van de grondcirkel en een breedte van 8,6 cm. Daar zitten dan twee cirkels met een diameter van 8,6 cm aan vast, eentje aan de bovenkant en eentje aan de onderkant.



Figuur 12.10

Opgave 8

Teken de uitslag van de cilinder beschreven in [Voorbeeld 3](#) op schaal 1 : 2.

Opgave 9

Uit een plaat koper is een halve cirkel gesneden met een diameter van 12 cm.

Deze plaat koper wordt tot een kegelvorm gebogen.

Hoe hoog wordt die kegel en welke diameter heeft het grondvlak?

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ met zijden van 4,5 cm.

Bereken de grootte van de hoeken HBD en FCA .

Opgave 11

Piramide $ABCD.T$ heeft vier gelijke opstaande ribben van 10 cm.

Het grondvlak is een rechthoek met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm.

- a Bereken de hoogte van deze piramide.
- b Bereken de grootte van de hoeken ATC en BAT .

Opgave 12

Balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 4$, $AD = 3$ en $AE = 3$.

Punt S is het snijpunt van alle lichaamsdiagonalen.

- a Bereken $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.
- b Bereken $\angle ASC$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

- Welke ruimtelijke figuur stelt het doosje bij benadering voor?
- Hoe groot zijn de hoeken van de achthoekige bodem van zo'n doosje?
- Hoe groot is het langste rechte staafje dat je nog op de bodem van dit doosje kunt leggen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Hoe groot is het langste rechte staafje dat in dit doosje past?

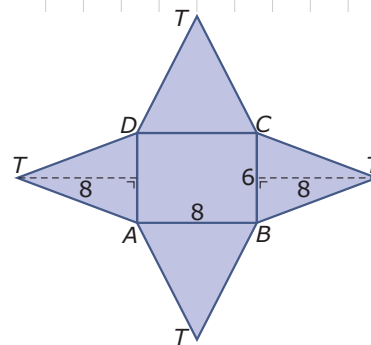


Figuur 12.11

Opgave 14

Je ziet hier de uitslag van een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.

- Hoe lang zijn de ribben van deze piramide?
- Hoe hoog wordt deze piramide?



Figuur 12.12

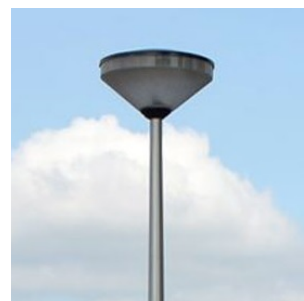
Opgave 15

Je ziet hier het bovenste deel van een lantaarnpaal.

De diameter van de buis van de lantaarnpaal vlak onder de lamp is 16 cm.

De lamp zit in een afgeknotte kegel van kunststof. Daar zit nog een smalle cilindervorm met een diameter van 60 cm boven. De afgeknotte kegel wordt gemaakt uit een kunststofplaat in de vorm van een halve cirkel met een diameter van 120 cm waaruit een kleinere halve cirkel met hetzelfde middelpunt is weggesneden.

Hoe groot is de diameter van die kleinere cirkel en hoe hoog is de afgeknotte kegel?



Figuur 12.13

Toepassen

Deze robotarm kan van alles: lasersnijden, 3D-printen, decoraties aanbrengen, etc.

Je moet op de plek van het oog alleen het juiste instrumentje aanbrengen.

De robotarm kan ronddraaien op zijn voet en heeft drie scharnierpunten.

De posities die het oog zo kan aannemen vormen de werkruimte van de robotarm. Die werkruimte heeft de vorm van een (deel van) een lichaam, een 3D-figuur.



Figuur 12.14

Opgave 16

Bekijk de tekst over de robotarm. De twee delen van de arm zijn 50 cm lang.

- Welk lichaam beschrijft de werkruimte van deze robotarm als de voet ervan bevestigd is op een tafel?
- Welk lichaam beschrijft de werkruimte van deze robotarm als de voet ervan kan bewegen op een stuk rails van 50 cm lengte?

Opgave 17

Deze robotarm bestaat uit de buis die een half rondje om zijn as kan draaien en waarbinnen een voetstuk op en neer kan bewegen. Aan dat voetstuk is een scharnierende arm bevestigd. Aan het eind van die arm bevestig je een pen, een boor, een naald, een printkop, etc. Enkele afmetingen:

- het op en neer gaande voetstuk kan van 5 cm boven het grondvlak tot 25,4 cm boven het grondvlak bewegen;
- het op en neer gaande voetstuk steekt 6 cm uit vanaf de as van de buis;
- de scharnierende arm is 10 cm lang en heeft een hoogte van 5 cm.

De werkruimte van deze robot bestaat uit alle mogelijke posities van het eindpunt van de scharnierende arm.

- Hoe ver kan het eindpunt van de scharnierende arm vanaf de as van de buis komen?
- Beschrijf de vorm van de werkruimte.

Testen

Opgave 18

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 4 cm. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD en $TS = 10$ cm. Punt M is het midden van TS .

- Teken deze piramide met daarin een lijn door M evenwijdig aan BD . Noem de snijpunten met TB en TD respectievelijk P en Q .
- Bereken de lengte van AP en PQ .
- Teken $\triangle APQ$ op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Opgave 19

Een kegel wordt gevormd uit een halve cirkel met een diameter van 40 cm.

Hoe hoog wordt die kegel in mm nauwkeurig?



Figuur 12.15

12.2 Aanzichten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- aanzichten gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

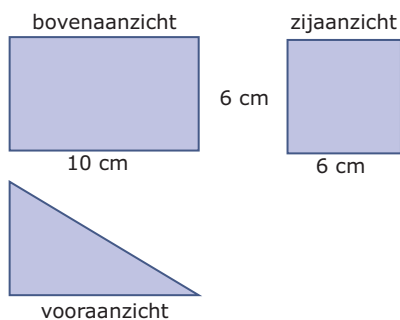
Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Dit zijn drie aanzichten van een lichaam.

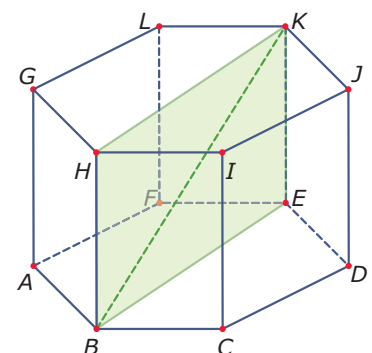


Figuur 12.1

Om wat voor lichaam gaat het hier? Maak er een uitslag van en beschrijf de daarvoor noodzakelijke berekeningen.

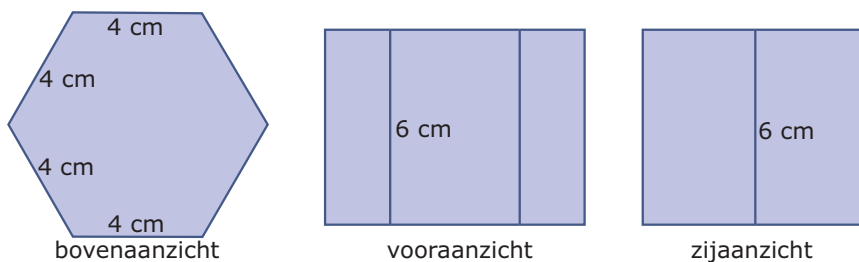
Uitleg

Dit is het regelmatig zeszijdige prisma $ABCDEF.GHIJKL$. In zo'n regelmatig lichaam zijn veel ribben en diagonalen gelijk aan elkaar. Toch blijkt daar in de figuur niet zoveel van. Als je zou gaan meten zijn AB , BC en CD zeker niet gelijk, dat komt door de tekening in parallelprojectie. In een parallelprojectie worden alleen even lange lijnstukken die evenwijdig lopen ook weer even lang.



Figuur 12.2

Soms helpt het om dan aanzichten van een lichaam te gebruiken. Een drieaanzicht zoals dat hieronder laat het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht van het lichaam zien. Daarin zie je allerlei grensvlakken in de juiste vorm en op ware grootte.



Figuur 12.3

Opgave 1

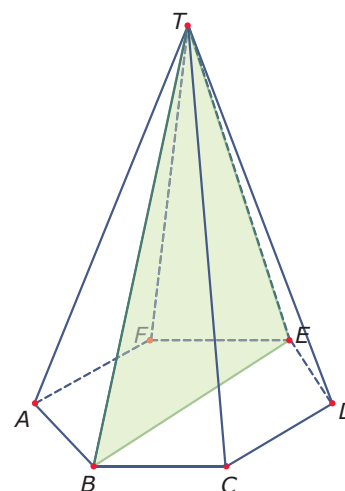
Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een regelmatig zeszijdig prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn. Op het **werkblad** bij deze opgave zie je de aanzichten van het prisma met enkele hoekpunten erbij aangegeven.

- Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?
- Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?
- In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?
- Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.
- Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Opgave 2

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 12 cm.

- Bereken de hoogte van deze piramide.
- Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide op schaal 1 : 2.
- Zet de letters van de hoekpunten op de goede plaats in de aanzichten.
- Welke opstaande ribben worden op ware grootte weergegeven? En in welk aanzicht?
- Geef het getekende diagonaalvlak in de aanzichten weer.

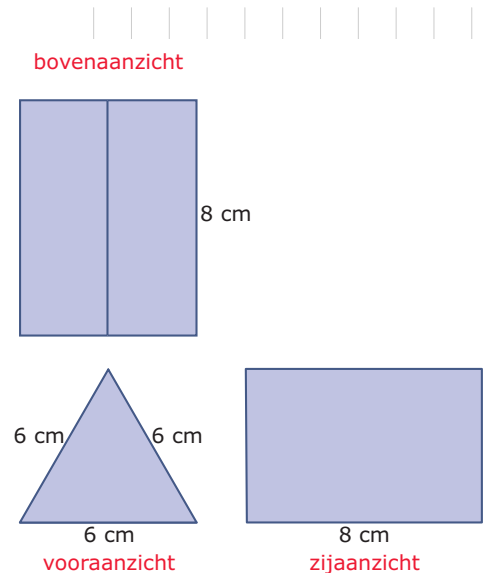


Figuur 12.4

Opgave 3

Je ziet hier een drieaanzicht van een lichaam. De figuur staat ook op een [werkbld](#).

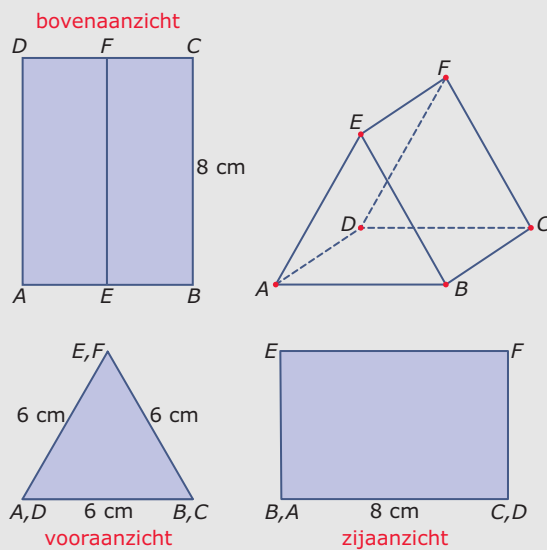
- Om wat voor lichaam gaat het hier?
- Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?
- De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.



Figuur 12.5

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 12.6

Je ziet hier een regelmatig driezijdig prisma $ABE.DCF$. Dit lichaam is getekend als **parallelprojectie**.

Dit betekent dat evenwijdige lijnen ook evenwijdig worden getekend en dat lijnstukken die evenwijdig en even lang zijn ook evenwijdig en even lang worden.

Maar er is ook een **drieaanzicht** van getekend. Dat is een combinatie van een **vooraanzicht**, een **bovenaanzicht** en een **zijaanzicht**. In aanzichten zie je meestal veel afmetingen op ware grootte, je kunt er beter metingen in verrichten dan in een parallelprojectie. Wel is het soms lastig om op basis van aanzichten te herkennen om wat voor figuur het gaat.



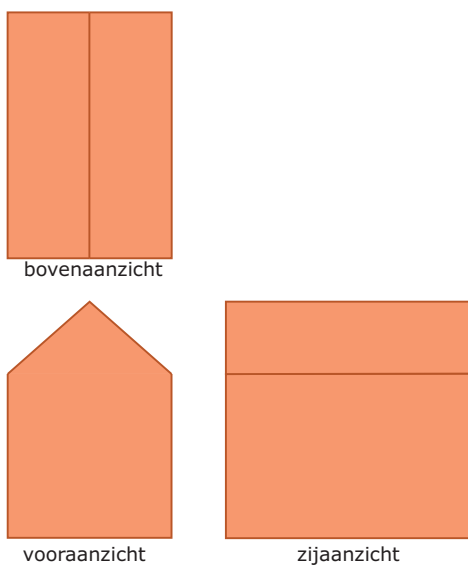
Voorbeeld 1

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Teken een drieaanzicht van deze doos.

Antwoord

Van het bovenaanzicht weet je alle afmetingen, dus dat kun je meteen tekenen. Van het vooraanzicht weet je ook alle afmetingen en als je dan van de symmetrie gebruik maakt en de passer gebruikt voor de twee zijden van 4 dm, dan kun je ook dat tekenen. Het zijaanzicht vind je door vooraanzicht en bovenaanzicht te combineren.



Figuur 12.8

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt een drieaanzicht van een doos getekend.

- a Teken dit drieaanzicht zelf op schaal 1 : 20.

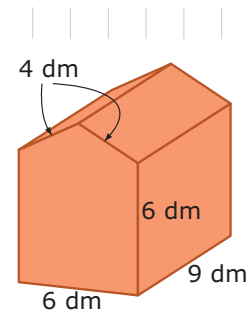
De figuur is een prisma $ABCDE.FGHIJ$. Hierin is vijfhoek $ABCDE$ het voorvlak, met $AB = BC = 6$ dm en $AE = 4$ dm.

- b Zet de letters in je drieaanzicht op de juiste plek.
c Bereken nu de hoogte van de voorkant van de doos, dus de hoogte van punt E boven lijn BC in mm nauwkeurig.
d Bereken de grootte van $\angle AED$ in graden nauwkeurig.

Opgave 5

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ zijn alle ribben 4 cm.

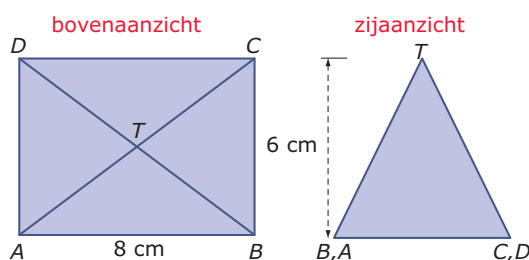
Teken een drieaanzicht van deze piramide.



Figuur 12.7

Voorbeeld 2

Je ziet hier het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak. Welk veelvlak betreft het en hoe groot is de totale oppervlakte van dat lichaam?



Figuur 12.9

Antwoord

Dit betreft een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.

Voor de totale oppervlakte van dit lichaam moet je de oppervlakte van het grondvlak en van de vier opstaande grensvlakken bij elkaar optellen.

De grensvlakken ABT en CDT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 8 cm en een hoogte die je in het zijaanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{45} = 4\sqrt{45} \text{ cm}^2$.

De grensvlakken BCT en DAT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 6 cm en een hoogte die je in het vooraanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{52} = 3\sqrt{52} \text{ cm}^2$.

Nu kun je de totale oppervlakte wel berekenen...

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je twee aanzichten van een lichaam.

- Hoe ziet het vooraanzicht van dit lichaam er uit? En waarom weet je dat zeker?
- Waarom is de hoogte van het vooraanzicht niet gelijk aan de hoogte van de driehoek ABT ? Laat zien hoe je daarvan de hoogte berekend.
- Bereken de totale oppervlakte van dit lichaam, zowel exact als in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 7

Van een veelvlak is het bovenaanzicht een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm en het vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm.

Welk veelvlak is dit? Bereken er de totale oppervlakte van.

Voorbeeld 3

Over het eind van een buis wordt ter afsluiting een kegelvormig kapje geplaatst. Dit wordt gemaakt van buigbare kunststof. Een zijaanzicht ervan zie je hiernaast, alle afmetingen zijn in mm. Teken nu zelf een uitslag van deze kegel.

Antwoord

Elke kegel kun je vouwen uit een deel van een cirkel, een cirkelsector.

De straal van die cirkelsector is dan gelijk aan de lengte van een lijnstuk vanuit de top naar de grondcirkel. Die lengte bereken je met de stelling van Pythagoras: $R = \sqrt{300^2 + 120^2} \approx 323 \text{ mm}$.

Je begint daarom met een cirkel met een straal van 323 mm.

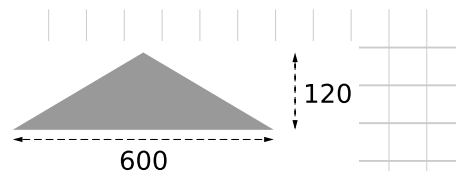
Daar heb je maar een deel van nodig.

De boog die bij dat deel hoort moet even lang zijn als de grondcirkel van de kegel, dus $\pi \cdot 600 \text{ mm}$.

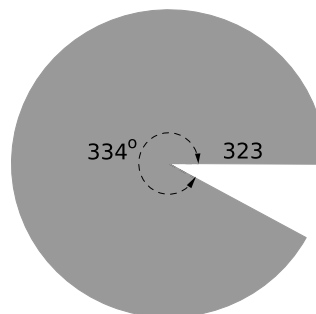
De cirkel die je hebt getekend heeft een omtrek van $\pi \cdot 646 \text{ mm}$.

Dus van de 360° die bij een complete cirkel horen, heb je $\frac{\pi \cdot 600}{\pi \cdot 646} \cdot 360^\circ \approx 334^\circ$ nodig.

Dit heet de sectorhoek van de cirkelsector.



Figuur 12.10



Figuur 12.11

Opgave 8

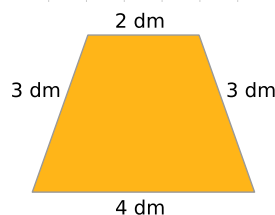
Teken de uitslag van de kegel beschreven in **Voorbeeld 3** op schaal 1 : 10.

Maak je tekening op stevig papier en maak een extra plakrand. Vouw de kegelvorm en ga na dat hij klopt met de opgegeven afmetingen.

Opgave 9

Je ziet hier het zijaanzicht van een lampekap met de vorm van een afgeknotte kegel.

Teken een uitslag van deze afgeknotte kegel.



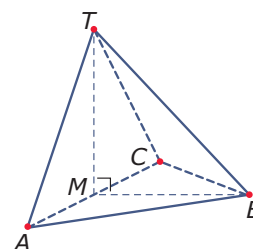
Figuur 12.12

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier een piramide $ABC.T$ waarvan het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm is. De top T ligt recht boven het midden M van ribbe AC . De ribben AT en CT zijn allebei 5 cm lang.

- Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide.
- Bereken de lengte van ribbe BT .
- Bereken de grootte van $\angle MTB$ in graden nauwkeurig.



Figuur 12.13

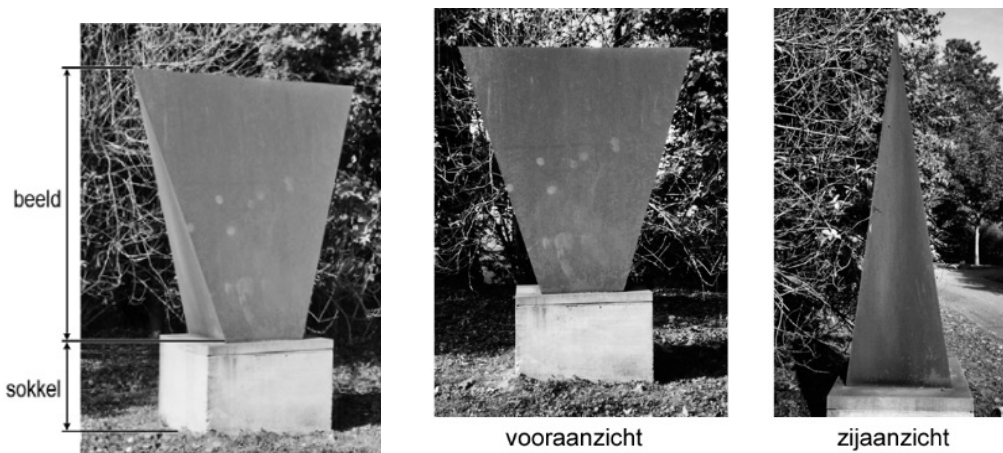
Opgave 11

Een veelvlak $ABC.DEF$ heeft als vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm en als zijaanzicht een gelijkbenige driehoek waarvan de basis ook 4 cm is.

Teken het bovenaanzicht van dit veelvlak en bereken de oppervlakte van het veelvlak.

Opgave 12

In het beeldenpark in Zwijndrecht staan verschillende beelden. Eén van die beelden is het beeld op de foto hieronder. De onderkant van het beeld dat op de sokkel staat, is een vierkant met zijden van 50 cm. Het beeld is 100 cm hoog en de lengte van de bovenkant is 100 cm lang. Het vooraanzicht en het zijaanzicht zijn symmetrisch.

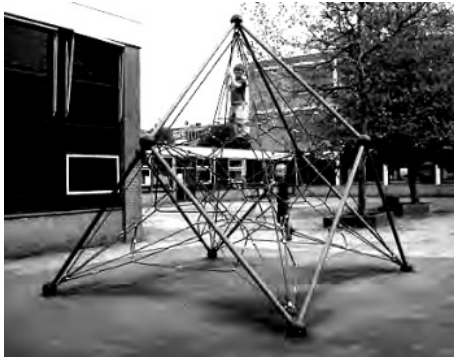


Figuur 12.14

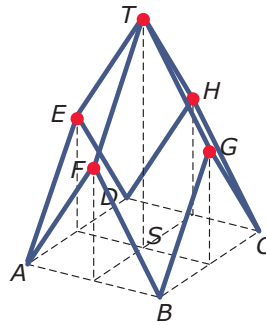
- Teken een bovenaanzicht van dit beeld op schaal 1 : 10.
Het grondvlak van dit beeld is een vierkant $ABCD$. De bovenkant is een ribbe EF . In het vooraanzicht zie je de punten B , C en E .
- Bereken de lengte van ribbe BE in mm nauwkeurig.
- Hoeveel oppervlakte aan verf is er voor nodig om het beeld te beschilderen? Antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60° . Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$.



Figuur 12.15



- Teken een bovenaanzicht van de metalen constructie op schaal 1 : 10.
- Bereken hoe hoog punt T boven de grond zit, dus de lengte van TS in cm nauwkeurig.
- Bereken de grootte van $\angle AFB$.

Opgave 14

Dit is een model van een symmetrisch lichaam waarvan het grondvlak een vierkant $ABCD$ is met zijden van 8 cm en ook het bovenvlak $EFGH$ een vierkant is. Alle acht opstaande grensvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm.

Van deze 'achtkanter' liggen alle hoekpunten van het bovenvlak recht boven de middens van de zijden van het grondvlak. Dat maakt alle aanzichten eenvoudig...

- Bereken de zijden van het bovenvlak $EFGH$.
- Bereken de hoeken van $\triangle BGF$.
- Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.
- Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn en moet worden geverfd. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

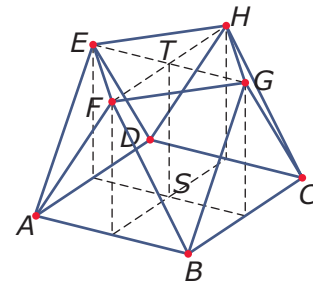
Opgave 15

De uitslag van een kegel is een kwart cirkel met een straal van 10 cm.

Hoe groot is de diameter en hoe hoog is het driehoekige zijaanzicht van die kegel?

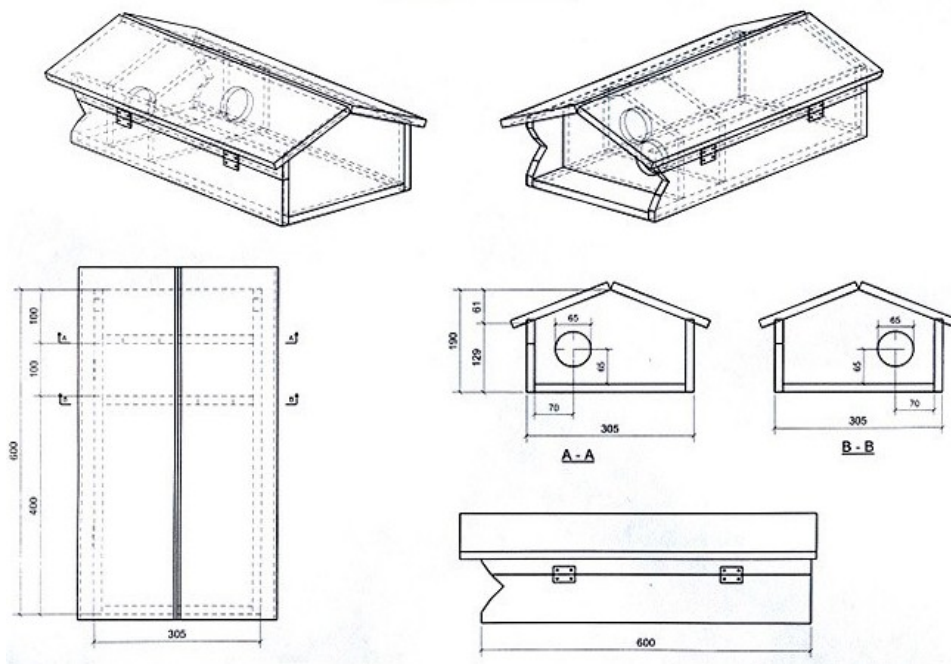
Toepassen

Bouwtekeningen zijn tekeningen die worden gebruikt om iets te kunnen bouwen. Dat kan een kastje, een toestel, een huis, een vliegtuig of wat dan ook zijn... Vaak zijn bouwtekeningen aanzichten en plattegronden met veel details of opengewerkte tekeningen.



Figuur 12.16

Hier zie je een **bouwtekening** van een nestkast voor steenuilen.



Figuur 12.17

Opgave 16

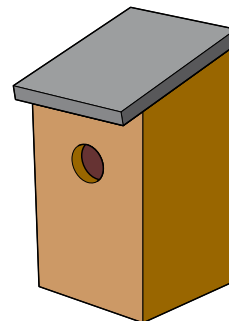
Bekijk de bouwtekening van de steenuilenkast.

- In welke eenheid zijn alle afmetingen gegeven?
- Hoe kun je in de bouwtekening zien dat deze nestkast kan worden opengeklapt?
- Hoe kun je zien dat deze nestkast een ingang heeft die bestaat uit twee schotten met gaten met een stuk open ruimte er tussen?
- Teken zelf één zo'n schot op schaal 1 : 2.
- De twee delen van het schuine dak zijn nergens getekend. Welke vorm en afmetingen hebben die dakdelen?
- Waarom is hier het maken van een uitslag niet goed mogelijk?

Opgave 17

Hier zie je een andere nestkast. Het voorvlak (met het aanvlieg-gat) is een rechthoek van 20 cm bij 30 cm. Het achtervlak is een rechthoek van 20 cm bij 35 cm. Het grondvlak is een vierkant. Het schuine bovenzvlak is aan de voorkant 2 cm langer dan nodig om het hokje dicht te maken. De invliegopening heeft een diameter van 6 cm.

Maak een passend drieaanzicht op schaal 1 : 5.



Figuur 12.18



Testen

Opgave 18

Van een symmetrisch lichaam is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 8 cm en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met zijden van 4 cm.

Alle acht de opstaande zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met benen van 6 cm lengte.

S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$ en T is het snijpunt van de diagonalen van $EFGH$.

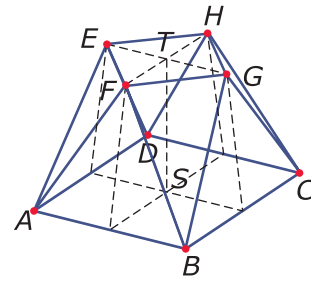
TS staat loodrecht op zowel het grondvlak als het bovenvlak.

- Bereken van deze achtkanter de hoogte TS in één decimaal nauwkeurig.
- Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet weer de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.
- Hoe groot zijn de hoeken van de opstaande zijvlakken?
- Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot is dan zijn totale buitenoppervlakte?

Opgave 19

Het zijaanzicht van een kegel is een gelijkbenige driehoek met zijden van 6, 6 en 4 cm.

- Hoe ziet een uitslag van deze kegel er uit? Geef ook de belangrijke afmetingen.
- De kegel wordt geschilderd, de bodem niet. Hoeveel bedraagt de buitenoppervlakte?



Figuur 12.19

12.3 Doorsneden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip kruisende lijnen;
- een doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak herkennen en op ware grootte tekenen;
- doorsneden gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

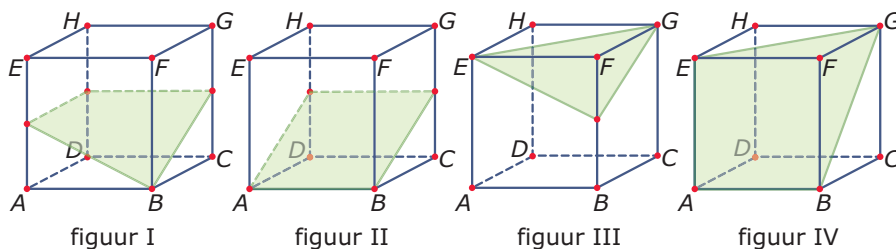
Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren;
- aanzichten gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier en op het [werkblad](#) vier kubussen met ribben van 2 cm. Joop heeft geprobeerd om in elke kubus te laten zien hoe een bepaald plat vlak de kubus doorsnijdt.



Figuur 12.1

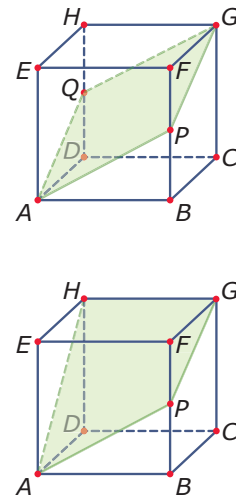
- Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?
- Verbeter de foute figuren.
- Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Uitleg

Je ziet hiernaast de doorsnede $APGQ$ van een plat vlak met een kubus getekend. De kubus heeft ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Als je de kubus in de richting BD bekijkt zie je A , P , G en Q op één lijn liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QC) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak. Bedenk dat lijnen die in één vlak liggen elkaar altijd snijden of evenwijdig lopen. Lijnen die elkaar niet snijden en niet evenwijdig lopen noem je kruisende lijnen. In een vlak kunnen nooit kruisende lijnen liggen! En daarom kan de 'vierhoek' $APGH$ nooit een vierhoek in een plat vlak zijn: de lijnstukken AH en PG zijn niet evenwijdig en liggen dus op kruisende lijnen.

Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien moet je de kubus zo draaien dat je loodrecht op dat vlak kijkt. Je ziet dan dat $APGQ$ een ruit is met ribben van $\sqrt{5^2 + 2,5^2} = \sqrt{31,25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.



Figuur 12.2

Opgave 1

Bekijk de kubussen in de **Uitleg**. Je ziet dat in de bovenste kubus een vlak $APGQ$ is getekend.

- Teken het aanzicht van de bovenste kubus waarbij je kijkt in de richting van BD met het vlak $APGQ$ er in. Waaraan zie je dat $APGQ$ een plat vlak is?
- Kun je van de onderste kubus een aanzicht tekenen waarbij de punten A , P , G en H op één lijn liggen?
- Waarom zijn de zijden van $APGQ$ in twee overstaande vlakken van de kubus evenwijdig? En waarom zijn ze dus ook gelijk?
- Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.
- Bereken de lengte van diagonaal AG .

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt gesproken over kruisende lijnen.

- Waarom zijn de lijnen AH en PG kruisend?
- Zijn de lijnen AP en HG kruisend, of snijdend? (Denk er om dat deze lijnen ook buiten de lijnstukken AP en HG doorlopen.)
- Zijn de lijnen AP en EF kruisend, of snijdend?

Opgave 3

In kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm is vierhoek $KCGL$ een doorsnede van een plat vlak met de kubus. Punt K is het midden van ribbe AB .

- Waarom is driehoek KCG geen complete doorsnede van een vlak met deze kubus?



- b Waarom moet punt L het midden van ribbe EF zijn?
- c Teken de doorsnede $KCGL$ op ware grootte.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

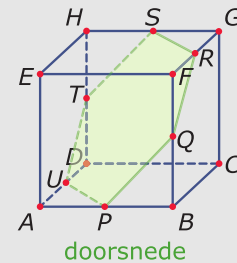
Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Heeft die doorsnede de vorm van een driehoek, dan kun je ervan verzekerd zijn dat het inderdaad om een plat vlak gaat.

Bij vierhoeken, vijfhoeken, etc., moet je nauwkeuriger kijken.

Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, kun je gebruiken dat in een plat vlak alleen evenwijdige of elkaar snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn en elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Lijnen die elkaar kruisen kunnen nooit in één vlak liggen.

Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**.

Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke vorm hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal getekend). Bij het tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken met behulp van de passer. Teken hulpfiguren (vaak rechthoekige driehoeken) waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.



Figuur 12.3

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 3$, $CG = 4$. De punten P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Waarom is vierhoek $DPQG$ een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk?

Teken doorsnede $DPQG$ op ware grootte.

Antwoord

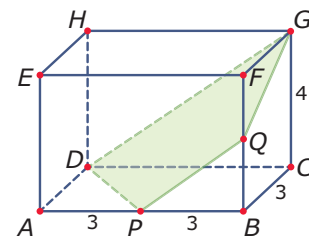
Vierhoek $DPQG$ is een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk omdat de lijnen PQ en DG evenwijdig lopen.

De lengte van DG kun je halen uit rechthoekige $\triangle DCG$: $DG = \sqrt{52}$.

De lengte van DP kun je halen uit rechthoekige $\triangle DAP$: $DP = \sqrt{18}$.

Omdat $BQ = 2$ kun je de lengtes van PQ en QG ook berekenen: $PQ = QG = \sqrt{13}$.

Om het trapezium $DPQG$ te kunnen tekenen, is het handig om eerst nog de lengte van een diagonaal te berekenen, bijvoorbeeld $PG = \sqrt{34}$. Nu kun je de figuur construeren door twee driehoeken te maken met passer en liniaal.



Figuur 12.4



Opgave 4

In **Voorbeeld 1** is een doorsnede van een plat vlak met een balk getekend. Je wilt die doorsnede op ware grootte tekenen.

- a Waarom zijn de lijnen PQ en DG evenwijdig?
- b Bereken de lengte van DG en die van DP .
- c Reken nu de lengtes van PQ en QG na.
- d Bereken de lengte van diagonaal PG .
- e Teken trapezium $DPQG$ op ware grootte.

Opgave 5

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE , N is het midden van CG .

Er worden nu steeds twee lijnen gegeven. Schrijf op of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

- a MH en BN .
- b MB en HC .
- c AE en HG .
- d MF en AB .
- e MN en HB .
- f CM en AF .

Opgave 6

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE , N is het midden van CG en K ligt op BF met $BK = 1$ cm.

- a Is $HMKN$ een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.
- b Is KEG een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.
- c Is KMN een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

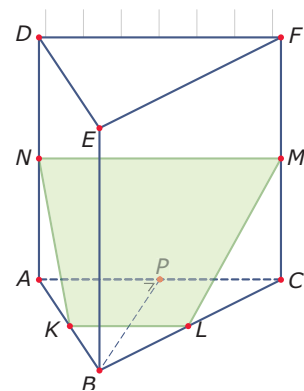
Vierhoek $HMBN$ is een doorsnede van een vlak met de gegeven balk.

- d Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 7

Hier zie je een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ waarvan alle zijden 8 cm lang zijn. De punten P , K , L , M en N zijn steeds de middens van de ribben waar ze op liggen.

- Waarom is vierhoek $KLMN$ de doorsnede van een vlak met dit prisma?
- Teken vierhoek $KLMN$ op ware grootte. Schrijf alle daarvoor noodzakelijke berekeningen op.
- Bereken (als je dat bij b nog niet hebt gedaan) alle hoeken van vierhoek $KLMN$ in graden nauwkeurig.



Figuur 12.5

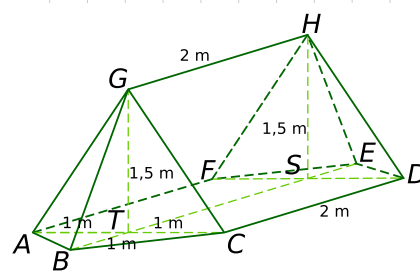
Voorbeeld 2

Deze tekening stelt een tent voor. De afmetingen zijn in de figuur gegeven. Ga er van uit dat de lichter gekleurde stippellijnen in een snijpunt loodrecht op elkaar staan.

GH is de nok van de tent.

Om de hoek die de vlakken $CDHG$ en $FAGH$ met elkaar maken te bepalen moet je in een vlak kijken waar hun snijlijn loodrecht op staat. Die hoek heet de standhoek van beide vlakken. Je kunt hem zien in een vooraanzicht van de tent, maar ook in de doorsnede $\triangle ACG$.

Bereken de standhoek van de vlakken $CDHG$ en $FAGH$.



Figuur 12.6

Antwoord

De gevraagde hoek is $\angle AGC$.

Omdat $\tan(\angle AGT) = \frac{1}{1,5}$ is $\angle AGT \approx 33,7^\circ$.

Dus is $\angle AGC \approx 2 \cdot 33,7^\circ \approx 67^\circ$.

Opgave 8

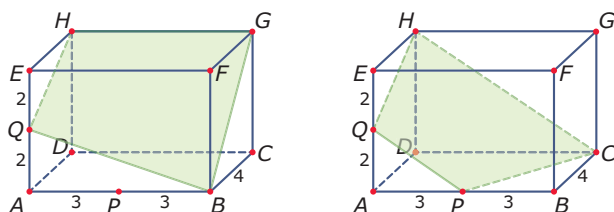
Bekijk het berekenen van de standhoek van de vlakken $CDHG$ en $FAGH$ in [Voorbeeld 2](#).

Bereken zelf de standhoek van de vlakken BCG en het grondvlak $ABCD$.

Oefenen

Opgave 9

Je ziet hier in balk $ABCD.EFGH$ twee keer een figuur getekend die vier hoekpunten heeft.



Figuur 12.7

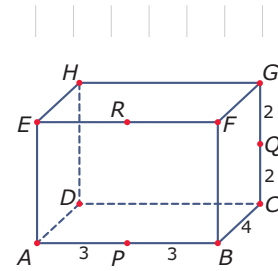
Leg uit bij welke van beide figuren er sprake is van de doorsnede van een plat vlak en de getekende balk. Licht je antwoord toe.

**Opgave 10**

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P , Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.

Schrijf van de volgende lijnen op of ze elkaar snijden, elkaar kruisen, of evenwijdig zijn. Licht je antwoord toe.

- PQ en BF .
- PQ en RG .
- PR en GH .
- RG en PC .
- PC en AD .

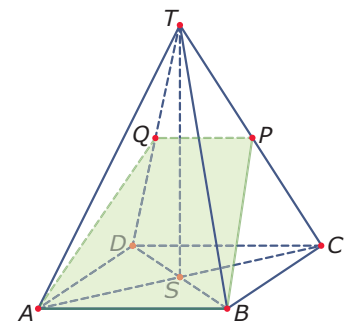
**Figuur 12.8****Opgave 11**

Van de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is punt P het midden van ribbe CT en punt Q het midden van ribbe DT . Verder is gegeven dat $AB = BC = 8$ cm en $AT = 12$ cm.

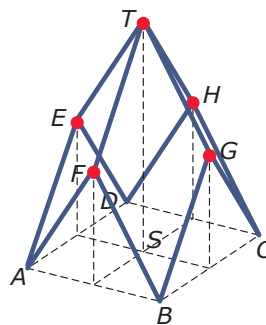
- Bereken de lengte van lijnstuk BP .

Vierhoek $ABPQ$ is de doorsnede van de piramide met een vlak.

- Teken deze doorsnede op ware grootte.
- Bereken de hoeken van vierhoek $ABPQ$ in graden nauwkeurig.

**Figuur 12.9****Opgave 12**

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60° . Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$. De vier ruiten vormen samen met de vier opstaande driehoeken en het vierkante grondvlak een lichaam.

**Figuur 12.10**

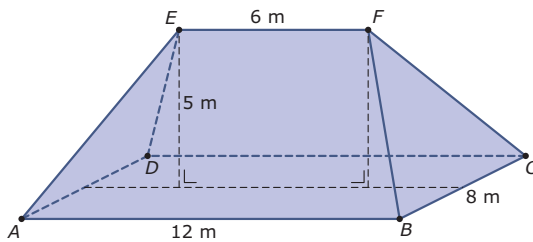
- Bereken de hoeken van dwarsdoorsnede ACT van dit lichaam in graden nauwkeurig.

Neem aan dat M het midden van AD en N dat van BC is.

- Teken de dwarsdoorsnede $MNGTE$ van dit lichaam op ware grootte.

Opgave 13

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE , DE , BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD .



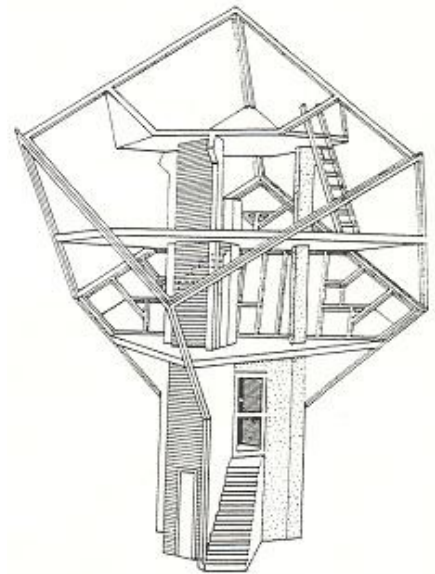
Figuur 12.11

- Bereken de standhoek van de vlakken $ABFE$ en $CDEF$.
- Waarom is $\angle BFC$ niet de standhoek van de vlakken $ABFE$ en $CDEF$?

Toepassen

De **kubuswoning** ontworpen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn van deze kubuswoningen gebouwd. Hiernaast zie je een opengewerkt model. Het betreft daar in grote lijnen een kubus die op zijn punt staat, er zitten dus twee hoekpunten die zijn verbonden met een lichaamsdiagonaal recht boven elkaar. Deze kubus staat op een brede paal waarin zich de toegang bevindt.

In de kubuswoning zitten drie vloeren, de onderste vloer is driehoekig, de middelste zeshoekig en de bovenste eigenlijk weer driehoekig, maar daar zijn opstaande driehoekige wanden gemaakt die evenwijdig lopen met vlakken van de kubus.



Figuur 12.12

Opgave 14

Bekijk het opengewerkte model van een kubuswoning. Je gaat dit model zelf tekenen met behulp van het **werkblad**.

- Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

Neem aan dat de middelste vloer de middens van ribben met elkaar verbindt.

- Teken die vloer in jouw kubus.

Neem aan dat de bovenste vloer halverwege de middelste vloer en de top van de kubus zit. Er zijn drie opstaande driehoekige zijwanden op gemaakt.

- Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.



Opgave 15

Je hebt in de voorgaande opgave zelf een eenvoudige kubuswoning getekend. Ga er weer van uit dat de middelste verdiepingvloer de middens van ribben verbindt en dat de bovenste verdiepingvloer halverwege de middelste verdiepingvloer en de top van de kubus zit. Neem aan dat de hoogte tussen de bovenste twee verdiepingvloeren 2,50 m is.

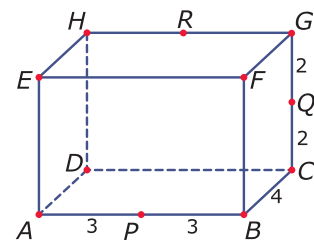
- Hoe hoog zit dan de top van de kubus boven de onderste punt ervan?
- Hoe groot zijn dan alle ribben van de kubus?
- De hoek tussen de lijnstukken AH en AG is de hoek die alle grensvlakken van de kubus met de verticale lijn AG maken. Bereken deze hoek in tienden van graden nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P , Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.

- Zijn de lijnen ER en FG snijdende lijnen?
- Zijn de lijnen ER en PQ snijdende lijnen?
- Is $ACRE$ een doorsnede van deze balk met een plat vlak?
- Is $EBQR$ een doorsnede van deze balk met een plat vlak?



Figuur 12.13

Opgave 17

In kubus $ABCD.EFGH$ is M het midden van FG en N het midden van GH . De ribben van de kubus zijn 6 cm lang.

- Waarom is $DBMN$ de doorsnede van een vlak met deze kubus?
- Teken deze doorsnede op ware grootte en bereken de hoeken ervan.
- Bereken de standhoek van vlak $DBMN$ en het grondvlak $ABCD$.

12.4 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte en de inhoud van de ruimtelijke basisfiguren berekenen;
- werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactoren.

Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren;
- aanzichten en doorsneden gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel zie je een aantal bekende formules voor het berekenen van een omtrek, een oppervlakte, of een inhoud. Ernaast staan de betekenissen van die formules, maar die staan niet in de juiste volgorde.

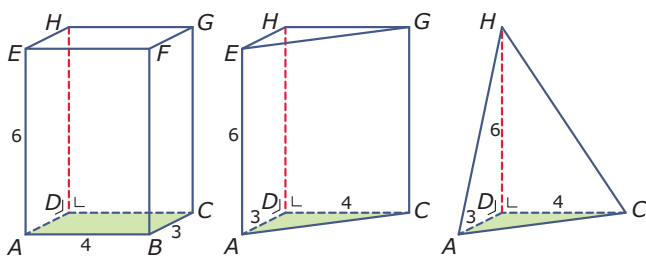
Formule		Betekenis	
1	$0,5 \times \text{basis} \times \text{hoogte}$	a	omtrek cirkel
2	$\text{lengte} \times \text{breedte} \times \text{hoogte}$	b	oppervlakte rechthoek
3	$\text{grondvlak} \times \text{hoogte}$	c	oppervlakte driehoek
4	$\pi \times \text{diameter}$	d	oppervlakte parallellogram
5	$\text{lengte} \times \text{breedte}$	e	oppervlakte cirkel
6	$\frac{1}{3} \times \text{grondvlak} \times \text{hoogte}$	f	inhoud balk
7	$\text{basis} \times \text{hoogte}$	g	inhoud prisma
8	$\pi \times \text{straal}^2$	h	inhoud piramide

Tabel 12.1

Geef bij elke formule de juiste omschrijving.

Uitleg

Je ziet hier drie lichamen die alle drie dezelfde hoogte DH hebben. Het prisma en de piramide hebben ook nog hetzelfde grondvlak ACD en dat is precies de helft van het grondvlak van de balk.



Figuur 12.1



De inhoud van de balk is duidelijk het grootst: $V(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$ eenheden (eenheidskubussen).

Het prisma is de helft van de balk, dus: $V(\text{prisma}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$.

Dit is precies de oppervlakte van het grondvlak ($\triangle ACD$) maal de hoogte. Het volume van een prisma is $V(\text{prisma}) = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

De piramide heeft hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte als het prisma. Je kunt laten zien, dat er in het prisma drie van deze piramides passen. De inhoud van de piramide is daarom $\frac{1}{3}$ deel van die van het prisma. Voor de getekende piramide geldt $V(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Van alle drie de getekende lichamen is de totale oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van hun uitslag. En wat gebeurt er met de oppervlakte en de inhoud van zo'n lichaam als alle ribben bijvoorbeeld 3 keer zo groot worden?

Opgave 1

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. De inhoud, het volume, van een lichaam is het aantal eenheidskubusjes dat er in past. Bij een balk en een prisma bepaal je dan eerst het aantal eenheidskubussen op het grondvlak en dan vermenigvuldig je met het aantal lagen, de hoogte, van de balk, het prisma. Zo krijg je de formule $V = G \cdot h$, waarin V het volume, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

- a** Laat zien, dat de formule $V = G \cdot h$ zowel bij de balk als bij het prisma tot de juiste inhoud leidt.

De oppervlakte van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

- b** Bereken de oppervlakte van de balk.
c Bereken de oppervlakte van het prisma.
d Neem nu eens aan dat de afmetingen van deze figuren 3 keer zo groot worden. Hoeveel keer zo groot wordt dan hun inhoud? En hun oppervlakte? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. Vergelijk de getekende piramide met het getekende prisma.

- a** Ga na, dat het prisma kan worden verdeeld in de piramides $ACD.H$, $CGH.E$ en $AHE.C$.
b Ga ook na, dat voor elk van deze piramides geldt dat $G \cdot h = 36$ waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.
c Leg uit dat de oppervlakte van piramide $ACD.H$ daarom $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ moet zijn. Bereken deze inhoud.



Opgave 3

Er zijn ook lichamen met gebogen grensvlakken. Een cilinder en een kegel bijvoorbeeld hebben ook een grondvlak met oppervlakte G en een hoogte h .

- Waarom zal de formule voor de inhoud van een cilinder $V(\text{cilinder}) = G \cdot h$ zijn?
- Bereken de inhoud van een cilinder met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.
- Waarom zal de formule voor de inhoud van een kegel $V(\text{kegel}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ zijn?
- Bereken de inhoud van een kegel met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **inhoud** of het **volume** van een lichaam wordt het totaal aantal eenheidskubussen dat dit lichaam opvult verstaan.

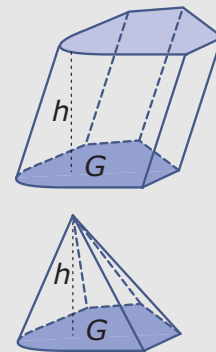
Voor verschillende soorten lichamen kun je die inhoud berekenen met behulp van een formule.

- De inhoud van een balk, een prisma, of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = G \cdot h$.
- De inhoud van een piramide, of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Onder de **oppervlakte** van een lichaam wordt de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam verstaan.

Om zowel de inhoud als de oppervlakte van een lichaam te kunnen berekenen moet je de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren, zoals rechthoek, driehoek en cirkel kennen. Ook de formule voor de omtrek van een cirkel is van belang. Zorg dat je al deze formules goed kent!

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.



Figuur 12.2

Voorbeeld 1

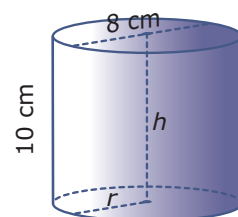
Een cilinder heeft een diameter van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder.

Antwoord

Voor de inhoud V gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

Nu is $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ en $h = 10$.

En dus is $V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi \approx 503 \text{ cm}^3$.



Figuur 12.3



Voor de oppervlakte A moet je weten hoe de uitslag van een cilinder er uit ziet. Die bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. De rechthoek heeft breedte 10 cm en als lengte de omtrek van de grondcirkel $\pi \cdot 8 = 8\pi$ cm.

Dus krijg je $A = 8\pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 112\pi \approx 352 \text{ cm}^2$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden de inhoud en de oppervlakte van een cilinder met gegeven diameter en straal berekend. Neem nu een cilinder met diameter en hoogte precies 2 keer zo groot.

- Laat zien dat de inhoud van deze cilinder $2^3 = 8$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.
- Leg uit hoe de oppervlakte van de cilinder in het voorbeeld wordt berekend.
- Laat zien dat de oppervlakte van de cilinder in deze opgave $2^2 = 4$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

Opgave 5

Een cilindervormig groentenblik heeft een straal van 6 cm en een hoogte van 16 cm. Het blik is gemaakt van metaal met een dikte van 1 mm. De straal en de hoogte zijn gemeten aan de binnenkant van het blik. Je wilt de hoeveelheid metaal die voor dit blik nodig is berekenen als er een plastic deksel op zit.

Je kunt dit op twee manieren doen: de oppervlakte van het blik berekenen en die met de dikte vermenigvuldigen, of van de inhoud van een blik met een straal van 6,1 cm en een hoogte van 16,1 cm de inhoud van een blik met straal 6 cm en hoogte 16 cm aftrekken.

Voer beide berekeningen uit en geef je antwoord in mm^3 nauwkeurig. Waardoor ontstaat het verschil tussen beide antwoorden?

Opgave 6

Van een cilindervormig literblik zijn hoogte en diameter gelijk.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Voorbeeld 2

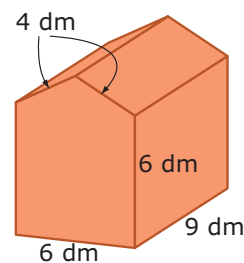
Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze doos.

Antwoord

Voor de inhoud V van deze doos gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het 'grondvlak' het voorvlak van het prisma, de hoogte is 9 dm.

Ga na, dat $G = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36 + 3\sqrt{7}$. Nu kun je met de formule berekenen dat de inhoud van de doos ongeveer 395 dm^3 is.



Figuur 12.4



De oppervlakte van de doos is de oppervlakte van de uitslag van deze doos. Die uitslag bestaat uit twee gelijke vijfhoeken (waarvan je de oppervlakte al hebt berekend) en vijf rechthoeken. De totale oppervlakte is de som van de oppervlaktes van deze vijfhoeken en de vijf rechthoeken.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de inhoud en de oppervlakte van een prisma kunt berekenen.

- Leg uit hoe de oppervlakte van de vijfhoek die als 'grondvlak' dient, kan worden berekend.
- Reken nu de gevonden inhoud van de doos zelf na.
- Bereken de totale oppervlakte van de doos.

Opgave 8

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze piramide.

Voorbeeld 3

Bij zandwinning ontstaan grote hopen van verschillende soorten zand. Die hopen zand hebben allemaal dezelfde kegelvorm.

Hoeveel m^3 zand bevat zo'n kegelvormige hoop met een diameter van 4 m en een hoogte van 1,50 m? En hoeveel m^3 zand bevat een hoop zand waarvan de afmetingen 2 keer zo groot zijn?

Antwoord

Voor de inhoud V van een kegel gebruik je de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het grondvlak een cirkel met een straal van 2 m en de hoogte is 1,50 m.

De inhoud is dus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1,5 = 2\pi \approx 6,28 \text{ m}^3$.

Van de hoop zand waarvan alle afmetingen twee keer zo groot zijn is de lengtevergrotingsfactor 2 en dus de volumevergrotingsfactor $2^3 = 8$. De inhoud van die zandhoop is daarom $2\pi \cdot 8 = 16\pi \approx 50,27 \text{ m}^3$.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de inhoud van een kegel kunt berekenen.

- Bereken de inhoud van een kegel waarvan de straal 5 cm en de hoogte 10 cm is.
- Hoeveel bedraagt de inhoud van een kegel waarvan de afmetingen half zo groot zijn als die bij a?

Bekijk opnieuw de kegel met straal 5 en hoogte 10 cm.

De oppervlakte ervan is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag van de kegel.



Figuur 12.5 Bron: Vlaams Instituut voor de Zee



- c Laat zien, dat die oppervlakte $A = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 + 10^2}$ is.
- d Welke formule geldt voor de oppervlakte van een kegel met straal r en hoogte h als je het grondvlak niet meerekent?
En als je het grondvlak wel meerekent?

Opgave 10

In een betonblok in de vorm van een kubus met ribben van 50 cm wordt een kegelvormig gat geboord. Dit kegelvormige gat heeft een diameter van 15 cm en een diepte van 40 cm.

Uit hoeveel cm^3 beton bestaat dit betonblok met gat?

Het blok met gat wordt geverfd. Hoeveel cm^2 bedraagt de oppervlakte?

Oefenen

Opgave 11

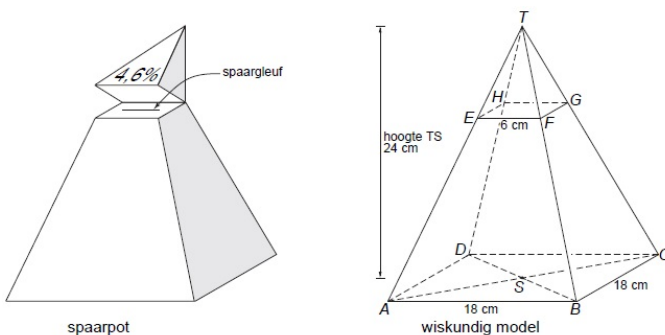
Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave wordt uitgegaan van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Houd geen rekening met de dikte van het blik.

Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

- a Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Rond je antwoord af op een geheel getal.
- b Teken op schaal 1 : 4 de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.
- c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de inhoud van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.

Opgave 12

Een spaarpot heeft de vorm van een regelmatige piramide met een vierkant grondvlak. In de linkerfiguur hieronder zie je een tekening van de spaarpot. Daarnaast staat een wiskundig model met de maten van de spaarpot.



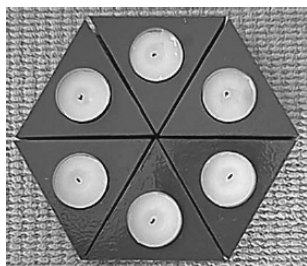
Figuur 12.6

De spaarpot heeft een deksel. Dat is piramide $T.EFGH$. Het scharnier, waarom de deksel omgeklapt kan worden, is lijnstuk HG .

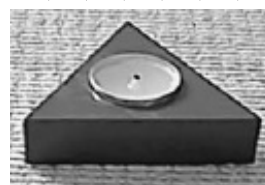
- a De bank die deze spaarpot cadeau geeft beweert dat de inhoud van de deksel 4,6% van de inhoud van de hele piramide is. Laat met een berekening zien dat dit niet waar is.
- b De spaarpot wordt cadeau gegeven in de vorm van een bouwplaat. Hoeveel oppervlakte aan karton is er nodig voor deze spaarpot? Houd geen rekening met de opening om geld in te doen en geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Op de foto hiernaast zie je een houder waarin een sfeerlichtje zit. Deze sfeerlichthouder heeft de vorm van een prisma met een gelijkzijdige driehoek als grondvlak. Op de foto hieronder zie je het bovenaanzicht van een figuur gemaakt van zes van deze sfeerlichthouders.



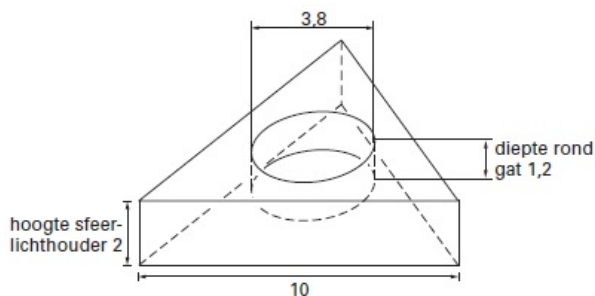
Figuur 12.8



Figuur 12.7

- a Geef de kleinste hoek in graden waarover dit bovenaanzicht draaisymmetrisch is.

Hieronder zie je een tekening van de sfeerlichthouder. De sfeerlichthouder is massief en gemaakt van kunststof. De zijden van het driehoekige grondvlak zijn 10 cm. De hoogte van de sfeerlichthouder is 2 cm. Precies in het midden van de sfeerlichthouder zit een rond gat voor het sfeerlichtje. De diameter van dit gat is 3,8 cm en de diepte is 1,2 cm.



Figuur 12.9

- b Bereken in hele cm^3 hoeveel kunststof er nodig is om deze sfeerlichthouder te maken.

Opgave 14

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

- Bereken de inhoud van het doosje in cm^3 nauwkeurig.
- Een model van dit Drostedoosje is een regelmatig achthoekig prisma met opstaande ribben van 3,3 cm en andere ribben van 7,8 cm. Bereken de oppervlakte van zo'n prisma in cm^2 nauwkeurig.

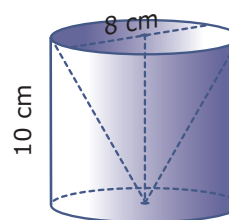


Figuur 12.10

Opgave 15

Je ziet hier een cilindervormige plastic bak waar een kegel uit is weggesneden.

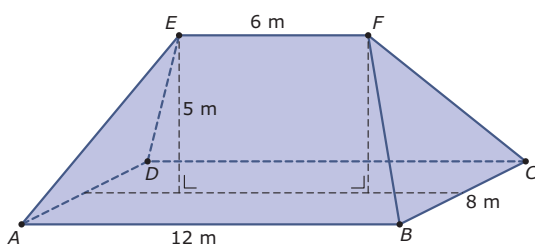
- Bereken de hoeveelheid plastic die hiervoor nodig is.
- Bereken de hoeveelheid plastic die nodig is voor eenzelfde bak waarvan alle afmetingen 1,5 keer zo groot zijn.
- De oorspronkelijke plastic bak wordt groen gespoten. Hoeveel cm^2 moet de verflaag bedekken?



Figuur 12.11

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE , DE , BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD . Dit is een samengestelde ruimtelijke figuur, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



Figuur 12.12

De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.



Opgave 16

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij. Gebruik de gegevens in de figuur.

Bereken het volume onder dit dak en boven de zoldervloer.

Opgave 17

Gebruik de gegevens in de figuur van het dak van de stolpboerderij hierboven.

Bereken de oppervlakte van het dak.

Testen

Opgave 18

Je ziet hier chocoladeverpakking in de vorm van een prisma.

De twee driehoeken aan de voorkant en de achterkant zijn gelijkzijdig en hebben zijden van 4 cm. De totale lengte van de verpakking is 24 cm.



Figuur 12.13

- a Bereken het volume van deze verpakking.
- b Je wilt weten hoeveel materiaal ervoor nodig is om zo'n verpakking te maken.
Bereken daartoe de totale buitenoppervlakte ervan.
Voor reclamedoeleinden wordt zo'n verpakking op veel grotere schaal gemaakt.
Alle afmetingen worden 25 keer zo groot gemaakt.
- c Hoe groot worden de inhoud en de oppervlakte van deze grotere verpakking?

Opgave 19

Een kegel wordt gevormd uit een halve cirkel met een diameter van 40 cm.

Hoe groot zijn de oppervlakte en de inhoud van die kegel?

12.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp gaat het over meetkundige berekeningen aan ruimtelijke figuren. Daarbij worden gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel toegepast. Ook de oppervlakte en de inhoud van de basisvormen (kubus, balk, prisma, piramide, cilinder en kegel) worden berekend.

Je hebt nu alle theorie van **Ruimtelijke figuren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lichaam — veelvlak, ribbe, hoekpunt — zijvlakdiagonaal, lichaamsdiagonaal, diagonaalvlak — grondvlak, hoogte
- parallelprojectie — drieaanzicht, voor-, zij-, bovenaanzicht
- doorsnede — kruisende lijnen
- inhoud, volume — oppervlakte — lengte-, oppervlakte-, volumevergrotingsfactor

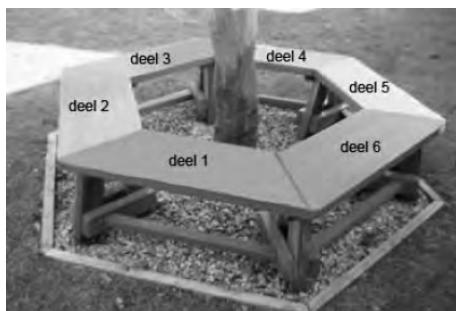
Activiteitenlijst

- in ruimtelijke figuren gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie (ook sinusregel en cosinusregel) gebruiken;
- aanzichten van ruimtelijke figuren tekenen — aanzichten gebruiken bij berekeningen;
- kruisende lijnen herkennen — doorsneden herkennen — doorsneden gebruiken voor berekeningen en ze op ware grootte tekenen;
- inhoud en oppervlakte van de basisvormen berekenen — oppervlakte- en volumevergroting berekenen bij een gegeven lengtevergrotingsfactor.

Testen

Opgave 1

Hieronder zie je een boombank die bestaat uit zes gelijke delen waar je op kunt zitten. De regelmatige zeshoek die de buitenrand van deze boombank voorstelt heeft zijden van 120 cm. De regelmatige zeshoek die de binnenrand van deze boombank voorstelt heeft zijden van 80 cm.

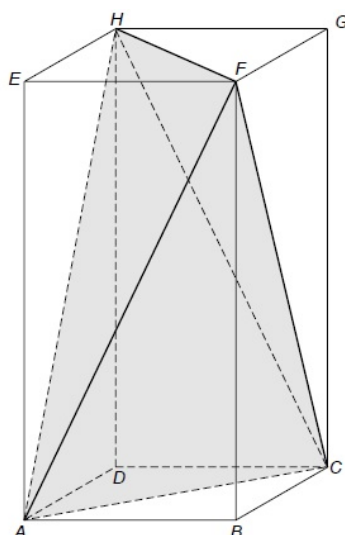


Figuur 12.1

Hoeveel bedraagt de oppervlakte van deze boombank? Geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 2

Hieronder zie je twee foto's van een ijsje. Het model van het ijsje past precies in een balk $ABCD.EFGH$, waarvan de vlakken $ABCD$ en $EFGH$ vierkant zijn. Het model bestaat uit vier even grote, gelijkbenige driehoeken. In deze driehoeken geldt $AF = AH = CF = CH = 9,8$ cm en $AC = FH = 6$ cm. Voor het maken van de verpakking wordt eerst een uitslag getekend en daarna de oppervlakte uitgerekend.



Figuur 12.2

- Maak zelf zo'n uitslag en zet de hoekpunten op de juiste plek.
- Bereken de oppervlakte van deze uitslag in cm^2 nauwkeurig.
- Bereken de grootte van $\angle AFC$ in graden nauwkeurig.



Opgave 3

Een groot blik verf heeft een diameter van 24 cm en een hoogte van 30 cm. De gebogen zijkant van het blik is geheel bedekt met papier. Daarop staat (behalve de noodzakelijke informatie) de naam van de fabrikant met letters van wel 12 cm hoog.

- a Hoeveel liter verf past er in zo'n blik?
- b Hoeveel cm^2 papier gaat er om dit blik?
- c Er zijn ook blikken waarvan alle afmetingen maar half zo groot zijn.
Hoe groot is dan het stuk papier dat er omheen gaat en hoe groot worden de letters van de naam van de fabrikant als die naar verhouding worden verkleind?

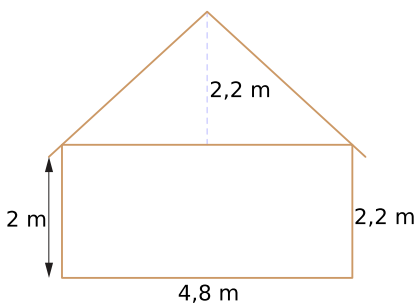
Opgave 4

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = BC = 10$ en $AE = 12$ cm. Punt P is het midden van ribbe EH en punt Q is het midden van ribbe HG .

- a Waarom zijn AP en CQ snijdende lijnen?
- b Waarom zijn AP en CG kruisende lijnen?
- c Bereken de oppervlakte van de doorsnede $ACQP$ van een vlak met de gegeven balk.
- d Bereken de hoeken van de doorsnede $ACQP$.

Opgave 5

Bekijk de afbeelding met een woonhuis van het Guragevolk in Ethiopië, dat bestaat uit een cilinder en een kegel. Het vooraanzicht van zo'n woonhuis is afgebeeld.



Figuur 12.4

De dakbedekking loopt wat langer door, waardoor de diameter van de dakbedekking 5,2 meter is.

Bereken de totale buitenoppervlakte van het woonhuis. Tel de vloer daar niet bij mee.

Geef het antwoord in een geheel aantal m^2 .



Figuur 12.3

Opgave 6

Met betonnen elementen kunnen zandbakken van verschillende vormen worden gemaakt. In de foto hieronder zijn vier elementen aangegeven.



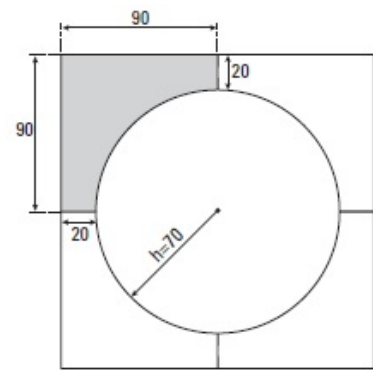
Figuur 12.5

Van zo'n element is hiernaast een bovenaanzicht getekend, met de maten erbij. De hoogte van elk element is 65 cm.

- a Hoeveel cm^3 beton is er voor elk element nodig?

Om de elementen tegen graffiti te beschermen wordt het hele element in de fabriek met een vloeistof behandeld.

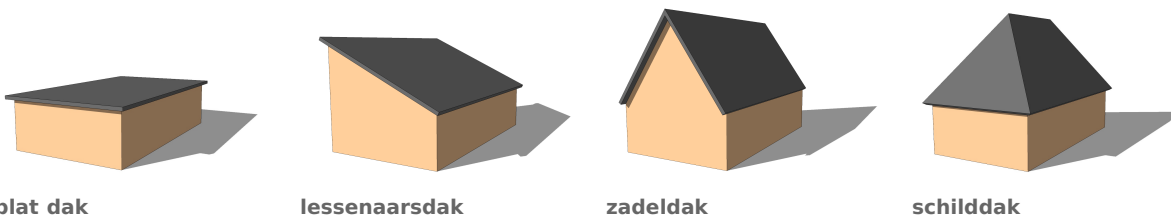
- b Bereken in gehele cm^2 nauwkeurig de oppervlakte die per element behandeld moet worden. Schrijf je berekening op.



Figuur 12.6

Toepassen

Hier zie je vier tekeningen van huizen met een bepaald soort dak, gemaakt door Michel Stomphorst van **Dutch Design Studio**.



Figuur 12.7

De warmte-energie die een gebouw uit kan stralen wordt bepaald door de verhouding

$$\frac{A_0}{V}$$

Hierin is:

- A_0 de totale oppervlakte van het gebouw in m^2
- V het volume van het gebouw in m^3

Hoe groter de waarde van deze verhouding, hoe meer warmte-verlies het gebouw heeft.



Opgave 7: Warmte-energie uitstraling

Bekijk eerst de verhouding $\frac{A_0}{V}$ voor verschillende balkvormen.

a Bereken deze verhouding voor:

- een kubus van $8 \times 8 \times 8$ m
- een balk van $8 \times 16 \times 4$ m
- een balk van $4 \times 32 \times 4$ m

b Welke vorm heeft de gunstigste verhouding $\frac{A_0}{V}$?

c Neem een kubus met ribbelengte r . Hoe hangt de verhouding $\frac{A_0}{V}$ af van r ? En wat betekent dit als r groter wordt?

Van een bol met straal r is de oppervlakte $A_0 = 4\pi r^2$ en de inhoud $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

d Is de verhouding $\frac{A_0}{V}$ voor een bol gunstiger dan voor een kubus?

Opgave 8: Warmteverlies van huizen

Ga ervan uit dat van elk van de huizen de begane grond een rechthoek van 5 bij 8 m is en dat de hoogte tot de dakrand 3 m is.

Verder is de standhoek van het lessenaarsdak met een horizontaal vlak 30° en zijn alle standhoeken van het zadeldak en het schilddak met een horizontaal vlak 60° .

Bereken van elk van de vier huizen de verhouding $\frac{A_0}{V}$ in twee decimalen nauwkeurig.

Welk van deze huizen heeft naar verhouding het minste warmteverlies?

Register

a

amplitude 33

b

booglengte 16

bouwtekening 60

bovenaanzicht 54

c

cos-functie 24

d

diagonaalvlakken 46

doorsnede 64

draaihoek 16

drieaanzicht 54

e

eenheidscirkel 16

evenwichtsstand 33

f

frequentie 8, 33

g

grondvlak 46

h

hoekpunten 46

hoogte 46

horizontale verschuiving 33

i

inhoud 72

k

kruisende lijnen 64

l

lengtevergrotingsfactor 72

lichaam 46

lichaamsdiagonalen 46

o

op ware grootte 64

oppervlakte 72

oppervlaktevergrotingsfactor
72

p

parallelprojectie 54

periode 8, 33

periodiek verband 8

r

radiaal 16

ribben 46

s

sinusoïde 33

sin-functie 24

v

veelvlak 46

volume 72

volumevergrotingsfactor 72

vooraanzicht 54

z

zijaanzicht 54

zijvlakdiagonalen 46

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

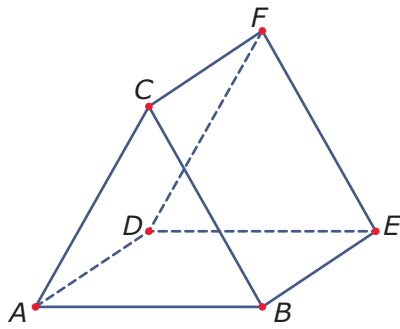


www.math4all.nl



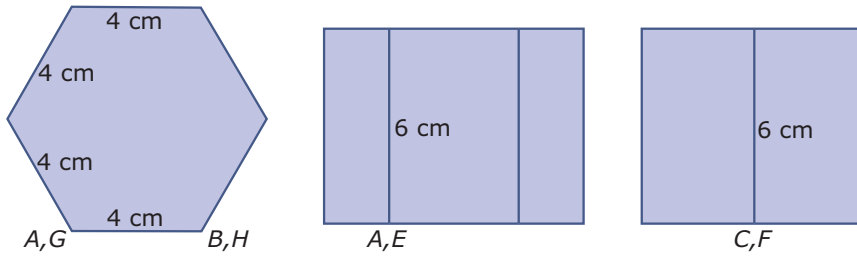
www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 2



- a** Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?
- b** Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma?
- c** M is het midden van ribbe CF . Teken $\triangle ABM$ zowel in de figuur als op ware grootte.
- d** Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

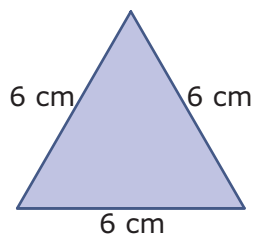
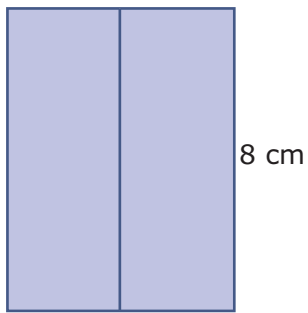
Werkblad bij opgave 1



- a** Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?
- b** Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?
- c** In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?
- d** Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.
- e** Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Werkblad bij opgave 3

bovenaanzicht



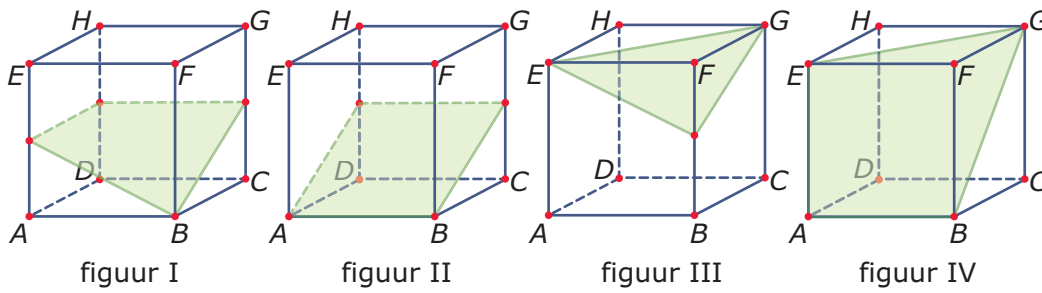
vooraanzicht



zijaanzicht

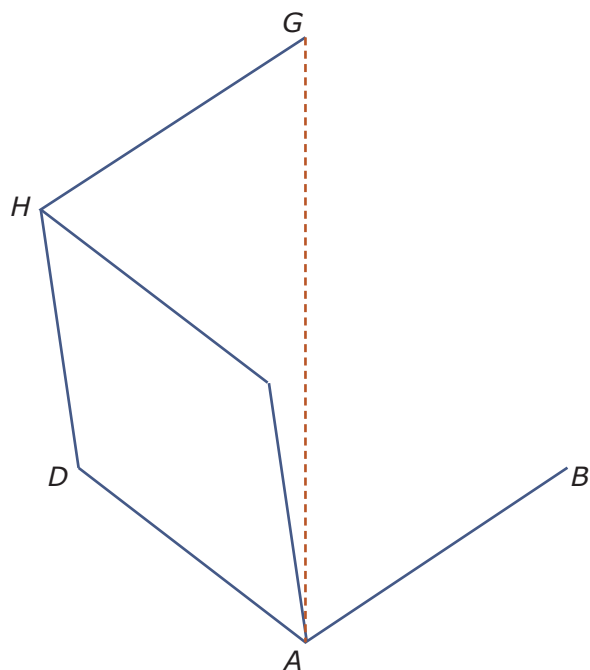
- a** Om wat voor lichaam gaat het hier?
- b** Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?
- c** De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.

Werkblad bij opgave V1



- a** Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?
- b** Verbeter de foute figuren.
- c** Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Werkblad bij opgave 14



- a** Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.
- b** Teken die vloer in jouw kubus.
- c** Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.