Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 7

Inhoud

Talstelsels en logica
Modelleren

Context College

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

13

Talstelsels en logica

13.1 Binaire getallen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het binaire stelsel gebruiken;
- binaire getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd;
- binaire getallen optellen en vermenigvuldigen.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- werken met machten van 2 en van 10.

Verkennen

Opgave V1

Binaire getallen kennen maar twee cijfers: 0 en 1.
Hier zie je de eerste binaire getallen.

a Wat stelt het binaire getal 100 dan voor?

b Hoe zou je het gewone (dus decimale) getal 5 weergeven als binair getal?

Het decimale stelsel is gebaseerd op het getal 10: $123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$.

c Op welk getal is het binaire stelsel gebaseerd?

d Welk decimale getal is het binaire getal 11010 dus?

e Wat is het nut van dergelijke binaire getallen, denk je?

decimaal getal	binair getal
0	0
1	1
2	10
3	11

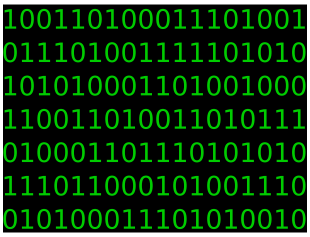
Tabel 13.1

Uitleg

Stel je voor dat je alleen de twee cijfers 0 en 1 kunt gebruiken (zoals dat voor machines zoals computers het geval is). Je zegt dan dat je werkt in het binaire stelsel, met binaire getallen. Hoe zien nu de ‘gewone’ (decimale) getallen waarmee je rekent (“to compute” is Engels voor “rekenen”) er binair uit?

Je begint natuurlijk systematisch:

- 0 := 0
- 1 := 1
- 2 := 10
- 3 := 11
- 4 := 100
- 5 := 101
- 6 := 110
- 7 := 111
- 8 := 1000



Figuur 13.1

Binaire getallen bestaan uit machten van 2, net zoals decimale getallen uit machten van 10. Zo is:

$7 = 2^2 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 := 111$

en:

$12 = 2^3 + 2^2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 := 1100$

Om snel te bepalen wat bijvoorbeeld 237 als binair getal wordt ga je gewoon steeds de rest (0 of 1) opschrijven bij delen door 2. Je ziet dat hiernaast.

En inderdaad:

$11101101 := 1{\cdot}2^7{+}1{\cdot}2^6{+}1{\cdot}2^5{+}0{\cdot}2^4{+}1{\cdot}2^3{+}1{\cdot}2^2{+}1{\cdot}2^1{+}1{\cdot}2^0 = 237$

Je schrijft dan: $11101101_2 = 237_{10}$.

Ofwel 11101101 binair is gelijk 237 decimaal.

deel door 2

decimaal	rest
237	1
118	01
59	101
29	1101
14	01101
7	101101
3	1101101
1	11101101

Figuur 13.2

Opgave 1

Schrijf de volgende binaire getallen als decimale getallen.

a 11101

b 100001

c 101010

d 10010010

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je hoe je van een decimaal getal een binair getal maakt.

Schrijf de volgende decimale getallen als binaire getallen en controleer je antwoord.

a 112

b 1075

c 2000

d 12345

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In het **binaire stelsel** noteer je getallen alleen met de symbolen 0 en 1. Je spreekt van bits. Het **binaire getal** 1011011 bijvoorbeeld komt overeen met

$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Dus: $1011011_2 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91_{10}$

Het omrekenen van een decimaal getal naar een binair getal doe je door steeds door 2 te delen en de rest (altijd 0 of 1) op te schrijven.

Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

Bekijk de voorbeelden om te zien hoe dit je dit gebruikt.

Voorbeeld 1

Neem de binaire getallen 11101 en 101110.

Tel beide getallen binair bij elkaar op.

Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

Antwoord

De binaire optelling zie je hiernaast.
Uitkomst: $11101_2 + 101110_2 = 1001011_2$

Controle: $11101_2 = 29_{10}$ en $101110_2 = 46_{10}$.
$29_{10} + 46_{10} = 75_{10}$.
En tenslotte $1001011_2 = 75_{10}$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ 11101 \\ 101110\;+ \\ \hline 1001011 \end{array}$$

Figuur 13.3

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je twee binaire getallen optelt.

a Voer deze optelling zelf uit.

b Voer ook de controle zelf uit. Laat zien, hoe het omrekenen van binair naar decimaal in zijn werk gaat.

Opgave 4

Voer de volgende optellingen binair uit. En controleer ze met een decimale optelling.

a $1001_2 + 10101_2$

b $11101010_2 + 1001101_2$

Je wilt $211 + 43$ door een computer laten uitrekenen. De computer kan alleen binair rekenen.

c Laat zien, hoe dan de optelling gaat.

Voorbeeld 2

Neem de binaire getallen 101 en 1010.

Vermenigvuldig beide getallen binair.

Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

Antwoord

De binaire vermenigvuldiging zie je hiernaast.
Uitkomst: $1010_2 \times 101_2 = 110010_2$

Controle: $1010_2 = 10_{10}$ en $101_2 = 5_{10}$.
$10_{10} \times 5_{10} = 50_{10}$.
En tenslotte $110010_2 = 50_{10}$.

$$
\begin{array}{rl}
1010 & \\
101 & \times \\
\hline
1010 & \\
0000 & \\
1010 & + \\
\hline
110010 &
\end{array}
$$

Figuur 13.4

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je twee binaire getallen vermenigvuldigt.

a Voer deze vermenigvuldiging zelf uit.

b Voer ook de controle zelf uit. Laat zien, hoe het omrekenen van binair naar decimaal in zijn werk gaat.

Opgave 6

Voer de volgende vermenigvuldigingen binair uit. En controleer ze met een decimale vermenigvuldiging.

a $10101_2 \cdot 1001_2$

b $1111_2 \cdot 11101_2$

Je wilt $211 \cdot 43$ door een computer laten uitrekenen. De computer kan alleen binair rekenen.

c Laat zien, hoe dan de vermenigvuldiging gaat.

Oefenen

Opgave 7

Gegeven zijn de binaire getallen $a = 11001101$ en $b = 111010$.

a Bereken $a + b$.

b Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

c Bereken $a \cdot b$.

d Controleer je antwoord bij c door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

Opgave 8

Gegeven de getallen 1053 en 317.

a Zet deze getallen om naar het binaire stelsel.

b Tel beide op als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Vermenigvuldig beide als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

Opgave 9

Bereken en geef het antwoord als binair getal.

a $1010_2 + 13_{10}$

b $1010_2 + 1010_{10}$

c $113_{10} \cdot 1010_2$

d $31_{10} \cdot 11010_2$

Opgave 10

Je kunt binaire getallen natuurlijk ook van elkaar aftrekken. Dat werkt net zo als in het decimale stelsel, soms moet je 'lenen'.

a Bereken $11010_2 - 101_2$ en controleer je antwoord met het decimale stelsel.

b Bereken $11010_2 - 111_2$ en controleer je antwoord met het decimale stelsel.

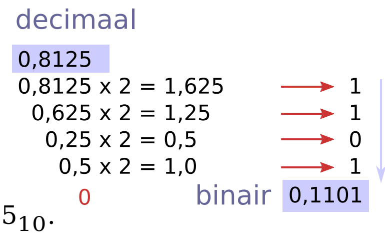
c Welk probleem doet zich voor als je $101_2 - 11010_2$ wilt uitrekenen?

Toepassen

Er bestaan ook in het binaire stelsel **getallen met cijfers achter de komma**.
Eigenlijk werkt dat net als met gewone gehele getallen, maar nu zijn de exponenten van de machten van 2 negatief.

Bijvoorbeeld: $0{,}1101_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$.
En dit wordt: $0{,}1101_2 = 0_{10} + 0{,}5_{10} + 0{,}25_{10} + 0_{10} + 0{,}0625_{10} = 0{,}8125_{10}$.

Het omrekenen van een decimaal getal met een komma erin naar een binair getal gaat voor de uitdrukking achter de komma nu niet door delen door 2, maar vermenigvuldigen met 2. In de figuur zie je hoe dat gaat.



Figuur 13.5

Opgave 11

Bekijk hoe je getallen met een komma erin kunt omzetten naar binaire getallen en omgekeerd.
Reken deze binaire kommagetallen om naar decimale getallen.

a 0,101

b 11,1101

c 101101,101

Omgekeerd kun je ook decimale getallen met een komma omzetten naar binaire getallen.
Doe dit met de volgende getallen:

d 0,625

e 8,125

f Welk probleem doet zich voor als je bijvoorbeeld $0{,}1_{10}$ wilt omrekenen naar een binair getal?

Opgave 12

En nu ga je rekenen met binaire getallen met en zonder komma erin.
Voer de volgende berekeningen uit en controleer het antwoord met behulp van het decimale stelsel.

a $0{,}101 + 11{,}1101$

b $0{,}101 \cdot 11{,}1101$

c $11{,}1101 - 0{,}101$

Testen

Opgave 13

Gegeven zijn de binaire getallen $a = 110101$ en $b = 11101$.

a Bereken $a + b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $a \cdot b$.

Opgave 14

Gegeven de decimale getallen 153 en 67.

a Zet deze getallen om naar het binaire stelsel.

b Tel beide op als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Vermenigvuldig beide als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

13.2 Binair rekenen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het tegengestelde van een binair getal bepalen;
- binaire getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- het begrip binair getal en decimale getallen omzetten naar binaire getallen en omgekeerd;
- binaire getallen optellen en vermenigvuldigen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt binaire getallen optellen en vermenigvuldigen (dat is herhaald optellen).
Maar kun je ze ook van elkaar aftrekken en op elkaar delen?
Ga er van uit, dat getallen die alleen uit nullen en énen bestaan, binair zijn.

a Bereken $1110000 - 1110$. Controleer je antwoord door decimaal rekenen.

b Welk probleem krijg je bij $1110 - 1110000$?

c Bereken $1110000/1110$. Controleer je antwoord door decimaal rekenen.

Uitleg

Bij het aftrekken van twee binaire getallen loop je aan tegen het probleem dat er geen negatiefteken is, dus $0 - 1 = ???$
Hoe maak je het negatieve getal bij bijvoorbeeld 186. In het tientallig stelsel heb je het dan over -186, want $186 + -186 = 0$. Maar hoe maak je -186 in het binaire stelsel?

Om dit probleem op te lossen wordt het aantal tekens, in computertaal het aantal bits (een bit is een 'binary digit'), beperkt tot 8, of 16, of 32, of 64. Nadeel daarvan is dat je hiermee het aantal getallen dat je kunt maken, beperkt.

Stel je een 8-bits beperking voor.
Het getal $186_{10} = 10111010_2$ is zo'n 8-bits getal.
Het bijbehorende negatieve getal is -186_{10} en moet opgeteld bij 186_{10} weer 0 opleveren.
Nu kun je in een 8-bits systeem zeggen $0 = 100000000$, want die voorste 1 is de negende bit en die wordt niet 'gezien'.
Verwissel in 10111010 de nullen in énen en omgekeerd en tel er 1 bij op, dan krijg je het getal $01000101 + 1 = 01000110$.
Dit heet het binaire complement van het (binaire) getal 10111010.
En opgeteld zijn ze samen $10111010+01000110 = (1)00000000 = 0$.

De overdracht naar de negende bit laat je weg omdat je hebt afgesproken in 8-bits te werken, vandaar dat die tussen haakjes staat. Een getal en zijn binaire complement zijn samen 0. Het binaire complement heeft dezelfde rol als het negatieve getal in het decimale stelsel.

Als je nu $186_{10} - 150_{10}$ binair wilt berekenen, doe je $186_{10} + \text{-}150_{10}$.
En $150_{10} - 186_{10} = 150_{10} + \text{-}186_{10}$.
En delen is herhaald aftrekken...

Opgave 1

Je werkt in een 8-bits systeem.

a Hoeveel gehele getallen groter of gelijk 0 kun je dan maken?

b Waarom zullen er meestal systemen worden gebruikt met meer bits?

c Geef de binaire versie van 150_{10} en $\text{-}150_{10}$.

d Controleer dat ook binair geldt dat $150_{10} + \text{-}150_{10} = 0_{10}$.

e Bereken binair: $186_{10} - 150_{10}$.

f Bereken binair: $150_{10} - 186_{10}$.

Opgave 2

Bereken in een 8-bits binair systeem:

a $1010 - 111$.

b $111 - 1010$.

c $11011001 - 00010101$.

d 00010101–11011001.

Opgave 3

Het delen van twee binaire getallen gaat net als het met de hand delen van twee decimale getallen. Werk weer in een 8-bits systeem.

a Bereken 1000001/1101.
Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

b Hoe zou je 1101/1000001 berekenen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

Bij aftrekken en delen werk je binnen een systeem met een vast aantal bits en het **binaire complement** van een getal. Dat is het getal de je krijgt door de nullen in énen en omgekeerd de énen in nullen te verwisselen en daar 1 bij op te tellen.

- Omdat $a - b = a + -b$ tel je a en het complement van b op.
- Bij de deling a/b trek je b zo vaak mogelijk af van a. Al die aftrekkingen zet je om in optellen van het complement van b.

In de voorbeelden zie je hoe dit in zijn werk gaat.

Voorbeeld 1

Reken 417_{10} en 38_{10} om naar hun binaire vorm en bereken $417_{10} - 38_{10}$ en $38_{10} - 417_{10}$.
Ga uit van een 16-bits binair stelsel.

Antwoord

Je moet beide getallen schrijven als optelling van machten van 2. Dat bereik je door steeds door 2 te delen en de rest op te schrijven:

$417_{10} = 0000000110100001$

$38_{10} = 0000000000100110$

Het binaire complement van 38 is:

$1111111111011001 + 1 = 1111111111011010$

En dus wordt $417_{10} - 38_{10}$:

0000000110100001
$\underline{1111111111011010+}$
(1)0000000101111011

Ga na dat dit in decimale notatie inderdaad 379_{10} is.

En zo gaat $38 - 417$:

0000000000100110
$\underline{1111111001011111+}$
(0)1111111010000101

En dit is het binaire complement van $0000000101111011 = 379_{10}$.

En dus: $(0)1111111010000101 = -379_{10}$.

Je ziet dat de voorste (eigenlijk de 17e bit die niet wordt gebruikt) wel moet worden bijgehouden om te bepalen of het getal positief (als het een 1 betreft) of negatief (als het een 0 betreft) is.

Opgave 4

Zet de getallen om naar een 16-bits binair stelsel en bereken.

a $336_{10} - 123_{10}$

b $123_{10} - 336_{10}$

c $35_{10} - (46_{10} + 19_{10})$

Opgave 5

Bereken (indien mogelijk) in een 8-bits binair stelsel:

a $00100100 + 01111011$

b $00100100 - 01111011$

c $01111011 - 00100100$

d $00100100 \cdot 01111011$

Voorbeeld 2

Reken 227_{10} en 38_{10} om naar een binaire vorm en bereken $227_{10}/38_{10}$.
Ga uit van een 8-bits binair stelsel.

Antwoord

Ga na:

$227_{10} = 11100011$

$38_{10} = 00100110$

Nu is een deling niets anders dan zoveel mogelijk keer (in dit geval) 38_{10} van de 227_{10} aftrekken en kijken wat je nog over houdt. Denk daarbij om het feit dat het binair stelsel werkt met machten van $2_{10} = 10_2$.

00100110 kan (om te beginnen) 100 keer van 11100011 af.
Omdat $100 \cdot 00100110 = 10011000$, houd je over:
$11100011 - 10011000 = 11100011 + 01101000 = (1)01001011$.

Vervolgens kan 00100110 nog 1 keer (10 keer gaat niet) van 01001011 af:
$01001011 - 00100110 = 01001011 + 11011010 = (1)00100101$.

Nu kun je een apparaat opdracht geven (programmeren heet dat) om de uitkomst (100 + 1+ de rest) op te schrijven als $11110111/00100110 = 00000101$ rest 00100101.

Je kunt ook op dezelfde manier door blijven delen, alleen moet er dan een scheidingsteken komen, net zoals de decimale komma (vaak decimale punt) in het decimale stelsel.

Decimale controle: $227_{10}/38_{10} = 5_{10}$ met rest 37_{10}.
Ga na, dat dit met het binaire antwoord overeen komt.

Opgave 6

a Voer zelf de berekeningen in **Voorbeeld 2** uit.

b Reken 186_{10} en 13_{10} om naar een binaire vorm en bereken $186_{10}/13_{10}$.
Ga uit van een 8-bits binair stelsel en geef je antwoord op de manier van **Voorbeeld 2**.

Opgave 7

Bereken $1010111/00001101$.
Controleer je antwoord door rekenen in het decimale stelsel.

Oefenen

Opgave 8

Gegeven zijn de getallen $a = 11001101$ en $b = 101001$ in een 8-bits binar stelsel.

a Bereken $a - b$. Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

b Bereken $b - a$. Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

c Bereken a/b.

Opgave 9

Je werkt in een 16-bits binair stelsel.

a Hoe groot is het grootste getal dat je daarin kunt maken?
Geef dit getal in binaire en in decimale vorm.

b Hoe ziet het binaire complement van dit grootste getal er uit?

c Laat met een binaire berekening zien dat de optelling van de getallen bij a en b inderdaad op 0 uitkomt.

Opgave 10

Bereken binair in een 8-bits systeem:

a $\frac{156_{10}}{6_{10}+7_{10}}$

b $15_{10} \cdot \left(\frac{11}{3}\right)_{10}$

Opgave 11

Delingen komen vaak niet uit. Bereken de volgende delingen binair in een 8-bits systeem en geef het antwoord met rest. Controleer je antwoord met het decimale stelsel.

a 11010/101

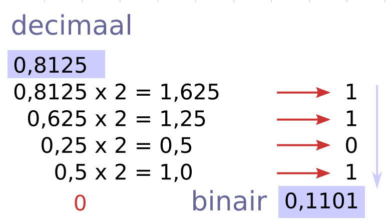
b 11011010/111

Toepassen

Er bestaan ook in het binaire stelsel **getallen met cijfers achter de komma**.
Eigenlijk werkt dat net als met gewone gehele getallen, maar nu zijn de exponenten van de machten van 2 negatief.

Bijvoorbeeld: $0{,}1101_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$.
En dit wordt:
$0{,}1101_2 = 0_{10} + 0{,}5_{10} + 0{,}25_{10} + 0_{10} + 0{,}0625_{10} = 0{,}8125_{10}$.

Het omrekenen van een decimaal getal met een komma erin naar een binair getal gaat voor de uitdrukking achter de komma nu niet door delen door 2, maar vermenigvuldigen met 2. In de figuur zie je hoe dat gaat. Als het goed is heb je dit al bij ‘Binaire getallen’ een paar keer gedaan.



Figuur 13.1

Opgave 12

Nu ga je rekenen met binaire getallen met en zonder komma erin en in een 8-bits systeem.

Je wilt $11{,}1101 - 0{,}101$ berekenen.

a Hoe geef je beide getallen in het 8-bits systeem weer?

b Voer nu de berekening uit. Controleer je antwoord decimaal.

Nu wil je 10,1101/0,101 berekenen.

c Voer deze berekening uit.

Opgave 13

Je hebt al eerder gezien dat niet alle decimale breuken binair zijn weer te geven als je met een vast aantal bits werkt.

a Laat zien, dat $0{,}6_{10} = 0{,}100110011001..._2$.

b Waarom kun je $0{,}6_{10}$ niet als een eindig binair kommagetal weergeven en $0{,}75_{10}$ wel?

c Is $0{,}1_{10}$ in een 24-bits binair systeem weer te geven?

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de getallen $a = 110101$, $b = 11101$ en $c = 1010111$ in een 8-bits binair stelsel.

a Bereken $a - b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken c/b.

Opgave 15

Gegeven de decimale getallen 153 en 67.
Je gaat ze van elkaar aftrekken en op elkaar delen in een 8-bits binair stelsel.

a Bereken $153 - 67$. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $153/67$. Geef het antwoord met rest. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

13.3 Het hexadecimale stelsel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het hexadecimale stelsel gebruiken;
- hexadecimale getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd;
- hexadecimale getallen omrekenen naar binaire getallen en omgekeerd.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- het begrip binair getal en decimale getallen omzetten naar binaire getallen en omgekeerd.

Verkennen

Opgave V1

Het decimale stelsel is gebaseerd op machten van 10, het binaire stelsel op machten van 2. Nu ga je kennismaken met het hexadecimale stelsel, gebaseerd op machten van 16.

a Hoeveel symbolen heb je er dus voor nodig?

Een hexadecimaal getal geef je weer met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en de eerste letters van het alfabet.

b Kan $ab70cd$ een hexadecimaal getal zijn?
En $13f8g$?

c Welk decimaal getal stelt $a0f3_{16}$ voor?

Uitleg

Het binaire talstelsel kent alleen de cijfers 0 en 1 en is gebaseerd op machten van 2. Maar getallen bestaan al snel uit heel veel nullen en énen en lezen daarom nogal moeilijk. Om leesfouten te voorkomen zijn er talstelsels bedacht die zijn gebaseerd op machten van $2^3 = 8$ of machten van $2^4 = 16$.

Het talstelsel gebaseerd op machten van 16 heet het hexadecimale stelsel.
Er zijn dan 16 symbolen nodig:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c d, e, f.
Het symbool a is de decimale 10 en de binaire 1010.

Het getal $a0f3_{16}$ is daarom:
$a0f3_{16} = 3 \cdot 16^0 + 15 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^3 = 41203_{10}$.

decimaal getal	binair getal	hexadecimaal getal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	a
11	1011	b
12	1100	c
13	1101	d
14	1110	e
15	1111	f

Tabel 13.1

Omrekenen van decimaal naar hexadecimaal gaat met behulp van delen door 16 en dan steeds de rest opschrijven. Hier zie je hoe het decimale getal 41203 op die manier geschreven wordt als het hexadecimale getal $a0f3$.

deel door 16

decimaal	rest	
41203		
2575	3	3
160	15	f
10	0	0
	10	a
	a0f3	

Figuur 13.1

In de tabel kun je zien dat het omrekenen van hexadecimaal naar binair (en omgekeerd) erg eenvoudig is.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat een hexadecimaal getal is.

a Reken $13b5_{16}$ om naar een decimaal getal.

b Laat zien dat $1103_{16} \neq 1103_{10}$.

c Reken 1103_{10} om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 2

Vergelijk het binaire stelsel met het hexadecimale stelsel in de tabel in de **Uitleg**.

a Leg uit, dat $13b5_{16} = 0001001110110101_2$.
(De eerste drie nullen kunnen eigenlijk weg.)

b Controleer dat zowel het hexadecimale getal als het binaire getal 5045_{10} opleveren.

c Hoe kun je 1011011001_2 omzetten naar een hexadecimaal getal?

d Controleer je antwoord bij c door beide getallen om te zetten naar hetzelfde decimale getal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **hexadecimale talstelsel** is gebaseerd op machten van 16. Er zijn dan ook 16 symbolen nodig om een getal te maken, namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c d, e, f.

Het getal $5c06_{16}$ is in het decimale stelsel:
$5c06_{16} = 5 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 23558_{10}$.

Verder omrekenen gaat zo:

- Van decimaal naar hexadecimaal:
  Deel het getal door 16 en schrijf de uitkomst met rest op.
  Herhaal deze procedure tot je onder de 16 uitkomt.
  De resten vormen het hexadecimale getal.
- Van hexadecimaal naar binair:
  Vervang elk teken door de bijbehorende 4-bits binaire code.
  Laat eventueel de voorste nullen weg.

- Van binair naar hexadecimaal:
  Deel het getal van rechts naar links op in 4-bits tekens, voeg vooraan extra nullen toe indien nodig.
  Vervang elk 4-bits teken door zijn hexadecimale teken.

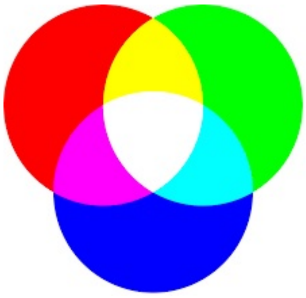
In de voorbeelden zie je hoe dit in zijn werk gaat.

Voorbeeld 1

In html (hypertext markup language, de 'taal' van het internet) wordt wel de RGB-kleurcode gebruikt (Rood|Groen|Blauw). Een RGB-kleurcode is bijvoorbeeld FF.B5.18. Zo'n code bestaat uit drie hexadecimale getallen van twee tekens.

In tekenprogramma's worden vaak de decimale varianten van zo'n code gebruikt.

Welke decimale code hoort er bij FF.B5.18?



Figuur 13.2 RGB

Antwoord

FF $= ff_{16} = 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 255_{10}$

B5 $= b5_{16} = 11 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 181_{10}$

18 $= 18_{16} = 1 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 24_{10}$

Dus $ff.b5.18$ wordt 255.181.24.
Dit is de oranje-achtige kleur in het math4all-logo.

Opgave 3

Bekijk de hexadecimale RGB-kleurcode in **Voorbeeld 1**.

a Bereken de decimale variant van 66.99.CC (een soort lichtblauw).

b Een soort rood is in de decimale RGB-code 204.51.51.
Bepaal de bijbehorende hexadecimale code.

c Hoeveel verschillende kleurcodes bevat het RGB-systeem?

Opgave 4

Reken om:

a $aa04f_{16}$ naar een decimaal getal.

b 65034_{10} naar een hexadecimaal getal.

Voorbeeld 2

In een 16-bits binair stelsel kun je alleen de getallen 0 tot en met 65535 maken.

Dit laatste getal 65535_{10} ziet er dan zo uit:
$65535_{10} = 1111111111111111_2$.

Zo'n binair getal kun je eigenlijk nauwelijks lezen, je hoeft maar een ééntje te vergeten en je hebt iets heel anders. Daarom geef je dit liever weer in het hexadecimale stelsel, want heen en weer rekenen tussen binair en hexadecimaal is erg eenvoudig: elke 4-bits combinatie van nullen en énen heeft een bijpassend hexadecimaal teken.

Hoe ziet 1111111111111111_2 er hexadecimaal uit?

Antwoord

Verdeel het binaire getal in blokjes van 4 bits van rechts naar links:

$1111111111111111_2 = 1111.1111.1111.1111_2$

Vervang elk 4-bits blokje door het bijpassende hexadecimale teken:

$1111111111111111_2 = 1111.1111.1111.1111_2 = ffff_{16}$

En dat leest veel gemakkelijker.

Controle: $ffff_{16} = 65535_{10}$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je omrekent van een binair getal naar een hexadecimaal getal.

a Controleer dat $ffff_{16} = 65535_{10}$.

b Reken 1100100100_2 om naar een hexadecimaal getal.

c Reken $3d0f_{16}$ om naar een binair getal.

Opgave 6

Alle getallen in een 16-bits binair stelsel kun je hexadecimaal weergeven met maximaal 4 tekens.

a Leg uit, waarom dat zo is.

In een 32-bits binair stelsel kun je 4.294.967.296 getallen maken.

b Laat zien, dat dit klopt.

c Reken $10001001101011011111000010000111_2$ om naar een hexadecimaal getal.

Oefenen

Opgave 7

Reken de volgende hexadecimale getallen om naar decimale getallen.

a $1a0b$

b $1200f$

c $cafe$

Opgave 8

Reken de volgende decimale getallen om naar hexadecimale getallen.

a 4096.

b 14096.

c 104096.

Opgave 9

Grote binaire getallen bestaan uit veel nullen en/of énen. Een fout is dan zo gemaakt. Daarom worden ze vaak hexadecimaal weergegeven.

a Reken $1011111011111100100110 10_2$ om naar een hexadecimaal getal.

b Reken $79cf0_{16}$ om naar een binair getal.

Opgave 10

Bij het coderen van teksten zodat ze leesbaar zijn op het internet, wordt onder andere voor letters, cijfers en andere symbolen Unicode gebruikt. De Unicode voor bijvoorbeeld het kleinerteken is U+003C. En de Unicode voor de Griekse α is U+03B1.

Het getal achter het plusteken is hexadecimaal.
Maar deze zijn om te rekenen naar decimale nummers.

a Welk decimale nummer hoort bij U+003C?

b Welk decimale nummer heeft de α in Unicode?

c Welk teken heeft in Unicode het decimale nummer 8658?

Toepassen

Internet Protocol versie 6 (IPv6) is versie 6 van het internetprotocol voor het gebruik van internetadressen. Het is de opvolger van IPv4 en is de tweede versie van het internetprotocol die in gebruik is genomen. (De tussenliggende versie IPv5 was een experimentele aanvulling op IPv4, maar deze werd nooit geïmplementeerd.) IPv6 is op 14 juli 2017 in werking getreden.

```
2001:0db8:85a3:0000:1319:8a2e:0370:7344
```

Figuur 13.3 Bron: Wikipedia

IPv6-adressen zijn 128 bits lang en worden normaal geschreven als 8 groepen van 4 hexadecimale tekens, gescheiden door dubbele punten.

Opgave 11

Lees in **Toepassen** hoe IPv6 in elkaar zit.

a Waarom wordt het hexadecimale stelsel gebruikt, denk je?
En niet bijvoorbeeld het decimale stelsel of het binaire stelsel.

b IPv4 bestond uit 32 bits, IPv6 bestaat uit 128 bits.
Hoeveel internetadressen kon je met IPv4 maken? En nu met IPv6?

Opgave 12

Bekijk het internetadres in **Toepassen**.

a Waaraan kun je zien dat het uit 128 bits bestaat?

b Schrijf het gegeven IP-adres in binaire vorm.

Testen

Opgave 13

a Reken $a0bf13_{16}$ om naar een decimaal getal.

b Reken 16000_{10} om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 14

a Reken $110111110011011001001101 0_2$ om naar een hexadecimaal getal.

b Reken $a0bf13_{16}$ om naar een binair getal.

13.4 Logische schakelingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat in de digitale regeltechniek een logische poort is;
- de werking van de logische poorten ‘en’, ‘of’, ‘niet’ en de bijbehorende waarheidstabellen;
- het resultaat van een schakeling van logische poorten weergeven middels een waarheidstabel.

Voorkennis

- een beetje logisch redeneren.

Verkennen

Opgave V1

Een machine maakt een bepaald product P vanuit twee componenten A en B.
Alleen als beide componenten worden aangevoerd gaat de machine aan de slag.

a Werkt deze machine als component A niet meer in voorraad is?

Als een component op voorraad is krijgt het de aanduiding 1, als het niet op voorraad is de aanduiding 0. Hetzelfde geldt voor product P: als het wordt gemaakt krijgt het de aanduiding 1, anders 0.

b Vul de tabel in.

c Waarom wordt deze manier van P produceren wel een EN-poort genoemd?

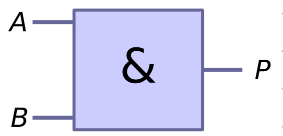
A	B	P
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Tabel 13.1

Uitleg 1

Een machine maakt een bepaald product P vanuit twee componenten A en B.
Alleen als beide componenten worden aangevoerd gaat de machine aan de slag.

Dit wordt binnen de machine digitaal geregeld. Er is sprake van een logische poort. Je ziet hiernaast hoe deze poort symbolisch wordt weergegeven in het IEC-systeem (IEC betekent International Electrotechnical Commission).



Figuur 13.1

Elke component en het eindproduct kent binnen zo'n digitale schakeling twee standen: 0 of 1. De werking van de poort kan dan zo worden weergegeven in een waarheidstabel.

Hier betekent 0 dat een component niet beschikbaar is of dat het eindproduct P niet wordt gemaakt. De tabel laat zien dat P alleen wordt gemaakt als A én B beschikbaar zijn. Daarom heet zo'n logische poort een EN-poort.

Je ziet, dat je de resultaten voor P ook kunt krijgen door de waarden voor A en B te vermenigvuldigen. Daarom schrijf je voor de EN-poort wel $A \cdot B = P$.

Er bestaan meerdere logische poorten. De belangrijkste zijn de NIET-poort en de OF-poort.

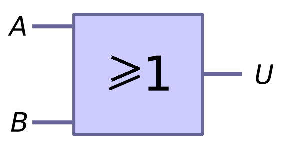
A	B	P
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 13.2

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** wat een logische EN-poort is.
Hiernaast zie je het IEC-symbool van een logische OF-poort.

Stel je voor dat er precies twee toegangswegen A en B naar een automatisch openende uitgang U leiden. De uitgang moet opengaan op het moment dat er op één van beide of op beide toegangswegen mensen zijn.



Figuur 13.2

a Maak een bijpassende waarheidstabel. Gebruik weer 0 voor geen mensen en voor niet opengaan en 1 voor wel mensen en wel opengaan.

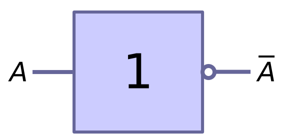
b Waarom wordt dit een OF-poort genoemd?

c De werking van deze poort wordt wel aangeduid met $A + B = U$. Wat klopt hier rekentechnisch wel en wat klopt er niet?

d Waarom staat er ≥ 1 op het symbool?

Opgave 2

De eenvoudigste logische poort is wel een ‘aan/uit-schakelaar’
Daarbij hoort de NIET-poort. Je ziet hier het IEC-symbool.
De schakelaar verandert A in niet-A, ofwel $\overline{A}$.



Figuur 13.3

a Nu is de waarheidstabel wat kleiner. Laat dat zien.

b Waarom zou er een 1 op het IEC-symbool staan?

c Wat gebeurt er als je een OF-poort laat volgen door een NIET-poort?
Maak een waarheidstabel.

d Wat betekent $\overline{A} + B$?
Maak een waarheidstabel.

Uitleg 2

Je hebt gezien dat er bij digitale schakelingen logische poorten worden gebruikt. Je spreekt van 'logische functies'.
Je kent de EN-functie, de OF-functie en de NIET-functie.
Maar je kunt die ook combineren tot logische schakelingen.
Daarbij maak je gebruik van 'schakelalgebra', het rekenen met schakelfuncties. Vaak gebruik je er waarheidstabellen bij.

		EN	OF	NIET	NIET
A	B	$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Tabel 13.3

Bekijk het overzicht van de basisschakelfuncties.

De schakelfunctie $U = A + \overline{A} \cdot B$ (dus A OF NIET(A) EN B) is een combinatie ervan.
Je kunt de werking daarvan achterhalen door een waarheidstabel te maken.

Ook kun je met behulp van waarheidstabellen soms schakelingen vereenvoudigen: $\overline{A} \cdot B + A \cdot B + B = B$.

Bij het werken met dergelijke combinaties geldt de rekenvolgorde: eerst NIET, dan EN en vervolgens OF.
Verder zijn er rekenregels als $A \cdot B = B \cdot A$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.
Met waarheidstabellen kun je deze rekenregels voor schakelfuncties laten zien.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Let vooral goed op de rekenvolgorde bij schakelfuncties.

a Maak een waarheidstabel bij de schakelfunctie $U = A + \overline{A} \cdot B$.

b Laat met een waarheidstabel zien, dat $\overline{A} \cdot B + A \cdot B + B = B$.

c Laat met waarheidstabellen zien, dat $A \cdot B = B \cdot A$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.

Opgave 4

Onderzoek met behulp van waarheidstabellen of je de volgende schakelfuncties korter kunt schrijven.

a $U = A + A$

b $U = A \cdot 1 + A \cdot 0$

c $U = A + \overline{A}$

d $U = A + A \cdot B$

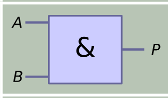
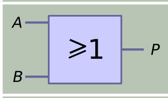
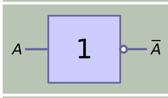
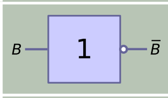
e $U = A \cdot (A + B)$

f $U = (A \cdot B) \cdot \left(\overline{A} \cdot B\right)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In de digitale regelkunde wordt gebruik gemaakt van **logische functies**, met name de EN-functie, de OF-functie en de NIET-functie. Je ziet hier bij elk van die poorten de bijbehorende **waarheidstabel** en het IEC-symbool.

		EN	OF	NIET	NIET
					
A	B	$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Tabel 13.4

Bij het werken met dergelijke combinaties geldt de rekenvolgorde: eerst NIET, dan EN en vervolgens OF.
Verder zijn er de rekenregels van De Morgan:

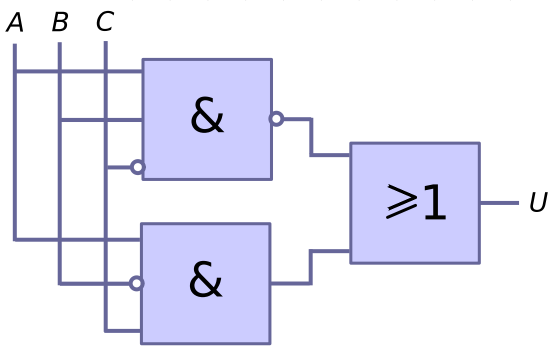
- $A + B = B + A$ en $A \cdot B = B \cdot A$.
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ en $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.

Met behulp van waarheidstabellen kun je deze regels van De Morgan controleren.
Verder gebruik je die om samengestelde schakelfuncties te vereenvoudigen en/of de werking ervan te begrijpen.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een schakeling.

Welke schakelfunctie hoort bij deze schakeling?
Stel ook de bijbehorende waarheidstabel op.



Figuur 13.4

Antwoord

Denk er om dat die kleine rondjes voor NIET staan!

Je krijgt: $U = \overline{A \cdot B \cdot \overline{C}} + A \cdot \overline{B} \cdot C$.

Ga na, dat de waarheidstabel wordt:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cdot B$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$\overline{A \cdot B \cdot \overline{C}}$	$A \cdot \overline{B}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	U
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1

Tabel 13.5

Opgave 5

Bekijk het schakelschema in **Voorbeeld 1**.

a Stel zelf - zonder naar het voorbeeld te kijken - de bijbehorende schakelfunctie op.

b Waarom heeft de waarheidstabel acht rijen?

c Maak zelf de bijbehorende waarheidstabel.

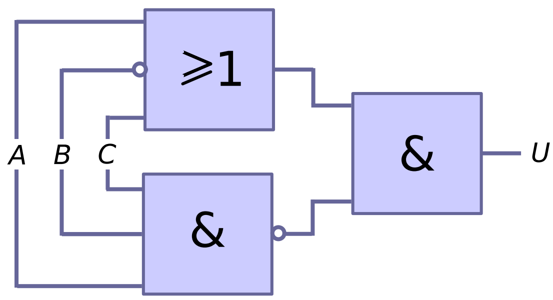
d Wanneer is er geen uitgangssignaal?

Opgave 6

Bekijk deze schakeling.

a Welke schakelfunctie hoort bij deze schakeling?

b Stel de bijbehorende waarheidstabel op.



Figuur 13.5

Voorbeeld 2

Gegeven is de schakelfunctie $U = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

Teken deze schakeling met behulp van de IEC-symbolen. ook zien, dat de schakeling is te vereenvoudigen.

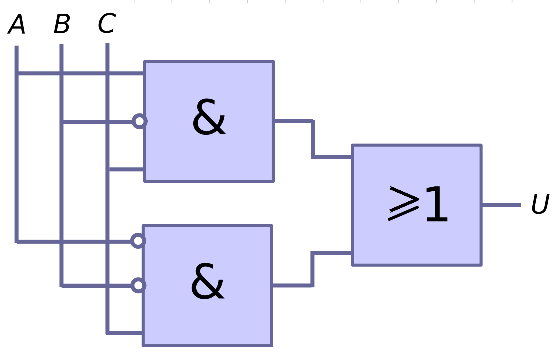
Antwoord

Hiernaast zie je de tekening van de schakeling. Loop hem zelf na.

Volgens de regels van De Morgan is:

$U = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C =$
$= \left(A + \overline{A}\right) \cdot \overline{B} \cdot C = 1 \cdot \overline{B} \cdot C = \overline{B} \cdot C.$

Met een waarheidstabel kun je nagaan dat dit klopt.



Figuur 13.6

Opgave 7

Bekijk de schakelfunctie in **Voorbeeld 2**.

a Maak zelf de tekening van de schakelfunctie zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Ga met behulp van een waarheidstabel na, dat de vereenvoudiging klopt.

Oefenen

Opgave 8

Maak bij de volgende schakelfuncties waarheidstabellen. Denk om de rekenvolgorde!

a $U = \overline{A} \cdot B + B$

b $U = A + B \cdot A + B$

c $U = (A + B) \cdot (A + B)$

Opgave 9

Probeer de volgende schakelfuncties korter te schrijven.
Controleer je antwoorden met waarheidstabellen.

a $U = A \cdot A$.

b $U = A \cdot \overline{A}$.

c $U = A + \overline{A}$.

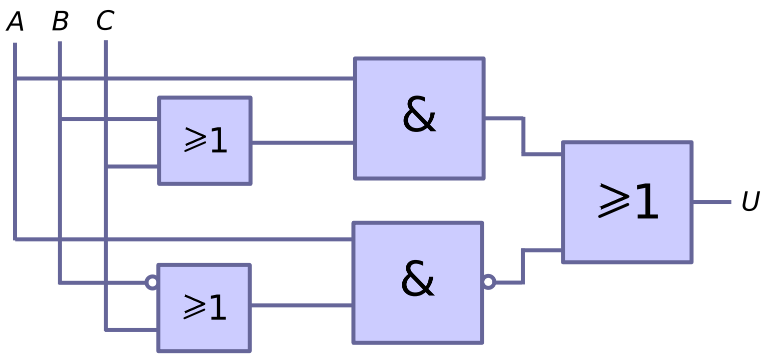
d $V = A \cdot B + \overline{A} \cdot B$.

e $V = \overline{A \cdot \overline{B}}$.

f $W = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$.

Opgave 10

Een binaire schakeling is gegeven door de figuur hieronder.



Figuur 13.7

a Schrijf de bijbehorende schakelfunctie op.

b Maak een bijpassende waarheidstabel.

Opgave 11

Gegeven is de schakelfunctie $U = A \cdot B + A \cdot C + \overline{A} \cdot (B + C)$.

a Teken het schakelschema bij deze schakelfunctie. Gebruik de IEC-symbolen voor logische poorten.

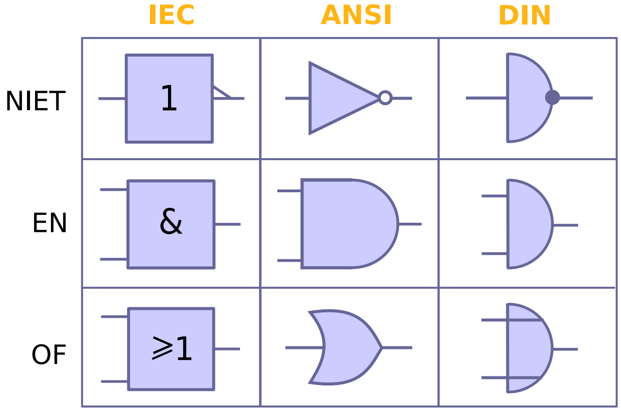
b Vereenvoudig deze schakelfunctie.

c Hoe ziet het vereenvoudigde schakelschema er uit?

Toepassen

Er bestaan meerdere symbolen voor logische poorten. Tot nu toe zijn steeds IEC-symbolen gebruikt (IEC betekent International Electrotechnical Commission). Je ziet trouwens dat het NIET-symbool iets afwijkt van het symbool dat in de **Theorie** staat.
Maar je hebt ook het Noord-Amerikaanse ANSI-systeem (ANSI betekent American National Standards Institute) en het Duitse DIN-systeem (DIN betekent Deutsches Institut für Normung).
In de figuur zie je de bijbehorende tekens van de basissymbolen (volgens Wikipedia).

In de praktijk zul je ze wellicht allemaal wel tegenkomen.



Figuur 13.8

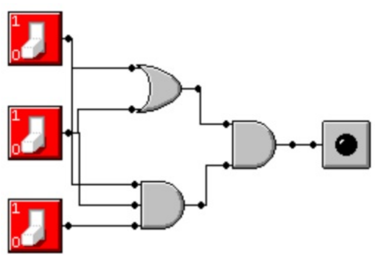
Opgave 12

Bekijk de drie versies van symbolen voor de logische basisfuncties in **Toepassen**. Bekijk ook de schakeling in de figuur hiernaast. Hij is gemaakt met MM-Logic (het gratis oefenpakket Multi Media Logic). Er zijn drie ingangsschakelaars A, B en C en er is een lampje L als uitgangssignaal.

a Welk symbolensysteem is er gebruikt?

b Schrijf de bijpassende schakelfunctie L op.

c Omschrijf in woorden wat deze schakelfunctie doet.


Figuur 13.9

Opgave 13

Hieronder worden twee praktijksituaties beschreven.
Maak er een schakelfunctie bij, teken de schakeling met behulp van één van de symbolensystemen en maak er een waarheidstabel bij.

a De hotelschakeling is een schakeling waarmee je onderaan een trap het licht aan kunt doen en dit dan bovenaan weer uit kunt doen en omgekeerd.

b Een afgesloten vat bevat een vloeistof die wordt verhit. Als de temperatuur te hoog wordt, moet er een signaal afgaan en een klep openen. Als het vloeistofniveau te laag wordt en tegelijk de klep nog open staat, moet het signaal ook afgaan.

Testen

Opgave 14

Maak bij de volgende schakelfuncties waarheidstabellen. Probeer ze waar mogelijk korter te schrijven.

a $U = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$

b $U = A + \overline{B} + A \cdot B$

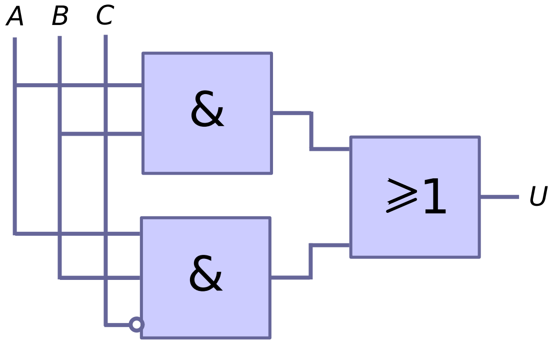
c $U = (A + B + C) \cdot ((A + B) \cdot C)$

Opgave 15

Een binaire schakeling is gegeven door de figuur hiernaast.

a Schrijf de bijbehorende schakelfunctie op.

b Maak een bijpassende waarheidstabel.



Figuur 13.10

13.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met binaire en hexadecimale getallen voorbij gekomen. Ook heb je de beginselen van binaire schakelfuncties gezien.

Je hebt nu alle theorie van **Talstelsels en logica** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- binair stelsel — binair getal;
- binair complement;
- hexadecimaal stelsel — hexadecimaal getal;
- logische poort — logische functie, (binaire) schakelfunctie — EN-, OF-, NIET-schakelfunctie — waarheidstabel.

Activiteitenlijst

- binaire getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd — binaire getallen optellen en vermenigvuldigen;
- optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met binaire getallen;
- hexadecimale getallen, binaire getallen en decimale getallen naar elkaar omrekenen;
- schakelingen waarin EN-, OF- en/of NIET-functies voorkomen interpreteren en er een waarheidstabel bij maken — de rekenregels van De Morgan gebruiken.

Testen

Opgave 1

Je werkt in een 16-bits binair stelsel.
$a = 11101100$ en $b = 101111$.

a Bereken $a + b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $b - a$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Bereken $a \cdot b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

d Bereken a/b met een rest en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

Opgave 2

Bereken binair en controleer decimaal:

a $1326_{10} + 110011_2$

b $1326_{10}/110011_2$

Opgave 3

Gegeven het hexadecimale getal $12cf3$.

a Reken dit getal om naar een binair getal.

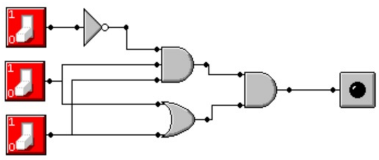
b Reken dit getal om naar een decimaal getal.

Gegeven het decimale getal 100546.

c Reken dit getal om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 4

Gegeven is deze schakeling gemaakt in MM Logic.
Noem de schakelaars van boven naar beneden A, B en C en het lampje L.



Figuur 13.1

a Schrijf een bijpassende schakelfunctie op.

b Maak een bijbehorende waarheidstabel.

c Wanneer gaat het lampje branden?

d Hoe kun je deze schakeling eenvoudiger maken?

Opgave 5

Gegeven zijn de logische functies A en B. Laat zien, dat:

a $A \cdot B + \overline{A} \cdot B = B$

b $(A + B) \cdot \left(A + \overline{B}\right) = A$

Toepassen

Opgave 6: Het achttallig stelsel

In de eerste jaren van de computer werd er veel met het achttallig (of het octale) stelsel gewerkt.
Daarin bestaan alleen de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

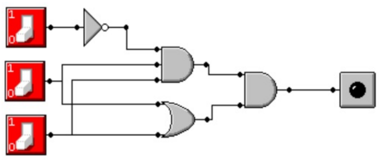
a Laat zien, hoe je het octale getal 5137 omrekent naar een decimaal getal.

b Laat zien, hoe je het decimale getal 1000 omrekent naar het achttallig stelsel.

c Geef de cijfers van het octale stelsel weer in het binaire stelsel. Hoe kun je gemakkelijk van octaal naar binair omrekenen? En omgekeerd?

Opgave 7: Multi Media Logic

Via **deze hyperlink** kun je het open source computerprogramma ‘Multi Media Logic’ downloaden. Daarmee kun je binaire schakelingen maken zoals die hiernaast. Bestudeer de werking van dit programma.



Figuur 13.2

a Maak deze schakeling in MM-Logic. De schakelaars zijn van boven naar beneden A, B en C en het lampje is L.
Ga na, dat het lampje gaat branden als B en C tegelijk op 1 staan.

b Maak een schakeling bij de schakelfunctie
$L = (A + B + C) \cdot \overline{A \cdot B \cdot C}$.
Onderzoek wanneer het lampje gaat branden en laat zien dat dit ook uit de waarheidstabel volgt.

c Werk met iemand samen en geef elkaar schakelfuncties op om te maken in MM-Logic. Voorspel dan de werking van je schakeling met behulp van een waarheidstabel.

14

Modelleren

14.1 Een model opstellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met allerlei functies;
- meetkundige technieken zoals de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, met sinus, cosinus, tangens.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wilt berekenen hoe ver deze persoon theoretisch over het aardoppervlak kan kijken. Welke eigenschappen (van de situatie) komen hierbij kijken?

Uitleg

Probleem:
“Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) over het aardoppervlak kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg**. De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

a Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.

b Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak.
Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.

c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?

d Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.

e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de **Uitleg** op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a. Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in ΔMPR.

a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.

De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.

b Hoe kun je daarmee rekening houden?

c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:
Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a. De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR. En die kun je uitrekenen in driehoek MPR.

a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.

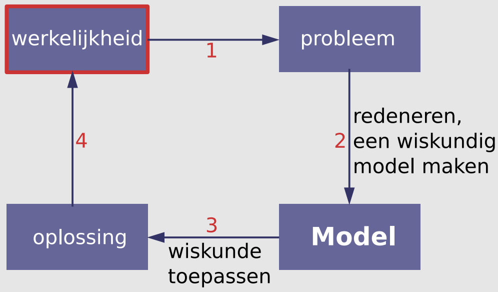
b Waarom is nu het probleem opgelost?

c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.
Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.



Figuur 14.1

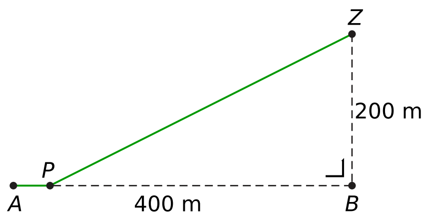
1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De **lijst met mogelijke vragen** kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Zwemmer in nood

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij (punt A). Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer (bij Z) die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?



Figuur 14.2

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid 5,4 km/h.

Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen. Bekijk daarna de opgaven.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?

b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?

c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP. Noem die lengte bijvoorbeeld x.

e Stel een formule op voor de totale tijd T die nodig is om Z te bereiken vanuit A.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** en de opgave over het 'zwemmer in nood' probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?

b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?

c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?

d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?

e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).

Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:

$P = c \cdot m \cdot v^2$

Hierin is P het vermogen in kilowattuur (kWh), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$.

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.

d Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Oefenen

Opgave 7

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord? Dit in vergelijking met het leggen van de kabel op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden.

a Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.

b Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.

c Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.

Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieselversie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieselversie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

a Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.

b Welke oplossing vind je?

c Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) 52,37° en 40000 km.

Opgave 10

Je ziet hier een locomotief van Märklin of Fleischmann, die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

Figuur 14.3

Opgave 11

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule $W = 0{,}03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S$. Hierin is W het gewicht in kg, S het vleugeloppervlak in m^2, V de kruissnelheid in m/s en d de luchtdichtheid in kg/m^3.

a Ga uit van een luchtdichtheid van 0,421 kg/m^3. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid 700 km/h is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.

b Een vliegtuig met een kruissnelheid van 250 m/s en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?

c In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van 0,369 kg/m^3. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V. Wat is de evenredigheidsconstante?

d Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig 1,4 keer zo groot wordt?

Toepassen

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 watt/m^2.

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a. Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € 0,15 per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost. Neem nu per jaar:

- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € 50,00 per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € 0,15 per kWh.

Opgave 12

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in.

a Welke formule geldt voor de lichtsterkte in dit punt?
Neem aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.

b Welke twee voorwaarden leveren de formules bij a op?

Opgave 13

Bekijk de vorige opgave. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden. De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15\right)$$

a Laat zien hoe je aan deze formule komt.

b Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Testen

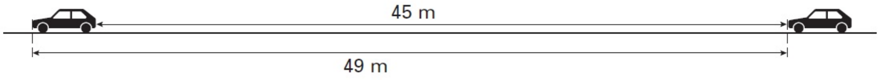
Opgave 14

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.
Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

$$k = k_{\text{max}} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\text{max}}}\right)$$

Hierbij is v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur, v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt, k de verkeersdichtheid en k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg. Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: ‘Houd 2 seconden afstand’.



Figuur 14.4

a Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.
Ga uit uit van de volgende situatie.
Op een weg is $v_{max} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

b Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{max} = 250$ en $v_{max} = 160$.

c Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v. Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is

14.2 Optimaliseren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Verkennen

Opgave V1

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Probleem:
"Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?"

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.
Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2. Met deze gegevens maak je een figuur.

Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000$ m^2. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**.

a Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000$ m^2 is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.

b Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**.
Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie.
Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.

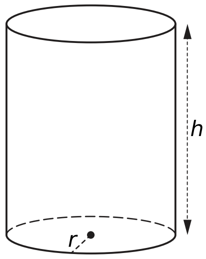
Meestal schakel je daarna GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine in om de optimale oplossing te vinden.
Maar dat kan eigenlijk alleen als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft.
In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.



Figuur 14.1

Omdat gegeven is dat $I = 1000$ cm^3 kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r.

De formule die je krijgt, kun je in een grafische rekenmachine, Desmos, of GeoGebra invoeren. Je vindt dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 3

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?

c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.

d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3.

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x.
Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$. Deze variabelen hangen allemaal af van x.

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2**. Kies voor x het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x.

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

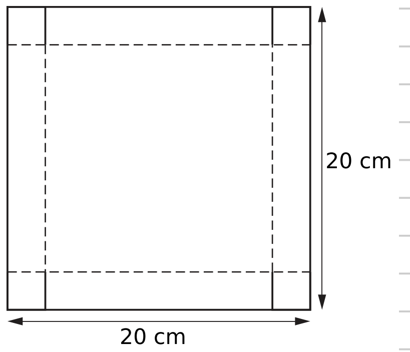
Oefenen

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?

b Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.

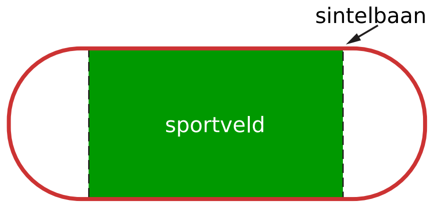


Figuur 14.2

Opgave 8

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.



Figuur 14.3

Opgave 9

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q (×1000) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

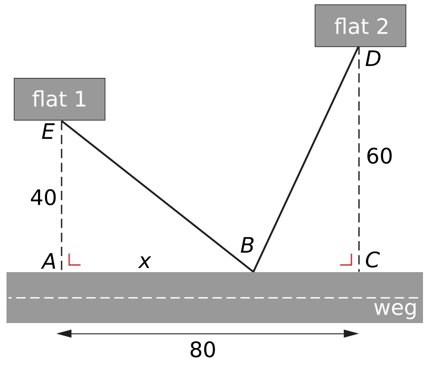
c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.
Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.



Figuur 14.4

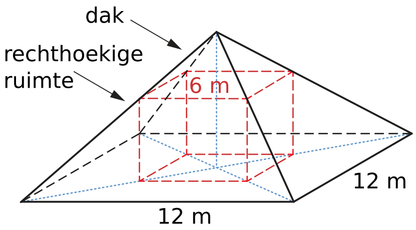
a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

b Bereken de totale lengte L in meter.

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 14.5

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Opgave 12

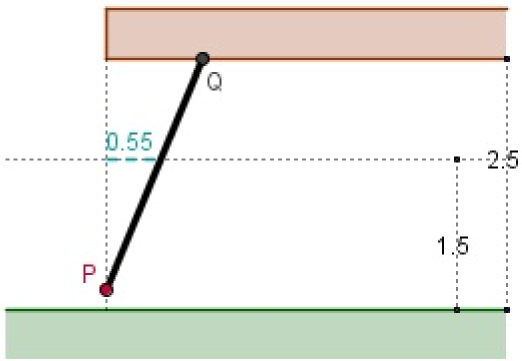
De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Toepassen

Bekijk de applet: Garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 14.6

Opgave 13

Bekijk het probleem in **Toepassen**.

a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A, beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

$$A = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2{,}5^2 - x^2}$$

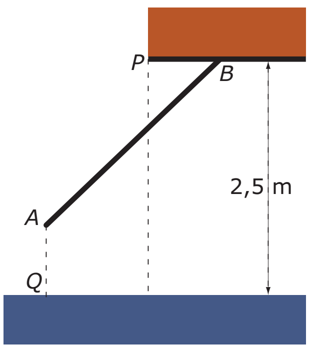
b Probeer zelf de formule voor A als functie van x af te leiden.

c Bereken voor welke x de waarde van A maximaal is.

Opgave 14

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 14.7

Testen

Opgave 15

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Los het geschetste probleem op.

Opgave 16

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

14.3 Onderzoeksopdrachten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

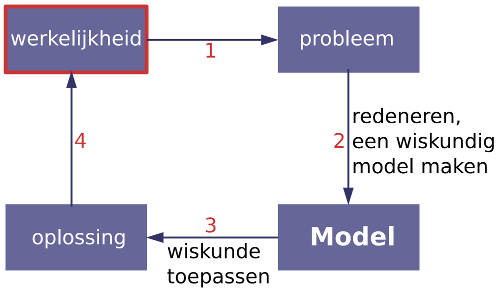
- modelleren toepassen bij onderzoeksopdrachten.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Uitleg

Het is nu de bedoeling dat je zelf wat complexere opdrachten aanpakt.
Dit worden **onderzoeksopdrachten** genoemd.
In dergelijke opdrachten wordt een situatie beschreven waarin de wiskunde je kan helpen bij het vinden van een geschikte oplossing. Welke wiskunde dat is en hoe die oplossing tot stand kan komen, moet je zelf onderzoeken. Denk daarbij aan de modelleercyclus en de **lijst met mogelijke vragen** om je te helpen.



Figuur 14.1

Omdat het de bedoeling is dat je hier zelf onderzoek doet, vind je geen uitgebreide antwoorden bij deze opgaven!

Toepassen

De volgende opdrachten zijn bedoeld als **onderzoeksopdrachten**. De bedoeling is dat je zelf een onderzoekje doet, mogelijk zelfs met een eigen experiment. Daarvan maak je een uitgebreid onderzoeksverslag.
Je vindt dan ook geen uitgebreide uitwerkingen bij deze opgaven.

Opgave 1: Elektrisch rijden?

Het rijden in een auto kost geld. Je maakt kosten vanwege de brandstof of de elektriciteit, maar ook betaal je wegenbelasting, verzekering, en dergelijke. En tenslotte moet je de auto kopen en ook dat kost geld. Ga na wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Figuur 14.2

Hier heb je enkele gegevens om mee te werken:

- Smart fortwo op benzine:
  - benzine kost € 1,60 per liter;
  - je rijdt gemiddeld 20 km per liter benzine;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 2000,-;
  - de aanschafprijs is € 15000,-.

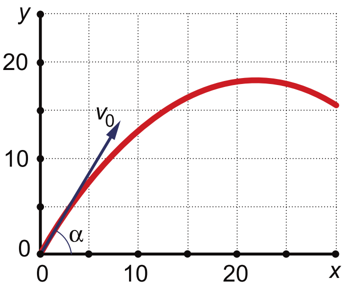
- Smart fortwo op elektriciteit:
  - elektriciteit kost € 0,20 per kWh;
  - de maximale accucapaciteit is € 17,6 kWh;
  - met de maximale accucapaciteit rijd je gemiddeld 140 km;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 1200,-;
  - de aanschafprijs is € 22000,-.

Maar het is natuurlijk leuker om met actuele gegevens te werken en je 'eigen' type auto te kiezen!

Bereken van een bepaald merk auto wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Opgave 2: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt. Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.



Figuur 14.3

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.
Dus is:

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \text{ en } y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0(\cos)^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.
Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

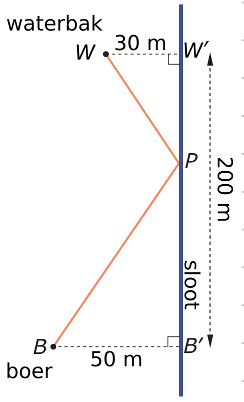
Opgave 3: Kortste weg of snelste weg?

Een boer wil water naar de waterbak brengen die voor zijn paarden is bestemd. Hij haalt dat uit de sloot met behulp van een emmer. Daarbij neemt hij ofwel de kortste weg, ofwel de snelste weg. In de figuur hiernaast is een bovenaanzicht van de situatie getekend met de afstanden er in aangegeven.

a Bepaal de kortste weg van B naar W via de sloot.

Met een lege emmer loopt de boer met een snelheid van 3 m/s, met een volle emmer met een snelheid van 1 m/s.

b Bepaal de snelste weg van B naar W via de sloot.



Figuur 14.4

Opgave 4: Geremde exponentiële groei

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes (‘Drosophila melanogaster’). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
N	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 14.1


Figuur 14.5

a Ga na dat deze groep fruitvliegjes in het begin exponentieel groeit.
Met welk percentage per dag?

Er blijkt uiteindelijk toch geen sprake te zijn van exponentiële groei. N nadert de 350 fruitvliegjes.

De bijpassende formule heeft daardoor de vorm: $N = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

b Stel de formule op die bij deze tabel past.
Bereken bij welke waarde van t de groeisnelheid maximaal is.

c Probeer bij de groei van de mensheid zo'n geremd exponentieel groeimodel op te stellen.

Opgave 5: Filevorming

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.


Figuur 14.6

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond van deze aannames een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v. Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl