

Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Katern 8

Inhoud

Beschrijvende statistiek

Normale verdeling

Conclusies trekken

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

15 Beschrijvende statistiek 5

15.1 Metingen en statistiek 6

15.2 Meetnauwkeurigheid 16

15.3 Diagrammen 25

15.4 Centrummaten 37

15.5 Spreidingsmaten 48

15.6 Totaalbeeld 58

16 Normale verdeling 63

16.1 Soorten verdelingen 64

16.2 Normaalkromme 75

16.3 Rekenen met de normale verdeling 86

16.4 Betrouwbaarheidsintervallen 98

16.5 De Shewhartkaart 108

16.6 Totaalbeeld 119

17 Conclusies trekken 125

17.1 z-toetsen 126

17.2 t-toetsen 135

17.3 f-toetsen 143

17.4 Regressielijnen 151

17.5 Totaalbeeld 162

Register 167

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

15

Beschrijvende statistiek

15.1 Metingen en statistiek	6
15.2 Meetnauwkeurigheid	16
15.3 Diagrammen	25
15.4 Centrummaten	37
15.5 Spreidingsmaten	48
15.6 Totaalbeeld	58

15.1 Metingen en statistiek

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- dat je bij metingen altijd met afwijkingen en dus met statistiek te maken hebt;
- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen;
- wat een goede steekproef is en manieren om een steekproef uit een populatie te trekken.

Voorkennis

- rekenen met getallen, ook met procenten;
- tabellen en diagrammen interpreteren.

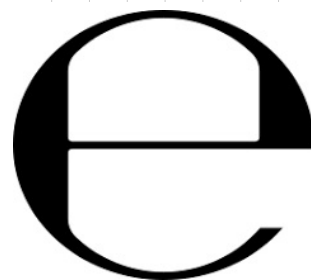
Verkennen

Opgave V1

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram e.

Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt.



Figuur 15.1

a Waarom zal hij niet elk pak wegen?

De fabrikant besluit elk honderdste pak suiker te wegen. Dat zijn er 4 per productie uur.

b Is dat een goede aanpak?

Een medewerker stelt voor om per 1000 pakken een steekproef van 10 pakken te wegen.

c Welke eisen stel je dan aan die steekproef?

d Welk risico heeft het werken met een steekproef?

e Waarom is het van belang om de steekproef steeds te herhalen?

Opgave V2

De geneesmiddelenautoriteit wil in kaart brengen of een bepaald veel verkocht geneesmiddel bijwerkingen heeft.

a Waarom is dat erg moeilijk als het geneesmiddel vrij te koop is?

Het betreffende geneesmiddel is alleen op doktersrecept verkrijgbaar.

Uit het bestand waarin alle huisartsen in Nederland voorkomen, worden er 25 willekeurig gekozen.



Hen wordt gevraagd om de patiënten die zij dit geneesmiddel voorschrijven te laten aangeven of één of meer van de volgende bijwerkingen optreden:

- slapeloosheid
- duizeligheid
- hoofdpijn
- maag- en darmklachten

- b** Hoe zou je dat willekeurig kiezen aanpakken?
- c** Waarom noem je de statistische variabele 'bijwerking' een kwalitatieve variabele en geen kwantitatieve?
- d** Hoe zou je het eindresultaat van zo'n onderzoek in beeld brengen?

Uitleg

Bij het vullen van pakken suiker krijg je nooit precies het juiste gewicht. Het vulgewicht is een statistische variabele.

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram €. Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt. Hij neemt daartoe regelmatig een steekproef uit de geproduceerde kilopakken suiker. Deze totale hoeveelheid geproduceerde kilopakken heet de populatie.

Zo'n steekproef moet representatief zijn voor de populatie. Dat wil zeggen dat de steekproef dezelfde eigenschappen moet hebben als de populatie. Worden bijvoorbeeld de pakken suiker door twee verschillende machines geproduceerd, dan moeten ook in de steekproef pakken suiker van beide machines voorkomen. Je zou 5 keer per dag willekeurig 10 pakken van machine A en 10 pakken van machine B kunnen wegen. Daarbij mag je dan geen enkele dag een pak aantreffen dat minder dan 970 gram weegt en moet het gemiddelde gewicht ≥ 1000 mg zijn. Dat willekeurig pakken noem je aselechte trekking. Het gewicht van de pakken is de statistische variabele. Omdat deze variabele altijd een getal als waarde heeft, noem je het een kwantitatieve statistische variabele. De fabrikant houdt zo een statistisch onderzoek. De uitkomsten ervan noem je de data.

Je kunt ook statistisch onderzoek doen naar mogelijke bijwerkingen van een medicijn. De waarden van de statistische variabele 'bijwerkingen' zijn termen als 'slapeloosheid', 'misselijkheid', en dergelijke. In dit geval spreek je van een kwalitatieve variabele. De variabele bestaat uit kwaliteiten, eigenschappen en niet uit getallen waar je mee kunt rekenen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Op een fles frisdrank staat 'Inhoud: 1 L e'.

- a Wat wordt hiermee bedoeld?
- b Waarom is de 'hoeveelheid frisdrank in deze fles' een statistische variabele?
- c Is de 'hoeveelheid frisdrank in deze fles' een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?

De fabrikant van een bepaalde soort frisdrank produceert er dagelijks 12.000 literflessen van. Daarop staat 'Inhoud: 1 L e'. Twee keer per dag laat hij van 10 flessen de inhoud controleren.

- d Beschrijf wat van dit onderzoek de populatie en de steekproef is.
- e Leg ook uit hoe hij er voor zorgt dat de steekproef representatief is.

Opgave 2

De NS heeft enkele jaren geleden de bekende blauw-met-gele OV-fiets ingevoerd. Die kun je huren met behulp van je (persoonlijke) OV-chipkaart.

De NS wil onderzoeken of hun klanten tevreden zijn over het systeem met de OV-fiets.

- a Over welke statistische variabele gaat het dan? Is die variabele kwalitatief of kwantitatief?
- b Noem een aantal waarden die de variabele 'klantentevredenheid OV-fietssysteem' kan aannemen.
- c Over welke populatie gaat dit onderzoek?
- d Hoe zou de NS een representatieve steekproef kunnen samenstellen?

Opgave 3

Je kunt op diverse manieren waarnemingen/metingen doen:

1. meten
2. tellen
3. vergelijken met een standaard
4. vragen stellen
5. vaststellen (iets klopt wel of niet)

- a Welke van deze manieren gebruik je bij een kwantitatieve variabele?
- b Welke van deze manieren gebruik je als je wilt vaststellen of de kleur van de verf in automatisch geproduceerde potten verf correct is?
- c Welke van deze manieren gebruik je als je wilt vaststellen of het aantal in doosjes met schroeven wel precies 50 is?
- d Welke van deze manieren gebruik je als je wilt weten of het aantal in doosjes met schroeven tussen bepaalde vastgestelde waarden ligt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

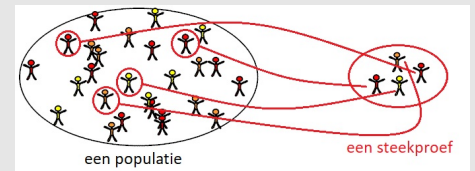
De wetenschap, de methodiek en de techniek van het verzamelen, bewerken en presenteren van gegevens heet **beschrijvende statistiek**. Een statistisch onderzoek kent diverse fasen:

- Je begint een **statistisch onderzoek** met een onderzoeksvraag.
- Je stelt vast over welke **populatie** (doelgroep) het onderzoek gaat. Bij een grote doelgroep neem je een deel van de groep, dit heet een **steekproef**. Deze steekproef moet **representatief** (kenmerkend) zijn voor de populatie en niet te klein. Daarom wordt een steekproef vaak **aselect** samengesteld. Bij aselechte trekking heeft elk lid van de populatie een even grote kans om in de steekproef te komen.

- Je stelt vast op welke **statistische variabele** het onderzoek betrekking heeft.

Er zijn twee soorten variabelen: **kwantitatieve variabelen** hebben getallen als waarden, **kwalitatieve variabelen** hebben eigenschappen als waarden.

- Je verzamelt de bij die variabele passende **data** (de statistische gegevens). Deze data moet je meestal eerst **ordenen**. De verzamelde data geef je weer in de vorm van tabellen en diagrammen: tabellen zijn nauwkeuriger, diagrammen vaak overzichtelijker.
- Je probeert een (eerlijke) **conclusie** te trekken.



Figuur 15.2

Voorbeeld 1

Een bedrijf produceert doosjes schroeven. De 40 mm lange kruiskopschroeven worden door een machine automatisch in doosjes van 100 stuks verpakt. Om te controleren of dit inpakproces goed verloopt, wil de fabrikant dat er dagelijks 50 doosjes gecontroleerd worden.

Hoe ga je dit controleproces uitvoeren? Beschrijf de populatie, de statistische variabele en hoe je de steekproef uitvoert.

Antwoord

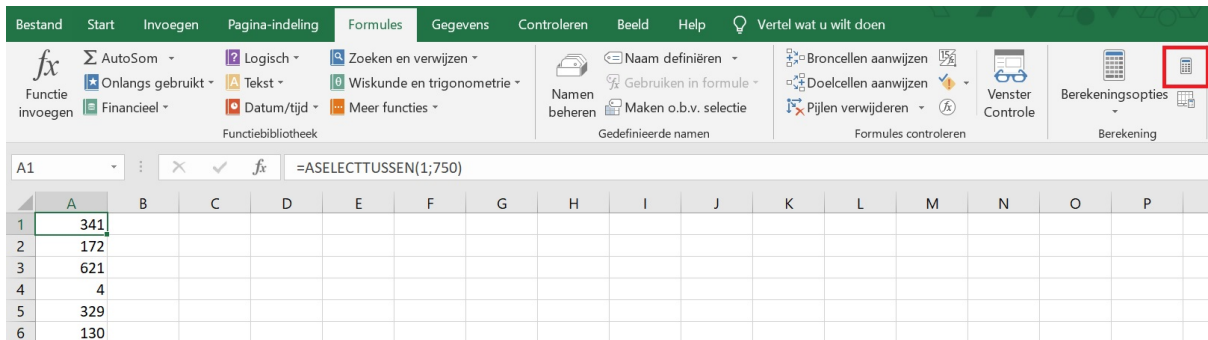
De populatie is het aantal dagelijks geproduceerde doosjes van 40 mm lange kruiskopschroeven.

De statistische variabele is het aantal schroeven in een doosje, dit is een kwantitatieve variabele.

De steekproef van 50 doosjes zou je aselekt moeten trekken, elk doosje moet dezelfde kans hebben om in de steekproef voor te komen. Dit moet verspreid over de werkdag van 8 uur gebeuren. Stel dat er elk uur 750 van die doosjes worden geproduceerd. Je kunt dan uit die doosjes een steekproef van 6 nemen. Je hebt dan aan het einde van de dag $6 \times 8 = 48$ doosjes gecontroleerd.

In de figuur zie je hoe je in Excel een aselechte steekproef van 6 uit 750 doosjes kunt trekken.

Je gebruikt daarbij de functie ASELETTUSSEN. Met het knopje 'Nu berekenen' krijg je steeds een nieuwe steekproef.



Figuur 15.3

Zo'n controle moet niet te lang duren. Gewoon tellen of er precies 100 spijkers in zitten kost teveel arbeidstijd. Dus het beste is om het gewicht van een doosje en van één spijker vast te stellen. Daarna kun je het aantal spijkers in een doosje vaststellen door te wegen.

Opgave 4

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

Neem aan dat er dagelijks ongeveer 6000 doosjes van die schroeven worden geproduceerd.

- Is de steekproef dan groot genoeg?
- Trek zelf een steekproef van 10 uit de 750 doosjes met behulp van Excel.
- Welk probleem gaat zich waarschijnlijk voordoen bij het meten van het aantal schroeven door weging?

Opgave 5

Voor kinderen vanaf drie maanden bestaat het geneesmiddel paracetamol in vloeibare vorm. Het wordt verkocht in flesjes met inhoud 100 mL $\ominus$. Dit betekent dat in deze flesjes gemiddeld minstens 100 mL moet zitten en dat er nooit minder dan 91 mL in mag zitten. Ook mag maar een klein deel van de flesjes minder dan 95,5 mL vloeistof bevatten.

- Met welke statistische variabele heb je te maken? Is hij kwalitatief of kwantitatief?
- Beschrijf hoe een fabrikant van dit vloeibare geneesmiddel zou kunnen controleren of zijn productieproces goed verloopt. Geef daarbij aan met welke populatie je te maken hebt en hoe je een steekproef kunt samenstellen.



Voorbeeld 2

Als een middelgroot bedrijf wil weten hoe de medewerkers over het bedrijf denken, dan wordt dit vaak onderzocht door middel van een enquête onder alle medewerkers. Daarbij wordt vaak de vijfpunts likertschaal gebruikt.

Bij vragen als:

- Medewerkers weten welk belang het bedrijf hecht aan de kwaliteit.
- Medewerkers volgen regelmatig trainingen op het gebied van kwaliteitszorg.
- Medewerkers hebben een klantgerichte houding.
- Medewerkers volgen regelmatig trainingen op het gebied van klantvriendelijkheid.

kan dan een score van 1 (volledig oneens), 2 (oneens), 3 (niet eens / niet oneens), 4 (eens) of 5 (volledig eens) worden aangegeven.

Beschrijf dit onderzoek door aan te geven hoe de populatie eruit ziet, om welke statistische variabele(n) het gaat, enzovoort.

Antwoord

Het gaat hier om een statistisch onderzoek onder alle medewerkers van een bedrijf. Dat is de populatie van het onderzoek, er wordt geen steekproef gehouden.

De statistische variabele 'mening medewerkers over het bedrijf' is kwalitatief.

Maar je kunt zeggen dat door het gebruik van de likertschaal een poging wordt gedaan om een kwalitatieve variabele te kwantificeren.

Opgave 6

Bekijk het werken met de likertschaal in **Voorbeeld 2**.

- a** Wanneer kun je met zo'n likertschaal werken?
- b** Verzin nog twee vragen die in zo'n onderzoek naar de mening van de medewerkers over hun bedrijf kunnen passen.

De vragen in een dergelijke enquête worden vaak zowel in positieve als in negatieve zin geformuleerd. Dus bijvoorbeeld komen vragen voor zoals:

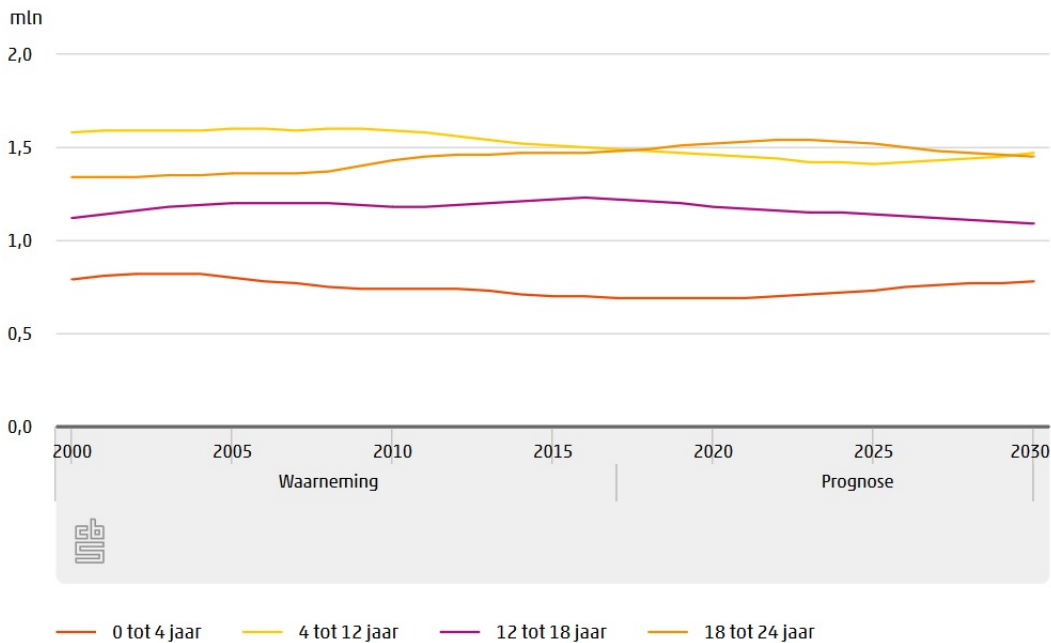
- Ik werk niet graag bij dit bedrijf.
- Ik vind het fijn om bij dit bedrijf te werken.

- c** Waarom gebeurt dat?

Oefenen

Opgave 7

Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) doet in Nederland veel onderzoek en rapporteert hierover. Deze diagrammen komen uit de Jeugdmonitor 2018.



Figuur 15.4

- a Beschrijf de populatie bij dit onderzoek van het CBS.
- b Welke definitie van jongeren is er in dit onderzoek gebruikt, denk je?
- c Welke deelgroepen zijn onderscheiden?
- d Welke statistische variabele is in dit diagram weergegeven?
Is dat een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?

Opgave 8

Om de mate van vervuiling van een groot meer door lozing van afvalstoffen te onderzoeken, zijn er een twintigtal monsters van 1 L water uit dat meer naar het laboratorium gestuurd. Daar kan de mate van vervuiling worden gemeten, uitgedrukt in mg/L.

- a Welke populatie hoort bij dit onderzoek?
- b Om welke statistische variabele gaat het hier?
Is die variabele kwalitatief of kwantitatief?
- c Waarom is het niet verstandig om de 20 monsters op verschillende plaatsen vlak bij de oever te nemen?
- d Wat vind je van de steekproefgrootte?

Opgave 9

In een fabriek worden 5000 potten zilvergrijze hoogglanslak (ral-nummer 7001) met een inhoud van 2 liter geproduceerd. Er moet op worden gelet dat de potten de juiste inhoud hebben en dat de verf de juiste kleur en glans heeft.

Natuurlijk wil je niet alle potten openmaken om de kleur te controleren. Je neemt dus een steekproef.

- a Welke populatie hoort bij dit onderzoek?
- b Om welke statistische variabelen gaat het hier?
Geef aan of zo'n variabele kwalitatief of kwantitatief is.
- c Hoe ga je de kleur en de glans van de verf vaststellen?
- d Hoe ga je het onderzoek uitvoeren?

Opgave 10

Voor een biologiepracticum moet het aantal slakken op een stuk grond worden geteld. Het stuk grond wordt in stukken van 1 m^2 verdeeld. Iedere leerling telt het aantal slakken op vier van die stukken. Hier zie je de resultaten in Excel.

aantal slakken per m^2	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	16	14	7	4	2	3	1	1

Tabel 15.1

- a Om welke statistische variabele gaat het hier? Kwantitatief of kwalitatief?
- b Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het stuk grond?
- c Hoeveel leerlingen hebben er geteld?
- d Hoeveel slakken zijn er in totaal geteld?
- e Hoeveel slakken zijn er gemiddeld per m^2 gevonden?

Opgave 11

In de jaren 1982-1988 werd onder 22000 mannelijke Amerikaanse artsen onderzoek gedaan naar de invloed van aspirine op hart- en vaatziekten op de gemiddelde Amerikaanse man. De helft gebruikte om de dag 300 milligram aspirine, wat ongeveer gelijk staat aan een 'gewoon' aspirientje. De andere helft slikte een placebo (een middel zonder werkzame stof). Van de aspirineslikkers kregen 104 personen een hartinfarct, van de placeboslikkers waren dat er 189. De conclusie van het onderzoek was dat het risico op een hartinfarct met ongeveer 45% wordt verlaagd door het slikken van aspirine. Dat dit grote verschil aan toeval was te wijten, vond men uitgesloten vanwege het grote aantal mensen dat aan het onderzoek meewerkte.

- a Waarom is hier geen sprake van een representatieve steekproef? Hoe had deze steekproef moeten worden samengesteld?
- b Waarom werd er van placebo's gebruikgemaakt?
- c Hoeveel procent van de 11000 aspirineslikkers heeft baat gehad bij het slikken van aspirine?
- d Volgens de tekst wordt de kans op een hartinfarct met 45% verlaagd. Klopt dat?

Toepassen

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.

Volgens Wikipedia geeft het symbool aan:

- het gemiddelde van de werkelijke hoeveelheid product in de verpakkingen in een partij ten minste gelijk is aan de hoeveelheid die op de verpakking staat, en
- slechts een gering aantal verpakkingen een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel, en
- geen verpakking een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus twee keer de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel.

Deze tabel hoort daar bij:

aangeduide hoeveelheid (g of mL)	% fout	absolute fout
van 5 tot 50	9	
van 50 tot 100		4,5
van 100 tot 200	4,5	
van 200 tot 300		9
van 300 tot 500	3	
van 500 tot 1000		15
van 1000 t/m 10.000	1,5	

Tabel 15.2

Onder % fout versta je dat de hoeveelheid zoveel procent lager zou kunnen zijn.

Onder absolute fout versta je dat de hoeveelheid zoveel gram of mL lager zou kunnen zijn.

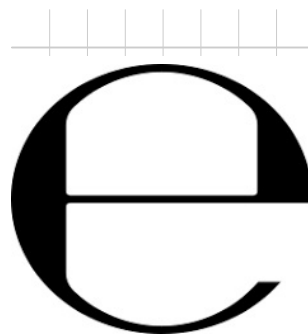
Nu kun je (zeker voor consumentenverpakkingen) zelf nagaan hoeveel de minimale hoeveelheid moet bedragen. En welke hoeveelheden 'een gering aantal pakken' mogen hebben.

Opgave 12

Een pak hagelslag bevat 220 gram e hagelslag.

Een supermarkt heeft nog 140 van die pakken hagelslag in voorraad.

- Hoeveel hagelslag moeten die pakken gemiddeld bevatten?
- Hoeveel hagelslag moet elk pak tenminste bevatten?
- Je koopt regelmatig een pak van deze hagelslag bij die supermarkt.
Hoeveel hagelslag moet zo'n pak vrijwel altijd tenminste bevatten?



Figuur 15.5



- d** De fabrikant van deze hagelslag produceert 50.000 van deze pakjes hagelslag per week.
Hoe moet hij ervoor zorgen dat zijn pakjes aan de voorwaarden van het e-teken voldoen?

Opgave 13

Een fles spa-rood bevat 1,5 L e bronwater met koolzuur. De fabrikant van dit bronwater produceert 1,2 mln van deze flessen per week in een volcontinu vulproces.

Hoe moet hij ervoor zorgen dat zijn flessen aan de voorwaarden van het e-teken voldoen?

Testen

Opgave 14

Stel je voor dat een onderzoeker voor een onderzoek naar de filedruk in Nederland naar het waddeneiland Texel gaat en daar 's nachts het aantal auto's op een van de wegen checkt. Hij noteert per voorbijrijdende auto het merk en de snelheid.

- a** Leg uit waarom dit geen aselect onderzoek is.
- b** Leg uit waarom dit geen representatief onderzoek is.
- c** Leg uit waarom de variabele *automerik* een kwalitatieve variabele is.
- d** Leg uit waarom de variabele *aantal auto's per uur* een kwantitatieve variabele is en waarom hier sprake is van een telling.
- e** Leg uit waarom de variabele *snelheid* een kwantitatieve variabele is en waarom hier geen sprake is van telling.

Opgave 15

Voor een tevredenheidsonderzoek in ziekenhuizen bedenkt een onderzoeker de volgende manier om een steekproef samen te stellen: een jaar lang wordt bij elk ziekenhuis iedere maandag iedereen die in het ziekenhuis aanwezig is of er arriveert, genummerd. Het maakt niet uit of iemand verplegend personeel is, zieke, bezoeker of schoonmaker, enzovoort. Aan het einde van de dag worden bij elk ziekenhuis uit de groep toegekende nummers vijftien personen met behulp van toevalsgetallen gekozen om mee te doen aan het onderzoek. Stel dat bij een ziekenhuis op zo'n maandag 1250 nummers zijn uitgedeeld, startend met nummer 1.

- a** Genereer met behulp van Excel een groep van vijftien nummers die die maandag worden geselecteerd voor het onderzoek.
- b** Is deze steekproef representatief?

15.2 Meetnauwkeurigheid

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- onderscheid maken tussen systematische, toevallige en persoonlijke meetfouten;
- juistheid en precisie kunnen onderscheiden;
- absolute en relatieve fout vaststellen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- manieren om een steekproef uit een populatie te trekken en het belang van herhaalbaarheid van een steekproef.

Verkennen

Opgave V1

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram €.

Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt met behulp van aselechte steekproeven of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt.

- a** Welk probleem doet zich voor als je het gewicht van een pak suiker meet?

Er wordt een weegschaal gebruikt die van klasse 0,5 is. Dit betekent dat elk meetresultaat een afwijking kan hebben van maximaal 0,5% van de totale schaallengte. Er kunnen gewichten mee bepaald worden van 0 tot 5 kg.

- b** Hoeveel kan elk meetresultaat dus afwijken?
- c** Je meet 990 gram als gewicht van een pak suiker. Tussen welke waarden ligt het gewicht van dit pak?
- d** Wat moet de fabrikant doen om aan de voorwaarden te kunnen voldoen?
- e** En dan het aflezen van de weegschaal. Kun je die 990 g exact aflezen?
- f** Het apparaat waarmee je meet, kan op twee manieren meetfouten opleveren. Welke twee?

Opgave V2

De geneesmiddelenautoriteit wil in kaart brengen of een bepaald veel verkocht geneesmiddel bijwerkingen heeft. Het betreffende geneesmiddel is alleen op doktersrecept verkrijgbaar.

Uit het bestand waarin alle huisartsen in Nederland voorkomen, worden er 25 willekeurig gekozen. Hen wordt gevraagd om de

patiënten die zij dit geneesmiddel voorschrijven te laten aangeven of één of meer van de volgende bijwerkingen optreden:

- slapeloosheid
- duizeligheid
- hoofdpijn
- maag- en darmklachten

- a Wat is er niet goed aan deze vraagstelling?
- b Welke probleem kan zich voordoen met deze steekproef? En hoe kun je dat oplossen?

Uitleg 1

Bij kwantitatieve statistische variabelen zijn meten en tellen de twee manieren om aan data te komen.

Bij meten heb je te maken met de meet(on)nauwkeurigheid, met meetfouten.

Bijvoorbeeld bij het wegen van kilopakken suiker (inhoud 1000 gram $\ominus$) gebruik je een weegschaal die van meetklasse 0,4 is. Dit betekent dat elk meetresultaat een afwijking kan hebben van maximaal 0,4% van de totale schaallengte (meetbreedte). Als het meetgebied vanaf 0 tot en met 5 kg is, dan is de afwijking van het gemeten gewicht maximaal $0,004 \cdot 5000 = 20$ g.

Als je 990 g afleest, dan ligt het werkelijke gewicht tussen 970 en 1010 g. Dit noem je een toevallige fout, hij is onderdeel van het meetsysteem. Het gaat hierbij om de precisie van je meetinstrument. Je noteert als gewicht 990 ± 20 gram.

Maar je kunt ook zelf afleesfouten maken, bijvoorbeeld omdat je wat scheef staat voor een weegschaal zoals die in de figuur. Een afwijking die ontstaat door scheef aflezen heet parallax. Dat zijn persoonlijke fouten. Die zijn vermijdbaar.

En dan zijn er nog de systematische fouten. Je houdt bijvoorbeeld geen rekening met het gewicht van de verpakkingen zelf en je komt systematisch op een te hoog gewicht. Dan heb je te maken met de juistheid van je metingen.

Ook bij kwalitatieve statistische variabelen komen toevallige fouten voor. Systematische fouten ontstaan bij dergelijke variabelen meestal door zogenaamde 'non-respons', een groep waar je door de wijze van onderzoeken geen antwoord van krijgt. Persoonlijke fouten krijg je hier door slechte vragen, onduidelijkheden, en dergelijke.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet een klasse 0,4 weegschaal.

- a Op de weegschaal staat 'Sensitivity 20 g'.
Leg uit dat dit in overeenstemming is met een klasse 0,4 weegschaal.
- b Hoe precies kun je op de gegeven weegschaal het gewicht aflezen?

Je hebt van een steekproef van 10 kilopakken suiker (inhoud 1000 gram $\ominus$) met deze weegschaal gewogen en het gewicht van



Figuur 15.1

de verpakking (10 gram) eraf getrokken. Uitkomsten: 990, 1000, 1010, 1020, 1000, 990, 1020, 1010, 1030, 1010.

Je weet dat alle pakken minstens 970 g moeten wegen en dat slechts enkele minder dan 985 g mogen wegen. Verder moet hun gemiddelde gewicht 1000 g zijn.

- c Voldoet deze steekproef aan alle drie de voorwaarden?

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet een klasse 0,4 weegschaal.

Neem aan dat deze weegschaal al lang niet geijkt is. Als er geen gewicht op ligt, wijst hij toch 10 gram aan.

- a Met welk type fout heb je nu te maken?
b Hoe moet je hiermee met het meten rekening houden?
c Gaat het bij deze meetfouten om de precisie van je weegschaal of de juistheid?

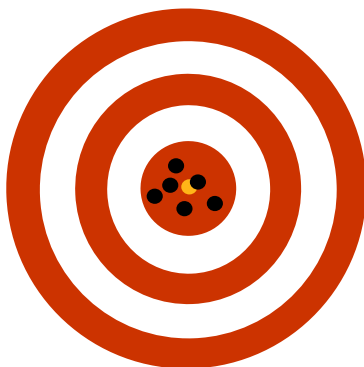
Uitleg 2

Je bent in **Uitleg 1** de begrippen juistheid en precisie tegengekomen.

- De juistheid zegt iets over hoe dicht je meting (of het gemiddelde van verschillende metingen) zit bij de 'werkelijke waarde'.
- De precisie zegt iets over hoe dicht je metingen bij elkaar liggen.

In deze figuren wordt dat met behulp van een schietschijf uitgebeeld.

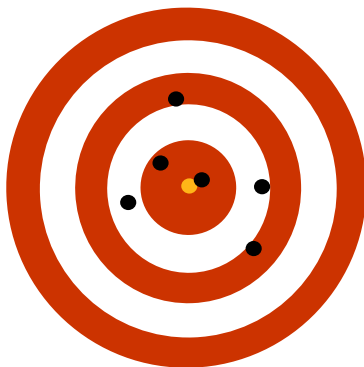
De (oranje) roos is de werkelijke waarde.



juist en precies



niet juist en wel precies



wel juist en niet precies



niet juist en niet precies

Figuur 15.2

Opgave 3

Je beschikt over een weegschaal met een schaallengte van 5 kg van klasse 0,5.

- a Welke afwijking van de werkelijke waarde zal een correct afgelezen waarde maximaal hebben?

Op verschillende momenten en door verschillende mensen worden met deze weegschaal vijf keer pakken van 1500 g gewogen. Je ziet steeds de resultaten van die metingen.

Beschrijf telkens van welke soort fout er sprake is en of de metingen precies en juist zijn uitgevoerd.

- b 1530, 1550, 1515, 1525 en 1530.
c 1460, 1550, 1515, 1475 en 1510.
d 1480, 1510, 1495, 1490 en 1515.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het verrichten van metingen wordt onderscheid gemaakt tussen de volgende **meetfouten** of **meetonnauwkeurigheden**:

- Een **persoonlijke fout** is een fout die je zelf maakt. Dergelijke fouten kun je vermijden.
Een afleesfout is daar een voorbeeld van.
Bedenk dat je van een meetwaarde alleen het laatste cijfer mag schatten!
- Een **toevallige fout**. Dit soort fouten treedt altijd op, je kunt ze dus niet vermijden. Een kenmerk is dat je waarden door toevallige fouten soms boven en soms onder de werkelijke waarde liggen.
Als er op een pipet staat: $\pm 0,01$ mL dan gaat het om een toevallige fout.
Als een meetinstrument van meetklasse 2,0 is dan is er een maximale afwijking mogelijk van 2% van de schaallengte (ook meetbreedte genoemd). Het gaat hierbij om de **precisie** van de metingen, dus hoe dicht je metingen bij elkaar zitten.
- Een **systematische fout** geeft een afwijking in één richting. Je waarden komen allemaal te hoog of juist te laag uit, door een fout in je meetsysteem.
Dit kan bijvoorbeeld zijn omdat je meetinstrument niet geijkt is. Of je leest systematisch scheef af, er is sprake van **parallax**. Het gaat dan om de **juistheid** van de metingen, dus hoe dicht je bij de 'werkelijke waarde' zit. Dergelijke fouten kun je vermijden.

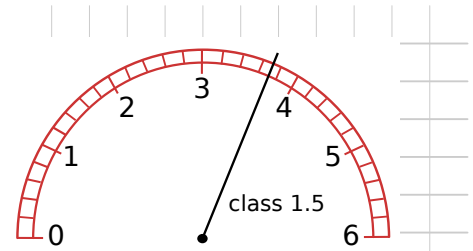
Bij de precisie van metingen krijg je afwijkingen in twee richtingen. Is je uitkomst bijvoorbeeld $20 \pm 0,5$, dan stelt 0,5 de **absolute fout** voor.

Je kunt zo'n meetnauwkeurigheid ook delen door de bepaalde hoeveelheid, je krijgt dan de **relatieve fout**. In dit geval $\frac{0,5}{20} = 0,025$, ofwel 2,5%.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een analoge schaalverdeling van een meter van klasse 1,5. Het meetgebied (of meetbereik) is vanaf 0 tot en met 6. Het apparaat is lang niet geijkt: de laagste wijzerstand is 0,2.

Je ziet dat deze meter een getal aanwijst. Geef dit zo nauwkeurig mogelijk en leg uit welke mogelijke meetwaarden er bij dit getal horen. Benoem ook de soorten meetfouten die hier optreden. Gaat het om de juistheid of de precisie van de metingen?



Figuur 15.3

Antwoord

Je leest uit de figuur de waarde $\approx 3,7$ af.

Eigenlijk moet je zeggen $3,7 \pm 0,05$, want er is een afleeson nauwkeurigheid.

Bovendien staat er op het instrument dat er een toevallige fout van 1,5% van de schaallengte is, dus van $0,015 \cdot 6 = 0,09$. De absolute meetfout (of meeton nauwkeurigheid) is daarom $0,05 + 0,09 = 0,14$.

Je noteert als afgelezen waarde $3,7 \pm 0,14$.

Dus de mogelijke waarden liggen tussen $3,7 - 0,14 = 3,56$ en $3,7 + 0,14 = 3,84$.

Omdat je maar op één decimaal kunt aflezen, zijn de werkelijk mogelijke waarden 3,6; 3,7 en 3,8.

Hierbij gaat het om de precisie van de metingen.

Verder is er een systematische fout van 0,2.

Dit moet je nog van de mogelijke waarden aftrekken.

Dit gaat over de juistheid van de metingen.

Dus uiteindelijk zijn de mogelijke meetwaarden 3,4; 3,5 en 3,6.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

Stel je hebt een klasse 2 ampèremeter met een schaal van 0 tot en met 10 A met streepjes om de 0,2 A.

De wijzer geeft ongeveer 7 A aan.

- Hoe groot is de absolute afleesfout? En de relatieve fout?
- Hoe noteer je de afgelezen waarde? Tussen welke waarden ligt de gemeten stroomsterkte?
Als je de meter loskoppelt, ontdek je dat de laagste stand die hij aangeeft 0,4 A is.
- Tussen welke waarden ligt de gemeten stroomsterkte in werkelijkheid?
- Over welk type meetfout gaat het bij a? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?
- Over welk type meetfout gaat het bij b? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?

Opgave 5

In een buret zit een vloeistof. De vloeistofspiegel (meniscus) is hol.

Hiernaast zie je er een foto van.

- a** Kees leest af dat er 22 mL vloeistof in de buret zit. Welke fout maakt hij? En welke soort fout? Gaat het om de precisie of de juistheid?

Op elke pipet staan het nominaal volume en de nauwkeurigheid vermeld. Voor een 20 mL-pipet kan dit bijvoorbeeld $20,00 \pm 0,05$ mL zijn.

- b** Over welke soort meet(on)nauwkeurigheid gaat dit? En welke betekenis heeft $20,00 \pm 0,05$ mL?

Bij een holle vloeistofspiegel lees je altijd de waarde van de ondergrens van de vloeistofhoogte af.

Bij bijvoorbeeld een kwikthermometer is de vloeistofspiegel bol.

- c** Hoe moet je dan aflezen?



Figuur 15.4

Voorbeeld 2

Stel je wilt een lege opslagtank met een capaciteit van 10.000 liter voor 80% vullen met olie.

Je zet een pomp aan en ziet dat de vloeistof met 120 L/min naar binnen stroomt.

De flowmeter is van klasse 1,5 en heeft een schaal die loopt van 0 tot 150 L/min.

Hoe lang duurt het vullen van deze tank? Geef een antwoord met de juiste nauwkeurigheid.

Antwoord

Er moet $0,80 \times 10.000 = 8000$ L in de opslagtank komen.

De flowmeter geeft 120 L/min aan dus dat zou $\frac{8000}{120} = 66,666\dots$ minuten moeten duren.

De flowmeter heeft een mogelijke afwijking van 1,5%.

Dat betekent dat de werkelijke flow ligt tussen 117,75 en 122,25.

De tijdsduur varieert daarom tussen

- een tijdsduur van $\frac{8000}{117,75} \approx 67,9$ minuten en
- een tijdsduur van $\frac{8000}{122,25} \approx 65,4$ minuten.

Dus tussen de 65 en de 68 minuten is nauwkeurig genoeg.

Opgave 6

Bekijk het rekenen met meetfouten in **Voorbeeld 2**.

- a** Reken zelf na dat de werkelijke flow zit tussen 117,75 en 122,25 L/min.
- b** Had je ook kunnen zeggen dat de tijdsduur tussen 65,4 en 67,9 minuten ligt?



Je hebt nog zo'n tank tot je beschikking met een volume van 10.000 L.

Die vul je met 7000 L olie.

De pomp heeft nu een nauwkeuriger flowmeter van klasse 0,8 en een schaalengte van 200.

- c Hoe lang duurt het vullen bij een afgelezen flow van 150 L/min?

Oefenen

Opgave 7

Geef van de volgende uitspraken aan of ze waar of niet waar zijn.

- a Systematische fouten kun je niet vermijden.
- b Toevallige fouten treden altijd op.
- c De klasse van een meetinstrument geeft een systematische fout aan.
- d De afwijkingen van hoeveelheden vastgelegd door het $\ominus$ -teken zijn toevallige afwijkingen.

Opgave 8

Om wat voor soort fout gaat het? Kies uit: persoonlijke fout – toevallige fout – systematische fout.

Geef ook aan of het om de precisie of de juistheid van de metingen gaat.

- a Door schommelingen in de druk en de temperatuur tijdens de metingen wijken de resultaten onderling af.
- b Een instrument heeft een beperkte afleesnauwkeurigheid.
- c Een instrument is verkeerd geijkt.
- d Een analist heeft door een rekenfout een verkeerde verdunning gemaakt.
- e Omdat je scheef voor het instrument zit lees je een verkeerde waarde af.

Opgave 9

Bij het meten van de spanning over een stroomkring gebruik je een voltmeter zoals deze.

De meter wijst 230 V aan.

- a Hoe nauwkeurig kun je deze schaalverdeling aflezen?
- b Hoe groot is de absolute afleesfout? En de relatieve fout in tienden van procenten?
- c Hoe noteer je de afgelezen spanning?
Tussen welke waarden ligt de werkelijke spanning?
Bij nadere controle blijkt dat als de meter niet is aangesloten, hij toch nog een spanning van 20 V aangeeft.
- d Wat betekent dit voor je antwoord bij c?



Figuur 15.5



Opgave 10

Je wilt de soortelijke massa bepalen van een bepaald voorwerp om te kijken of het echt zilver is of niet. Je weegt het dus en je bepaalt het volume.

Het wegen doe je met een weegschaal van klasse 1 met een schaallengte van 1000 gram.

Het volume bepaal je door het in een maatbeker met 100 ± 5 mL water te stoppen.

Je meet een volume van 35 mL en een gewicht van 360 gram.

De soortelijke massa van zilver is $10,5 \text{ gram/cm}^3$.

- a Tussen welke waarden ligt het gemeten gewicht?
- b Tussen welke waarden ligt het volume?
- c Tussen welke waarden ligt de soortelijke massa? Zou het zilver kunnen zijn?

Toepassen

Je ziet hier een digitale pH-meter.

Digitale apparatuur lijkt heel erg nauwkeurig, maar toch kunnen ook bij het gebruik daarvan meetfouten optreden.

Bij dit apparaat zijn enkele specificaties gegeven:

1. Kleur: Geel
2. Afmetingen: $15 \times 3 \times 1,5$ cm
3. Beeldscherm: LCD
4. Digitale nauwkeurigheid: 0,01
5. Resolutie: 0,01
6. Werkende Temperatuur: $0 \sim 80$ °C
7. Meetbereik: $0,00 \sim 14,00$
8. Sonde type: Precisie glazen bol elektrode
9. Calibratiemethode: 2 punten automatische calibratie
10. Voeding: 2x 1.5V Knoopcelbatterijen (Inbegrepen!)

Opgave 11

Bekijk de digitale pH-meter en zijn specificaties.

- a Welke specificaties gaan over de meetnauwkeurigheid?
- b Gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?
- c Tussen welke twee waarden ligt de afgelezen waarde 4,00?

Je gebruikt deze meter om in een zwembad de zuurgraad van het water te meten. Je loopt naar de rand van het bad en houdt deze meter in het water en leest de zuurgraad af. Deze waarde geef je op als de zuurgraad van het zwembad.

- d Welke (soorten) fouten maak je?



Figuur 15.6

Opgave 12

Je ziet hier een digitale weegschaal.

- Welk meetbereik heeft deze weegschaal?
- Met welke meet(on)nauwkeurigheid werkt deze weegschaal?

Je meet met deze weegschaal nadat hij is geijkt het gewicht een stalen spijker: 20 g.

Verder meet je het gewicht van de verpakking van 50 van die spijkers: 15 g.

In een fabriek worden aan de lopende band 50 van die spijkers in hun verpakking gestopt.

- Tussen welke grenzen moet het gewicht van zo'n doos van 50 spijkers komen te liggen?



Figuur 15.7

Testen

Opgave 13

Om wat voor soort fout gaat het in de volgende situaties? Geef ook aan of de fout vermijdbaar is en of het om precisie of juistheid gaat.

- Je gebruikt een weegschaal die zonder dat er gewicht op ligt al 20 g aangeeft.
- Je gebruikt een weegschaal van klasse 2.
- Je wilt het vulgewicht van pakken suiker meten en je meet het gewicht van een gevuld pak suiker.

Opgave 14

Je ziet hier een manometer van klasse 2,5.

- Hoe nauwkeurig kun je de druk aflezen van deze schaalverdeling? Gaat het dan om precisie of juistheid?
- Hoe groot is de druk die de rode wijzer aangeeft?
- Hoeveel bedraagt de absolute meeton nauwkeurigheid? En de relatieve fout?
- Welke waarden kan de druk aannemen als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?



Figuur 15.8

15.3 Diagrammen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- waarnemingen weergeven in tabellen en diagrammen;
- een klassenindeling maken met klassenbreedte, absolute of relatieve frequentie;
- verschillende soorten diagrammen herkennen en benoemen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- manieren om een steekproef uit een populatie te trekken en het belang van herhaalbaarheid van een steekproef.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de voetenlengtes van 100 mannen. Erg overzichtelijk weergegeven zijn deze gegevens zo niet.

voetenlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.1

- Zoek de grootste en de kleinste voetenlengtes in deze tabel.
Door afronden op gehele cm verdeel je deze voetenlengtes in klassen van 20,5– < 21,5, 21,5– < 22,5, enzovoorts. Je kunt dan tellen hoeveel voetenlengtes er in elke klasse voorkomen.
- Maak daarvan een tabel.
- Wat is er aan zo'n tabel overzichtelijker dan aan de gegeven meetwaarden?
- Hoe kun je deze gegevens grafisch weergeven?

Uitleg

Je ziet hier de voetenlengtes van 100 mannen. Erg overzichtelijk weergegeven zijn deze gegevens zo niet.

voetenlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.2

Ruwe data zoals deze probeer je overzichtelijker weer te geven.

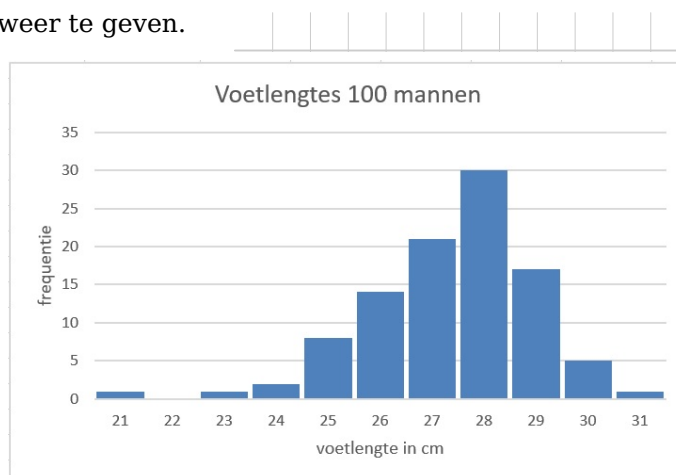
Daarbij gebruik je vaak een frequentietabel. In dit geval ligt het voor de hand om de voetlengtes onder te brengen in klassen met een klassenbreedte van 1,0 cm, dus klassen als 20,5– < 21,5, 21,5– < 22,5, enzovoort. De klassenmiddens zijn dan 21, 22, ...

Het aantal keer dat een bepaalde voetlengte in zo'n klasse voorkomt heet de absolute frequentie.

Je krijgt zo een goed overzicht van de verschillende voetlengtes en kunt er eenvoudig een staafdiagram bij maken. Een staafdiagram met op de horizontale as aaneengesloten oplopende getallen en op de verticale as frequenties heet ook wel een histogram.

Er bestaan nog veel meer soorten diagrammen.

Met behulp van Excel kun je de meeste eenvoudig maken.



Figuur 15.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet **de voetlengtes van 100 mannen**.

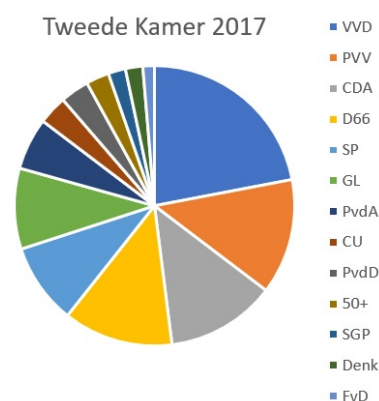
- Maak een frequentietabel met de aangegeven klassenbreedte en het bijbehorende staafdiagram.
- In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen. Maak ook daarvan een staafdiagram. Gebruik dezelfde klassenbreedte.
- Is het gemakkelijk om beide staafdiagrammen te vergelijken en daar conclusies uit te trekken?
- Je kunt ook in plaats van een staafdiagram een lijndiagram maken. Daartoe verbind je de middens van de bovenkanten van de staven door rechte lijnstukjes met elkaar. Maak voor de voetlengtes van de mannen zo'n lijndiagram.

Opgave 2

De uitslag van de Tweede Kamer verkiezingen van 2017 zie je in dit cirkeldiagram.

Er zijn 150 zetels te verdelen en de grootste partij (de VVD) heeft er 33 gekregen.

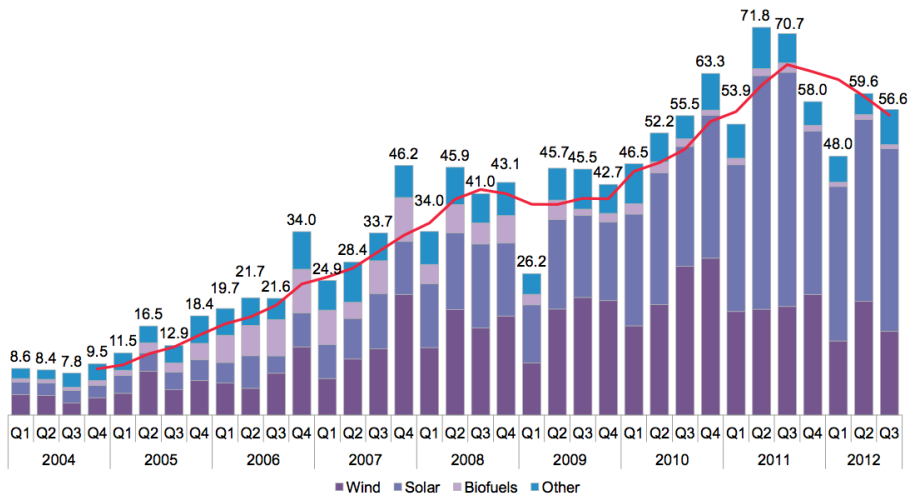
- Reken na dat dit (ongeveer) met de figuur klopt.
- Zie je in een cirkeldiagram absolute of relatieve frequenties?



Figuur 15.2

Opgave 3

Je ziet een gestapeld staafdiagram over de wereldwijde investeringen (in miljarden dollars) per type duurzame energiebron. De rode lijn geeft het gemiddelde van de investeringen in het voorgaande jaar.



Figuur 15.3

- Waarom zou hier een gestapeld staafdiagram zijn gebruikt?
- Welke informatie vind je, buiten de investeringen in dollars die boven de staven staan, nog meer in het diagram?
- Wat betekent het als in een bepaald kwart de totale staaf onder de rode lijn ligt?
Laat dit voor het eerste kwart van 2009 met een berekening zien.

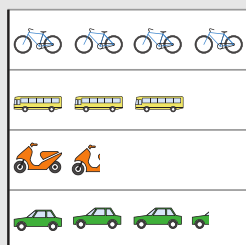
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij veel statistische variabelen kun je een **frequentietabel** maken. Door te tellen hoe vaak een bepaalde waarde van die variabele voorkomt, krijg je de **absolute frequentie** van die waarde. Deel je die absolute frequentie door het totale aantal waarden, dan krijg je de **relatieve frequentie** van die waarde. Relatieve frequenties (vaak in procenten uitgedrukt) maken het vergelijken van twee datasets gemakkelijker.

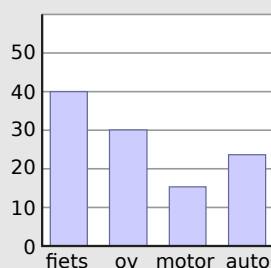
Vaak gebruik je daarbij een **klassenindeling**. Bij metingen heb je vanwege de meetonnauwkeurigheid eigenlijk altijd met klassen te maken.

woon/werkverkeer
1 icoon = 10 werknemers



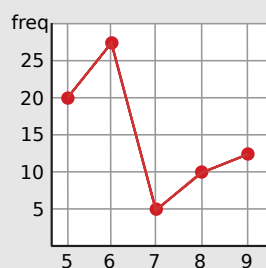
beelddiagram

woon/werkverkeer

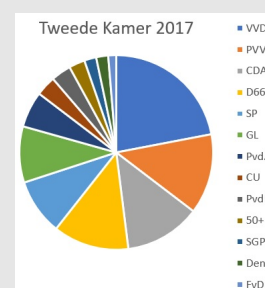


staafdiagram

Resultaten test



lijndiagram

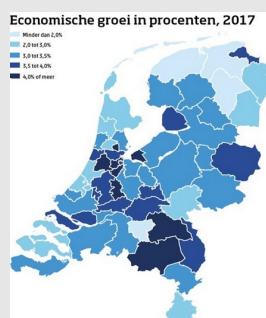


cirkeldiagram

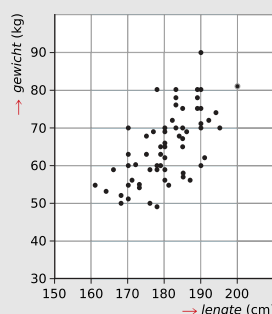
snelheidsmeting
binnen de
bebouwde kom

	auto's km/h				
4	1	3	5		
5	0	3	5	6	9
6	1	3			
7	5				

steelbladdiagram



kaartdiagram



puntenwolk

Figuur 15.4

In een tabel heb je vaak alle data nauwkeurig voorhanden, maar een **diagram** geeft vaak beter overzicht en duidelijker een bepaald verloop weer. Er zijn veel soorten diagrammen:

- in een **beelddiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door figuren;
- in een **staafdiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de lengtes van rechthoekige staven;
- in een **lijndiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door punten in een assenstelsel die door rechte lijnstukken met elkaar worden verbonden;
- in een **cirkeldiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de oppervlakte van een cirkelsector; je rekent daarbij relatieve frequenties in procenten om naar hoeken (100% is 360°);

- in een **steelbladdiagram** worden in de steel de waarden aan-gegeven, behalve hun laatste cijfer; die laatste cijfers staan naast de steel in oplopende volgorde vanaf de steel;
- in een **kaartdiagram** worden de gegevens in de vorm van een kaart gepresenteerd;
- in een **puntenwolk** of **spreidingsdiagram** worden twee va-riabelen tegen elkaar uitgezet en worden de gegevens aange-gevoerd door punten in een assenstelsel.

Bij statistiek probeer je de gegevens zo eerlijk en overzichtelijk mogelijk weer te geven en de lezer/kijker niet te beïnvloeden of voor de gek te houden.

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kle-ding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.3 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

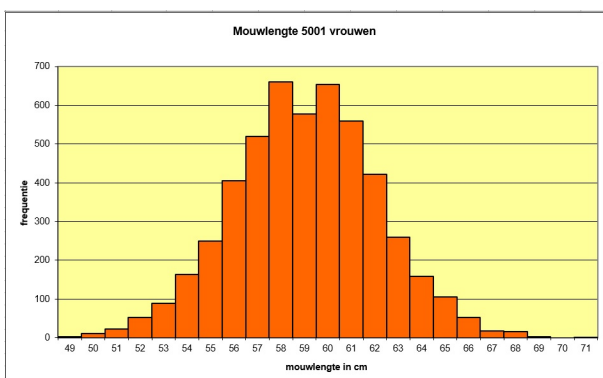
kniehoopte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.4 Kniehoopte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de mouwlengte en de kniehoopte van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek. Maak een staafdiagram van de mouwlengtes. Wat zijn de voorde-len van een tabel en wat die van een staafdiagram?

Antwoord

Werk met het bestand in Excel en je krijgt dit staafdiagram.



Figuur 15.5

Bij een tabel staan de exacte aantallen waar je mee kunt gaan rekenen. Bijvoorbeeld absolute of relatieve frequenties.



Bij een staafdiagram zie je het verloop van de mouwlengte beter. Je kunt heel makkelijk zien welke lengtes veel of weinig voorkomen.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Welke klassenindeling wordt hier vanwege de meetnauwkeurigheid in hele cm gebruikt?

Je kunt ook een staafdiagram van de mouwlengtes maken met relatieve frequenties.

- b** Leg uit hoe dat gaat.
- c** Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de mouwlengtes.
- d** Maak een lijndiagram van de relatieve frequenties van de kniehoogtes.

Opgave 5

Je wilt de concentratie nitraat in landbouwgrond op een bepaald stuk land vaststellen.

Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

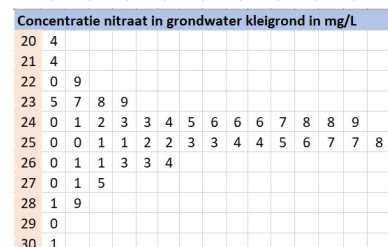
Tabel 15.5

- a** Waarom is het nu niet gemakkelijk om een goede waarde voor de nitraatconcentratie door te geven?
- b** Maak een frequentietabel en een staafdiagram bij deze gegevens. Welke klassenbreedte is daarbij handig?

- c** Welke waarde voor de concentratie nitraat geef je voor dit stuk landbouwgrond op?

Je kunt de gegevens van de 50 monsters ook in een steelbladdiagram weergeven. Je ziet dat hiernaast.

- d** Hoe vaak is er 24,6 mg/L gemeten?
- e** Wat is het grote voordeel van zo'n diagram? Waarom worden er dan niet steeds van deze diagrammen gemaakt?



Figuur 15.6

Voorbeeld 2

Biogas is een gasmengsel dat ontstaat als gevolg van biologische enzymatische processen.

De samenstelling ervan ziet er meestal zo uit:

product	formule	percentage
methaan	CH ₄	60
koolstofdioxide	CO ₂	35
waterstofdissulfide	H ₂ S	0 – 2
ammoniak	NH ₃	0 – 2
waterdamp	H ₂ O	0 – 2

Tabel 15.6

Geef deze samenstelling weer in een cirkeldiagram.

Voeg daarin alle stoffen die voor minder dan 5% voorkomen samen tot 'reststoffen'.

Antwoord

Je tabel wordt:

product	formule	percentage	sectorhoek
methaan	CH ₄	60	216°
koolstofdioxide	CO ₂	35	126°
reststoffen	H ₂ S	5	18°

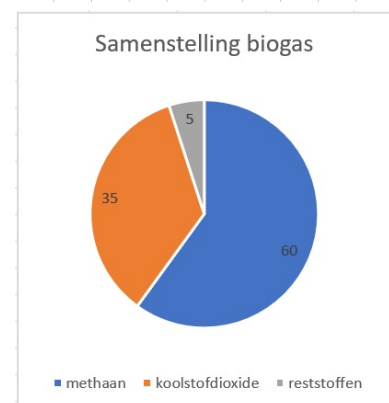
Tabel 15.7

Je kunt natuurlijk ook gewoon Excel gebruiken, dan hoef je geen sectorhoeken om te rekenen.

Opgave 6

Bekijk het maken van een cirkeldiagram in [Voorbeeld 2](#).

- Hoe bereken je de sectorhoeken?
- Maak zelf het cirkeldiagram in het voorbeeld.
Van 15 gram tin en 80 gram koper kun je 95 brons maken.
- Geef de samenstelling van brons weer met een cirkeldiagram.



Figuur 15.7

Voorbeeld 3

Een spreidingsdiagram (puntenwolk) gebruik je als je twee statistische variabelen wilt vergelijken. Hier gaat het om het vergelijken van de lengtes in cm met de gewichten in kg van een groep jonge mannen.

Tussen welke waarden ligt het gewicht van een jonge man van 180 cm?

Kun je zeggen dat een langer iemand altijd zwaarder is dan een kleiner iemand?

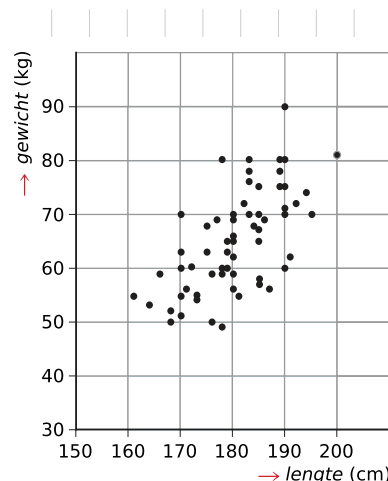
Antwoord

Allereerst moet je aannemen dat deze steekproef representatief is voor alle jonge mannen om zo'n uitspraak te kunnen doen.

Je ziet dat bij de mannen die 180 cm zijn et laagste gewicht 56 kg en het hoogste gewicht 70 kg is. Maar bij net iets kortere en net iets langere mannen zijn gewichten te vinden van 49 kg en 80 kg. Een redelijke schatting zou dus zijn: tussen 50 en 80 kg.

Je kunt niet zeggen dat een langer iemand altijd zwaarder is dan een kleiner iemand. Maar er lijkt wel een tendens dat langere jonge mannen ook in het algemeen zwaarder zullen zijn dan kleinere.

Je zult later nog meer leren over hoe je uit spreidingsdiagrammen conclusies kunt trekken.



Figuur 15.8

Opgave 7

Bekijk het werken met een spreidingsdiagram in [Voorbeeld 3](#).

- Is deze steekproef van 100 jongeren representatief als hij bestaat uit alle jongeren van één opleiding?
- Verwacht je bij jonge vrouwen net zo'n spreidingsdiagram?
- Hoe zwaar zal een jonge man van 1,65 m ongeveer zijn?

Oefenen

Opgave 8

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Een laborant meet daarin de volgende percentages eiwit afgerond op gehele procenten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65

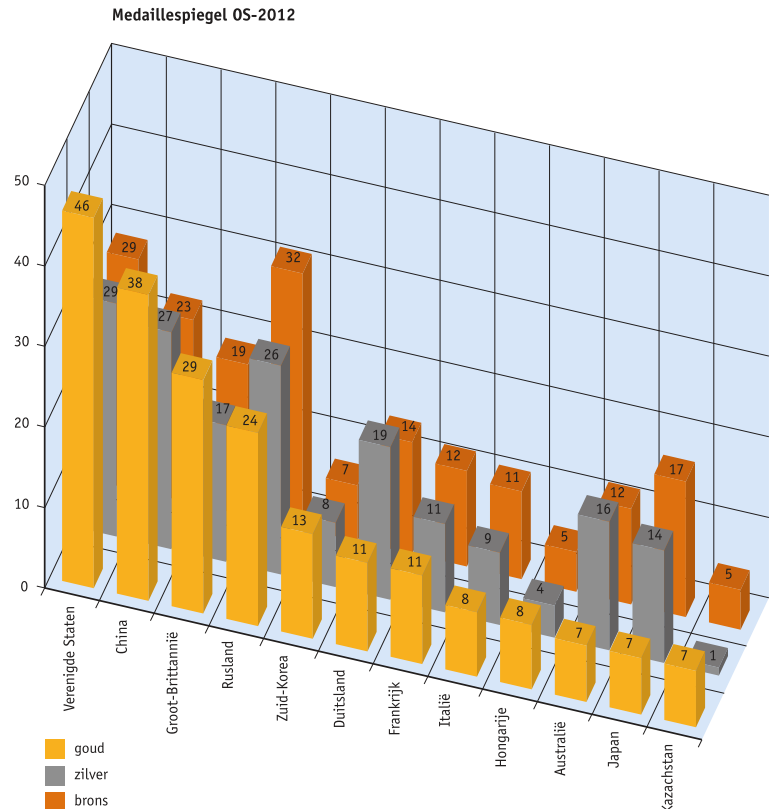
Tabel 15.8

- Je wilt hier voor de overzichtelijkheid een staafdiagram bij maken. Welke klassenindeling gebruik je?
- Maak een frequentietabel. Gaat het om absolute of relatieve frequenties?
- Maak het bijbehorende staafdiagram.
- Welk percentage eiwit bevat deze eiersalade?

Opgave 9

Je ziet de medaillespiegel van de Olympische Spelen van 2012 in Londen, met alleen de beste twaalf landen.

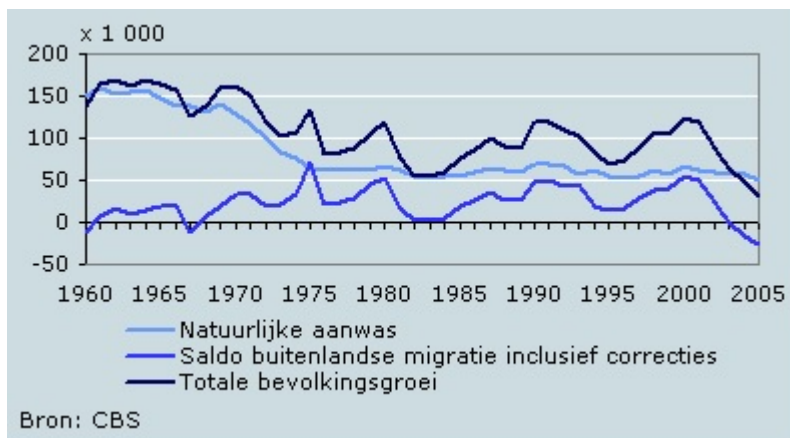
- Welke statistische variabelen zie je in het diagram?
- Zijn de variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Wat geeft elke staaf in het diagram weer?
- Waarom is er een 3D-diagram gebruikt?
- Welk land heeft de meeste gouden medailles gewonnen?
- Welk land won de meeste bronzen medailles?
- Deze gegevens kun je ook in een (gestapeld) staafdiagram weergeven. Wat is daarvan het voordeel? En wat is het nadeel?



Figuur 15.9

Opgave 10

De diagrammen geven een beeld van de groei van de Nederlandse bevolking.



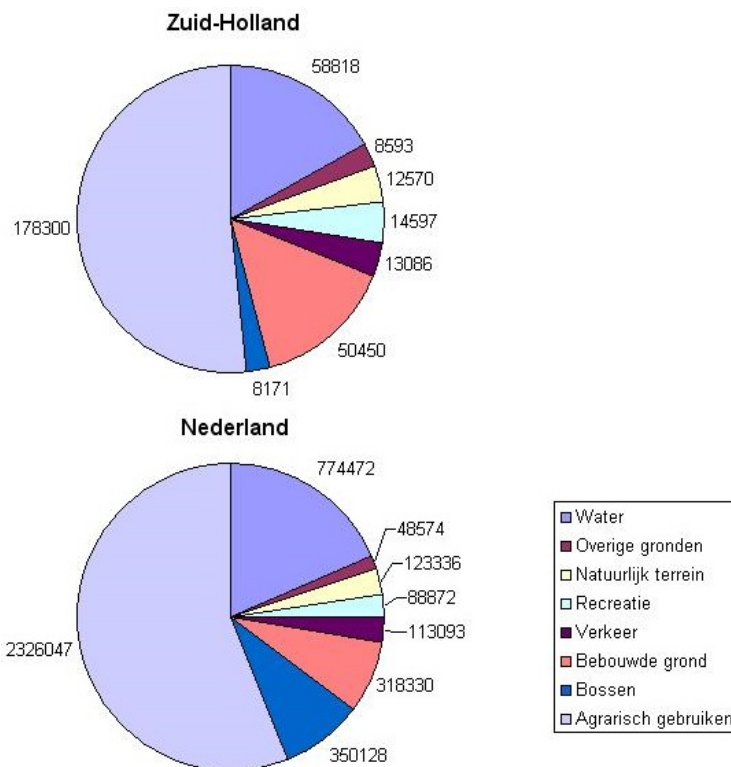
Figuur 15.10

- Wat voor soort diagrammen zijn het?
- Beschrijf wat je hieruit kunt aflezen.
- Hoe leid je het diagram van de totale bevolkingsgroei uit de andere twee diagrammen af?
- Welke conclusie kun je trekken uit het diagram?

Opgave 11

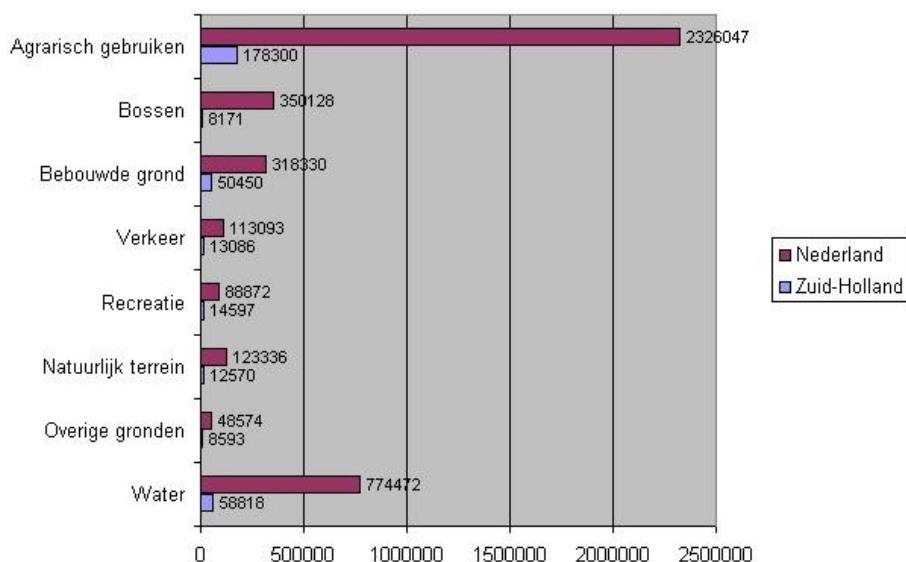
In deze twee cirkeldiagrammen wordt het bodemgebruik per hectare van Zuid-Holland met dat van heel Nederland vergeleken.

- Welke statistische variabele zie je?
Is deze variabele kwantitatief of kwalitatief?
- Laat met een berekening zien hoe groot de relatieve frequentie en de sectorhoek van 'bebouwde grond' in Zuid-Holland is.
- De getallen in beide diagrammen verschillen nogal, toch kun je in één oogopslag zien dat er in Zuid-Holland relatief gezien veel minder bossen zijn dan in Nederland. Hoe zie je dat?
- Bij een cirkeldiagram gaat het eigenlijk om de oppervlakte van een cirkelsector. Wat is er dan mis als je de eerste figuur met de tweede figuur vergelijkt?



Figuur 15.11

- Dezelfde gegevens kun je ook in een staafdiagram met absolute frequenties weergeven. Wat geeft deze figuur beter weer?



Figuur 15.12



Opgave 12

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meetonnauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters					auto's km/h				
			5	4	4	1	3	5	
6	4	2	2	1	5	0	3	5	6
				0	6	1	3		
					7	5			

Figuur 15.13

- Hoeveel metingen zijn er verricht?
- Hoeveel overtredingen van de maximumsnelheid waren daar bij?
- Hoeveel procent van de snelheidsovertreders reed meer dan 5 km/h te snel?
- Hoeveel procent van de snelheidsovertreders reed op een scooter of een motor?

Toepassen

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Op grond van deze verschillende uitslagen doen twee laboranten de uitspraak dat er ongeveer 65% eiwit in de eiersalade zit. Ze baseren zich op hun staafdiagrammen.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.9

Opgave 13

Bekijk de gegevens van de drie laboranten.

- Maak bij alle drie de resultaten een staafdiagram.
- Welke twee laboranten komen tot de uitspraak van ongeveer 65% eiwit?
- Welke laborant heeft waarschijnlijk preciezer gewerkt?
- Welke verklaring zou een grotere spreiding van de resultaten kunnen hebben?
Over welke soort fout gaat het dan?

Opgave 14

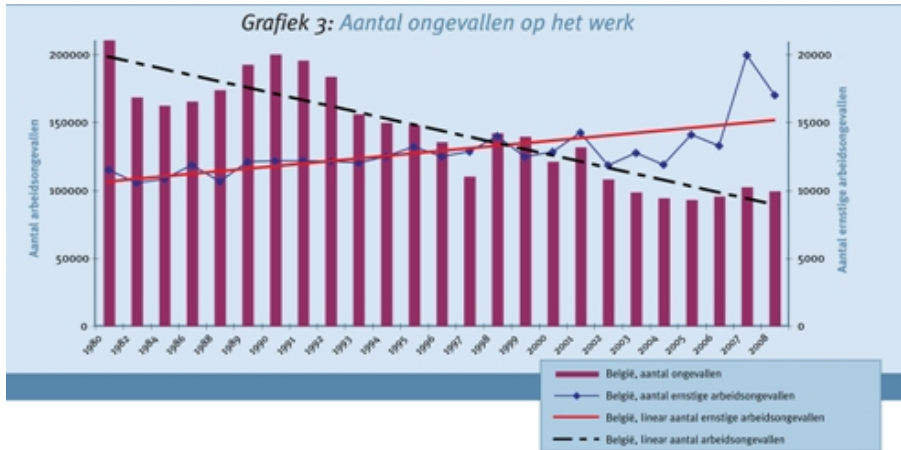
Bekijk de gegevens en het staafdiagram van de laborant die een hoger percentage eiwit aantrof.

- Wat kan hier aan de hand zijn?
Wat voor soort fout maakt hij waarschijnlijk?
- Gaat het hier om de precisie of om de juistheid van de metingen?
- Wat doe je met deze gegevens?

Testen

Opgave 15

Bekijk het diagram van het aantal ongevallen op de werkplek in Vlaanderen in de periode 1980-2008.



Figuur 15.14

- Welk soort diagrammen zie je in dit overzicht?
- Om welke populatie en om welke statistische variabelen gaat het?
- Hoeveel bedroeg het aantal ongevallen op de werkplek in 2000? Hoeveel daarvan waren ernstig? Hoeveel procent is dat?
- Welk misverstand kan bij het diagram heel snel ontstaan?
- Tussen welke statistische variabelen probeert het diagram een verband te leggen?
- Noem een voor- en een nadeel van het diagram.

Opgave 16

RVS (roestvast staal) van een bepaald type bestaat uit 16% chroom, 10% nikkel, 2% molybdeen en de rest ijzer met een heel klein beetje koolstof.

- Hoeveel procent ijzer met koolstof bevat dit RVS?
- Teken een bijpassend cirkeldiagram.

15.4 Centrummaten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- datasets karakteriseren door getallen die het centrum ervan aangeven;
- modus (modale klasse), mediaan en gemiddelde bepalen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- de begrippen juistheid en precisie van een steekproef;
- waarnemingen weergeven in tabellen en in verschillende soorten diagrammen;
- klassenindeling, klassenbreedte, absolute en relatieve frequentie.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

- a** Het modale eiwitgehalte is de waarde die het vaakst voorkomt.
Bepaal het modale eiwitgehalte bij elk van de drie laboranten.
- b** Bereken het gemiddelde eiwitgehalte bij elk van de drie laboranten in gehele percentages.

Je kunt de resultaten van deze laboranten ook samenvatten in boxplots. Daartoe zet je de data op volgorde van klein naar groot en je verdeelt ze in vier stukken met evenveel gegevens. De middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee) heet de mediaan.

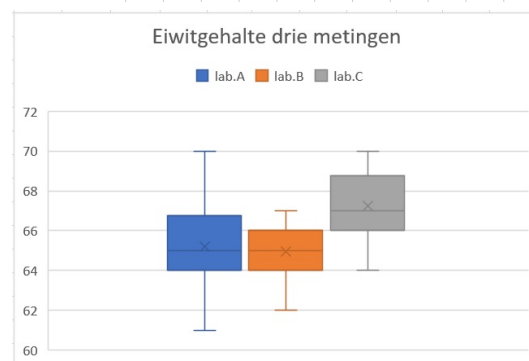
- c** Bepaal de mediaan bij elk van de drie laboranten.
- d** Zeggen getallen zoals gemiddelde, mediaan en modus iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.1



Figuur 15.1

Uitleg

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Je wilt deze resultaten kunnen vergelijken. Zo is dat nogal lastig, zeker als de datasets groter worden. Een manier is het gebruik van frequentietabellen en diagrammen. Maar je kunt ook werken met centrummaten. Dan vat je de meetgegevens met één getal samen.

Er worden drie van die centrummaten gebruikt:

- de modus: de meest voorkomende waarde (bij een klas-senindeling zeg je: modale klasse);
- de mediaan: de middelste waarde als de gegevens op volgorde van grootte staan;
- het gemiddelde: alle waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal waarden.

Bij laborant A zijn de modale eiwitgehaltenes 65% en 66%, is de mediaan 65% en is het gemiddelde eiwitgehalte $65,2 \approx 65\%$. Je noteert het gemiddelde van een steekproef wel als

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

In plaats van x mag je natuurlijk ook een andere letter gebruiken, zoals E voor eiwitgehalte.

De mediaan is het middelste getal in een boxplot.

Al deze centrummaten zeggen iets over de juistheid van de metingen. Als bijvoorbeeld het gemiddelde van de steekproef $\bar{x}$ afwijkt van het werkelijke gemiddelde μ van de populatie, dan is de juistheid $|\bar{x} - \mu|$, waarbij de verticale streepjes aangeven dat dit getal altijd positief wordt genomen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet meetgegevens van drie laboranten. De gemiddelde eiwitgehaltenes zijn:

- Laborant A: $65,20 \approx 65\%$.
- Laborant B: $64,95 \approx 65\%$.
- Laborant C: $67,25 \approx 67\%$.

Je kunt deze getallen zelf narekenen.

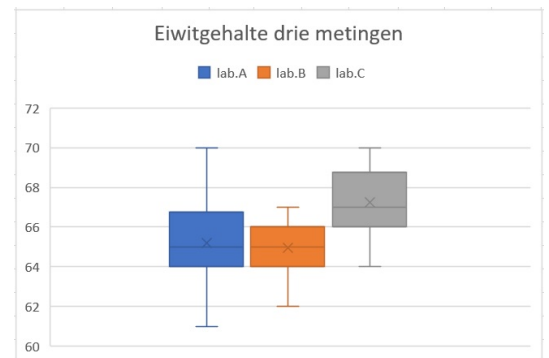
- a** Doe dat (als je dit bij **Verkennen V1** nog niet hebt gedaan) en leg uit wat deze gemiddelden met de juistheid van de metingen te maken hebben.

Neem aan dat van de totale populatie kuipjes eiersalade van deze fabrikant het eiwit gehalte 65% is.

- b** Hoe zit het nu met de juistheid van de metingen?

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.2



Figuur 15.2



Je ziet de gegevens ook in de vorm van boxplots terug.

Een boxplot maak je door de gegevens eerst op volgorde van klein naar groot te zetten en dan in vier delen met gelijke aantallen data te verdelen, in vier kwarten. De mediaan is de middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee), het eerste kwartiel is de mediaan van de eerste helft en het derde kwartiel de mediaan van de tweede helft.

Laborant C iijkt zijn meetinstrument en doet de meting opnieuw. Bekijk de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C tweede meting na ijking

64	67	65	66	66	62	65	66	68	65	65	66	63	68	67	67	64	65	64	63
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tabel 15.3

- c Maak zelf een boxplot van deze controlemeting. Is het resultaat preciezer of juistter?

Opgave 2

Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.4

- a Is het gemakkelijk om uit de figuur het gemiddelde, de modus en de mediaan van deze gegevens te bepalen?
- b Bereken de gemiddelde voetlengte, de modale voetlengte en de mediaan van de voetlengtes van deze mannen.

In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.

Met behulp van boxplots kun je de voetlengtes van de mannen en de vrouwen met elkaar vergelijken.

- c Maak deze twee boxplots.
- d Kun je door deze boxplots te vergelijken conclusies trekken?
- e Bereken de drie centrummaten bij de voetlengtes van de vrouwen. Wat hebben die voor invloed op je conclusies?

Opgave 3

Je hebt gezien dat centrummaten bij kwantitatieve variabelen betekenis hebben.

Maar hoe zit het met kwalitatieve variabelen?

- a Bij de zetelverdeling in de Tweede Kamer heb je te maken met de kwalitatieve variabele 'partij', de behaalde zetels zijn de frequenties. Hebben de centrummaten hier betekenis?
- b Bij het keuren van een bepaalde drank kan het gaan om variabelen als 'geur', 'smaak', etc. Heb je hier iets aan de centrummaten?



- c Veel bedrijven (met name in de horeca) vragen om hen te waarderen met een cijfer.

En dan zie je op hun website een gemiddelde van bijvoorbeeld 8,3 staan. Is dat een zinnig getal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Kwantitatieve statistische gegevens (data) kun je samenvatten met **centrummaten**:

- de **modus**: de meest voorkomende waarde (bij een klassenindeling zeg je: modale klasse);
- de **mediaan**: de middelste waarde als de gegevens op volgorde van grootte staan;
- het **gemiddelde**: alle waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal waarden.

Je noteert het gemiddelde van een steekproef wel als

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Als het gemiddelde van de populatie μ is, dan is de **juistheid** $|\bar{x} - \mu|$, dus het positieve verschil van $\bar{x}$ en μ .

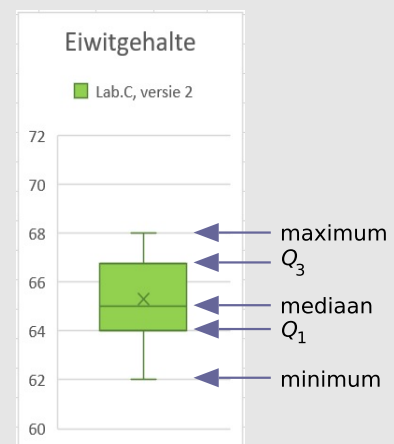
De relatieve juistheid is dan $\frac{|\bar{x} - \mu|}{\mu} \cdot 100\%$.

De mediaan speelt een belangrijke rol in een **boxplot**.

Daarin worden alle gegevens in vier kwarten van klein naar groot verdeeld met evenveel gegevens. De mediaan is de middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee), het eerste kwartiel Q_1 is de mediaan van de eerste helft en het derde kwartiel Q_3 is de mediaan van de tweede helft. De mediaan zelf is het tweede kwartiel.

Boxplots zijn geschikt om datasets te vergelijken.

Bij kwalitatieve data hebben centrummaten vaak geen betekenis.



Figuur 15.3

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.5 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf – Amsterdam)

knieshoogte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.6 Knieshoogte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bepaal modus, mediaan en het gemiddelde van de mowlengtes m_i .

Antwoord

Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele *mowlengte* de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de modus aflezen: de modale lengte is 58 cm want die klasse heeft de grootste frequentie.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is de mediaan het 2501-ste getal. En dat is 59 cm.

Het gemiddelde berekenen is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden.

Bijvoorbeeld een mowlengte van 53 cm komt 89 keer voor. Je kunt dit het beste in het Excelbestand doen en Excel voor je laten rekenen.

Ga na dat $\bar{m} = \frac{49 \cdot 3 + 50 \cdot 11 + \dots + 71 \cdot 1}{5001} \approx 59,05 \approx 59$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Ga zelf na dat de modale lengte 58 cm, de mediaan 59 cm en het gemiddelde 59 cm is.
- Stel je voor dat je zou weten dat de werkelijke gemiddelde mowlengte van alle vrouwen die de Bijenkorf bezoeken 59 cm is. Hoe groot is dan de juistheid van deze steekproef? Hoeveel procent is de relatieve juistheid?

Je kunt van de data van de mowlengtes een boxplot maken als je de vijf daarvoor benodigde getallen handmatig bepaald.

- Leg uit hoe dat gaat en maak zo'n boxplot.

Voorbeeld 2

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.

Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L										
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3	
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8	
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1	
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1	
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5	

Tabel 15.7

Bereken de modale concentratie, de mediaan en de gemiddelde concentratie.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen: de modale concentratie is 24,6, de mediaan is 25,1 en de gemiddelde concentratie is $\approx 25,2$.

Je kunt ook eerst een frequentieverdeling maken door afronden op gehele getallen.

Je werkt dan met klassenindeling $19,5- < 20,5$, $20,5- < 21,5$, ... $29,5- < 30,5$.

Maak met Excel een frequentietabel, zie het **Practicum**.

En nu kun je de drie centrummaten bepalen op de manier van **Voorbeeld 1**.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

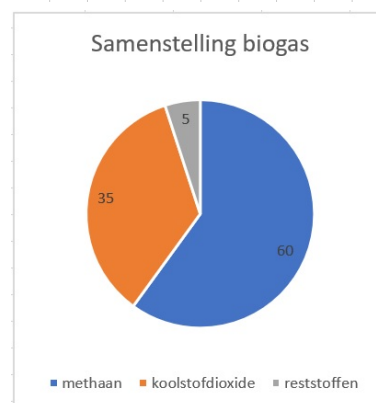
- Bereken zelf de drie centrummaten.
- Maak een frequentietabel bij deze gegevens op de manier van **Voorbeeld 2**. Bereken hiermee opnieuw de drie centrummaten.
- Wat betekent het voor de frequentieverdeling dat de drie centrummaten hetzelfde zijn?

Opgave 6

Biogas is een gasmengsel dat ontstaat als gevolg van biologische enzymatische processen.

De samenstelling ervan wordt in dit cirkeldiagram weergegeven.

- Hebben de centrummaten hier enige betekenis?
- Hoeveel reststoffen bevat 120 m^3 biogas?



Figuur 15.4

Oefenen

Opgave 7

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120°C . Voor gebakken frites is $750 \mu\text{g/kg}$ de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in $\mu\text{g/kg}$							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 15.8

- Bereken de gemiddelde hoeveelheid acrylamide in hun frites. Zegt dit gemiddelde iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?



- b Kun je op grond van dit gemiddelde vaststellen of de fastfoodketen aan het referentieniveau voldoet?
- c Maak een bijbehorende boxplot.
- d Welke aanbeveling zou je deze fastfoodketen doen?

Opgave 8

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

lichaamslengte	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	...
frequentie	0	1	1	4	3	2	8	4	17	18	32	51	54	71	78	115	149	170	208	...
	...	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	...
	...	208	231	301	302	321	313	290	294	291	261	222	184	157	167	109	86	65	62	...
	...	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187						
	...	29	49	28	17	5	10	6	3	1	2	0	1	0						

Tabel 15.9 Lichaamslengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

lichaamsgewicht	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	..
frequentie	3	0	4	2	4	21	19	26	41	56	73	87	89	121	140	146	162	185	182	..
	...	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	..
	...	197	185	214	187	190	185	204	171	152	181	162	147	130	109	107	121	94	86	..
	...	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	..
	...	84	72	77	59	77	52	39	51	41	28	34	32	28	16	21	18	9	12	..
	...	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	..
	...	4	11	7	8	9	4	5	4	0	6	1	1	1	1	2	0	1	3	..

Tabel 15.10 Lichaamsgewicht van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de lichaamslengte en het lichaamsgewicht van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

- a Bereken de gemiddelde lengte, de modale lengte en de mediaan van de lengtes.
- b Maak een bijbehorend staafdiagram. Leg uit waarom de drie centrummaten zo dicht bij elkaar liggen.
- c Maak een boxplot bij de lengtes van de vrouwen.
- d Welke lengtes hebben de 25% langste vrouwen?

In de tijd dat dit onderzoek werd gehouden was de populatie vrouwen in Nederland gemiddeld 161 cm lang.

- e Hoe groot is de juistheid van dit onderzoek?
- Bereken ook de relatieve juistheid.

Opgave 9

Bij een test met e-readers worden door vijf testers deze apparaten onder andere beoordeeld op 'gebruiksgemak', 'leesgemak', 'boeken toevoegen' en 'accuduur in dagen'.

- Welke van deze statistische variabelen zijn kwalitatief?
- Kun je een gemiddeld 'leesgemak' berekenen?

Opgave 10

Uit de wielersport komen soms berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen was vroeger erytropoëetine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren.

De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.

Bij een wielervedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

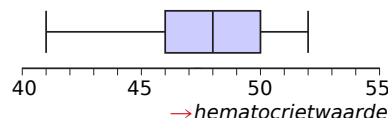
hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 15.11

- Bereken de gemiddelde hematocrietwaarde van deze wielrenners.

Ook in 1998 en 1999 heeft men bij deze wielervedstrijd van een aantal wielrenners de hematocrietwaarde gemeten. In 1998 was de gemiddelde hematocrietwaarde 45,9. De hematocrietwaarden uit 1999 zijn verwerkt in deze boxplot.

- Toon aan dat, op grond van de boxplot, de gemiddelde hematocrietwaarde in 1999 groter was dan in 1998.



Figuur 15.5

Opgave 11

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meetnauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters	auto's km/h
5 4	4 1 3 5
6 4 2 2 1	5 0 3 5 6 6 9
0	6 1 3
7	7 5

Figuur 15.6

- Bereken het gemiddelde van de gemeten snelheden. Is dit getal voor de politie van belang?
- Bepaal de modale snelheid.



- c Maak een boxplot van de gemeten snelheden.
- d Hoeveel procent van de snelheidsovertreders had een gemeten snelheid van meer dan 57,5 km/h?

Toepassen

Boxplots zijn goed te gebruiken om datasets te vergelijken.

Je kunt een dataset met de lengte van meisjes en jongens in groepen van 25% verdelen, dus vier kwarten met evenveel data. Deze groepen hebben de volgende vijf grenzen: het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum. Deze boxplots maken dat goed zichtbaar. De beide middelste kwarten vormen de box.

Er bestaan vuistregels voor het vergelijken van twee boxplots:

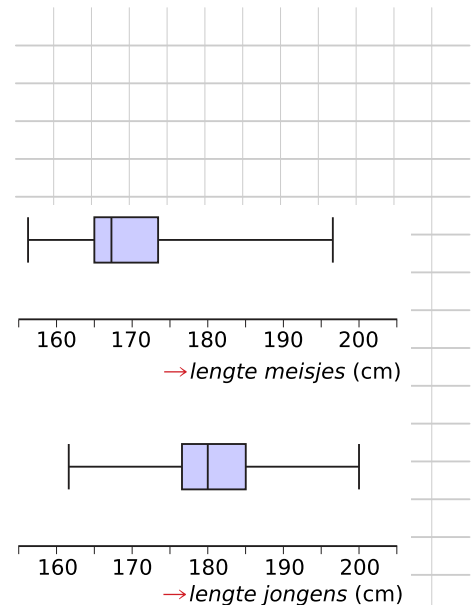
- als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeg je 'het verschil is groot',
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeg je 'het verschil is middelmatig', en
- in alle andere gevallen zeg je 'het verschil is gering'.

Hoe zit het met deze twee boxplots?

Opgave 12

Bekijk de boxplots in [Toepassen](#).

- a Hoeveel procent van de meisjes is langer dan 165 cm?
- b Hoeveel procent van de meisjes is langer dan het derde kwartiel? En hoeveel procent heeft een lengte tussen de mediaan en het derde kwartiel?
- c Waaraan kun je zien dat meer dan 75% van de meisjes kleiner is dan de langste van de 25% kleinste jongens?
- d Kun je zeggen dat de jongens in deze populatie duidelijk langer zijn dan de meisjes?

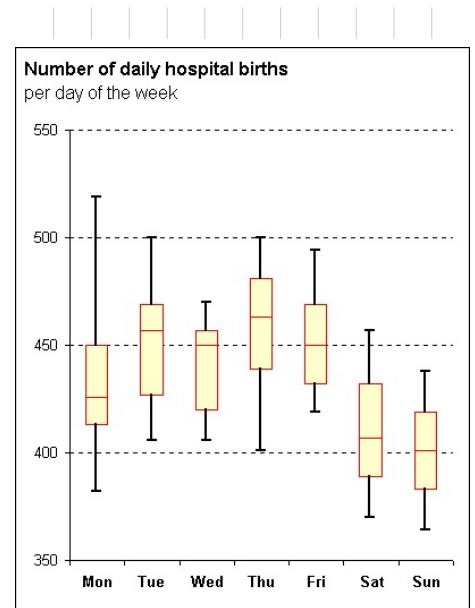


Figuur 15.7

Opgave 13

Bekijk de boxplots van het aantal geboortes in ziekenhuizen per dag voor de verschillende dagen van de week.

- Als je het aantal bevallingen op woensdag en op donderdag met elkaar vergelijkt, welke conclusie kun je dan trekken?
- Bedenk een verklaring voor het verschil in geboortes tussen de zondag en de maandag.
- Hoeveel procent van de zondagen zijn er minder dan vierhonderd geboortes in ziekenhuizen?
- Benader het gemiddelde aantal bevallingen op donderdagen.



Figuur 15.8

Testen

Opgave 14

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

Percentage rookworst				
12,4	12,7	12,8	12,6	13,0
12,6	12,8	12,7	12,4	12,1
12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 15.12

- Bereken de drie centrummaten.
- Waarom zeggen deze centrummaten iets over de juistheid en niet over de precisie van de metingen?
- Hoe groot is de juistheid als Unox echt 12,7% rookworst in zijn soep stopt?

Opgave 15

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
Totaal	100

Tabel 15.13

15.5 Spreidingsmaten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- datasets karakteriseren door getallen die de spreiding ervan aangeven;
- spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand en standaardafwijking bepalen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- de begrippen juistheid en precisie van een steekproef;
- waarnemingen weergeven in tabellen en in verschillende soorten diagrammen;
- klassenindeling, klassenbreedte, absolute en relatieve frequentie.
- datasets karakteriseren door getallen die het centrum ervan aangeven;
- modus (modale klasse), mediaan en gemiddelde bepalen.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

- a De spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogst en de laagst gemeten waarden.
Bepaal de spreidingsbreedte bij elk van de drie laboranten.

- b Welke van de drie laboranten is het minst precies?

Je kunt de resultaten van deze laboranten ook samenvatten in boxplots. Daartoe zet je de data op volgorde van klein naar groot en je verdeelt ze in vier stukken met evenveel gegevens. De box is het gebied tussen het eerste kwartiel Q_1 en het derde kwartiel Q_3 . De lengte van de box heet de interkwartielafstand IQR ('Inter Quartile Range').

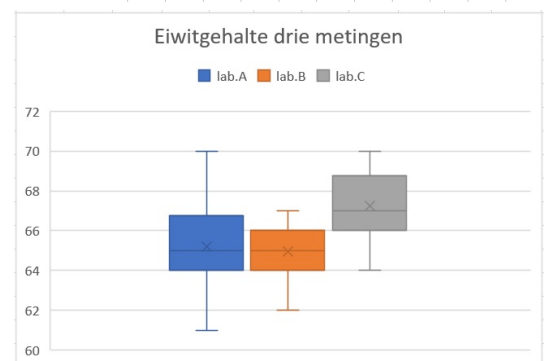
- c Bepaal de IQR bij elk van de drie laboranten.
- d Zeggen getallen zoals spreidingsbreedte en interkwartielafstand iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.1



Figuur 15.1

Uitleg 1

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Je wilt deze resultaten kunnen vergelijken. Zo is dat nogal lastig, zeker als de datasets groter worden. Een manier is het gebruik van frequentietabellen en diagrammen. Maar je kunt ook werken met centrummaten en spreidingsmaten. Dan vat je de meetgegevens met twee getallen samen.

Er worden meerdere spreidingsmaten gebruikt:

- de spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde;
- de (inter)kwartielafstand IQR is de lengte van de box in een boxplot: $IQR = Q_3 - Q_1$;
- de gemiddelde absolute afwijking is de som van alle (positieve) afwijkingen van het gemiddelde gedeeld door het aantal waarden.

Bij laborant A is de spreidingsbreedte $70 - 61 = 9\%$, is de kwartielafstand $IQR = 67 - 64 = 3\%$ en is het gemiddelde absolute afwijking $\approx 1,82\%$.

Je noteert de gemiddelde absolute afwijking wel als

$$GAA = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}.$$

Hierin is $|x_i - \bar{x}|$ het positieve verschil van een waarde met het gemiddelde.

In plaats van x mag je natuurlijk ook een andere letter gebruiken, zoals E voor eiwitgehalte.

Al deze spreidingsmaten zeggen iets over de precisie van de metingen. De relatieve spreidingsbreedte is daar (op dit moment) een goede maat voor. Je deelt dan de spreidingsbreedte door het gemiddelde van de steekproef.

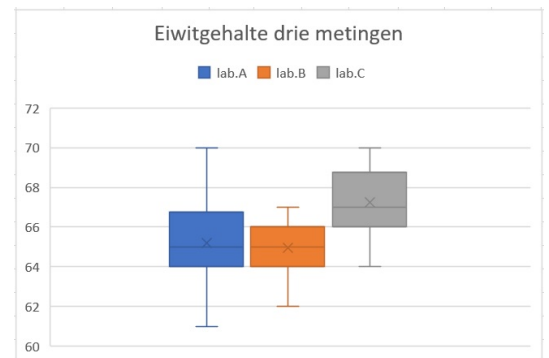
Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet meetgegevens van drie laboranten.

- Reken de gemiddelde absolute afwijking van laborant A zelf na.
- Waarom zegt de relatieve spreidingsbreedte iets over de precisie van de metingen?
Bereken die relatieve spreidingsbreedte voor laborant A.
- Bereken ook van de andere twee laboranten de spreidingsbreedte, de IQR en de GAA .
Bereken ook de precisie van die metingen.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.2



Figuur 15.2

Je ziet de gegevens ook in de vorm van boxplots terug.

Laborant C ikt zijn meetinstrument en doet de meting opnieuw.
Bekijk de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C tweede meting na ijking																			
64	67	65	66	66	62	65	66	68	65	65	66	63	68	67	67	64	65	64	63

Tabel 15.3

- d Bereken hierbij de spreidingsbreedte, de *IQR* en de gemiddelde absolute afwijking.
Is het resultaat preciezer of juist?

Opgave 2

Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm												
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4	
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9	
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7	
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4	
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3	
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7	
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7	
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8	
28,9	26,8	27,3	27,5									

Tabel 15.4

- a Is het gemakkelijk om uit de figuur de drie spreidingsmaten van deze gegevens te bepalen?
- b Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes van deze mannen.
In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.
- c Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes van deze vrouwen.
- d Kun je door deze spreidingsmaten bij de mannen en de vrouwen te vergelijken conclusies trekken?

Uitleg 2

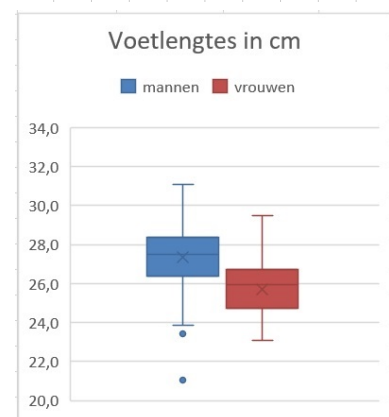
Je ziet hier twee boxplots van de gemeten voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen. Bij de mannen zijn er twee losse datapunten te zien. Dat zijn echte uitschieters, in dit geval beide naar beneden.

In een boxplot is een uitschieter (of uitbijter) een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit. Hier zijn het de waarden 21,1 en 23,4.

Ga na dat deze waarden beide meer dan 1,5 keer de kwartielafstand onder Q_1 zitten.

In speciale gevallen bij kleine steekproeven kun je uitschieters opsporen met behulp van Dixon's Q-test. Bij n meetwaarden ga je zo te werk:

- Je zet eerst alle meetwaarden op volgorde van klein naar groot en bepaalt de spreidingsbreedte.



Figuur 15.3



- Je berekent het grootste verschil tussen twee waarden naast elkaar.
- Dit getal deel je door de spreidingsbreedte en je krijgt Q_{data} .
- Je vergelijkt Q_{data} met de Q -waarde in **Dixon's tabel** die je vindt bij de juiste n en de gewenste betrouwbaarheid. Als $Q_{\text{data}} > Q$ dan heb je met een uitschieter te maken.

Ze kun je met een zelf gekozen (of voorgeschreven) betrouwbaarheid vaststellen of een waarde een uitschieter is.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.5

- Ga zelf na dat de waarden 21,1 en 23,4 uitschieters zijn bij de voetlengtes van de mannen.
- In het bijgevoegde Excelbestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.
Ga ook na, dat er bij de voetlengtes van de vrouwen geen uitschieters zijn.
Neem aan dat je op de gegevens in het Excelbestand ook **Dixon's Q-test** kunt toepassen.
- Onderzoek, of de waarde 31,6 cm bij de mannen ook volgens deze testmethode een uitschieter is met een betrouwbaarheid van 95%.
Je denkt dat de uitschieter bij c het gevolg kan zijn van een meetfout.
Je verwijdert hem uit de data.
- Onderzoek daarna of er nog een andere uitschieter is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Kwantitatieve statistische gegevens (data) kun je - behalve met centrummaten - samenvatten met **spreadsingsmaten**:

- de **spreadsingsbreedte** of absolute spreiding: het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde;
- de **(inter)kwartielafstand** in een boxplot: $IQR = Q_3 - Q_1$;
- de **gemiddelde absolute afwijking**: het gemiddelde van alle positieve afwijkingen van het gemiddelde.

Je noteert de gemiddelde absolute afwijking wel als

$$GAA = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}.$$

De **precisie** van de data kun je aangeven met de relatieve spreidingsbreedte. Daarbij deel je de spreidingsbreedte door het gemiddelde en rekent dit getal om naar procenten. Later zul je nog andere maten voor de precisie leren kennen.

Bij kwalitatieve data hebben spreidingsmaten vaak geen betekenis.

Soms is er sprake van een **uitschieter** (of uitbijter), een waarde die wel erg veel afwijkt.

- In een boxplot is een uitschieter een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.
- Bij kleine steekproeven kun je (onder bepaalde omstandigheden) **Dixon's Q-test** toepassen.

Er kunnen meerdere uitschieters zowel naar boven als naar beneden zijn.

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.6 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

kniehoopte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.7 Kniehoopte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bepaal de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de mouwlengtes m_i .

Antwoord

Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele *mouwlengte* de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de spreidingsbreedte aflezen: $71 - 49 = 22$ cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is het eerste kwartiel is het 1251-ste getal en het derde kwartiel het 3751-ste getal. De kwartielafstand is daarom $61 - 57 = 4$ cm.



Het berekenen van de gemiddelde absolute afwijking is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden.

Bijvoorbeeld bij een mouwlengte van 53 cm hoort een absolute afwijking van $|53 - 59,1| = 6,1$ en die komt 89 keer voor. Je kunt dit het beste in het Excelbestand doen en Excel voor je laten rekenen.

Ga na dat $GAA \approx 1,6$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a Ga zelf na dat de spreidingsbreedte 22 cm, de kwartielafstand 4 cm en de gemiddelde absolute afwijking $\approx 1,6$ cm is.

De mouwlengte van 71 cm lijkt een uitschieter.

- b Onderzoek met behulp van de kwartielafstand of dit ook zo is.

Voorbeeld 2

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.

Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

Tabel 15.8

Bereken de spreidingsbreedte, de interkwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking.

Onderzoek ook met behulp van Dixon's Q-test of de waarde 30,1 met een betrouwbaarheid van 95% een uitschieter is.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen: de spreidingsbreedte is $30,1 - 20,4 = 9,7$, de kwartielafstand is $26,0 - 24,3 = 1,7$ en de gemiddelde absolute afwijking is $\approx 1,2$.

Om te na te gaan of 30,1 een uitschieter is, bepaal je het verschil met het getal er direct onder en dit deel je door de spreidingsbreedte: $Q_{\text{data}} = \frac{30,1 - 29,0}{9,7} \approx 0,1134$.

Je pakt nu Dixon's tabel er bij, zie het **Practicum**. Daar vind je bij $n = 50$ onder 95% de waarde $Q = 0,2206$.

De meetwaarde 30,1 is dus geen uitschieter.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Bereken zelf de drie spreidingsmaten.
- Voer ook zelf Dixon's Q-test uit op de meetwaarde 30,1 met een betrouwbaarheid van 95%.
- Met welke betrouwbaarheid is 30,1 volgens Dixon's tabel wel een uitschieter?
- Bepaal de precisie van deze metingen door de relatieve spreiding te berekenen.

Oefenen

Opgave 6

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120 °C. Voor gebakken frites is 750 µg/kg de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in µg/kg							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 15.9

- Bereken de precisie van deze metingen door de relatieve spreiding te berekenen.
- Bereken de interkwartielafstand *IQR*.
- Is er volgens de interkwartielafstand een uitschieter bij deze metingen?
- Is er volgens Dixon's Q-test met een betrouwbaarheid van 95% een uitschieter bij deze metingen?

Opgave 7

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

lichaamslengte	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	...
frequentie	0	1	1	4	3	2	8	4	17	18	32	51	54	71	78	115	149	170	208	...
...	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	...	
...	208	231	301	302	321	313	290	294	291	261	222	184	157	167	109	86	65	62	...	
...	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187							
...	29	49	28	17	5	10	6	3	1	2	0	1	0							

Tabel 15.10 Lichaamslengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

lichaamsgewicht	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	...
frequentie	3	0	4	2	4	21	19	26	41	56	73	87	89	121	140	146	162	185	182	...
...	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	...	...
...	197	185	214	187	190	185	204	171	152	181	162	147	130	109	107	121	94	86	...	...
...	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	...	...
...	84	72	77	59	77	52	39	51	41	28	34	32	28	16	21	18	9	12	...	...
...	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	...	...
...	4	11	7	8	9	4	5	4	0	6	1	1	1	1	2	0	1	3	...	...

Tabel 15.11 Lichaamsgewicht van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de lichaamslengte en het lichaamsgewicht van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

- Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de lengtes.
- Hoe groot is de relatieve spreiding van deze gegevens?

Opgave 8

Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erythropoëetine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren. De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.

Bij een wielervedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 15.12

- Bereken de relatieve spreiding van de hematocrietwaarden van deze wielrenners.
- Onderzoek of 57 een uitschieter is met behulp van Dixon's Q-test en een betrouwbaarheid van 90%.



Opgave 9

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meeton-nauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters					auto's km/h				
			5	4	4	1	3	5	
6	4	2	2	1	5	0	3	5	6
				0	6	1	3		
					7	5			

Figuur 15.4

- Bereken spreidingsbreedte en de kwartielafstand van de gemeten snelheden.
- Kun je op grond van de kwartielafstand spreken van uitschieters bij deze gemeten snelheden?

Toepassen

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten. De fabrikant geeft aan dat er 64% eiwit in hun eiersalade is verwerkt.

Op grond van deze verschillende uitslagen kun je iets zeggen over de juistheid en de precisie van de uitslagen.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.13

Opgave 10

Bekijk de gegevens van de drie laboranten.

- Bepaal bij alle drie de resultaten de juistheid en de relatieve juistheid in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken van elke laborant de precisie door de relatieve spreiding te berekenen in één decimaal nauwkeurig.
- Welke laborant heeft de beste juistheid en de beste precisie?

Opgave 11

Gebruik Dixon's Q-test en een betrouwbaarheid van 95%.

Onderzoek of er bij deze drie laboranten van uitschieters sprake is.

Testen

Opgave 12

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

Percentage rookworst				
12,4	12,7	12,8	12,6	13,0
12,6	12,8	12,7	12,4	12,1
12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 15.14

- Bereken de drie spreidingsmaten in één decimaal nauwkeurig.
- Zeggen deze spreidingsmaten iets over de juistheid of over de precisie van de metingen?
- Bereken de relatieve spreiding.
- Onderzoek met behulp van Dixon's Q-test of 12,1 met een betrouwbaarheid van 90% een uitschieter is.

Opgave 13

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.

De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
Totaal	100

Tabel 15.15

- Bereken de relatieve spreiding van het aantal bacteriën in de honderd monsters.
Zegt dit getal iets over de juistheid of over de precisie van de metingen?
- De laborante besluit de twee monsters die het laagste scoorden opnieuw te meten. Dat levert in beide gevallen een score van vijftig bacteriën op en daarmee een nieuwe dataset. Beredeneer dat in deze nieuwe set de spreidingsbreedte kleiner is dan in de oorspronkelijke dataset.
- Laat met behulp van de kwartielafstand zien, dat er in de oorspronkelijke dataset geen uitschieters voorkomen.

15.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met statistische variabelen, diagrammen en verdelingen voorbij gekomen. Het gaat daarbij vooral om metingen, waarnemingen, waarbij het toeval een rol speelt. De juistheid en de precisie van data zijn aan de orde geweest.

Je hebt nu alle theorie van **Beschrijvende statistiek** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwalitatief, kwantitatief — statistische variabele — steekproef en populatie — aselechte trekking — herhaalbaarheid
- systematische, toevallige en persoonlijke fouten — juistheid en precisie
- absolute en relatieve frequentie, frequentietabellen — klassenindeling, klassenbreedte — lijn-, staaf-, cirkel-, steelbladdiagram
- centrummaten: modus, mediaan, gemiddelde — boxplot, kwartielen — juistheid
- spreidingsmaten: spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand, gemiddelde absolute afwijking — precisie en relatieve spreiding — uitschieter

Activiteitenlijst

- kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen herkennen — herhaaldelijk een aselechte steekproef uit een populatie trekken;
- soorten fouten herkennen — juistheid en precisie van elkaar onderscheiden;
- waarnemingen weergeven in tabellen en diagrammen — waarnemingen indelen in klassen — verschillende soorten diagrammen maken en interpreteren — werken met Excel;
- de centrummaten modus, mediaan en gemiddelde berekenen — een boxplot maken en interpreteren — werken met Excel;
- de spreidingsmaten spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand, gemiddelde absolute afwijking berekenen — de relatieve spreiding berekenen — uitschieters vaststellen met behulp van de kwartielafstand of met behulp van Dixon's Q-test.



Testen

Opgave 1

Van een partij kunstmest zijn 10 monsters genomen en daarvan is het stikstofgehalte bepaald.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)									
13,8	14,0	13,9	14,2	14,5	14,5	14,8	14,1	13,9	13,7

Tabel 15.1

- Beschrijf de bijbehorende populatie en hoe de steekproef getrokken zou moeten zijn.
- Is 'stikstofgehalte' een kwantitatieve of een kwalitatieve statistische variabele?
- Bereken de relatieve spreiding van deze meetserie.
Zegt dit getal iets over de precisie of de juistheid van de metingen?
In het lab wordt vaak de norm gehanteerd dat de relatieve spreiding kleiner moet zijn dan 3%.
- Voldoen deze metingen aan die norm?

Opgave 2

Dit zijn de resultaten van toetsen over hetzelfde onderwerp in twee verschillende groepen studenten.

Resultaten test A	6,7	6,4	4,9	3,8	4,0	5,6	5,8	6,8	8,2	4,7	3,4	8,5	4,1	6,9	7,3	6,1	7,5	6,7	6,2	3,4	7,9	4,5	8,3		
Resultaten test B	4,0	6,2	4,9	3,9	5,9	7,3	4,7	6,7	7,6	9,4	8,3	5,7	7,2	8,7	7,1	7,0	6,5	7,4	5,0	4,8	7,7	6,5	4,9	8,8	6,3

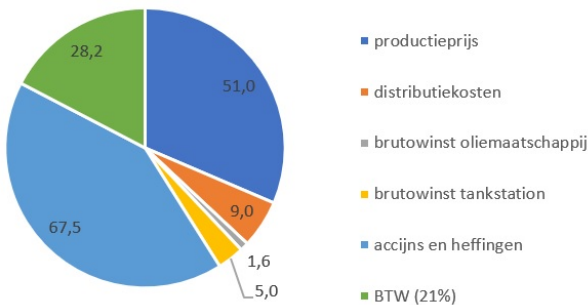
Tabel 15.2

- Bereken van beide groepen de gemiddelde score in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken mediaan en beide kwartielen Q_1 en Q_3 .
- Vergelijk beide groepen met elkaar door twee boxplots te tekenen.
- Laat met behulp van de interkwartielafstand zien dat er in beide groepen geen uitschieters voorkomen.
- Kun je vaststellen welke groep de toets het best heeft gemaakt?

Opgave 3

Dit cirkeldiagram geeft een beeld van de opbouw van de benzineprijs op een zeker moment.

Opbouw benzineprijs in cent



Figuur 15.1

- Hoe groot is de sectorhoek die hoort bij 'productieprijs'? Hoeveel procent van de totale prijs is dat?
- Is hier sprake van een kwantitatieve of een kwalitatieve variabele?
- Hoeveel procent van deze benzineprijs gaat naar de overheid?

Opgave 4

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

voetlengte (in 0,5cm)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
frequentie	1	7	13	20	76	179	303	532	848	968	718	582	419	213	68	33	11	6	4

Tabel 15.3 Voetlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

voetbreedte (in 0,5cm)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
frequentie	2	19	250	1039	1705	1292	553	122	16	3

Tabel 15.4 Voetbreedte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de voetlengte en de voetbreedte (in halve cm) van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

- Maak een staafdiagram van de voetlengtes.
- Bereken de modale voetlengte en de gemiddelde voetlengte.
- Bereken de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes in één decimaal nauwkeurig.
- Waarom kun je uit deze twee tabellen geen verband afleiden tussen voetlengte en voetbreedte?

Opgave 5

Bij een diabetespatiënt is het bloedsuiker gemeten:

Bloedsuiker (mmol/L)											
5,65	4,08	7,02	6,15	7,15	6,40	5,25	6,85	6,61	6,44	5,81	6,34

Tabel 15.5

Onderzoek met de Dixon's Q-test of er met een betrouwbaarheid van 95% één of meer uitschieters tussen zitten.

Opgave 6

Je ziet hier een manometer die de luchtdruk in bar en in psi (pounds per square inch) weergeeft. Het instrument is van klasse 1.

Je meet nu een druk van 950 bar.

- Hoe nauwkeurig kun je deze schaalverdeling in bar aflezen?
- Welke fout maak je als je zo afleest als in deze figuur?
- Gaat de meetklasse over een systematische of een toevallige fout?
- Neem aan dat die druk van 950 bar correct is afgelezen, tussen welke waarden ligt dan de werkelijke druk?

Volgens de wet van Boyle zijn bij een constante temperatuur druk en volume omgekeerd evenredig.

Je hebt de druk gemeten in een cilinder gevuld met gas, waarvan je het volume kunt vergroten en verkleinen. Het volume bij de meting van 950 bar is 10 L.

- Als de druk volgens deze meter toeneemt van 950 bar naar 980 bar, hoeveel neemt het volume dan af?

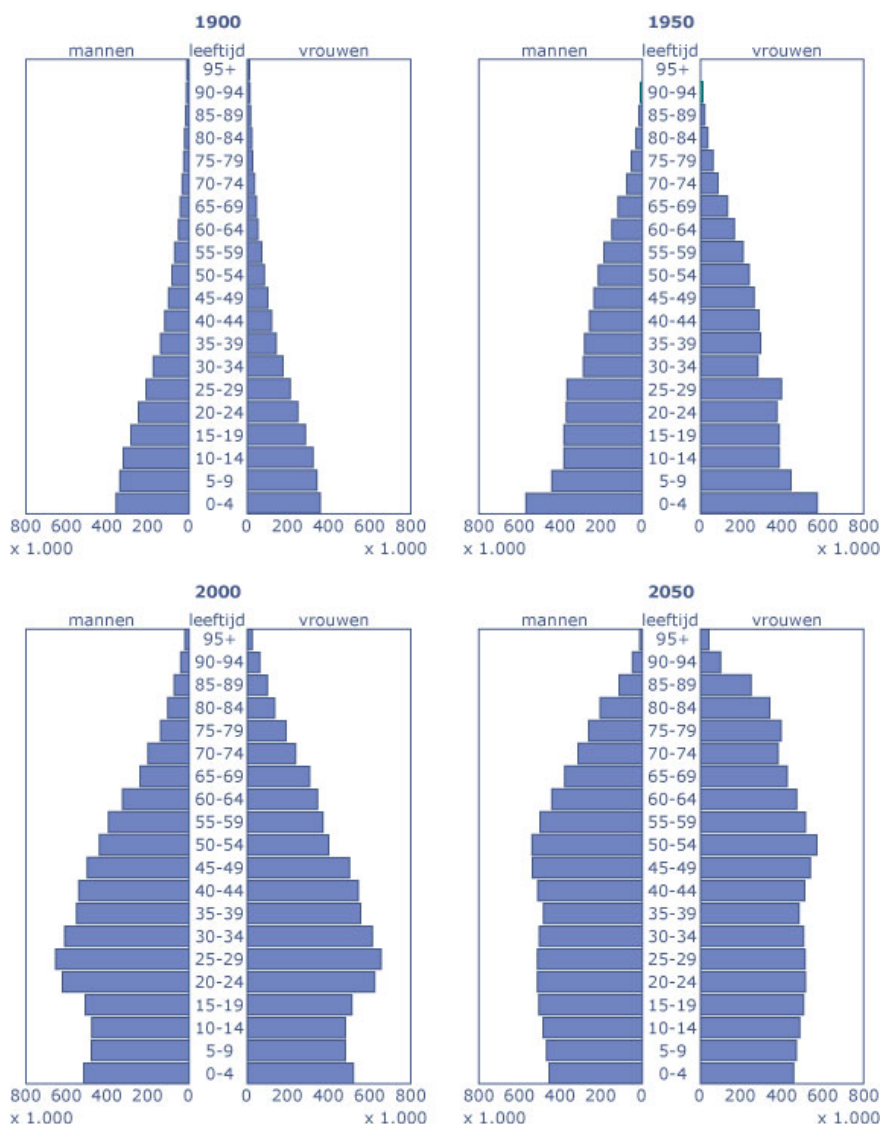


Figuur 15.2

Toepassen

Opgave 7: Leeftijdsdiagrammen (bevolkingspiramides)

Bekijk de vier leeftijdsdiagrammen van Nederland.



Bron: Bevolkingsprognose Midden Variant

Figuur 15.3

- Wat voor soort diagrammen zijn dit?
- Hoeveel kinderen van 0-4 jaar waren er naar schatting in 1900, 1950 en 2000?
- Waar vind je de kinderen die in 1950 in de klasse 0 – 4 jaar zaten terug in de piramides van 2000 en 2050?
- Noem in elk van de vier diagrammen de modale klasse. Wat valt je op?
- Hoe onderbouw je de uitspraak met getallen dat het percentage 85-plussers sinds 1900 flink is toegenomen en nog verder zal toenemen?

16

Normale verdeling

16.1 Soorten verdelingen	64
16.2 Normaalkromme	75
16.3 Rekenen met de normale verdeling	86
16.4 Betrouwbaarheidsintervallen	98
16.5 De Shewhartkaart	108
16.6 Totaalbeeld	119

16.1 Soorten verdelingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de vorm van frequentieverdelingen (ook met klassenindelingen) te typeren;
- met behulp van de mediaan en het gemiddelde de scheefheid van een verdeling benoemen.

Voorkennis

- de begrippen data, populatie, steekproef, aselekt en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie, discrete en continue variabele, klassenbreedte, klassenmidden en klassengrens;
- werken met statistische (frequentie)tabellen en allerlei diagrammen;
- centrum- en spreidingsmaten van frequentieverdelingen bepalen en die in verband brengen met de juistheid en de precisie van meetresultaten.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet diagrammen van de lengteverdeling van sporters. De lengtes zijn ingedeeld in klassen met een klassenbreedte van 5 cm. Eén ervan gaat over volleyballers, één over hardlopers en één over gewichtheffers.

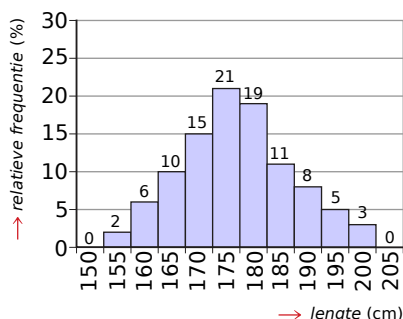


diagram I

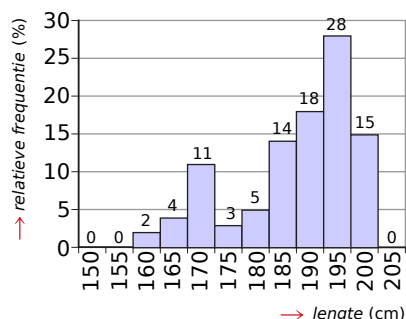


diagram II

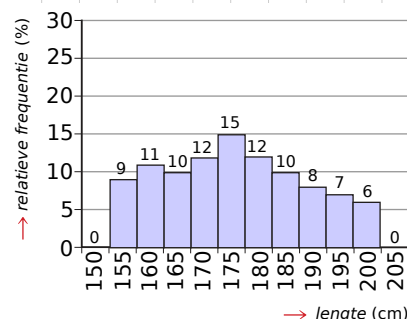


diagram III

Figuur 16.1

- Welk diagram is het meest gelijkmatig, welk diagram heeft meerdere toppen en welk diagram vind je het meest symmetrisch?
- Welk diagram hoort bij de volleyballers, welk bij de hardlopers en welk bij de gewichtheffers? Licht je antwoord toe.
- Bij welk van deze diagrammen zitten de mediaan en het gemiddelde beide ongeveer in het midden van de verdeling?

Uitleg

Bij een statistische variabele zijn veel verschillende verdelingen mogelijk.

Als je frequentieverdelingen bij datasets in beeld brengt, dus in diagrammen verwerkt, krijg je soms mooie symmetrische plaatjes, maar lang niet altijd. Sommige verdelingen zijn scheef, sommige erg grillig. Maar ook kun je met meerdere toppen te maken hebben.

Let bijvoorbeeld eens op de vorm en de verdeling van een staafdiagram. Is het diagram scheef of juist symmetrisch? Zijn er meerdere toppen of is er juist sprake van een opvallende gelijkmatigheid? Zijn er veel uitschieters?

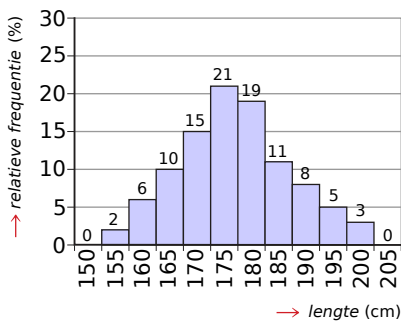


diagram I

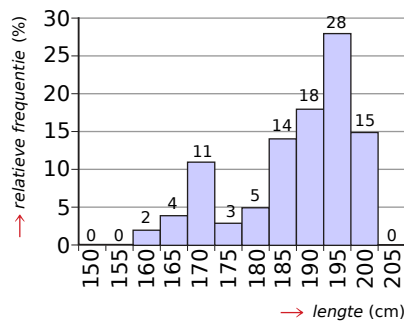


diagram II

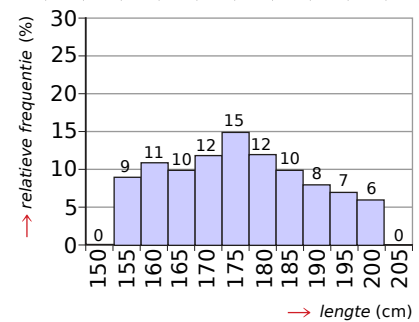


diagram III

Figuur 16.2

En aan de hand van deze centrummaten kun je goed vaststellen of een verdeling symmetrisch is of juist scheef: van een symmetrisch staafdiagram zijn gemiddelde en mediaan gelijk en zitten ze in het midden van het meetgebied, van een scheef staafdiagram zijn ze meestal verschillend en zitten ze niet in het midden van het meetbereik.

Voor lijndiagrammen en boxplots iets vergelijkbaars.

Opgave 1

Bekijk de drie staafdiagrammen in de [Uitleg](#).

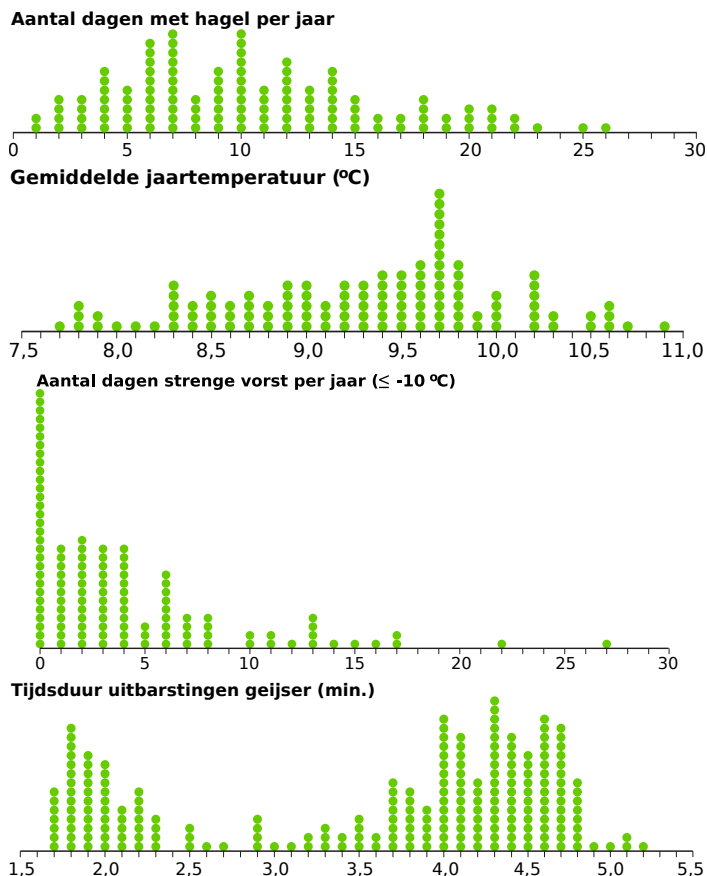
- Waarom kun je van zo'n frequentieverdeling het gemiddelde en de mediaan alleen schatten?
- Uit welke klassen bestaan deze drie lengteverdelingen?
- Schat met behulp van de klassenmiddens bij elk van deze drie lengteverdelingen de mediaan en het gemiddelde.



- d Welke van de drie verdelingen is het meest scheef?
Licht je antwoord toe met de berekende waarden voor mediaan en gemiddelde.
- e Welke van deze drie lengteverdelingen is meertoppig?
Waarom zal die bij de volleyballers horen?

Opgave 2

Je ziet hier vier zogenaamde dotplots van datasets. Elk gegeven, elk datapunt, heeft zijn eigen dot.

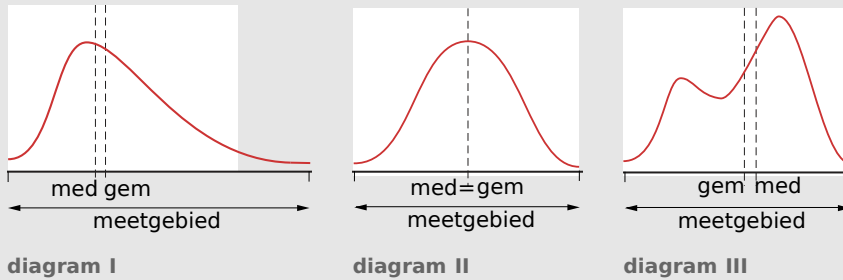


Figuur 16.3

Beschrijf van elke dataset de vorm van de verdeling, gebruik daarbij de mediaan en het gemiddelde.
Is er sprake van symmetrie, een gelijkmatige verdeling, meerdere toppen of uitschieters?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 16.4

Bij de **vorm van een frequentieverdeling** let je op:

- de symmetrie
- de scheefheid
- het aantal toppen
- de uitschieters
- de gelijkmatigheid

Bij een symmetrische verdeling vallen mediaan (med) en gemiddelde (gem) vrijwel samen en zitten ze in het midden van het meetgebied (meetbereik). Dat zie je in diagram II. Soms is de verdeling scheef zoals in diagram I en soms zijn er meer toppen zoals in diagram III.

Belangrijk is wel dat je bij een frequentieverdeling met een klassenindeling de mediaan en het gemiddelde alleen nog kunt schatten met behulp van de klassenmiddens. (Tenzij je de werkelijke gegevens nog hebt!)

Voor uitschieters heb je vooralsnog een tweetal tests:

- In een boxplot is een uitschieter een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.
- Bij kleine steekproeven kun je (onder bepaalde omstandigheden) **Dixon's Q-test** toepassen.

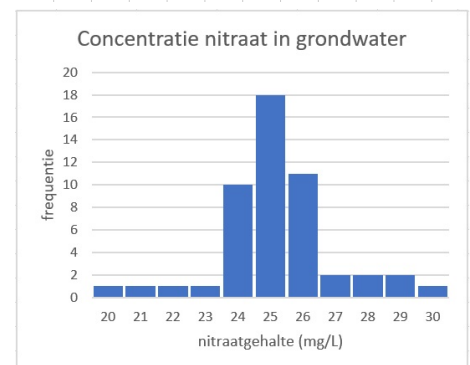
Voorbeeld 1

Je wilt de concentratie nitraat in landbouwgrond op een bepaald stuk land vaststellen. Je neemt 50 monsters, waarvan je het nitraatgehalte in mg/L op één decimaal nauwkeurig vaststelt.

Om de metingen overzichtelijk weer te geven rond je ze af op gehele getallen en maak je dit staafdiagram.

Schat met behulp van dit staafdiagram de mediaan en het gemiddelde.

Is deze frequentieverdeling redelijk symmetrisch?



Figuur 16.5

Antwoord

Er zijn 50 metingen verricht, dus de mediaan is het gemiddelde van het 25ste en het 26ste getal. Beide getallen zijn 25, dus de mediaan is 25.

Voor het schatten van het gemiddelde maak je een frequentieverdeling.

En daarvan bereken je het gemiddelde. Ga na, dat je vindt dat $\bar{N} = 25,2$ mg/L.

Het meetgebied loopt van 19,5 tot 30,5 en het midden daarvan is 25,0.

Zowel de mediaan als het gemiddelde zitten daar vlak bij.

De frequentieverdeling is eentoppig en redelijk symmetrisch.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Waarom kun je nu het gemiddelde en de mediaan alleen nog schatten?
- Bepaal zelf de mediaan en het gemiddelde.
Ga na dat de in het voorbeeld gegeven waarden kloppen.
- Hoeveel procent van de meetwaarden is kleiner dan (afgerond) 24 mg/L?
- Voldoet deze verzameling metingen aan de eis dat de relatieve spreiding maximaal 3% is?
- Zijn er uitschieters als je werkt met de kwartielafstand?

Voorbeeld 2

Je ziet hier twee boxplots van de gemeten voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen. Bij de mannen zijn er twee losse datapunten te zien. Dat zijn echte uitschieters, in dit geval beide naar beneden.

De gemiddelde voetlengte van deze mannen is 27,3 cm, van de vrouwen is dat 25,7 cm.

Als je de uitschieters meerekent, welke van beide frequentieverdelingen is dan het meest scheef? En als je de twee uitschieters weglaat?

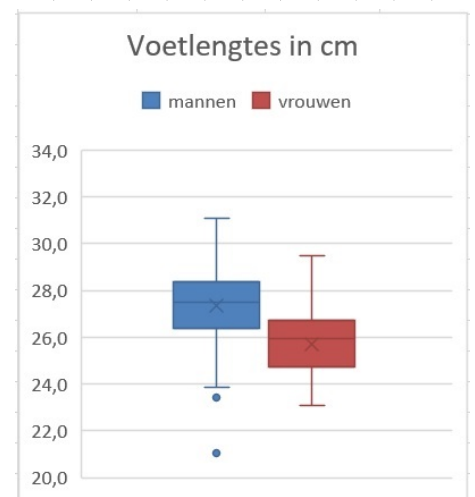
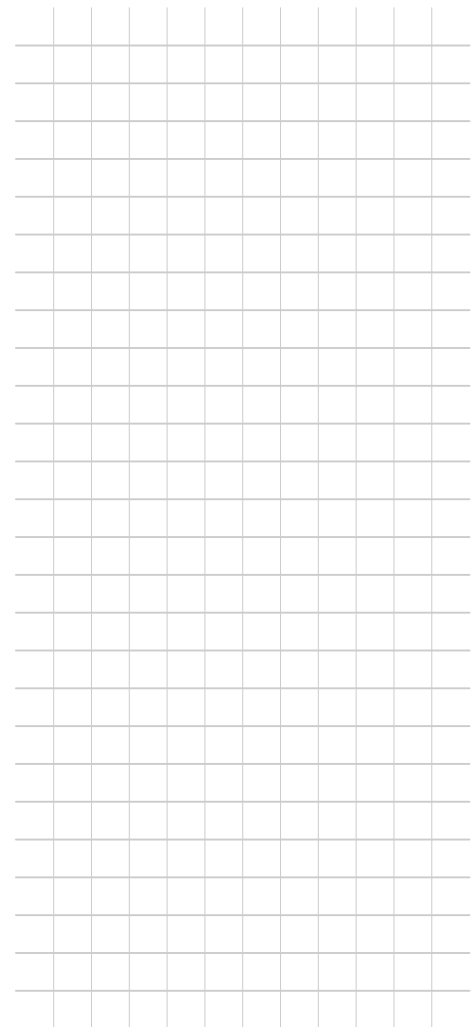
Antwoord

Uit deze figuren kun je aflezen - zelfs als je de oorspronkelijke data niet meer zou hebben - dat het meetgebied van de mannen ongeveer vanaf 21 tot en met 31 loopt. Bij de vrouwen is dat vanaf 23 tot en met 29,5.

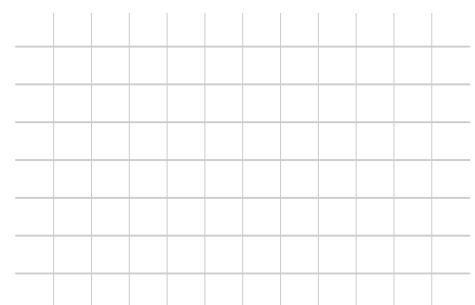
Je leest af: bij de mannen is de mediaan 27,5 en bij de vrouwen 26,0 cm.

Conclusie:

- Bij de mannen liggen mediaan en gemiddelde ruim boven het midden van het meetgebied. Daar is van een scheve frequentieverdeling sprake.



Figuur 16.6





- Bij de vrouwen liggen mediaan en gemiddelde precies in het midden van het meetgebied. Daar is van een redelijk symmetrische frequentieverdeling sprake.

Laat je bij de mannen de twee uitschieters naar beneden weg, dan ziet dit er anders uit.

Ga dat zelf na.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

Nu laat je de twee uitschieters weg.

- Wat betekent dit voor de gemiddelden en de medianen?
- Wat betekent dit voor het meetgebied van de mannen?
- Welke conclusie betreffende de verdelingen trek je nu?

Oefenen

Opgave 5

Hieronder zie je een zestal frequentieverdelingen. Als er geen getal voor de frequentie is gegeven, hoort de bijbehorende waarde niet tot het meetgebied van de frequentieverdeling.

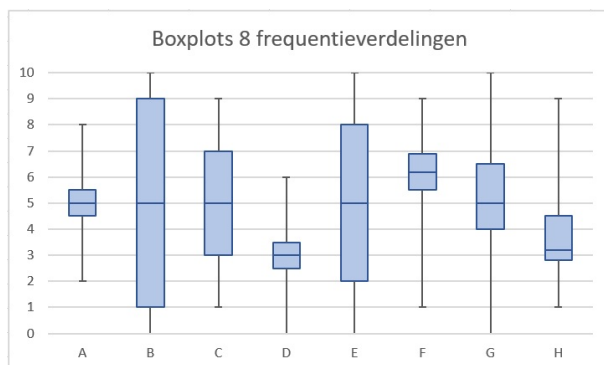
waarden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequenties A	0	5	22	46	22	5	0				
frequenties B			0	4	20	52	20	4	0		
frequenties C	0	2	5	10	19	28	19	10	5	2	0
frequenties D	0	11	25	11	3	0	3	11	25	11	0
frequenties E	0	2	11	40	22	12	6	4	2	1	0
frequenties F	0	1	2	4	6	12	22	40	11	2	0

Tabel 16.1

- Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?
- Welke van deze verdelingen zijn eentoppig?
- Welke van deze verdelingen zijn links scheef?
- Bij welke van deze verdelingen is de mediaan kleiner dan het gemiddelde?

Opgave 6

Bekijk deze boxplots. Ze stellen acht frequentieverdelingen voor waarvan het meetgebied de spreidingsbreedte is.



Figuur 16.7

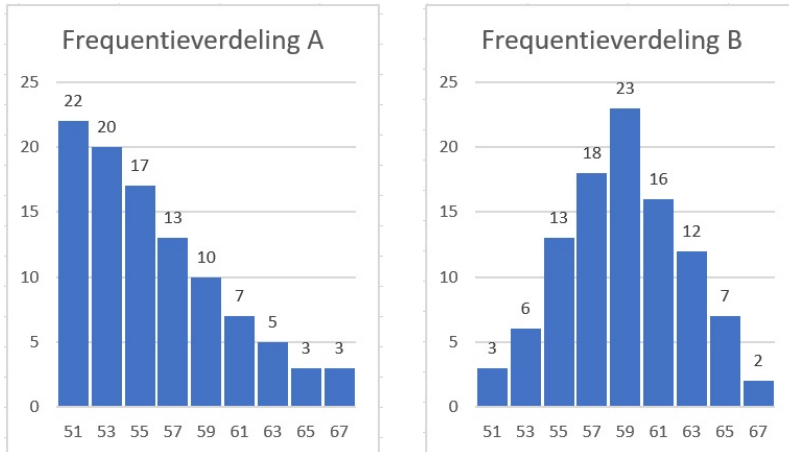
- Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?



- b** Welke van deze verdelingen zijn links scheef?
- c** Welke van deze verdelingen bevatten één of meer uitschieters als je kijkt naar de interkwartielafstand?

Opgave 7

Bekijk de twee staafdiagrammen.

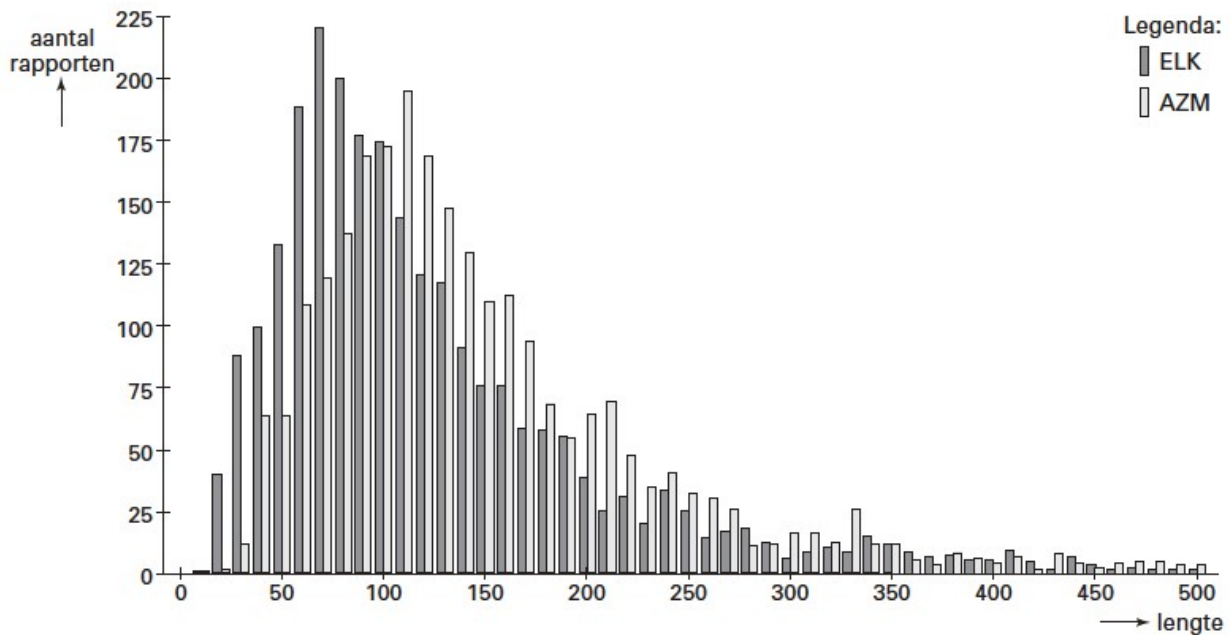


Figuur 16.8

- a** Welke klassenindeling is er gemaakt?
Welke getallen zijn de klassenmiddens?
- b** Maak bij elk van deze verdelingen een boxplot.
Bereken eerst de daarvoor noodzakelijke getallen.
- c** Waarom kun je bij beide verdelingen het gemiddelde alleen schatten?
Bepaal die gemiddelden en laat daarmee zien dat de verdeling B vrijwel symmetrisch is.

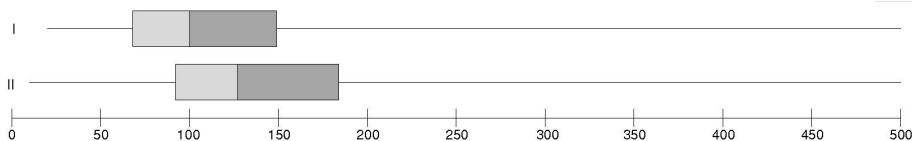
Opgave 8

In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) in Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM). Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In de figuur zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10.



Figuur 16.9

- a Beschrijf de overeenkomst in de vorm van de twee verdelingen.
- b Welke van deze boxplots, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK? Licht je antwoord toe.



Figuur 16.10

- c Kun je op grond van de twee boxplots concluderen dat er een verschil is tussen de lengtes van de rapporten in de twee ziekenhuizen? Beargumenteer je antwoord.
- d Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn. Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

Toepassen

Bij een afvoer kanaal wordt 24 uur per dag om het uur de pH-waarde gemeten.

Er wordt in ploegendienst gewerkt en elke shift worden er dus 8 metingen verricht. Het meetgebied loopt van 6,0 tot en met 10,0. Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden														
shift 1	8,5	7,3	7,7	8,1	8,0	7,3	8,4	7,7	7,3	8,2	7,3	6,4	7,0	7,3	7,7
shift 2	6,5	7,0	7,9	7,4	8,4	8,0	9,4	9,3	9,0	9,6	9,0	9,2	8,1	8,3	8,1
shift 3	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,1	6,4	7,0	7,3	7,5	8,1	7,8	7,9	7,4

Tabel 16.2

Nu kun je gaan bekijken of er iets bijzonders aan de hand is.

Opgave 9

Bekijk de meetgegevens bij [Toepassen](#).

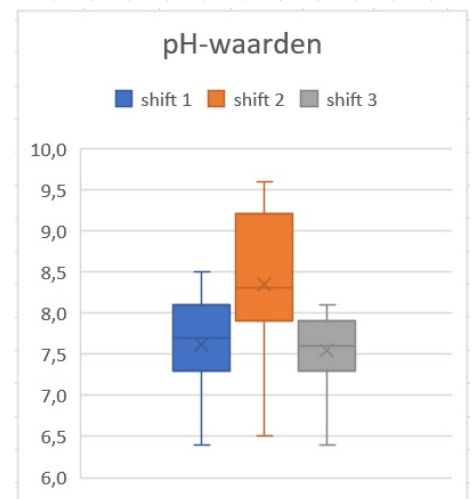
- Bereken voor elk van de drie shifts de gemiddelde pH-waarde. Valt er iets op?
- Verdeel de pH-waarden in vier klassen $5,5- < 6,5$, $6,5- < 7,5$, $7,5- < 8,5$, $8,5- < 9,5$ en $9,5- < 10,5$ en teken bijbehorende frequentieverdelingen.
- Kun je uit deze staafdiagrammen een duidelijke conclusie trekken?

Opgave 10

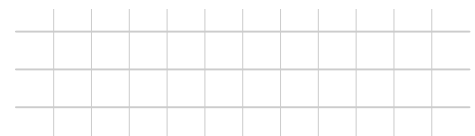
Bekijk weer de meetgegevens bij [Toepassen](#).

Je ziet hier drie boxplots van deze gegevens. De kruisjes stellen de gemiddelden voor.

Trek een conclusie op grond van de scheefheid, de mediaan en het gemiddelde van deze metingen.



Figuur 16.11

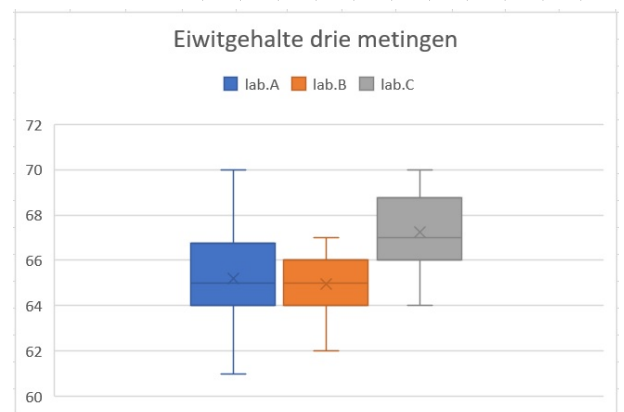


Testen

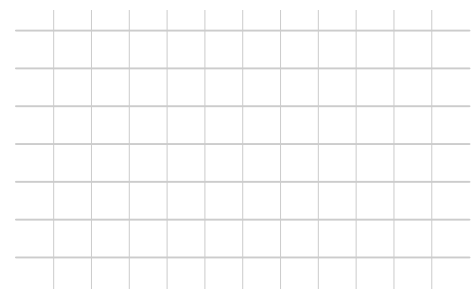
Opgave 11

Je ziet hier boxplots van de metingen van het eiwitgehalte in eiersalade door drie verschillende laboranten. Het meetgebied is vanaf 60% tot en met 70%. De gemiddelden worden met een kruisje aangegeven.

- Lees van alle drie de metingen de mediaan en het gemiddelde af.
- Welke verdeling is - gezien het meetgebied - het meest scheef?



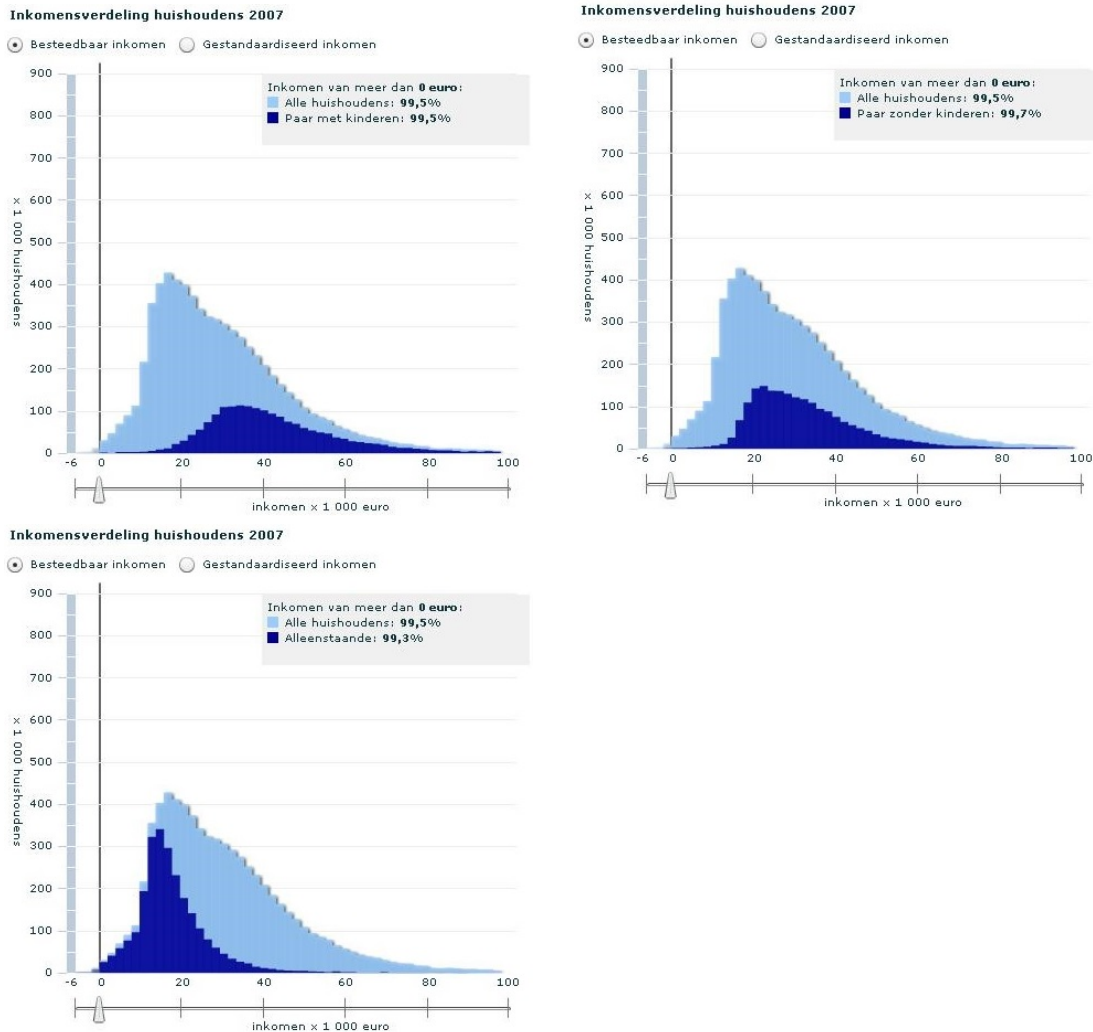
Figuur 16.12



Opgave 12

Je ziet drie grafieken van een animatie van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek). Het zijn staafdiagrammen die de verdeling van het besteedbaar inkomen in Nederland in 2007 in kaart brengen voor verschillende inkomensgroepen.

Het lichtblauwe staafdiagram gaat over het besteedbaar inkomen van alle Nederlanders.



Figuur 16.13 Bron: CBS 2007

- Hoe groot is het modale inkomen van de Nederlanders? Hoeveel huishoudens betrof dat in 2007?
- Was het gemiddelde inkomen van de Nederlanders hoger of lager? Licht je antwoord toe.
- Beschrijf de vorm van deze lichtblauwe inkomensverdeling. Geef een verklaring. Bekijk nu de drie donkerblauwe verdelingen.
- De verdelingen van de inkomens van een paar met en een paar zonder kinderen lijken nogal op elkaar. Wat is het kenmerkende verschil en waardoor komt dat?

- e De inkomensverdeling van alleenstaanden is redelijk symmetrisch en zit nogal in de hoek van de lage besteedbare inkomens. Probeer dit te verklaren.
- f Beschrijf de klassenindeling die is gebruikt en geef de klassenmiddens.
Leg uit waarom je gemiddelde en mediaan van deze verdelingen alleen kunt schatten.

16.2 Normaalkromme

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de standaardafwijking van een verdeling uitrekenen en interpreteren;
- een normale verdeling herkennen en typeren;
- de vuistregels voor de normale verdeling gebruiken.

Voorkennis

- de belangrijkste principes van de beschrijvende statistiek;
- de vorm van frequentieverdelingen (ook met klassenindelingen) te typeren;
- met behulp van de mediaan en het gemiddelde de scheefheid van een verdeling benoemen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de resultaten van 7 vergelijkbare metingen, verricht door 4 verschillende personen.

	Meetresultaten van 7 metingen						
result A	72	63	70	23	62	81	54
result B	59	74	56	67	61	63	47
result C	88	98	74	88	57	73	42
result D	74	60	60	65	59	59	47

Figuur 16.1

- Bereken het gemiddelde resultaat van elk van deze personen.
- A en B hebben hetzelfde gemiddelde. Toch is de verdeling van hun resultaten nogal verschillend. In welk opzicht? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de resultaten?
- A en C hebben dezelfde spreidingsbreedte. Toch is de verdeling van hun resultaten nogal verschillend. In welk opzicht? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de resultaten?

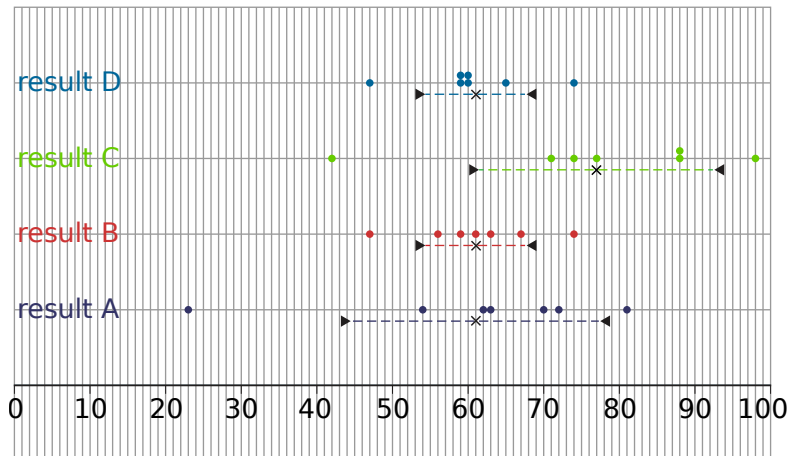
Een nieuwe maat voor de spreiding van deze gegevens is de zogenaamde standaardafwijking. Daarbij bereken je van elk resultaat het kwadraat van de afwijking van het gemiddelde. Van die kwadraten bereken je het gemiddelde en uit dat gemiddelde trek je dan weer de wortel.

- Kun je nu de standaardafwijking van de resultaten van A berekenen?

Uitleg 1

Je hebt naar frequentieverdelingen leren kijken en centrummaten en spreidingsmaten leren gebruiken. Maar er is nog een belangrijke spreidingsmaat, namelijk de standaardafwijking.

Je ziet hier de resultaten van 7 vergelijkbare metingen, verricht door 4 verschillende studenten. De gemiddelden zijn aangegeven met $\times$ en je ziet de standaardafwijkingen links en rechts van het gemiddelde.



Figuur 16.2

De resultaten van student A zijn: 23, 54, 62, 63, 70, 72 en 81.

De standaardafwijking van de resultaten x_i van A bereken je zo (zie de tabel):

- Bereken eerst het gemiddelde.
Heb je een complete populatie dan is het gemiddelde $\mu_x \approx 60,7$.
Heb je een steekproef dan is het gemiddelde $\bar{x} \approx 60,7$.
- Bepaal van elk resultaat het verschil met het gemiddelde, de zogenaamde deviatie.
- Kwadrateer elke deviatie (om geen negatieve afwijkingen te krijgen) en tel ze op.
- Bereken de variantie.

Heb je een complete populatie dan is de variantie $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{n}$.

Heb je een steekproef dan is de variantie $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

- De standaardafwijking is de wortel uit de variantie.
Heb je een complete populatie dan is de standaardafwijking

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{n}}.$$

Heb je een steekproef dan is de standaardafwijking

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
23	-37,7	1422,4
54	-6,7	45,1
62	1,3	1,7
63	2,3	5,2
70	9,3	86,2
72	11,3	127,4
81	20,3	411,5
som van de kwadraten		2099,4

Tabel 16.1



De resultaten van student A vormen een steekproef van alle mogelijke gelijke metingen en dus is de variantie $\frac{2099,4}{6} \approx 349,9$ en

de standaardafwijking $s_x = \sqrt{\frac{2099,4}{6}} \approx 18,7$.

Je kunt de standaardafwijking ook met Excel berekenen, zie het **Practicum**.

De standaardafwijking is de meestgebruikte spreidingsmaat bij statistisch onderzoek. Deze afwijking van het gemiddelde wordt links en rechts vanaf het gemiddelde uitgezet.

Opgave 1

Bekijk de resultaten van de steekproeven van 7 metingen door 4 personen in **Uitleg 1**.

- a Bereken zelf de standaardafwijking van de resultaten van B.
- b Is de standaardafwijking een maat voor de precisie of voor de juistheid van de metingen?

Bij student A is het resultaat 23 is nogal een uitschieter.

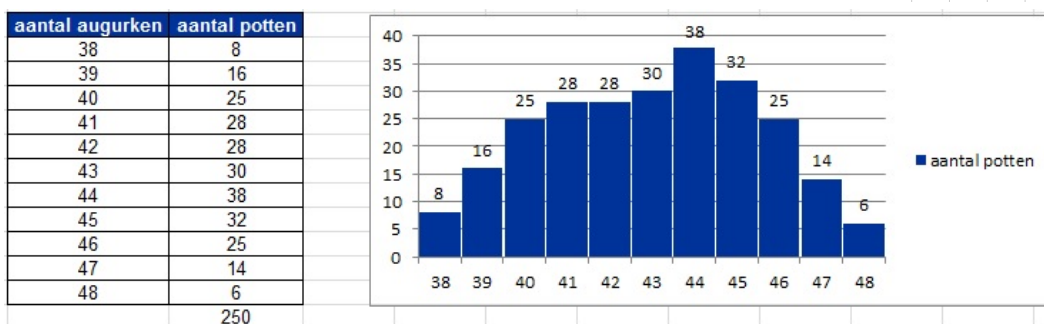
- c Hoe groot zijn het gemiddelde en de standaardafwijking van haar resultaten als je deze éne meting weglaat?

Stel je voor dat de resultaten van student C geen metingen zijn, maar alle resultaten voor zijn toetsen voor een bepaald vak in een bepaalde periode.

- d Hoe groot zijn het gemiddelde en de standaardafwijking in dat geval?

Opgave 2

Van 250 potten met augurken (uitlekgewicht 370 gram) is geteld hoeveel augurken de potten bevatten. Van het resultaat zie je een tabel en een staafdiagram.



Figuur 16.3

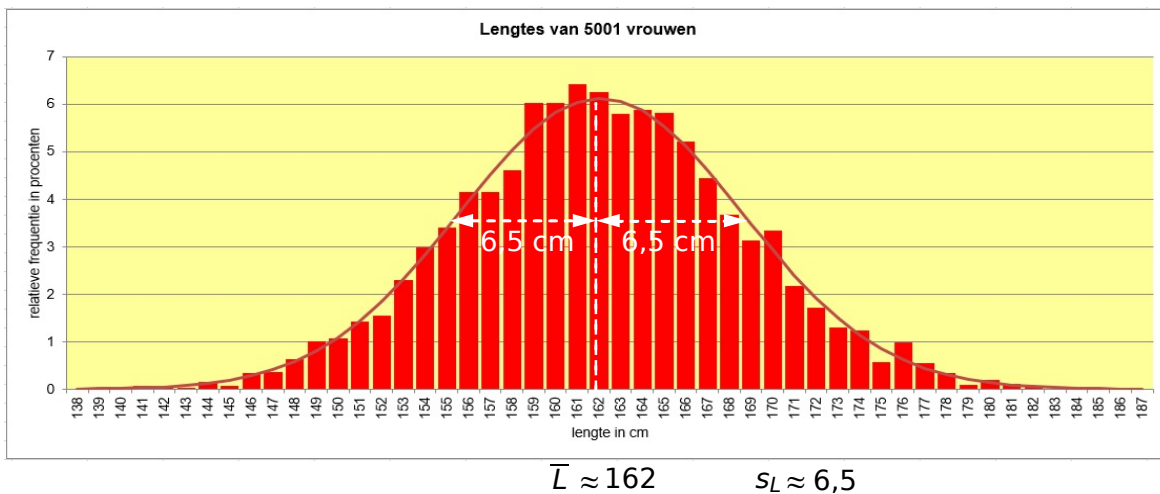
Om van deze steekproef het gemiddelde en de standaardafwijking te berekenen, moet je met de frequenties rekening houden.

Bereken van deze steekproef het gemiddelde en de standaardafwijking.

Uitleg 2

Je ziet een staafdiagram van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen uit de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947**. Er zijn relatieve frequenties gebruikt (in procenten). Daarom spreek je in dit geval wel van een histogram.

Dit histogram heeft een vrijwel zuivere 'klokvorm'. Deze klokvorm heet een normaalkromme. Omdat dit histogram vrijwel een normaalkromme beschrijft spreek je van een normale verdeling van de lengtes. De bijbehorende gemiddelde lengte $\bar{L} \approx 162$ cm en de standaardafwijking $s_L \approx 6,5$ cm zijn in de figuur aangegeven.



Figuur 16.4

Beide getallen leggen de normale verdeling volledig vast, ze zijn karakteristiek voor deze normale verdeling.

Op grond van alleen het gemiddelde en de standaardafwijking kan elke normale verdeling worden getekend. En met die normale verdeling kun je gewoon berekenen hoeveel procent van de vrouwen een lengte van bijvoorbeeld meer dan 170 cm hebben.

Vaak worden deze vuistregels voor de normale verdeling met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ gebruikt:

- Ongeveer 68% van alle waarden liggen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van alle waarden liggen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna 100% van alle waarden liggen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Voor een steekproef zoals in de figuur gebruik je voor het gemiddelde $\bar{L}$ en voor de standaardafwijking s_L .

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Gebruik de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947** en het tabblad lengte en gewicht.

- Bereken zelf met behulp van Excel het gemiddelde en de standaardafwijking van deze steekproef.
- Ga na dat bijna alle waarden binnen drie keer de standaarddeviatie van het gemiddelde afwijken.

- c Controleer de vuistregel dat 68% van de vrouwen een lengte heeft tussen $\bar{L} - s_L$ en $\bar{L} + s_L$.
- d Controleer de vuistregel dat 95% van de vrouwen een lengte heeft tussen $\bar{L} - 2 \cdot s_L$ en $\bar{L} + 2 \cdot s_L$.

Opgave 4

Men heeft ontdekt dat metingen van natuurlijke grootheden vaak normaal zijn verdeeld als je steekproef maar groot genoeg en aselekt is.

De lengtes van vrouwen is daar een goed voorbeeld van, net als de lengtes van mannen, de vulgewichten van kilopakken suiker bij automatisch vullen, de gemeten pH-waarden in een vloeistoftank, etc.

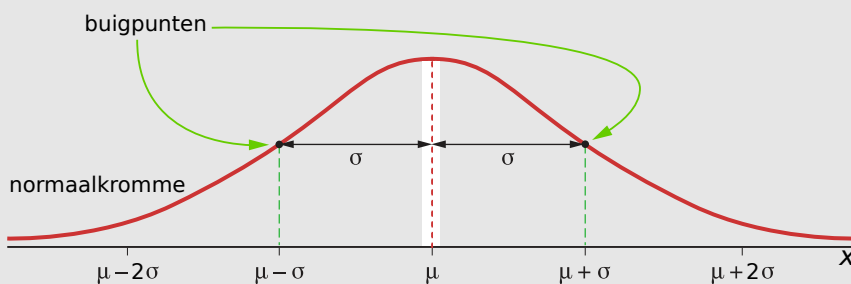
- a Waarom moet hiervoor de steekproef groot genoeg zijn?
- b Waarom zijn bijvoorbeeld de gewichten van mensen in een rijk land als Nederland waarschijnlijk niet normaal verdeeld?
- c Waarom zullen lengtes van bijvoorbeeld basketballers niet normaal verdeeld zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Symmetrische frequentieverdelingen van een statistische variabele x met een klokvorm zoals in de figuur, laten zich goed beschrijven door de centrummaat **gemiddelde** en de spreidingsmaat **standaardafwijking** of **standaarddeviatie**.

Die symmetrische verdeling noem je **normale verdeling**, de bijbehorende kromme lijn de **normaalkromme**.



Figuur 16.5

In deze normale verdeling zie je het populatiegemiddelde μ en de bijbehorende standaardafwijking σ aangegeven.

Gaat het om een steekproef dan gebruik je het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ en de bijbehorende standaardafwijking s_x .

Van een variabele x met waarden x_i en frequenties f_i is de **variantie**:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \cdot f_i}{n} \text{ (populatie) of } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1} \text{ (steekproef)}.$$

De standaardafwijking is de wortel uit de variantie:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \cdot f_i}{n}} \text{ (populatie) of } s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}} \text{ (steekproef)}.$$

Elke normale verdeling wordt volledig bepaald door het gemiddelde en de standaardafwijking. De buigpunten van de normaal-kromme zitten precies één standaardafwijking van de symmetrie-as af. Voor elke normale verdeling gelden de vuistregels:

- Ongeveer 68% van alle waarden liggen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van alle waarden liggen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna 100% van alle waarden liggen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Voorbeeld 1

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.

Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L										
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3	
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8	
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1	
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1	
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5	

Tabel 16.2

Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze resultaten.

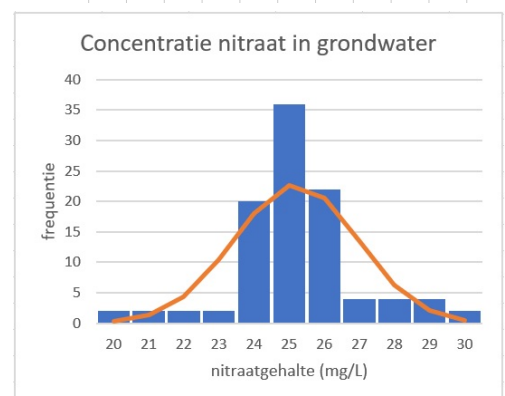
Maak bij deze gegevens ook een histogram met een klassenindeling $19,5 - < 20,5$, $20,5 - < 21,5$, ..., $29,5 - < 30,5$ en zet er een bijpassende normale verdeling bij in.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen met de ruwe data. Denk er dan wel om dat het om een steekproef gaat. Je gebruikt dus de functies STDEV() of STDEV.S(). Je vindt $\bar{n} \approx 25,2$ en $s_n = 1,75$.

Je maakt nu een combinatiediagram zoals dat hiernaast.

- Maak eerst een frequentietabel met relatieve frequenties.
- Teken daarvan een staafdiagram, dat is je histogram.
- Maak vervolgens met Excel een tabel van de frequenties volgens de normale verdeling.
- Maak van je histogram een combinatiediagram.



Figuur 16.6

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Voer zelf de berekeningen uit met behulp van Excel.
- Je ziet dat de frequentieverdeling niet precies op een normale verdeling lijkt.
Ga of de 68% vuistregel klopt.



Voorbeeld 2

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de mouwlengtes m_i .

Onderzoek of deze frequentieverdeling voldoet aan de 68% vuistregel voor een normale verdeling.

Antwoord

Nu beschik je niet over de ruwe data, dus je kunt beide alleen schatten.

Het gemiddelde is $\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot f_i}{5000}$.

Dus je maakt in Excel een kolom $m_i \cdot f_i$ en die tel je op.

Delen door 5000 en je vindt $\bar{m} \approx 59,1$.

De steekproefstandaardafwijking is $s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2 \cdot f_i}{5000}}$.

Dus je maakt in Excel een kolom $(m_i - \bar{m})^2 \cdot f_i$ en die tel je op.

Delen door 5000 en worteltrekken je vindt $s_m \approx 3,06$.

Volgens de 68% vuistregel moet dat percentage van de metingen liggen tussen $\bar{m} - s_m \approx 56,0$ en $\bar{m} + s_m \approx 62,1$.

Ga na, dat daar 3425 vrouwen tussen zitten. Bedenk dat je van de klasse met klassenmidden 56 de helft van het aantal moet nemen. En van de klasse met midden 62 moet je 0,6 keer het aantal nemen.

Het percentage is dan $\frac{3425}{5000} \cdot 100 = 68,5$.

Dus deze frequentieverdeling voldoet redelijk goed aan de 68% vuistregel voor een normale verdeling.

Opgave 6

Bekijk het berekenen van gemiddelde en standaardafwijking in **Voorbeeld 2**.

- Voer zelf deze berekeningen met behulp van Excel uit.
- Controleer dat er inderdaad 3425 vrouwen tussen $\bar{m} - s_m \approx 56,0$ en $\bar{m} + s_m \approx 62,1$ zitten.
- Controleer ook de 95% vuistregel.



Oefenen

Opgave 7

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120 °C. Voor gebakken frites is 750 µg/kg de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in µg/kg							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 16.3

- Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze metingen.
- Welke van deze twee waarden zegt iets over de precisie van de metingen?
- Deze steekproef is klein, dus een normale verdeling zal er wel niet in zitten.
Controleer de 68% vuistregel en de 95% vuistregel.

Opgave 8

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een groot-scheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

Bekijk de frequentieverdeling van de kniehoogtes.

- Bereken hiervan het gemiddelde en de standaardafwijking in één decimaal nauwkeurig.
- Maak van deze frequentieverdeling een histogram en zet daar de bijpassende normale verdeling bij in.
- Ga na, of deze frequentieverdeling aan de 68% vuistregel voldoet.

Opgave 9

Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erythropoëtine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren. De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.



Bij een wielervedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 16.4

- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de hematocrietwaarden van deze wielrenners.
- Waarom kan hier geen sprake zijn van een normale verdeling?

Opgave 10

De gemiddelde lengte van mannen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de mannen in Nederland 181 cm met een standaardafwijking van 7 cm.

- Schrijf de drie vuistregels op voor de lengte van mannen in 2010.
- Schrijf nog minimaal 2 uitspraken op over de lengte van mannen in 2010, gebaseerd op de vuistregels.
- In 1981 waren mannen gemiddeld 3 cm kleiner. De standaardafwijking was vrijwel hetzelfde, dus 7 cm. Welke getallen in de antwoorden van de vorige twee vragen veranderen wel, en hoe, en welke niet?

Toepassen

Wanneer een laborant dezelfde meting een aantal keren met hetzelfde apparaat herhaalt, dan krijgt hij een serie waarden x_i die meestal iets van elkaar verschillen. De standaarddeviatie is een maat voor de precisie van zijn metingen. Vaak wordt echter de standaarddeviatie gedeeld door het gemiddelde en in procenten uitgedrukt. Je krijgt dan de zogenaamde variatiecoëfficiënt:

$$\text{variatiecoëfficiënt} = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

Deze maat voor de precisie van de metingen wordt wel de **herhaalbaarheid** genoemd.

Maar het kan ook zijn dat dezelfde meting door verschillende laboranten op verschillende momenten op hetzelfde apparaat zijn uitgevoerd. De variatiecoëfficiënt is dan een maat voor de verschillen tussen deze laboranten.

Nu spreek je van de **reproduceerbaarheid** van de metingen.

Opgave 11

Door een laborant wordt 5 keer van een bepaalde vloeistof de pH-waarde berekend.

Zij vond de volgende waarden: 8,2; 8,4; 8,3; 8,0 en 8,4.

- Bereken de variatiecoëfficiënt van deze metingen.
- Wat zegt de variatiecoëfficiënt over deze serie metingen?



Opgave 12

Door een zestal laboranten wordt met hetzelfde instrument van een bepaalde vloeistof op verschillende momenten de pH-waarde berekend.

Zij vonden de volgende waarden: 7,9; 8,4; 8,6; 8,1; 8,0 en 8,5.

- Bereken de variatiecoëfficiënt van deze metingen.
- Wat zegt de variatiecoëfficiënt over deze serie metingen?
- Vergelijk deze variatiecoëfficiënt met die uit de voorgaande opgave.
Kun je het verschil verklaren?

Testen

Opgave 13

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

- Bereken het gemiddelde percentage en de bijbehorende standaarddeviatie.
- Welke van beide maten zegt iets over de precisie van de metingen?
- Onderzoek of alle metingen minder dan drie standaarddeviaties afwijken van het gemiddelde.

Percentage rookworst				
12,4	12,7	12,8	12,6	13,0
12,6	12,8	12,7	12,4	12,1
12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 16.5

Opgave 14

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.

De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden b_i gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden.

- Bereken een schatting van het gemiddelde en de standaardafwijking van deze gegevens.
- Onderzoek of deze frequentieverdeling bij benadering een normale verdeling is door de drie vuistregels te controleren.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
Totaal	100

Tabel 16.6

Opgave 15

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167,5 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm. Maak gebruik van de vuistregels en rond antwoorden af op halve procenten.

- Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 154,5 cm?

- b** Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 180,5 cm?
- c** Hoe groot is de kans dat een willekeurige vrouw groter is dan 180,5 cm?

16.3 Rekenen met de normale verdeling

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een percentage onder een normale verdeling berekenen;
- bij een percentage onder een normale verdeling de bijbehorende waarde van de variabele berekenen;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale kansverdeling te berekenen.

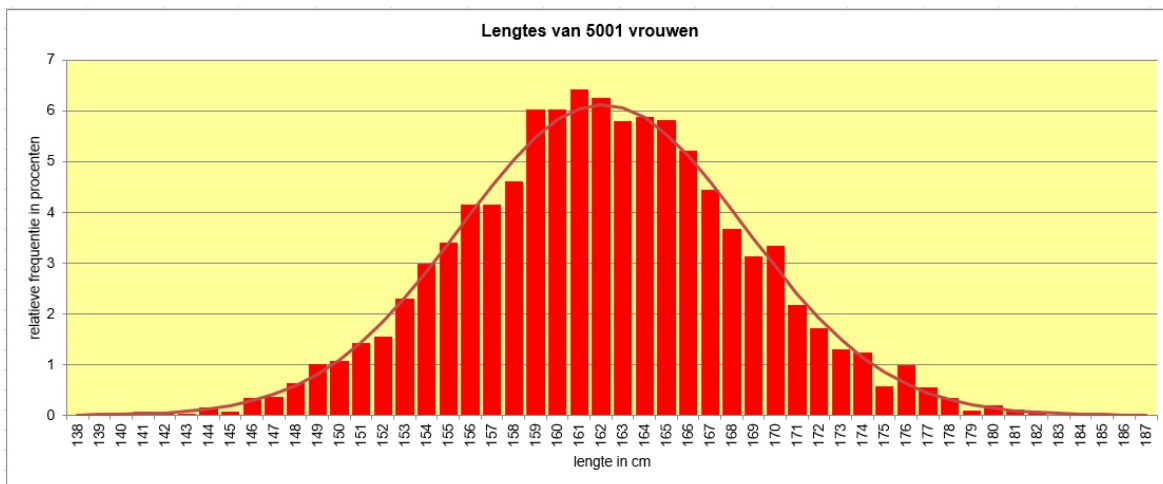
Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een normale verdeling herkennen en typeren;
- de vuistregels voor de normale verdeling gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen in 1947.



Figuur 16.1

Bij dit histogram past een normaalkromme met gemiddelde $\bar{L} \approx 162,1$ en een standaardafwijking $s_L \approx 6,5$.

Gebruik eerst de vuistregels voor de normale verdeling.

- Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte van minder dan $\bar{L} - s_L = 155,6$ cm?
- Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte van meer dan $\bar{L} + 2s_L = 175,1$ cm?
- Hoe zou je de percentages die je bij a en bij b hebt gevonden in de figuur aangeven?



Je kunt met behulp van Excel ook percentages bepalen onder een bepaalde lengte.

Daartoe gebruik je de functie `NORM.VERD(waarde;gemiddelde;standaardafwijking;1)`.

De 1 is nodig om aan te geven dat hij alle percentages tot en met die bij de opgegeven waarde bij elkaar telt. Verder moet je om een percentage te krijgen de uitkomst nog met 100 vermenigvuldigen.

- d Bereken hiermee hoeveel procent van deze vrouwen korter is dan 150 cm.
- e Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte tussen de 150 en de 160 cm?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Statistische variabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak normaal verdeeld. Bijvoorbeeld is de lengte L (in cm) van de populatie volwassen Nederlandse mannen een normale statistische variabele.

Je ziet hier dat de gemiddelde lengte $\mu_L = 182$ cm is met een standaarddeviatie van $\sigma_L = 7$ cm. Je kunt dan het percentage mannen dat kleiner dan 180 cm is berekenen met bijvoorbeeld Excel, zie het **Practicum**.

De uitkomst van de normale verdeling noteer je als: $P(L < 180) \approx 0,387$.

Dit levert op: $0,387 \cdot 100 = 38,7\%$.

Belangrijk is wel om je te realiseren dat de meetnauwkeurigheid hier een rol speelt.

De normale verdeling houdt met de nauwkeurigheid van het meten geen rekening, maar in de praktijk moet je daar wel rekening mee houden. Als je van iemand zegt dat hij 180 cm lang is, dan heeft hij een lengte van $179,5 - < 180,5$ cm. Dus is het deel van de mannen dat kleiner is dan 180 cm eigenlijk $P(L < 179,5) \approx 0,360$.

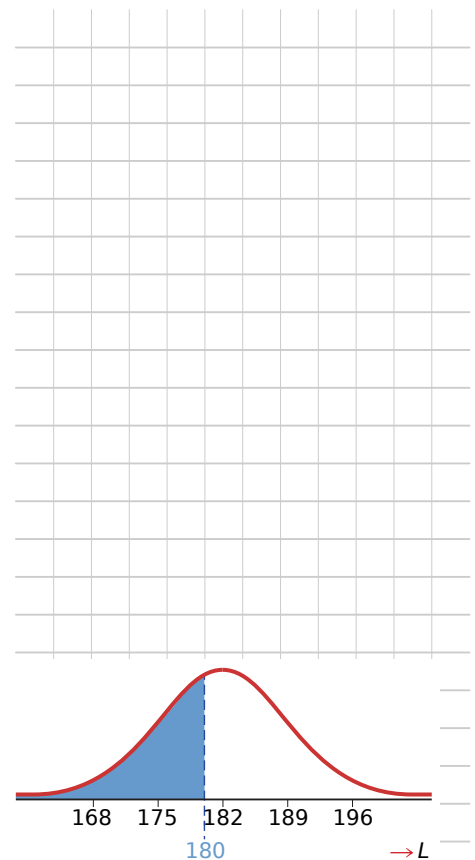
Opgave 1

Bekijk de verdeling van de lengtes van Nederlandse mannen in **Uitleg 1**.

- a Waarom worden hier μ_L en σ_L gebruikt en niet $\bar{L}$ en s_L ?
- b Ga zelf na, dat $P(L < 180) \approx 0,387$. Bekijk indien nodig het **Practicum**.

Bij de lengtes van de mannen is afgerond op gehele cm. Het getal 180 is dus een klassenmidden.

- c Van welke klasse?



Figuur 16.2

Je wilt weten hoeveel procent van de mannen kleiner of gelijk aan 180 cm is.

Je houdt ook met de meetnauwkeurigheid rekening.

- d Bereken dit percentage.
- e Bereken hoeveel procent van de mannen tussen 175 en 189 cm lang is.
Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.
- f Ga na, dat de 68% vuistregel klopt.

Opgave 2

Ga weer uit van de verdeling van de lengtes van Nederlandse mannen in **Uitleg 1**.

- a Waarom is $P(L = 180) = 0$ als je niet met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?
- b Bereken $P(L = 180)$ als je wel met de meetnauwkeurigheid rekening houdt.
Hoeveel procent van de mannen is dus 180 cm?
Als je wilt berekenen hoeveel procent van de mannen groter is dan 180 cm, dan gebruik je dat onder de normale verdeling 100% van de mannen valt.
- c Bereken hoeveel procent van de mannen langer is dan 180 cm.
Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier dat de gemiddelde lengte van mannen $\mu_L = 182$ cm is met een standaarddeviatie van $\sigma_L = 7$ cm. Je kunt dan het percentage mannen dat kleiner dan 180 cm is berekenen met behulp van de z-tabel

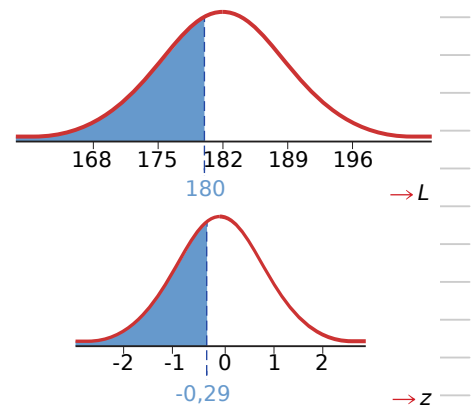
Alle normale verdelingen zijn door verschuiven met μ en vernieuwvuldigen met $\frac{1}{\sigma}$ in de x-richting te vervormen naar de standaardnormale verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. De waarden van die standaardnormale verdeling heten z-waarden.

Hier geldt dus $z = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} = \frac{L - 182}{7}$.

En dus is:

$$P(L < 180) = P\left(z < \frac{180 - 182}{7}\right) = P(z < -0,29) \approx 0,3859.$$

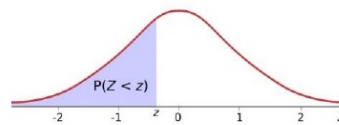
In de **standaardnormale tabel**, of z-tabel, kun je nu de uitkomst aflezen, zie figuur.



Figuur 16.3

Standaardnormale tabel:

bij gegeven z -waarden de uitkomst van $P(Z < z)$



tweede decimaal										
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121

Figuur 16.4

Je zult zien dat het werken met deze standaardnormale tabel zijn voordelen heeft.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2](#). Gebruik de tabel met z -waarden.

- Bereken $P(L < 179,5)$.
- Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van 180 cm als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?
- Bereken hoeveel procent van de mannen langer is dan 180 cm. Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Statistische variabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale statistische variabele**.

De wiskundige **Gauss (1777–1855)** vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. In bijvoorbeeld Excel, maar ook in GeoGebra of een rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je relatieve frequenties bij de normale verdeling berekenen, zie het [Practicum](#).

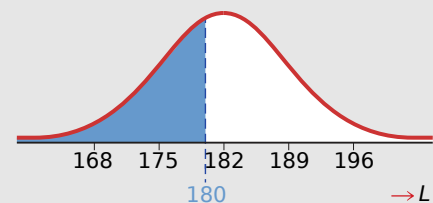
De relatieve frequentie die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:

$$P(165 \leq L < 180)$$

Omdat $P(L = 165) = 0$ is dit hetzelfde als $P(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de relatieve frequentie is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $P(164,5 < L < 165,5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.



Figuur 16.5



In het algemeen is een normale verdeling van grootheid X om te zetten naar de **standaardnormale verdeling**. De waarden hiervan zijn de z -waarden:

$$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

Met de **standaardnormale tabel** kun je de bijbehorende relatieve frequenties bepalen.

Voorbeeld 1

De lengte L van de Nederlandse mannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

Bereken $P(170 < L < 180)$, $P(L < 180)$, $P(L = 180)$.

Bereken het percentage mannen dat langer is dan 1,75 meter als je rekening houdt met de meetonnauwkeurigheid.

Antwoord

Al deze kansen zijn met Excel te vinden. Maar je kunt ook GeoGebra gebruiken, of een rekenmachine. En je kunt werken met de standaardnormale tabel.

Bekijk het **Practicum**.

- $P(170 < L < 180) \approx 0,3443$
- $P(L < 180) \approx 0,3875$
- $P(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage mannen dat langer is dan 1,75 meter' kun je vertalen naar:
 $P(L > 175,5) \approx 0,8234$. Dat is gelijk aan ongeveer 82,3%.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

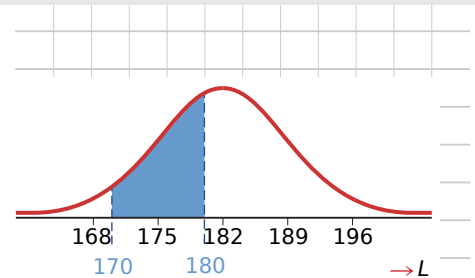
- Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?
- Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?
- Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van precies 171 centimeter?
- Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van 171 centimeter als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?
- Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte vanaf $\mu - 1,5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1,5 \cdot \sigma$?

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

- Hoeveel procent van deze appels weegt minder dan 140 gram?
- Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?

Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.



Figuur 16.6



- c Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?
Er wordt gewerkt met een meetnauwkeurigheid van 1 gram.
- d Maakt dit verschil voor je antwoord bij c?

Voorbeeld 2

De lengte L van een grote steekproef Nederlandse mannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\bar{L} = 182$ cm en een standaardafwijking van $s_L = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste mannen in deze steekproef?

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0,20$.

Excel, GeoGebra, een rekenmachine hebben hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Je kunt ook werken met z -waarden. Alleen moet je omrekenen naar 'kleiner-of-gelijk'-frequenties.

$P(L > g) = 0,20$ betekent dat $P(L < g) = 1 - 0,20 = 0,80$.

Dus $P\left(z < \frac{g-183}{7}\right) = 0,80$.

In de standaardnormale tabel vind je zo dicht mogelijk bij 0,8000 een z -waarde, namelijk $z \approx 0,84$.

Dus: $\frac{g-183}{7} \approx 0,84$

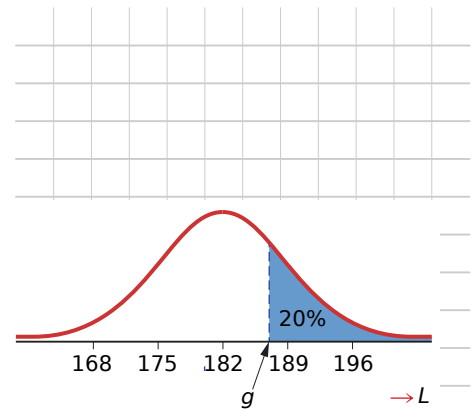
De uitkomst is: $g \approx 0,84 \cdot 7 + 183 = 187,9$.

De 20% langste mannen zijn 187,9 cm of langer.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- a Welke lengtes hebben de 20% kleinste mannen in deze groep?
- b 10% van de mannen zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a .
- c Voor welke lengtes is maat S geschikt?
Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.
- d Voor welke lengtes is maat M geschikt?



Figuur 16.7



Voorbeeld 3

In een suikerfabriek is het vulgewicht van kilopakken suiker ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram.

De fabrikant wil dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.

Hij kan dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen, maar dat is een te dure oplossing.

De fabrikant kan dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: hij verkleint de standaardafwijking σ .

Bekijk de applet.

Hoe bereken je de aangepaste waarde van σ ?

Antwoord

G is het gewicht van een pak suiker uit de suikerfabriek.

Nu moet $P(G < 1000) = 0,05$, dus $P\left(z < \frac{1000-1002}{\sigma}\right) = 0,05$.

De z -waarde bij 0,05 haal je uit de standaardnormale tabel: $z = -1,645$.

$\frac{1000-1002}{\sigma} = -1,645$ geeft $\sigma = \frac{-2}{-1,645} \approx 1,22$.

De standaardafwijking moet afnemen van 3 gram naar 1,22 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.

Opgave 7

Gebruik de gegevens van de suikerfabriek in **Voorbeeld 3**.

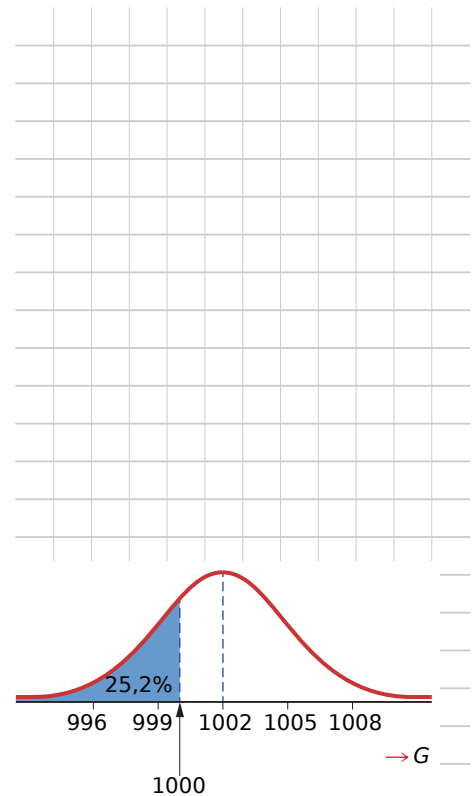
- a Waarom is het verhogen van het gemiddelde voor de fabrikant een dure oplossing?
- b Bereken wat het vulgewicht zou moeten worden om aan de eis te voldoen.

Nu blijft dus de standaarddeviatie hetzelfde.

- c Welke mogelijke voor- en nadelen heeft het verkleinen van de standaarddeviatie voor de fabrikant?

De eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen.

- d Welke standaarddeviatie moet de fabrikant dan hanteren als hij het gemiddelde gewicht gelijk van zijn pakken suiker houdt?
- e Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Licht je antwoord toe.



Figuur 16.8

Opgave 8

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 uur en een standaardafwijking van 255 minuten.

- De fabrikant vermeldt op de verpakking dat deze batterijen 75 uur meegaan. Hoeveel procent van de batterijen haalt deze levensduur niet?
- Door het verbeteren van het fabricageproces gaan de batterijen gemiddeld langer mee. De standaardafwijking van de levensduur blijft hetzelfde. De fabrikant garandeert nu dat slechts 1% van de batterijen geen 90 uur meegaat. Hoe groot is nu de gemiddelde levensduur van dit soort batterijen?

Oefenen

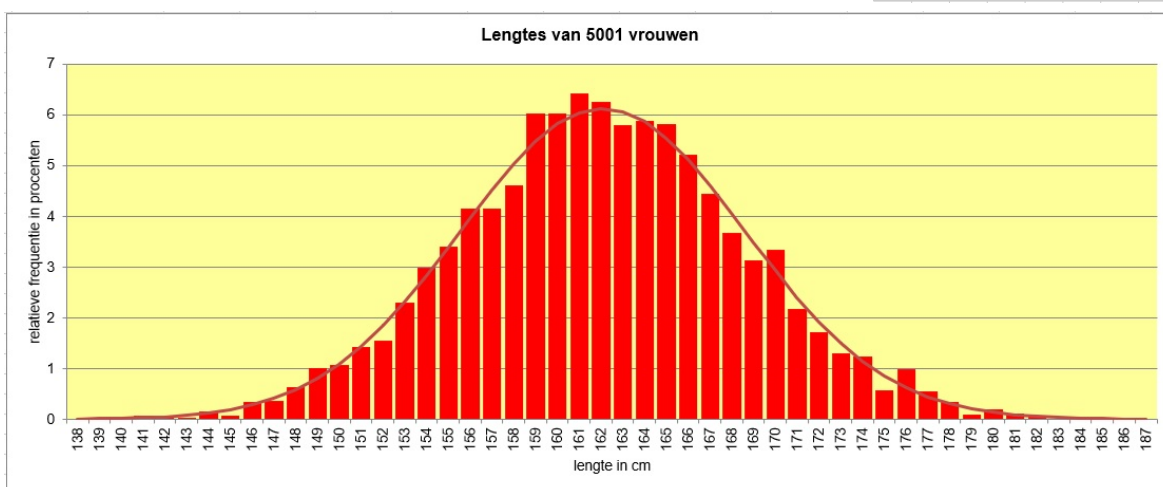
Opgave 9

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

- Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?
- Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?
- Hoeveel procent van de pakken is meer dan 5 gram zwaarder dan het gemiddelde?
- Hoeveel procent van de pakken weegt tussen de 1005 en de 1015 gram?

Opgave 10

Je ziet hier de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen in 1947.



Figuur 16.9

Bij dit histogram past een normaalkromme met gemiddelde $\bar{L} \approx 162,1$ en een standaardafwijking $s_L \approx 6,5$.

Houd er rekening mee dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.

- a Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?
- b Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?
- c Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte van 160 cm?
- d Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?
- e En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 11

Een bakker bakt kerststollen van 1000 gram.

Er wordt een grote steekproef van deze kerststollen onderzocht. Het gemiddelde gewicht hiervan bedraagt $\bar{G} = 1000$ g. Echter 5% van de stollen in deze steekproef weegt minder dan 900 gram.

- a Hoeveel bedraagt de standaardafwijking van deze steekproef?
- b Als de standaardafwijking van de stollen in werkelijkheid 60 gram is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram?
- c Hoeveel bedraagt het gewicht van de 3% zwaarste kerststollen als het gemiddelde 1000 gram is met een standaardafwijking van 60 gram?

Opgave 12

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken. De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

- a Bereken de bijbehorende standaardafwijking in één decimaal nauwkeurig.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

- b Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.

Opgave 13

De accu van een tablet van het merk S gaat gemiddeld 2,60 jaar mee met een standaardafwijking van 0,32 jaar. De tableteigenaars zijn hiermee niet tevreden en daarom wil S de productiestraat van deze accu's aanpassen.

Er zijn aanpassingen mogelijk die de gemiddelde levensduur zullen verhogen: per extra levensweek zijn de kosten hiervan € 0,01 per tablet.

Andere aanpassingen zorgen voor een kleinere standaardafwijking, maar deze aanpassingen kosten per extra levensweek € 0,02 per tablet.

S wil de productiestraat zodanig aanpassen dat de kans dat de accu meer dan twee jaar meegaat minstens 97,5% wordt. Echter: de totale extra kosten per tablet door de aanpassingen mogen niet hoger zijn dan 1,4 eurocent.

Onderzoek of er mogelijkheden zijn voor S om de productiestraat zodanig aan te passen dat aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Toepassen

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.

Volgens Wikipedia geeft het symbool aan:

- het gemiddelde van de werkelijke hoeveelheid product in de verpakkingen in een partij ten minste gelijk is aan de hoeveelheid die op de verpakking staat, en
- slechts een gering aantal verpakkingen een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel, en
- geen verpakking een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus twee keer de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel.

Deze tabel hoort daar bij:

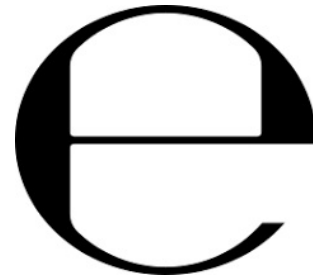
aangeduide hoeveelheid (g of mL)	% fout	absolute fout
van 5 tot 50	9	
van 50 tot 100		4,5
van 100 tot 200	4,5	
van 200 tot 300		9
van 300 tot 500	3	
van 500 tot 1000		15
van 1000 t/m 10.000	1,5	

Tabel 16.1

Onder % fout versta je dat de hoeveelheid zoveel procent lager zou kunnen zijn.

Onder absolute fout versta je dat de hoeveelheid zoveel gram of mL lager zou kunnen zijn.

Nu kun je (zeker voor consumentenverpakkingen) zelf nagaan hoeveel de minimale hoeveelheid moet bedragen. En welke hoeveelheden 'een gering aantal pakken' mogen hebben.



Figuur 16.10

Opgave 14

Op een zak chips staat: Inhoud 200 g $\ominus$.

- Hoeveel mag de inhoud volgens de tabel in **Toepassen** hiervan afwijken?
Neem aan dat de fabrikant van deze chips een vulmachine heeft met een precisie van 6 gram.
Als maat voor de precisie wordt de standaardafwijking gebruikt.
- Hoeveel % van de zakken chips zal niet voldoen aan de Europese norm als de fabrikant de vulmachine instelt op 200 g?
- De fabrikant besluit om het gemiddelde vulgewicht iets te verhogen.
Op welk gemiddelde moet hij de vulmachine instellen om het aantal pakken dat meer dan 9 g te licht is naar minder dan 0,1% terug te brengen?
- Het verhogen van het vulgewicht is een dure oplossing, dus de fabrikant laat de precisie van de vulmachine verbeteren.
Op welke standaardafwijking moet hij de vulmachine instellen om het aantal pakken dat meer dan 9 g te licht is naar minder dan 0,1% terug te brengen?

Opgave 15

Een zakje Cup-a-soup moet 17 g $\ominus$ bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

- Hoeveel gram mag een heel klein percentage van de zakjes te licht zijn?
- Hoeveel procent van de zakjes weegt minder dan 17 g?
- Laat zien dat de fabrikant toch wel aan de Europese norm voldoet.



Figuur 16.11

Testen

Opgave 16

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

- Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?
- Hoeveel procent van de melkpakken bevat meer dan 1,03 liter melk?



Je kunt niet bepalen hoeveel procent van de melkpakken een inhoud van precies 1 liter heeft. Je kunt wel bepalen hoeveel procent van de melkpakken afgerond op twee decimalen 1 liter bevat. Dan zie je dat het gaat om het gebied vanaf de grens 0,995 tot de grens 1,005. En daar hoort wel degelijk een bepaald percentage bij.

- c Bereken dat percentage.
- d 5% van de melkpakken heeft een vulvolume van minder dan g . Bereken g .
Omdat iets minder dan 10% van de melkpakken te weinig melk bevat, besluit de fabrikant het gemiddelde vulgewicht te verhogen tot dit percentage minder dan 1% is.
- e Hoeveel moet daarvoor het gemiddelde vulgewicht worden?

Opgave 17

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van $\bar{B} = 128,5$ mm Hg met een standaardafwijking van $s_B = 12,5$ mm Hg.

- a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?
- c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

16.4 Betrouwbaarheidsintervallen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de wortel-n-wet voor het verband tussen de standaardafwijking van steekproefgemiddelden en de populatiestandaardafwijking;
- werken met betrouwbaarheidsintervallen rondom de schatting van het populatiegemiddelde.

Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een percentage onder een normale verdeling berekenen;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale verdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

De Robinia is een boom die in het najaar peulvruchten heeft van zo'n 5 cm tot 15 cm lengte. De lengtes R van deze peulen is normaal verdeeld en heeft een gemiddelde van $\mu_R = 11,08$ cm met een standaardafwijking van $\sigma_R = 0,85$ cm.

Je ziet hier gemiddelde lengtes en de standaardafwijkingen van 10 steekproeven van 30 uit de normaal verdeelde populatie peulen.

- a** Kijk naar de resultaten $\bar{R} = 10,95$ en $s_R = 0,65$ van de eerste steekproef van 30. Kun je uit alleen deze gegevens het gemiddelde van de populatie schatten?

- b** Bereken het gemiddelde van de 10 steekproefgemiddelden. Zit dit dicht bij het populatiegemiddelde?

De steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling. Wiskundigen hebben aangetoond dat een steekproevenverdeling altijd een normale verdeling is met standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ als n de grootte van elke steekproef is.

- c** Hoe groot is de standaardafwijking S van de steekproevenverdeling?

Is dit ongeveer gelijk aan $\frac{\sigma_R}{\sqrt{30}}$?

- d** Leg uit waarom 95% van de steekproefgemiddelden tussen $11,08 - 2 \cdot 0,13$ en $11,08 + 2 \cdot 0,13$ zou moeten liggen.
- e** Je wilt op grond van de steekproeven een schatting maken van het populatiegemiddelde. Wat zou je doorgeven?

10 steekproeven van 30	
gemiddelde	s.d.
10,95	0,65
11,05	0,78
11,05	1,16
10,84	0,66
11,26	0,82
11,07	0,81
11,05	0,97
11,24	0,91
11,18	0,78
11,10	0,82

Tabel 16.1



Uitleg

De Robinia is een boom die in het najaar peulvruchten heeft van zo'n 5 cm tot 15 cm lengte. De lengte R van de peulen in een bepaald gebied is normaal verdeeld.

Het populatiegemiddelde wordt bepaald door in een steekproef van 30 peulen het gemiddelde te berekenen. Het probleem daarbij is dat het gemiddelde in een steekproef toevallig kan afwijken van het werkelijke gemiddelde, zelfs als de steekproef behoorlijk groot is. Je zou dus meerdere of hele grote steekproeven moeten doen. Vaak is dat in de praktijk te veel werk (en dus te duur).

Je ziet hier gemiddelde lengtes en de standaardafwijkingen van 10 steekproeven van 30 uit de normaal verdeelde populatie peulen.

De steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling. Wiskundigen hebben aangetoond dat een steekproevenverdeling altijd een normale verdeling is met standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ als n de grootte van elke steekproef is en σ de populatiestandaarddeviatie is. Dit heet de wortel-n-wet.

Ga zelf na dat in de steekproevenverdeling van de gemiddelden de standaardafwijking $S \approx \frac{0,84}{\sqrt{30}}$ is.

Stel nu dat je alleen de eerste steekproef van 30 peulen zou hebben gedaan.

Op grond van het gemiddelde $\bar{R} = 10,95$ cm kun je natuurlijk niet zeker weten dat het populatiegemiddelde ook 10,95 is. Maar omdat je weet dat steekproefgemiddelden normaal zijn verdeeld, kun je op grond van de vuistregels van de normale verdeling zeggen:

- 95% van de gemiddelden ligt tussen $10,95 - 2 \cdot \frac{0,65}{\sqrt{30}} \approx 10,71$ en

$$10,95 + 2 \cdot \frac{0,65}{\sqrt{30}} \approx 11,19.$$

En op grond hiervan schat je dat $10,71 < \mu_R < 11,19$ met een betrouwbaarheid van 95%.

Je noemt $10,71 < \mu_R < 11,19$ het 95% betrouwbaarheidsinterval van μ_R .

Opgave 1

Bekijk het schatten van het populatiegemiddelde van de lengtes van peulen van de Robinia in de **Uitleg**. Je ziet de resultaten van 10 steekproeven van 30 peulen.

De gemiddelden vormen een steekproevenverdeling.

- Bereken zelf het gemiddelde en de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling.
- Laat zien dat voor de standaarddeviatie van de steekproevenverdeling van de gemiddelden inderdaad de wortel-n-wet geldt.

10 steekproeven van 30	
gemiddelde	s.d.
10,95	0,65
11,05	0,78
11,05	1,16
10,84	0,66
11,26	0,82
11,07	0,81
11,05	0,97
11,24	0,91
11,18	0,78
11,10	0,82

Tabel 16.2



- c Je weet nu dat de steekproevenverdeling van de gemiddelden een normale verdeling is met een bij a berekend gemiddelde en standaarddeviatie. Bereken met de **standaardnormale tabel** de waarden van g waarvoor geldt:

$$P(11,08 - g < S < 11,08 + g) < 0,95.$$

- d Schrijf het 95% betrouwbaarheidsinterval op dat hierbij hoort.

In de praktijk gebruik je maar één steekproef. Ga uit van de eerste steekproef. Je neemt dan aan dat hier een steekproevenverdeling bij hoort met $\bar{S} = 10,95$ en $s = \frac{0,65}{\sqrt{30}}$.

- e Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval dat dan bij een schatting van het populatiegemiddelde hoort op dezelfde manier als bij d.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt een vuistregel gebruikt om het betrouwbaarheidsinterval op te schrijven. In de voorgaande opgave wordt dit met behulp van z -waarden gedaan.

- a Wat is het voordeel van het werken met z -waarden?
Laat zien dat 95% van de z -waarden tussen -1,96 en 1,96 ligt.
- b Tussen welke twee waarden ligt 99% van de z -waarden?
Welk 99% betrouwbaarheidsinterval voor de steekproef met $\bar{R} = 10,95$ krijg je?
Een 99% betrouwbaarheidsinterval lijkt beter dan een 95% betrouwbaarheidsinterval.
- c Wat is het nadeel ervan?

Opgave 3

In de **Uitleg** wordt de gemiddelde lengte van een populatie peulen van de Robinia geschat.

- a Waarom liggen in dit geval zowel het populatiegemiddelde als de populatiestandaarddeviatie niet vast?
- b Welke aanname moet je dan doen om een betrouwbaarheidsinterval te kunnen vaststellen?
Bij het meten van de pH-waarde van een vloeistof in een bepaald vat heb je te maken met een vooraf bekende meetnauwkeurigheid.
- c Waarom zal nu de standaardafwijking van bijvoorbeeld 10 metingen vooraf bekend zijn?



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek is vaak het **populatiegemiddelde**, het gemiddelde van een statistische variabele van de hele populatie belangrijk. Dat gemiddelde wordt meestal geschat door een steekproef te nemen en daarvan het **steekproefgemiddelde** te berekenen. Maar door het nemen van een steekproef ontstaat een toevalsfout. Deze toevalsfout ontstaat in het gemiddelde, maar ook in de standaardafwijking. Met de toevalsfout in de standaardafwijking wordt geen rekening gehouden.

Als er veel steekproeven worden genomen zal de **steekproevenverdeling** van de gemiddelden $\bar{X}$ altijd normaal verdeeld zijn. (Let op: De variabele zelf kan en hoeft dus niet normaal verdeeld te zijn!) De standaardafwijking s van deze steekproevenverdeling is:

$$S_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

waarin n de grootte van de steekproeven en σ de populatiestandaarddeviatie is.

Omdat de steekproefgemiddelden normaal verdeeld zijn, kunnen met behulp van de z -tabel grenzen worden bepaald waarbinnen een bepaald percentage van de waarden ligt. Daarmee kun je het gebied waarin het populatiegemiddelde ligt berekenen.

Dit gebied heet het **betrouwbaarheidsinterval**. De grootte ervan hangt af van de gewenste **betrouwbaarheid**.

- De grenswaarden van het 95%-betrouwbaarheidsinterval bereken je zo

$$\text{ondergrens} = \bar{X} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ en bovengrens} = \bar{X} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- De grenswaarden van het 99%-betrouwbaarheidsinterval bereken je zo

$$\text{ondergrens} = \bar{X} - 2,575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ en bovengrens} = \bar{X} + 2,575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

De conclusie is dan:

Met een betrouwbaarheid van 95 of 99% ligt het gemiddelde μ_X van de populatie tussen de 'ondergrens' en de 'bovengrens'.

Voorbeeld 1

In een ziekenhuis wordt onderzoek gedaan naar het gemiddelde geboortegewicht van alle baby's die het afgelopen jaar zijn geboren. Er wordt een steekproef genomen van $n = 30$ baby's.

Het gemiddelde gewicht van de baby's in de steekproef is het steekproefgemiddelde $\bar{G} = 3,516$ kg.

De standaardafwijking van het gewicht in de steekproef is $s_G = 0,509$ kg.

Tussen welke twee grenzen ligt met 95% betrouwbaarheid het gemiddelde geboortegewicht van alle baby's in dit ziekenhuis?

Antwoord

De gemiddelden (hier van geboortegewichten) van veel steekproeven zijn normaal verdeeld. Als schatting voor het gemiddelde van deze steekproevenverdeling wordt nu genomen:

$$\bar{G} = 3,516 \text{ kg.}$$

De standaardafwijking van deze gemiddelden is

$$S_{\bar{G}} = \frac{0,509}{\sqrt{30}} \approx 0,093.$$

Met 95% betrouwbaarheid ligt het gemiddelde geboortegewicht van alle baby's die het afgelopen jaar zijn geboren tussen $3,516 - 1,96 \cdot 0,093$ en $3,516 + 1,96 \cdot 0,093$, dus tussen 3,334 en 3,698 kg. Dit is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde μ .

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling als er steeds steekproeven van 50 baby's zouden zijn onderzocht. Neem aan dat de standaardafwijking in de steekproef niet veranderd zou zijn.
- b Hoe groot is in het voorbeeld het verschil tussen de bovengrens en de ondergrens van het gebied waarin het gemiddelde gewicht van alle baby's ligt?

Opgave 5

Soms wil een onderzoeker een kleiner betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde in een populatie.

- a Wat kan een onderzoeker aan de steekproef veranderen om daarvoor te zorgen? Licht je antwoord toe.
- b Wordt het gebied groter als een betrouwbaarheid 99% wordt genomen in plaats van 95%?

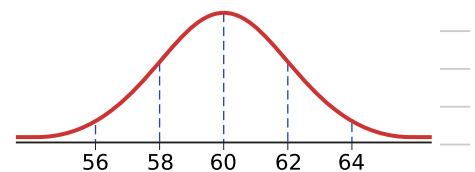
Voorbeeld 2

Een fabriek voor voedingsmiddelen neemt elke dag 75 monsters van een product. Daarvan meet men het aantal bacteriën per cL. Daarna berekent men het daggemiddelde en de dagstandaardafwijking van deze 75 monsters. De dagstandaardafwijking is steeds 20 bacteriën per cL.

Dit wordt 100 dagen herhaald. Er zijn dan 100 daggemiddelden. Van de 100 daggemiddelden is deze steekproevenverdeling gemaakt.

Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddeld aantal bacteriën per cL in het product met behulp van de figuur.

Wat is de betekenis van dit interval?



Figuur 16.1

Als zowel het gemiddelde als de standaardafwijking van het aantal bacteriën per cL in de dagproductie kleiner zijn dan respectievelijk 60 en 20, heeft dat gevolgen voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Beredeneer wat deze gevolgen zijn.

Antwoord

Neem aan dat de populatiestandaardafwijking is $\sigma = 20$ bacteriën per cL.

De figuur is de steekproevenverdeling.

De standaardafwijking daarvan is $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is: $60 \pm 1,96 \cdot 2 = 60 \pm 3,9$.

Het populatiegemiddelde ligt dus tussen 56,1 en 63,9 bacteriën per cL.

De betekenis is: Van de 100 daggemiddelden, zijn er minstens 95 met een gemiddelde tussen 56 en 64 bacteriën per cL.

Als het gemiddelde afneemt, schuift het interval naar links.

Als de standaardafwijking kleiner wordt, wordt het interval smaller.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Komt de standaardafwijking $s_{\bar{B}} = 2$ overeen met de figuur?
- Wat verandert er aan het betrouwbaarheidsinterval als het gemiddelde toeneemt?
- Wat gebeurt er met het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?
- Wat gebeurt er met de kleinste waarde van het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?

Opgave 7

Een ziekenhuis heeft een nieuw computersysteem aangeschaft voor het plannen van onderzoeken voor patiënten. Vóór de aanschaf van het computersysteem was de doorlooptijd (de tijd tussen het eerste en het laatste onderzoek) gemiddeld 3,3 dagen. De standaardafwijking was erg klein.

Uit een representatieve steekproef van 100 patiënten blijkt dat het dat na de aanschaf van het computersysteem de gemiddelde doorlooptijd is gedaald tot 2,9 dagen. De standaardafwijking van de doorlooptijd in de steekproef blijkt 1,8 dagen te zijn.

- Wat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde doorlooptijd van de patiënten na invoering?
- Kan het ziekenhuis met 95% zekerheid zeggen dat de gemiddelde doorlooptijd is gedaald? Licht je antwoord toe.



- c Enkele maanden later herhaalt het ziekenhuis het onderzoek. De standaardafwijking van de steekproef blijkt nu 2,2 dagen te zijn. Kan het ziekenhuis nu met 95% betrouwbaarheid zeggen dat het computersysteem het nu niet goed meer doet? Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 3

Een machine vult medicijnverpakkingen met poeder. Het gewenste vulgewicht is 20 mg. De fabrikant bewaakt het vulgewicht. Daarom onderzoekt de kwaliteitsafdeling deze verpakkingen. Het is bekend dat door de nauwkeurigheid van de vulmachine de standaardafwijking van het vulgewicht 0,35 mg is.

De kwaliteitsafdeling wil het vulgewicht met een nauwkeurigheid van 1% van het gewenste vulgewicht bepalen. Daarmee bedoelt hij dat de afwijking van het gewenste vulgewicht maximaal 1% ervan mag zijn. Hoe groot moet de steekproefomvang zijn om dit met een 95%-betrouwbaarheid te kunnen doen?

Antwoord

Bij steekproefomvang n geldt voor de standaardafwijking van de steekproefgemiddelen $S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gegeven is $\sigma = 0,35$ mg.

De afwijking van het gewicht mag maximaal 1% van het gewenste gewicht zijn. Dat is 0,2 mg.

Bij een betrouwbaarheid van 95% moet dus $1,96 \cdot S = 0,2$, zodat $S \approx 0,10$ mg.

Dit betekent: $0,10 = \frac{0,35}{\sqrt{n}}$.

Oplossen geeft: $n = 12,25$.

De steekproefomvang moet dus minstens 13 zijn.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- a Los de vergelijking $0,1 = \frac{0,35}{\sqrt{n}}$ op.
- b Als de kwaliteitsafdeling met een nauwkeurigheid van 0,5% het gewenste vulgewicht wil bepalen, hoe groot moet dan de steekproefomvang zijn?
- c Als de nauwkeurigheid 1% zou zijn en de populatiestandaardafwijking zou verdubbelen, hoe groot zou dan de steekproefomvang moeten zijn?



Oefenen

Opgave 9

De vuilnisdienst van een stad wil weten hoeveel huisvuil een gezin uit deze stad tweewekelijks buitenzet. Er wordt een aselechte steekproef genomen van 250 gezinnen. Het gemiddelde gewicht huisvuil dat door deze gezinnen verbruikt werd was 12,5 kg, met een standaardafwijking van 5,3 kg.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de hoeveelheid huisvuil (in kg) dat per gezin in de hele stad wordt opgehaald.

Opgave 10

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselechte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van 25,1 cL. De standaardafwijking is $s_V = 0,4$.

- a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.
- b Josephine beweert dat ongeveer 5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Rachid beweert dat ongeveer 2,5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Wie heeft gelijk?

Opgave 11

Een bedrijf maakt en verkoopt light producten. Ze beweert dat haar producten slechts 140 calorieën per pakje bevatten. De Consumentenbond controleert dit met een aselechte steekproef van 25 pakjes. Ze vinden gemiddeld 147 calorieën. De standaardafwijking van deze steekproef is 15 calorieën.

- a De bewering van het bedrijf lijkt niet te kloppen. Onderzoek of de Consumentenbond mag zeggen: met 95% betrouwbaarheid zit er meer dan 140 calorieën in het lightproduct.
- b Wat moet het bedrijf aanpassen aan het aantal calorieën zodat de uitspraak van de Consumentenbond niet klopt?

Opgave 12

Bij een statistisch onderzoek wordt het populatiegemiddelde $\mu \approx 44$ geschat. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is $\sigma \approx 1,2$.

- a Hoe groot zijn de grenzen van het 95% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?
- b Hoe groot zijn de grenzen van het 99% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

Opgave 13

Een laborant analyseert de concentratie van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend, deze is 0,0062. De laborant doet drie metingen met als resultaat in g/L: 0,8303, 0,8259 en 0,8330.

- Bereken gemiddelde en standaardafwijking van deze drie metingen. Rond je antwoord af op vier decimalen.
- Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de waarde van de gemiddelde concentratie van de actieve stof.
- Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 95% betrouwbaarheidsinterval kleiner dan 0,01 te krijgen?

Toepassen

Wanneer een laborant dezelfde meting een aantal keren met hetzelfde apparaat herhaalt, dan krijgt hij een serie waarden x_i die meestal iets van elkaar verschillen. De standaarddeviatie is een maat voor de precisie van zijn metingen. Vaak wordt echter de standaarddeviatie gedeeld door het gemiddelde en in procenten uitgedrukt. Je krijgt dan de zogenaamde **variatiecoëfficiënt**:

$$\text{variatiecoëfficiënt} = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

Hier zie je hoe door 15 metingen de pH-waarden in drie vloeistoftanks is gemeten.

	gemeten pH-waarden														
tank 1	8,5	7,3	7,7	8,2	8,0	7,3	8,3	7,7	7,3	8,2	7,3	6,4	7,0	7,3	7,7
tank 2	7,3	8,0	7,9	8,3	8,4	8,0	9,1	9,3	9,0	9,6	9,0	8,9	8,1	8,3	8,1
tank 3	7,6	8,2	7,9	6,8	7,4	7,9	8,3	6,4	7,0	7,3	7,5	8,3	7,8	7,9	7,0

Tabel 16.3

Door de gebruikte meetmethode wijken de resultaten maximaal 7,5% af van de werkelijke waarde. De variatiecoëfficiënt is dus 0,075.

Je kunt hiermee voor elke tank een 95% betrouwbaarheidsinterval opstellen voor de geschatte pH-waarde.

Opgave 14

Bekijk de gegevens van de eerste vloeistoftank in [Toepassen](#).

- Bereken de gemiddelde pH-waarde in deze tank.
Omdat de variatiecoëfficiënt bekend is, kun je met behulp van dit gemiddelde de standaardafwijking berekenen.
- Laat zien hoe.
- Je gebruikt de gegevens om de werkelijke pH-waarde te schatten. Geef het bijbehorende 95% betrouwbaarheidsinterval.



Opgave 15

Bekijk de metingen van de pH-waarden in de andere twee tanks.

- a Stel ook voor die twee tanks het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de schatting van de pH-waarde op.
- b Wijkt de pH-waarde van tank 2 duidelijk af van de andere twee pH-waarden?

Testen

Opgave 16

In een steekproef van 500 lampen is de gemiddelde levensduur van de lampen van de straatverlichting in een gemeente $\bar{L} = 1500$ uur met een standaardafwijking van $s_L = 640$ uur.

- a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de schatting van het populatiegemiddelde.
- b De gemeente wil alle lampen vervangen als naar schatting 2,5% defect is. Na hoeveel uur gaat de gemeente met de vervanging van lampen beginnen?

Opgave 17

Bij een steekproef onder 30 pasgeboren baby's is de lengte (in cm) gemeten. De gemiddelde lengte is $\bar{L} = 52,2$ cm en $s_L = 2,38$ cm.

- a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.
- b Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 48 cm. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor s_L . Nu is $s_L = 1,84$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.

- c Leg uit waarom een meetfout van één waarde in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft dan een meetfout in een grote steekproef voor het betrouwbaarheidsinterval.

16.5 De Shewhartkaart

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met regelkaarten zoals de Shewhartkaart.

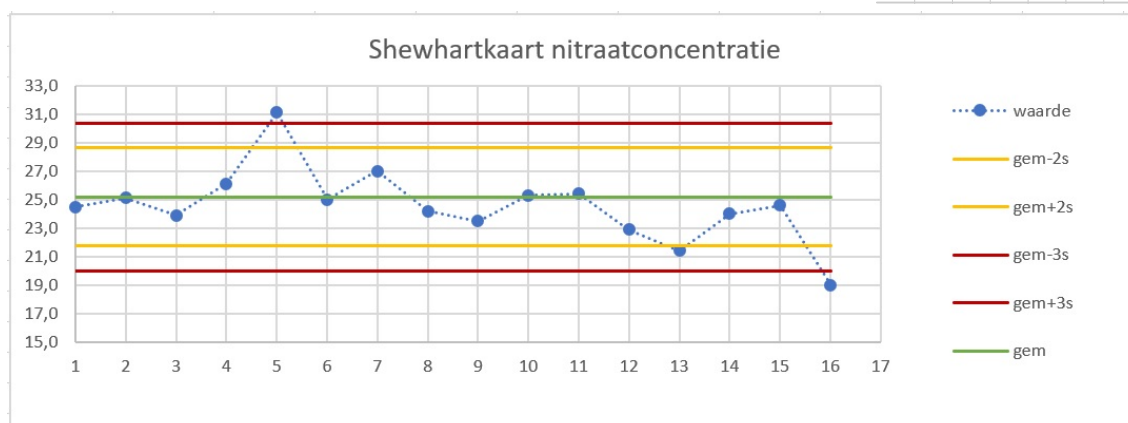
Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een percentage onder een normale verdeling berekenen, werken met de vuistregels van een normale verdeling.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een zogenaamde Shewhartkaart met de resultaten van 16 metingen van de nitraatconcentratie in grondwater van kleigrond in een bepaald gebied in mg/L. De gemiddelde concentratie is 25,2 mg/L met een standaardafwijking van 1,73.



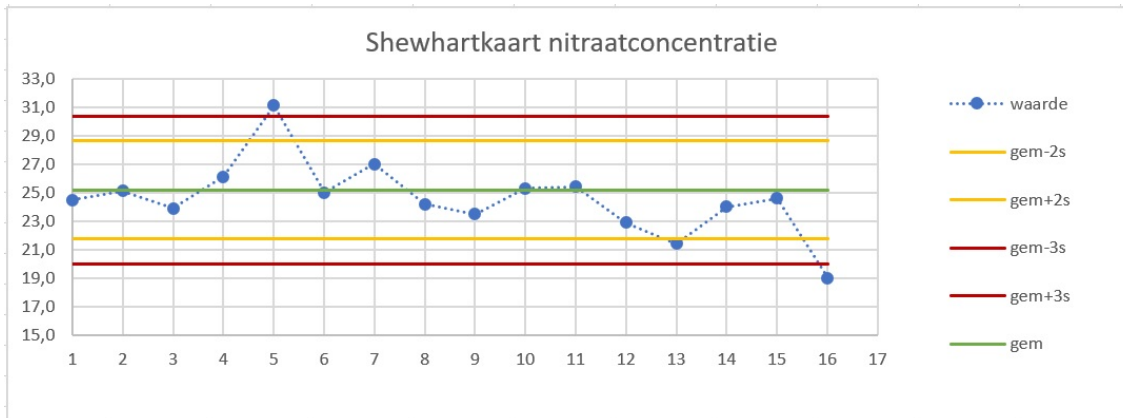
Figuur 16.1

- Wat stelt de horizontale groene lijn voor? En wat stellen de twee oranje lijnen voor?
- Waarom heten de twee oranje lijnen waarschuwingsgrenzen?
- Waarom worden de twee donkerrode lijnen actiegrenzen genoemd?
- Waaraan herken je in dit diagram de vuistregels van de normale verdeling?
- Welke metingen zorgen hier voor het ondernemen van actie?
- Welke meting zorgt hier voor het in de gaten houden van vervolgmetingen?

Uitleg

Om de kwaliteit van bepaalde processen te bewaken worden vaak controlekaarten gebruikt. Vaak worden ze Shewhartkaarten genoemd naar de Amerikaanse statisticus **Walter Andrew Shewhart (1891–1967)**.

Je ziet hier een Shewhartkaart met de resultaten van 16 metingen van de nitraatconcentratie in grondwater van kleigrond in een bepaald gebied in mg/L. De gemiddelde concentratie is 25,2 mg/L met een standaardafwijking van 1,73.



Figuur 16.2

De groene lijn geeft hier het gemiddelde μ van de nitraatconcentratie weer. De twee oranje lijnen liggen op een afstand van $2 \cdot \sigma$ en de twee donkerrode lijnen liggen op $3 \cdot \sigma$ van het gemiddelde. Deze Shewhartkaart is op de vuistregels van de normale verdeling gebaseerd.

Vaak tref je op de horizontale as de tijdstippen van de metingen aan.

Omdat volgens de vuistregels van de normale verdeling slechts 2,5% van de metingen boven de bovenste oranje lijn ligt, zijn waarden die daar uitkomen bijzonder en wordt je gewaarschuwd dat er iets aan de hand kan zijn. De oranje lijnen heten daarom de waarschuwingsgrenzen van de controlekaart.

Omdat volgens de vuistregels van de normale verdeling vrijwel geen metingen boven de bovenste donkerrode lijn liggen, zijn waarden die daar uitkomen heel bijzonder en is het vrijwel zeker dat er iets aan de hand is. De donkerrode lijnen heten daarom de actiegrenzen van de controlekaart.

Bij dergelijke controlekaarten heeft **James Westgard (1941–heden)** regels opgesteld om aan te geven wanneer actie gewenst is. Dat zijn de Westgardregels, zie **Toepassen**.

Een Shewhartkaart kun je zelf maken, zowel met de hand als met behulp van Excel, zie het **Practicum**.



Opgave 1

Bekijk de controlekaart in de [Uitleg](#).

- Welke waarde voor de nitraatconcentratie hoort er bij de bovenste waarschuwingsgrens?
En bij de onderste waarschuwingsgrens?
- Welke waarde voor de nitraatconcentratie hoort er bij de bovenste actiegrens?
En bij de onderste actiegrens?
- Waarom moet je bij meting 5 in actie komen?
- Bij welke meting wordt de 2σ -grens overschreden, maar de 3σ -grens niet?

Opgave 2

Het stikstofgehalte van een bepaalde kunstmest is gemiddeld 14,0 m% met een standaarddeviatie van 0,5. Dit stikstofgehalte wordt regelmatig gecontroleerd. Hier zie je een tiental metingen van het stikstofgehalte in controlemonsters.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)									
14,0	13,9	13,6	14,6	14,6	14,5	13,6	14,1	13,7	13,9

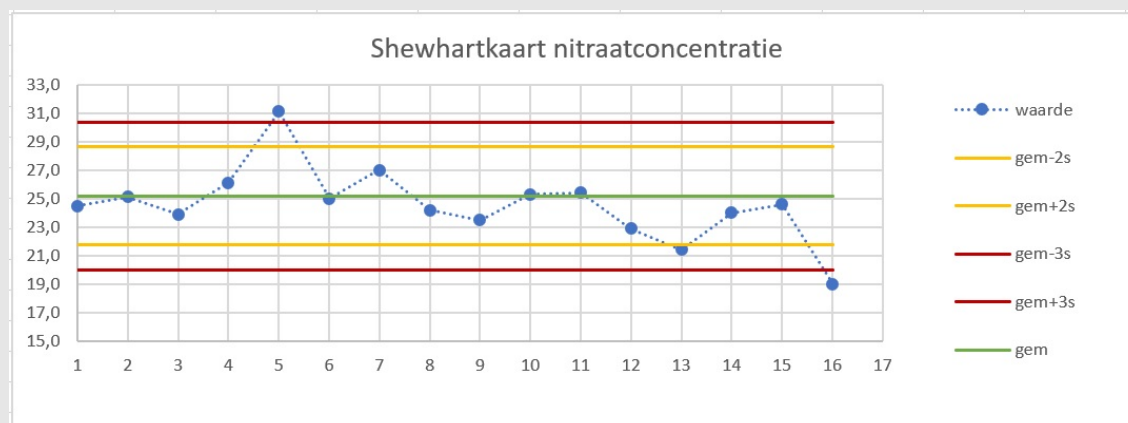
Tabel 16.1

- Maak hierbij zelf een Shewhartkaart.
- Waarom zie je dat deze meetwaarden allemaal aan het opgegeven gemiddelde en standaarddeviatie voldoen?
- Bij welke meetwaarden moet je nagaan of het productieproces wel klopt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om de kwaliteit van bepaalde processen te bewaken worden vaak **controlekaarten** of **regelkaarten** gebruikt. Vaak worden ze **Shewhartkaarten** genoemd naar de Amerikaanse statisticus **Walter Andrew Shewhart (1891–1967)**. Hier zie je er een voorbeeld van.



Figuur 16.3

De horizontale lijnen hebben vaak met de vuistregels van de normale verdeling te maken:

- De middelste (hier groene) lijn bepaalt het gemiddelde μ .
- De onderste en de bovenste **waarschuwingsgrenzen** zijn de twee $\mu \pm 2\sigma$ -lijnen.
Daartussen zit 95% van de metingen.
- De onderste en de bovenste **actiegrenzen** zijn de twee $\mu \pm 3\sigma$ -lijnen.
Daartussen zitten vrijwel alle metingen.
- Soms zijn er ook onderste en de bovenste **tolerantiegrenzen**, dat zijn twee grenzen die absoluut niet mogen worden overschreden.

Gebeurt dit wel dan is er een onbruikbaar product ontstaan.

Bij dergelijke controlekaarten heeft **James Westgard (1941–heden)** regels opgesteld om aan te geven wanneer actie gewenst is. Dat zijn de Westgardregels, zie **Toepassen**.

Voorbeeld 1

Je moet de productie van een nieuw soort kunstmest controleren op het stikstofgehalte (in m%). Omdat er geen gegevens vooraf beschikbaar zijn, doe je eerst een steekproef van 20 monsters. Daarvan is het gemiddelde stikstofgehalte $\bar{N} = 14,5$ m% met een standaarddeviatie van $s_N = 0,4$. Deze waarden gebruik je om je controlekaart te maken.

Daarna ga je het proces bewaken, om het uur meet je het stikstofgehalte van een monster. Hiernaast zie je de eerste 10 metingen.

Maak een bijpassende controlekaart.

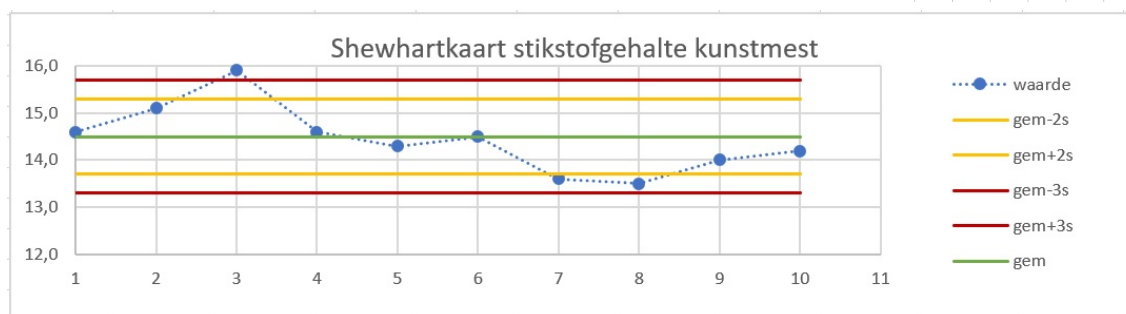
Als een meting meer dan 3 standaardafwijkingen van het gemiddelde zit spreek je van het overtreden van de $1_{3\sigma}$ -regel. Bij welke meting is dat het geval?

Als twee metingen na elkaar tussen de 2 en 3 standaardafwijkingen van het gemiddelde zitten spreek je van het overtreden van de $2_{2\sigma}$ -regel. Bij welke metingen is dat het geval?

Antwoord

Je neemt nu aan dat $\mu_N = \bar{N} = 14,5$ m% en $\sigma_N = s_N = 0,4$.

Dat levert deze Shewhartkaart op:



Figuur 16.4

De $1_{3\sigma}$ -regel wordt overtreden bij de derde meting.

meting	waarde
1	14,6
2	15,1
3	15,9
4	14,6
5	14,3
6	14,5
7	13,6
8	13,5
9	14,0
10	14,2

Tabel 16.2

De 2σ -regel wordt overtreden bij de zevende en de achtste meting.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Maak zelf deze controlekaart.
- Welke acties ga je ondernemen bij het overtreden van de 1σ - of de 2σ -regel?
- Als 4 metingen direct na elkaar allemaal meer dan 1σ onder of boven het gemiddelde liggen, spreek je van het overtreden van de $4_1\sigma$ -regel. Is daar sprake van?

Voorbeeld 2

Een buizenfabriek produceert buizen van 50 cm met een toegestane tolerantie van 6 mm, zowel naar boven als naar beneden. Elke dag wordt steekproefsgewijs de lengte van 10 van die buizen nagemeten. De meetresultaten van de afgelopen week uitgedrukt in cm zijn:

datum	lengtes van 10 buizen									
3-okt-10	50,0	49,9	50,1	50,0	50,2	49,7	50,3	50,3	50,2	50,0
4-okt-10	50,0	49,6	50,0	50,3	49,8	50,3	49,9	49,7	49,9	50,3
5-okt-10	49,8	50,2	50,0	50,1	50,0	50,0	49,7	50,3	50,0	49,9
6-okt-10	49,9	49,9	49,8	50,1	50,2	49,6	49,9	50,1	50,2	50,0
7-okt-10	50,1	50,1	49,9	49,8	49,9	50,0	49,7	50,1	49,9	49,8
8-okt-10	50,2	50,2	49,9	50,4	49,9	50,0	50,1	50,0	50,0	50,2
9-okt-10	50,1	50,4	49,6	50,1	49,7	49,8	50,1	49,8	50,0	50,0

Tabel 16.3

Een samenvatting van de meetresultaten zie je in deze regelkaart. De rode stippen zijn de berekende gemiddelden en de verticale lijntjes geven de minima en de maxima aan. Op de verticale as staat de buislengte. De blauwe lijnen zijn tolerantiegrenzen, de rode stippellijnen de actiegrenzen.

Met welke gemiddelde buislengte en welke standaardafwijking wordt hier gerekend?

Wat is de betekenis van de tolerantiegrenzen?

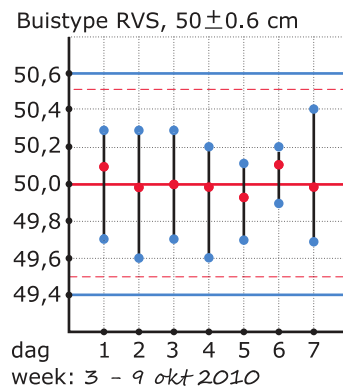
Antwoord

De gemiddelde buislengte wordt met de rode lijn weergegeven, dus $\mu = 50,0$.

De actiegrenzen liggen op een afstand van 3σ van het gemiddelde.

De bovenste actiegrens is ongeveer 50,5, dus $3\sigma = 0,5$ en $\sigma \approx 0,17$.

De tolerantiegrenzen zijn waarden die absoluut niet mogen worden overschreden. Bijvoorbeeld een buis die dikker is dan 50,6 cm is niet bruikbaar. Hetzelfde geldt voor een buis die dunner is dan 49,4 cm.



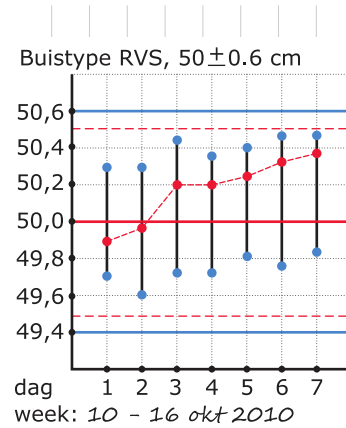
Figuur 16.5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

Een week later ziet de regelkaart er uit zoals hiernaast.

- Waarom is er nu reden tot zorg, terwijl de minima en maxima toch binnen de regelgrenzen liggen? Is er nog steeds sprake van een statistisch beheerst proces?
- Frederik zegt dat het proces statistisch beheerst verloopt als er maar één meting van de steekproef buiten de regelgrenzen valt. Klopt dat?
- Als 4 metingen direct na elkaar allemaal meer dan 1σ onder of boven het gemiddelde liggen, spreek je van het overtreden van de $4_1\sigma$ -regel. Is daar sprake van?

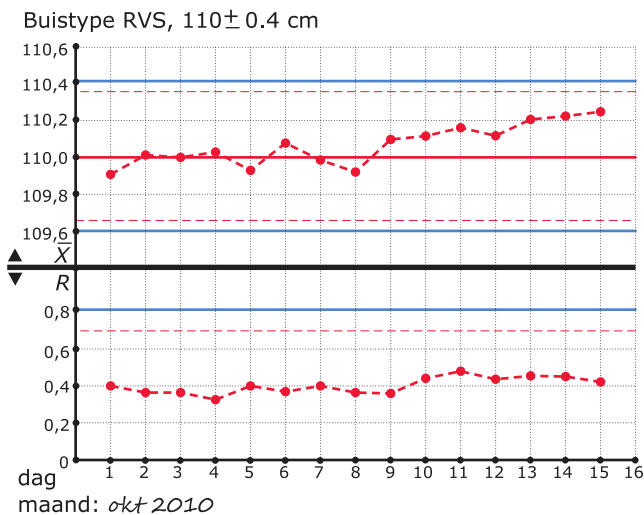


Figuur 16.6

Opgave 5

In de praktijk worden ook regelkaarten zoals hieronder gebruikt:

- met een diagram waarop alleen het gemiddelde $\bar{X}$ staat;
- daaronder een diagram met alleen de spreidingsbreedte R .



Figuur 16.7

- Waarom heeft de spreidingsbreedte maar één actiegrens?
- Op welke hoogte ligt die actiegrens? Waarom deze hoogte? Leg uit dat die hoogte overeen komt met de actiegrenzen voor het gemiddelde.
- Bereken dat het proces in het gedeelte van de regelkaart van dag 1 tot dag 11 statistisch beheerst is.
- Waarom kun je zeggen dat het proces in het tweede deel van de regelkaart statistisch onbeheerst wordt?
- Beschrijf een paar situaties waarin een regelkaart van deze soort aanleiding geeft om te denken dat het productieproces statistisch onbeheerst is.

Oefenen

Opgave 6

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselechte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van $\bar{V} = 25,1$ cL. De standaardafwijking is $s_V = 0,4$.

Vervolgens wordt er elk uur een flesje onderzocht op de inhoud. Hier zie je de metingen van één dag.

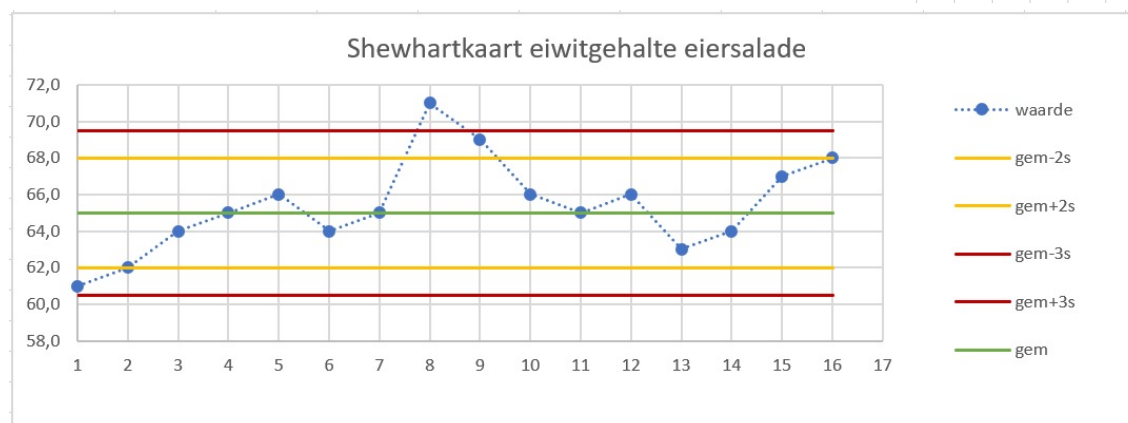
tijd	waarde
8:00	26,0
9:00	25,4
10:00	24,1
11:00	26,1
12:00	26,0
13:00	25,8
14:00	24,8
15:00	25,1
16:00	25,3
17:00	25,7

Tabel 16.4

- Maak een Shewhartkaart voor het vulproces van deze machine, gebaseerd op deze gegevens en de verrichte metingen.
- Op welke hoogte liggen beide waarschuwingsgrenzen?
- Op welke hoogte liggen beide actiegrenzen?
- Als twee opeenvolgende metingen meer dan 2σ van het gemiddelde afwijken dan wordt er normaal gesproken actie ondernomen. Op welk moment is dat hier het geval?

Opgave 7

Je ziet hier een controlekaart voor de productie van eiersalade. Het eiwitgehalte wordt elk half uur gecontroleerd, deze metingen zijn van één dag.



Figuur 16.8

- Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking wordt er gerekend?
- Welke meting is onacceptabel en vereist onmiddellijke actie?

Opgave 8

Bij de productie van literpakken melk is een vulmachine zo ingesteld dat de inhoud van elk pak 1,03 liter is met een standaardafwijking van 0,01 liter.

Om zijn productieproces te bewaken wordt er een regelkaart ontworpen. De actiegrenzen worden zo gekozen dat vrijwel alle vulvolumes daar binnen vallen. Door de wetgever is echter vastgesteld dat het vulvolume van een pak niet meer dan 1% onder de gewenste 1 liter mag zitten.

- Waarom is er nu maar één tolerantiegrens?

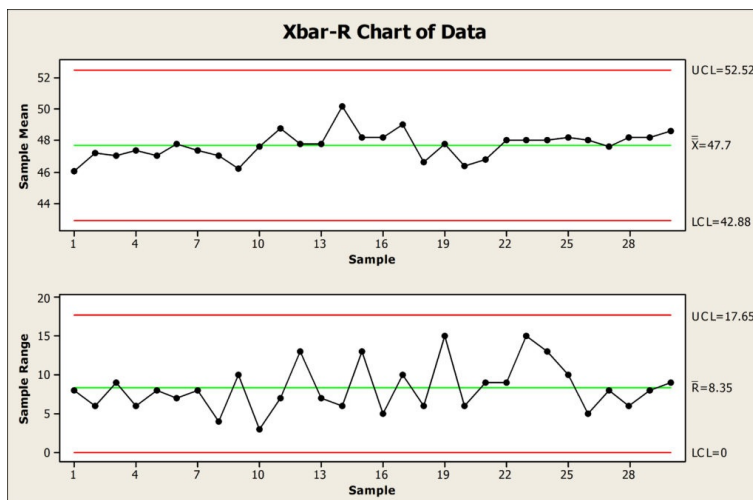
- b** Maak een regelkaart voor deze fabrikant. Neem als tolerantiegrens van het gemiddelde het door de wetgever vastgestelde minimale vulvolume.
- Dagelijks laat de fabrikant een steekproef trekken uit zijn pakken melk: hij laat dan van 25 pakken melk het vulvolume bepalen. Deze tabel geeft de gemiddelden en de hoogste en laagste gemeten waarden per dag. In de controlekaart geef je met verticale lijnstukken de spreidingsbreedte van de metingen weer. Daarop zet je ook het gemiddelde.
- c** Maak het complete diagram.
- d** Welke conclusie zal de fabrikant trekken? Motiveer je antwoord.

Vulvolume melkpakken in L			
dagnr	gemiddelde	hoogste	laagste
1	1,023	1,04	1,011
2	1,014	1,039	1,009
3	1,045	1,049	1,008
4	1,012	1,035	1,001
5	0,998	1,028	0,991
6	1,001	1,026	0,995
7	0,997	1,015	0,991

Tabel 16.5

Opgave 9

Hier zie je een Engelstalige controlekaart, een $\bar{X}, R$ -regelkaart. Sample Mean betekent gemiddelde en Sample Range betekent spreidingsbreedte van de 30 steekproeven. Sample betekent steekproef. De UCL (Upper Control Limit) is de bovenste actiegrens en de LCL (Lower Control Limit) is de onderste actiegrens. Hier is $\mu = \bar{\bar{X}}$, het gemiddelde van de steekproefgemiddelden en $\bar{R}$ het gemiddelde van de spreidingsbreedtes.



Figuur 16.9

- a** Hoe groot zijn het gemiddelde en de bijbehorende standaardafwijking die op deze regelkaart worden gebruikt?
- b** Hoe groot zijn gemiddelde en standaardafwijking van de spreidingsbreedtes R ?
- c** Hier komt de standaardafwijking bij de spreidingsbreedtes niet overeen met de standaardafwijking van de gemiddelden. Hoe kan dat?

Toepassen

Bij een statistische controlekaart, een Shewhartkaart, wordt vaak gebruik gemaakt van de **Westgard-regels**. Dat zijn afspraken die aangeven wanneer je in actie moet komen. Ze zijn opgesteld door **James Westgard (1941–heden)**. Meer erover vind je op zijn website. Daar komen ook de plaatjes in dit overzicht vandaan.

Code	Omschrijving	Plaatje
$1_{3\sigma}$ -regel	Actieregel: Als één keer de grens van $\pm 3\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
$1_{2\sigma}$ -regel	Waarschuwingregel: Als één keer de grens van $\pm 2\sigma$ wordt overschreden moet je gaan opletten.	
$2_{2\sigma}$ -regel	Actieregel: Als twee keer direct na elkaar de grens van $\pm 2\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
$R_{4\sigma}$ -regel	Actieregel: Als direct na elkaar de ene waarde $+2\sigma$ en de andere waarde -2σ overschrijdt moet je actie gaan ondernemen.	
$4_{1\sigma}$ -regel	Actieregel: Als vier keer direct na elkaar de $\pm 1\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
10_x -regel	Actieregel: Als tien keer direct na elkaar de waarden allemaal onder of boven het gemiddelde zitten moet je actie gaan ondernemen. Dit aantal wordt soms nog kleiner genomen, bijvoorbeeld wordt de 8_x -regel wel gehanteerd.	

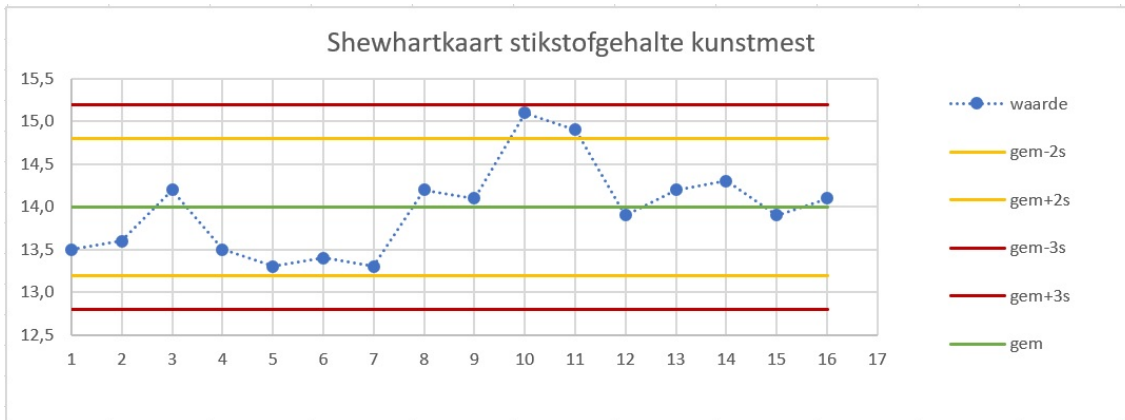
Tabel 16.6

Deze Westgard-regels worden in de volgorde van boven naar beneden toegepast.

Opgave 10

Bekijk de Westgard-regels in [Toepassen](#).

Hier zie je een Shewhartkaart met 16 metingen van het stikstofgehalte in kunstmest (in m%).



Figuur 16.10

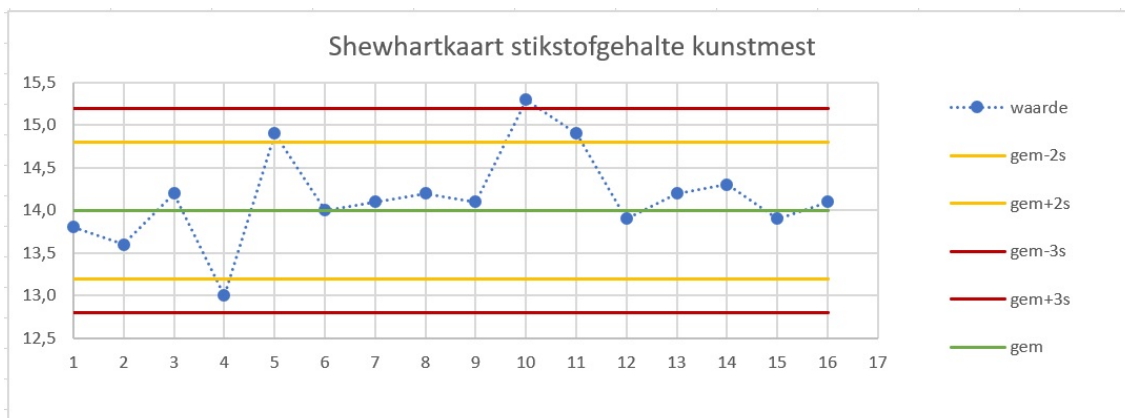
- a** Bereken het gemiddelde stikstofgehalte en de bijbehorende standaardafwijking.

Op grond van de Westgard-regels is hier twee keer actie ondernomen.

- b** Bij welke meting was dat voor het eerst en op grond van welke regel?
- c** En bij welke meting is er opnieuw actie ondernomen? En waarom?

Opgave 11

Weer zie je een Shewhartkaart met 16 metingen van het stikstofgehalte in kunstmest (in m%).



Figuur 16.11

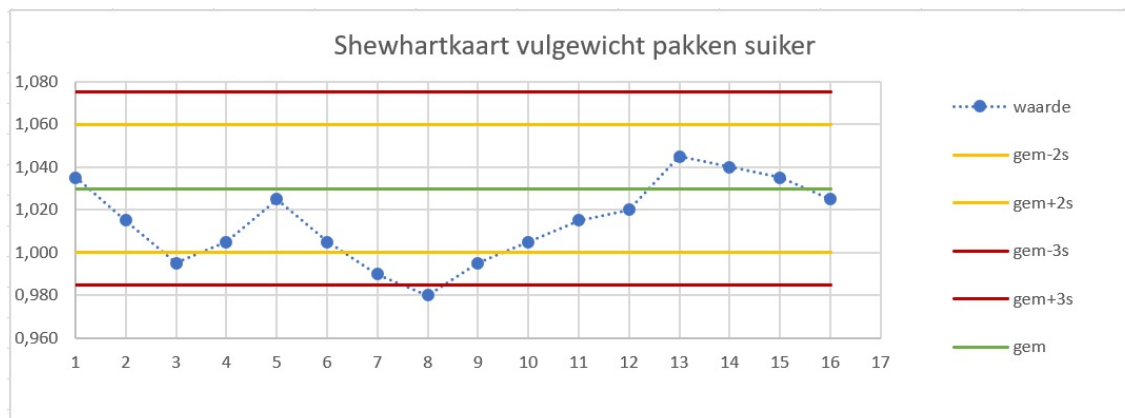
Op grond van de Westgard-regels is hier twee keer actie ondernomen.

- a** Bij welke meting was dat voor het eerst en op grond van welke regel?
- b** En bij welke meting is er opnieuw actie ondernomen? En waarom?

Testen

Opgave 12

Je ziet hier een statistische controlekaart over het vulgewicht (in kg) van pakken suiker.



Figuur 16.12

- Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking wordt er gerekend?
- Welke waarden hebben de twee waarschuwingsgrenzen?
In hoeveel procent van de metingen worden die grenzen maximaal overschreden?
- Welke meting is onacceptabel en vereist onmiddellijke actie?

Opgave 13

Een fabrikant van erwtensoep stopt daar 12,5% rookworst in met een standaardafwijking van 0,25.

Ter controle wordt het percentage rookworst regelmatig nagemeten. Hier zie je 15 van die metingen.

Percentage rookworst														
12,4	12,7	12,8	12,6	13,1	13,2	12,8	12,7	12,4	12,1	12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 16.7

- Teken hierbij een Shewhartkaart.
- De 2σ -regel wordt overtreden als er twee metingen zijn die meer dan 2σ afwijken van het gemiddelde. Bij welke metingen is dat het geval?

16.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met verdelingen van vooral relatieve frequenties en dan met name de normale verdeling voorbij gekomen. Het gaat daarbij vooral om berekeningen met de normale verdeling, werken met betrouwbaarheidsintervallen en werken met controlekaarten.

Je hebt nu alle theorie van **Normale verdeling** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- symmetrische en niet-symmetrische frequentieverdelingen
- standaardafwijking, standaarddeviatie — variantie — normaalkromme en zijn vuistregels
- normale verdeling — standaardnormale tabel, z-tabel — z-waarde
- steekproevenverdeling — betrouwbaarheidsinterval
- controlekaart, regelkaart, Shewhartkaart

Activiteitenlijst

- beoordelen of een frequentieverdeling symmetrisch is of niet;
- de standaarddeviatie van een frequentieverdeling berekenen en interpreteren is samenhang met de normaalkromme — de vuistregels bij een normaalkromme toepassen;
- een normale verdeling van relatieve frequenties karakteriseren door gemiddelde en standaarddeviatie — bij een normale verdeling relatieve frequenties (percentages) berekenen — bij gegeven percentages onder een normaalkromme gemiddelde of standaardafwijking berekenen;
- de standaardafwijking van een steekproevenverdeling berekenen (de wortel-n-wet) — een betrouwbaarheidsinterval voor metingen vaststellen;
- werken met Shewhartkaarten.



Testen

Opgave 1

Uit onderzoek van het gemengde boerenbedrijf bleek het houden van kippen een belangrijke rol te spelen bij het tot stand komen van het inkomen van deze boeren. Daarom werd de boeren gevraagd het aantal kippen op hun bedrijf op te geven.

- Waarom kun je van deze gegevens het gemiddelde en de standaarddeviatie niet exact berekenen?
- Schat de centrummaten mediaan en gemiddelde. Onderbouw je schatting.
- Schat de standaardafwijking. Onderbouw je schatting.
- Hoeveel procent van de bedrijven heeft meer dan 160 kippen?
- Hoeveel procent van de bedrijven heeft minder dan 41 kippen?
- Hoe kun je de verdeling karakteriseren zonder er een diagram van te maken?

aantal kippen	aantal bedrijven
1 - 10	5
11 - 20	12
21 - 30	19
31 - 40	24
41 - 50	33
51 - 60	52
61 - 70	69
71 - 80	75
81 - 90	108
91 - 100	120
101 - 110	123
111 - 120	101
121 - 130	85
131 - 140	79
141 - 150	60
151 - 160	43
161 - 170	21
171 - 180	9
181 - 190	4
191 - 200	2

Tabel 16.1

Opgave 2

Bloeddruk wordt gemeten in mm Hg (spreek uit: millimeter kwikdruk).

Bij een groep van duizend Nederlandse mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

- Hoeveel procent van deze mannen hebben naar schatting een bloeddruk van minder dan 141 mm Hg?
- Hoeveel van deze mannen hebben naar schatting een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?
- Schat het percentage van deze mannen dat een bloeddruk heeft van meer dan 150 mm Hg.

Op grond van deze steekproef van 1000 mannen wil je de gemiddelde bloeddruk van alle Nederlandse mannen voorspellen.

- Geef het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

- Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert, is te licht?



De fabrikant voldoet hiermee niet aan bepaalde richtlijnen. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

- b** De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga ervan uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.

Je koopt een doosje met daarin twintig zakjes van het melkpoeder dat nog het oorspronkelijke gemiddelde van 3,1 gram heeft.

- c** Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met twintig zakjes? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 4

Bij een steekproef van een flinke populatie is van 100 pasgeboren baby's het gewicht (in gram) gemeten. Het gemiddelde gewicht in de steekproef is $\bar{G} = 3512$ g en voor de standaardafwijking van het gewicht geldt $s_G = 480$.

- a** Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde lengte van de populatie.
- b** Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 3586 maar 3690 gram. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor s . Nu is $s_G = 485$. Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.
- c** Leg uit waarom een meetfout in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft voor het betrouwbaarheidsinterval dan een meetfout in een grote steekproef.

Opgave 5

Een opdrachtgever eist van een fabrikant dat het gemiddelde gewicht werkzame stof in een partij van 2000 flessen met reinigingsmiddel 12 gram is.

De fabrikant test dit door middel van een steekproef. Hij vindt een betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 2 gram voldoende precies bij een betrouwbaarheid van 95%.

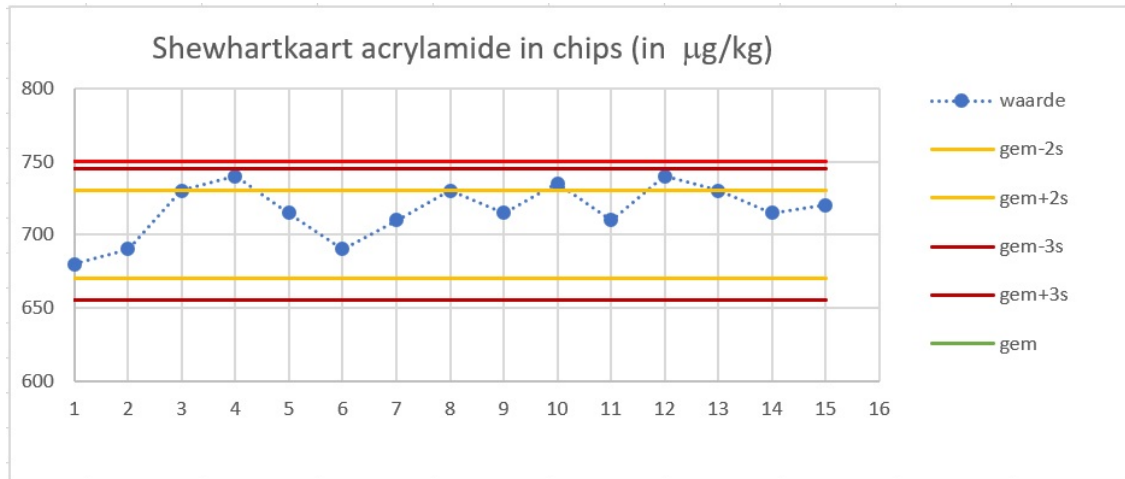
De fabrikant weet dat de standaardafwijking van het gewicht van de werkzame stof bij zijn productieproces 4 gram is.

De fabrikant wil weten hoe groot de steekproefomvang moet zijn om aan deze eisen te kunnen voldoen.

Bereken de minimaal benodigde steekproefomvang.

Opgave 6

Je ziet hier een controlekaart van een fabrikant van chips. Van alle chips mag volgens een Europese referentierichtlijn de hoeveelheid acrylamide niet hoger zijn dan $750 \mu\text{g/kg}$. Deze chips-fabrikant probeert zich aan die richtlijn te houden en meet elk half uur de hoeveelheid acrylamide in een steekproef uit zijn productie.



Figuur 16.1

- Hoeveel acrylamide bevatten zijn chips gemiddeld volgens de fabrikant?
- Met welke standaarddeviatie rekent de fabrikant?
- Waar vind je in de figuur de Europese richtlijn terug?
- Hoe vaak wordt de bovenste waarschuwingslijn overschreden?
- Is er volgens deze Shewhartkaart reden om het productieproces bij te stellen? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Opgave 7: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal, slechts $4,0\%$ van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten. De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

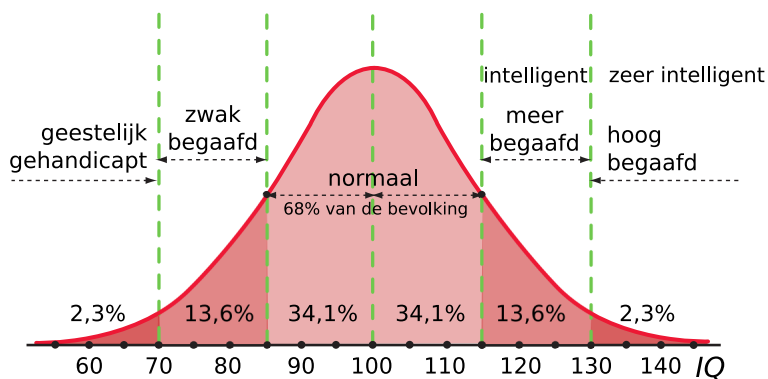
- Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.

- b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?
- c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

Opgave 8: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857–1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 16.2

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

- a Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?
- b Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?
- c Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?
- d Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?
- e Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?



Conclusies trekken

17.1 z-toetsen	126
17.2 t-toetsen	135
17.3 f-toetsen	143
17.4 Regressielijnen	151
17.5 Totaalbeeld	162

17.1 z-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- percentages en grenswaarden berekenen met de normale verdeling;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 liter. De fabrikant vult zijn flessen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola.

- Reken na dat inderdaad 5% van zijn flessen te weinig cola bevat.
- Hoe kan deze fabrikant nagaan of zijn flessen inderdaad een gemiddeld volume van 1530 mL hebben met een standaardafwijking van 18 mL?



Figuur 17.1

Uitleg

Op een fles frisdrank staat dat de inhoud 1,5 liter is. Natuurlijk zal de inhoud nooit precies 1,5 liter zijn. De vulmachine is zodanig afgesteld dat het gemiddelde $\mu = 1530$ mL is en de standaardafwijking $\sigma = 18$ mL. Het vulgewicht V is normaal verdeeld. Nu bevat minder dan 5% van de flessen te weinig frisdrank.

De fabrikant controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen de gemiddelde inhoud te meten. De fabrikant voert een hypothesetoets uit:

De nulhypothese H_0 is de aanname dat $\mu = 1530$ mL.

De alternatieve hypothese H_1 zegt bijvoorbeeld dat μ veel kleiner is:

- $H_0: \mu = 1530$ mL
- $H_1: \mu < 1530$ mL

Als je $\mu < 1530$ mL als alternatief neemt, voer je een linkszijdige toets uit.

Maar je kunt ook $H_1: \mu > 1530$ mL nemen, dat is een rechtszijdige toets.

Bij $H_1: \mu \neq 1530$ mL, spreek je van een tweezijdige toets.

In een steekproef van 25 flessen zou het gemiddelde $\bar{V}$ dicht bij 1530 mL moeten liggen als de nulhypothese geldt. De standaarddeviatie van de steekproevenverdeling is dan $S_{\bar{V}} = \frac{18}{\sqrt{25}} = 3,6$.

Maar er is altijd een kleine kans dat je - ook al geldt de nulhypothese - in je steekproef een gemiddelde vindt dat veel te laag is, onder een bepaalde grens $g < 1530$ ligt. Die kans is het percentage gevallen

$$P(\bar{V} < g) = P\left(z < \frac{g - 1530}{\frac{18}{\sqrt{25}}}\right) = \alpha$$

Dit percentage α heet het significantieniveau. Als de nulhypothese klopt, dan moet het significantieniveau klein zijn. Vaak wordt 5% genomen, of zelfs maar 1%. En dan reken je uit welke waarde van g daarbij hoort met de standaardnormale verdeling, de z -verdeling.

Opgave 1

Bekijk de situatie van het automatisch vullen van 1,5-literflessen in de **Uitleg**. Gebruik het gemiddelde en de standaarddeviatie dat de fabrikant heeft laten instellen.

- a Bereken de kans dat in een steekproef van 25 flessen het gemiddelde vulgewicht lager dan 1520 mL is.
- b Bereken de waarde van g waarvoor geldt $P(\bar{V} < g) = 0,05$ als je er van uit gaat dat de nulhypothese waar is.

Uit het antwoord bij b kun je nu concluderen dat gemiddelde vulgewichten lager dan 1524 mL maar in 5% van de gevallen mogen voorkomen als de nulhypothese waar is. Tref je toch een gemiddeld vulgewicht aan dat kleiner is dan 1524, dan ga je twijfelen of de nulhypothese wel waar is en sterker nog: je verworpt hem met een betrouwbaarheid van 95%.

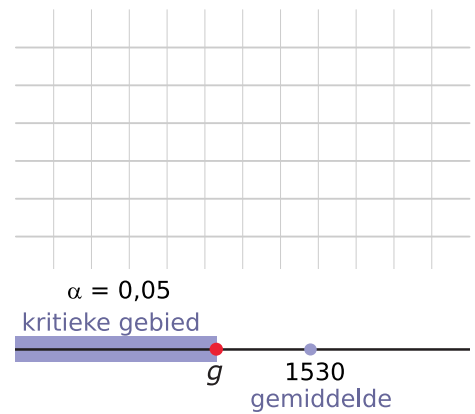
$\bar{V} < 1524$ heet het kritieke gebied van de toets.

- c Waarom hoort bij een significantieniveau van 5% een betrouwbaarheid van 95%?
- d Je neemt $H_0: \mu = 1530$ mL en $H_1: \mu < 1530$ mL.
Je toetst nu met een significantieniveau van 1%. Bepaal het bijbehorende kritieke gebied.
- e Je voert de steekproef uit en vindt $\bar{V} = 1523$ mL.
Kun je de nulhypothese nu met 95% betrouwbaarheid verwerpen? Of met 99% betrouwbaarheid?

Opgave 2

De fabrikant uit de **Uitleg** zet 1,5 L $\ominus$ op zijn colaflessen en dit betekent dat er geen flessen mogen voorkomen die minder cola bevatten dan $1500 - 0,015 \cdot 1500 = 1455$ mL.

- a Laat zien dat het percentage colaflessen dat niet aan de Europese norm voldoet inderdaad vrijwel 0 is.



Figuur 17.2

De fabrikant krijgt het vermoeden dat hij wel met een lager vulvolume toe kan en laat zijn vulmachines instellen op een gemiddelde van 1520 met een standaarddeviatie van 18 mL.

- b** Voldoet hij nog steeds aan de hierboven beschreven norm?

De fabrikant test het nieuwe ingestelde vulvolume met een steekproef van 36 flessen. Hij wil een betrouwbaarheid van 99%. Het gemiddelde vulvolume in de steekproef is 1528 mL.

Dus hij toetst $H_0: \mu = 1520$ mL tegen $H_1: \mu > 1520$ mL.

- c** Bepaal het kritieke gebied van deze toets en leg uit welke conclusie de fabrikant moet trekken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistische methodes kunnen worden gebruikt om een bewering over een populatie te controleren. Dit heet **een hypothese toetsen**.

De **nulhypothese** H_0 is de gangbare bewering (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek).

De **alternatieve hypothese** H_1 is een bewering die de nulhypothese bestrijdt.

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X .

Iemand vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld) dat het kleiner is dan μ_X . Je hebt dan:

- $H_0: \mu = \mu_X$
- $H_1: \mu < \mu_X$

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n . Je kijkt of het gemiddelde in de steekproef significant van μ_X afwijkt. Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\bar{X} \approx \mu_X$ en $S_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Bij deze **linkszijdige toets** hoort een **kritiek gebied** dat aangeeft waar $\bar{X}$ zoveel kleiner is dan μ_X dat je de nulhypothese verworpt: $\bar{X} < g < \mu_X$. De grens g van dat kritieke gebied bepaal je op grond van een vooraf vastgesteld **significantieniveau** α met

$$P(\bar{X} < g) = P\left(z < \frac{g - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha.$$

Het significantieniveau kies je voordat je de toets uitvoert, bijvoorbeeld $\alpha = 5\%$ of $\alpha = 1\%$.

Afhankelijk van de situatie, zijn er nog twee mogelijkheden voor de alternatieve hypothese:

- een **rechtszijdige toets** waarbij H_0 getoetst wordt tegen $H_1: \mu > \mu_X$
- een **tweezijdige toets** toetst H_0 met $H_1: \mu \neq \mu_X$

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu_G = 1002$ g en $\sigma_G = 3$ g.

Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat het gemiddelde lager is dan 1002 g.

In een steekproef van 10 is het gemiddelde $\bar{G} = 999$ g. Is dit bij een significantieniveau van 1% voldoende reden om aan te nemen dat de fabrikant ongelijk heeft?

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- $H_0: \mu = 1002$
- $H_1: \mu < 1002$

In de steekproef is $\bar{G} = 999$ g en $S_{\bar{G}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,9487$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$ en dit betekent: bereken de grenswaarde g waarvoor $P(\bar{G} < g) = 0,01$.

$P(\bar{G} < g) = P\left(z < \frac{g-1002}{0,9487}\right) = 0,01$ geeft: $g \approx 999,8$.

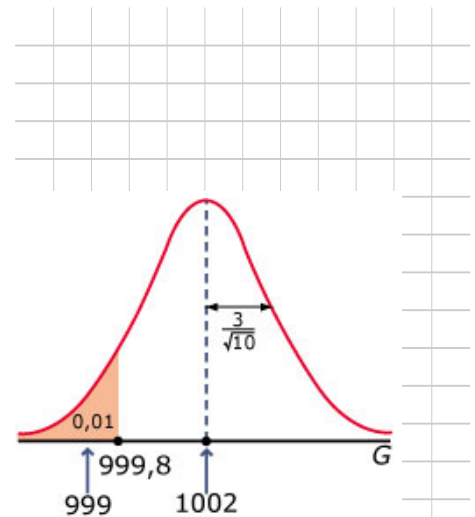
Het kritieke gebied wordt daarom: $\bar{G} \leq 999,8$.

Het in de steekproef gevonden gemiddelde geeft daarom inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 1%.

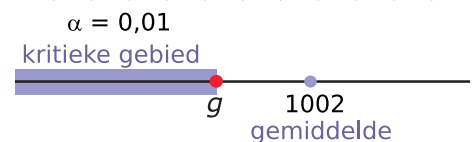
Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe de consumentenbond met een steekproef van 10 pakken het gewicht van kilopakken suiker controleert.

- Voer de beschreven toets zelf uit, laat duidelijk zien hoe je aan $g \approx 999,8$ komt.
- Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99,5%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?
- In plaats van een steekproef van 10 pakken wordt een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Bij welke gewichten krijgt de consumentenbond nu met 99% betrouwbaarheid gelijk?
- In het voorbeeld staat dat in een steekproef van 10 het gemiddelde $\bar{G} = 999$ gram is. Laat zien, dat je door $P(\bar{G} < 999)$ te berekenen ook kunt concluderen dat de consumentenbond gelijk heeft.



Figuur 17.3



Figuur 17.4

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

De fabrikant wil natuurlijk ook niet teveel suiker in zijn kilopakken stoppen, dat kost geld. Hij toetst met een steekproef van 25 pakken of het vulgewicht niet te hoog is. Gebruik het ingestelde gemiddelde met de bijbehorende standaardafwijking in het Voorbeeld.

- a Hoe ziet zijn hypothesetoets er uit?
- b In zijn steekproef vindt de fabrikant een gemiddelde van $\bar{G} = 1003$ g.
Stel met een betrouwbaarheid van 99% vast of de fabrikant zijn vulmachines zal gaan bijstellen.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu_G = 1002$ en $\sigma_G = 3$.

De fabrikant test zijn vulmachine door van een steekproef van 10 pakken het gemiddelde gewicht te berekenen. Hij doet uiteraard een dubbelzijdige toets.

Wat is het kritieke gebied bij een significantieniveau van 1%?

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- $H_0: \mu = 1002$
- $H_1: \mu \neq 1002$

$\bar{G}$ is normaal verdeeld met standaardafwijking $S_{\bar{G}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,9487$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$ en dit betekent: bereken de grenswaarden g_1 en g_2 waarvoor $P(\bar{G} < g_1) = 0,005$ en $P(\bar{G} > g_2) = 0,005$.

Het significantieniveau wordt vanwege de symmetrie van de normale verdeling in twee gelijke delen verdeeld.

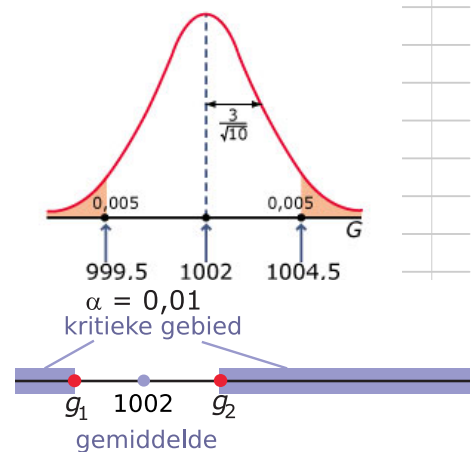
$$P(\bar{G} < g_1) = P\left(z < \frac{g_1 - 1002}{0,9487}\right) = 0,005 \text{ geeft: } g_1 = 999,557...$$

$$P(\bar{G} < g_2) = P\left(z < \frac{g_2 - 1002}{0,9487}\right) = 0,995 \text{ geeft: } g_2 = 1004,442...$$

Het kritieke gebied wordt daarom: $\bar{G} \leq 999,5 \vee \bar{G} \geq 1004,5$.

Opmerking: Sommige onderzoekers staan op het standpunt dat je altijd tweezijdig moet toetsen.

Er zijn immers altijd afwijkingen naar boven en naar beneden mogelijk!



Figuur 17.6



Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij een tweezijdige toets te werk kunt gaan.

- a Waarom is dit een tweezijdige toets? Wat gebeurt er met de onbetrouwbaarheidsdrempel α ?
- b Voer de beschreven toets zelf uit.
- c Om de grenswaarde g_2 te berekenen, hoef je niet met de standaardnormale tabel te werken.
Je kunt deze waarde afleiden uit die van g_1 en de symmetrie van de grafiek.
Bekijk de opmerking onderaan **Voorbeeld 2**.
- d Welke gevolgen heeft het altijd tweezijdig toetsen op de betrouwbaarheid van je uitspraken?

Opgave 6

In een fabriek heeft men het vermoeden dat het koolstofgehalte van een bepaalde staalsoort groter is dan 0,200%. In een steekproef van 80 metingen wordt een gemiddelde gevonden van 0,213%.

De standaardafwijking van het koolstofgehalte is bekend en bedraagt $\sigma = 0,041\%$.

- a Formuleer een geschikte nulhypothese en een alternatieve hypothese.
- b Toets de hypothese met een significantie van 0,01. Wat is je conclusie?

Oefenen

Opgave 7

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijtjes geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat 3600 uur te laten werken. Ze gaan er van uit dat die levensduur normaal is verdeeld met een standaarddeviatie van 600 uur.

In een aselekt gekozen groep van 60 rekenmachines stop je de batterijen van deze firma. De gemiddelde levensduur blijkt 3300 uur te zijn.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 8

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van 54,2 kg en een standaarddeviatie van 4,7 kg. Om dit gemiddelde te toetsen wordt van 200 aselekt gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald.

- a Als het gemiddelde gewicht in de steekproef 53,3 kg is, heeft het tijdschrift dan met een significantie van 2,5% gelijk?
- b Bij welk significantieniveau verwerp je de mening van het tijdschrift?



- c Bij welk significantieniveau had je de mening van het tijdschrift verworpen als je in een veel kleinere steekproef van 10 zeventienjarigen hetzelfde gemiddelde gewicht had aangetroffen? Kun je een verklaring geven voor het verschil met het antwoord bij b?

Opgave 9

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de keuringsdienst van waren controleren ze dit percentage. Bij de metingen is de standaardafwijking 0,0005%.

- a Formuleer de hypothese die getoetst wordt. Je mag aannemen dat het natriumnitrietpercentage normaal verdeeld is.
- b Is de toets eenzijdig of tweezijdig? Formuleer ook de alternatieve hypothese.

Bij de nulhypothese zijn er nog meer mogelijkheden voor μ . Omdat zelfs 0,022 toegestaan is, wordt er uitgegaan van $H_0 : \mu = 0,022$. In een steekproef van 25 stuks verpakte vleeswaren blijkt het nitrietgehalte 0,0221 te zijn.

- c Toets met behulp van deze steekproef of er reden is tot bezorgdheid. Neem een significantieniveau van 5%.

Opgave 10

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehalten in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

Is er met een significantie van $\alpha = 0,01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt? Neem daarbij aan dat de standaardafwijking van deze controlemetingen overeenkomt met de populatiestandaarddeviatie.

Opgave 11

Op een pak melk staat: "Het natuurlijk vetgehalte van melk - zoals die van de koe komt - varieert van 3,7% tot 4,3%".

Volle melk wordt in de fabriek altijd afgeroomd tot 3,5%. Een consumentenorganisatie besluit na te gaan of volle melk 3,5% vet bevat. In een aselechte steekproef van 20 pakken volle melk vindt ze de percentages die je in de tabel ziet.

Men veronderstelt dat het vetgehalte van pakken melk normaal verdeeld is.

- a Schat met behulp van deze steekproef de standaarddeviatie σ van het vetgehalte van volle melk.
- b Toets met significantieniveau 0,05 of de consumentenorganisatie op grond van de steekproef de bewering op het pak kan verwerpen.

percentage	frequentie
3,445 – < 3,455	1
3,455 – < 3,465	0
3,465 – < 3,475	4
3,475 – < 3,485	3
3,485 – < 3,495	3
3,495 – < 3,505	4
3,505 – < 3,515	2
3,515 – < 3,525	2
3,525 – < 3,535	1

Tabel 17.1



Toepassen

Met een z-toets onderzoek je de juistheid van een bewering over het gemiddelde. Het gaat hier over één statistische variabele.

Maar bij statistisch onderzoek wordt soms onderzoek gedaan met meerdere variabelen. Deze worden dan vergeleken. Bijvoorbeeld een onderzoek waarbij je nagaat of de gemiddelden van twee variabelen gelijk zijn. Ga hierbij uit van de volgende veronderstellingen:

- de gemiddelden van beide populaties zijn bekend;
- de beide variabelen zijn normaal verdeeld;
- de standaardafwijkingen van beide verdelingen zijn bekend.

Er geldt altijd: het verschil van twee normale verdelingen is weer een normale verdeling.

Stel dat het aantal sterftegevallen door griep per gemeente normaal verdeeld is.

In 2015 gaf een steekproef $\mu_{15} = 20$ en $\sigma_{15} = 2,3$.

In 2016 gaf een steekproef $\mu_{16} = 21$ en $\sigma_{16} = 3,0$.

Verschillen deze gemiddelden significant van elkaar?

Noem het verschil van de gemiddelden V .

Dit verschil is normaal verdeeld. Is er geen verschil dan is $\mu_V = \mu_{16} - \mu_{15} = 0$.

Daarbij hoort een standaardafwijking van $\sigma_V = \sqrt{2,3^2 + 3,0^2} \approx 3,8$.

Je ziet dat het combineren van de twee standaardafwijkingen op een speciale manier gebeurt. Dat komt omdat je de varianties van zo'n verschilverdeling moet optellen. En de wortel uit die opgetelde varianties is de standaarddeviatie.

Nu kun je $H_0: \mu = 0$ toetsen tegen $H_1: \mu \neq 0$.

Zo'n toets heet een **verschiltoets voor gemiddelden**.

Opgave 12

Bekijk de verschiltoets in [Toepassen](#).

- Waaraan is zichtbaar dat hier een verschiltoets moet worden toegepast en dus geen hypothesetoets zoals eerder beschreven?
- Voer de beschreven toets uit met een significantieniveau $\alpha = 0,1$.

Opgave 13

De diameters van machinaal geproduceerde bouten en de bijbehorende moeren zijn normaal verdeeld: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 mm en een standaarddeviatie van 0,05 mm. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 mm en een standaardafwijking van 0,03 mm. De bouten passen in de moeren als het verschil in diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 mm is. Er wordt regelmatig gecontroleerd of de machines die deze bouten en moeren maken niet moeten worden bijgesteld, omdat te veel moeren niet op de bouten passen. Wekelijks wordt een steekproef van 100 bouten en moeren getest.

- Waarom is hier sprake van een tweezijdige toets?
- Stel de nulhypothese en de alternatieve hypothese op.
- Welke standaardafwijking moet er worden gehanteerd? Waarom speelt hierbij de wortel-n-wet een rol?
- Voer de toets uit met een significantieniveau van 5%. Bij welk gemiddelde verschil in de steekproef worden de machines bijgesteld?

Testen

Opgave 14

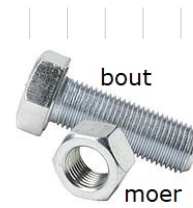
In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g. De populatiestandaardafwijking is 2 g.

Toets, met significantieniveau $\alpha = 0,05$, $H_0 : \mu = 250$ g tegen $H_1 : \mu \neq 250$ g.

Opgave 15

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Volgens de leverancier is het gehalte 16,4%. Hier zie je de resultaten van de metingen.

Toets met behulp van deze resultaten of de leverancier gelijk heeft. Je mag aannemen dat het gehalte kobalt normaal verdeeld is. Neem als significantieniveau 0,02.



Figuur 17.7 Bron: Wikipedia

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

Tabel 17.2

17.2 t-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met Student's t-verdeling bij kleine steekproeven;
- betrouwbaarheidsintervallen beschrijven met de t-verdeling;
- hypothese toetsen met de t-verdeling.

Voorkennis

- werken met de normale verdeling;
- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 liter. De fabrikant vult zijn flessen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een behoorlijke precisie.

- a Wat betekent een behoorlijke precisie voor de standaardafwijking?

De fabrikant meet in een aselechte steekproef van 25 gevulde flessen het volume. Hij vindt een gemiddeld volume van 1525 mL met een standaardafwijking van 24 mL.

- b Zal de standaarddeviatie van de gehele populatie nu gelijk zijn aan 24 mL?
- c Hoe kan de fabrikant nu toetsen of zijn vulmachine op het juiste vulvolume is afgesteld? En welk probleem doet zich daarbij voor?



Figuur 17.1

Uitleg

Op een fles frisdrank staat dat de inhoud 1,5 liter is. Natuurlijk zal de inhoud nooit precies 1,5 liter zijn. De vulmachine is zo precies mogelijk afgesteld op een gemiddeld vulvolume van $\mu = 1530$ mL. Het vulgewicht V is normaal verdeeld.

De fabrikant controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen de gemiddelde inhoud te meten. Hij wil daarmee de nulhypothese $H_0: \mu = 1530$ mL toetsen tegen de alternatieve hypothese $H_1: \mu \neq 1530$.

De fabrikant meet in een aselechte steekproef van 25 gevulde flessen het volume. Hij vindt een gemiddeld volume van 1525 mL met een standaardafwijking van 24 mL.

Hoe nu verder?



Als de nulhypothese klopt is het gemiddelde vulvolume normaal verdeeld met $\bar{V} = 1530$ en $S_{\bar{V}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Maar helaas is de populatie-standaardafwijking σ niet bekend.

De enige standaardafwijking die bekend is, is $s_V = 24$ mL en die zal niet gelijk zijn aan σ , zeker bij kleine steekproeven.

De Britse statisticus **William Gosset** (1876—1937) bedacht de zogenaamde t -verdeling. Deze verdeling lijkt op de standaardnormale z -verdeling, alleen wordt de standaardafwijking $S_{\bar{V}} = \frac{s_V}{\sqrt{n}}$ gebruikt.

Omdat deze statisticus onder de naam 'Student' publiceerde, spreek je van Student's t -verdeling. Hier:

$$t = \frac{\bar{V} - 1530}{\frac{24}{\sqrt{25}}} = \frac{\bar{V} - 1530}{4,8}$$

En met behulp van een tabel voor de t -verdeling kun je nu gewoon de hypothese toetsen.

Opgave 1

Bekijk de situatie van het automatisch vullen van 1,5-literflessen in de **Uitleg**.

- a Leg uit, dat volgens de t -verdeling

$$P(\bar{V} < 1525) = P\left(t < \frac{1525 - 1530}{4,8}\right).$$

Omdat de waarde van t afhangt van de steekproefgrootte n , zijn er voor $n = 2, 3, 4, \dots$ verschillende t -tabellen. In deze **t-tabel in Excel** kun je eerst n instellen.

- b Ga na, dat $P(\bar{V} < 1525) = P\left(t < \frac{1525 - 1530}{4,8}\right) \approx 0,1544$.
- c Welke conclusie moet de fabrikant nu trekken bij een significantieniveau van 10%?
- d Stel je voor dat de steekproef niet 25 flessen, maar 50 flessen betreft en dat hetzelfde gemiddelde en standaarddeviatie zijn gevonden. Hoe groot is nu $P(\bar{V} < 1525)$ volgens de t -verdeling? En welke conclusie moet de fabrikant dan trekken?
- e En hoe zit dat bij $n = 100$?
- f Vergelijk de standaardnormale z -tabel met een t -tabel met grote waarden voor n . Is er veel verschil?

Opgave 2

Student's t -verdeling wordt veel gebruikt om bij hypothese toetsen het kritieke gebied te bepalen bij een kleine steekproef van grootte n . Daarbij gebruik je deze **Student-t-tabel**.

Je ziet daarin bij een bepaalde betrouwbaarheid en bij een bepaalde $\nu = n - 1$ de waarde van t .

ν wordt het aantal vrijheidsgraden genoemd.

- a In de **Uitleg** gaat het over een dubbelzijdige (tweezijdige) toets. Hierbij moet de t -verdeling worden gebruikt omdat alleen de



steekproefstandaardafwijking bekend is. Bepaal het kritieke gebied van de toets bij een significantieniveau van 10%.

De fabrikant krijgt het vermoeden dat hij wel met een lager vulvolume toe kan en laat zijn vulmachines instellen op een gemiddelde van 1520. Er mag echter vrijwel nooit te weinig cola in zijn flessen zitten. Hij doet daarom een enkelzijdige toets van $H_0: \mu = 1520$ mL tegen $H_1: \mu < 1520$ mL.

In een steekproef van 16 flessen vindt hij een gemiddelde $\bar{V} = 1515$ met een standaarddeviatie van $s_V = 12$.

- b** De fabrikant hanteert een significantieniveau van 1%. Welke conclusie trekt hij?

Opgave 3

De grootte n van de steekproef heeft ook gevolgen voor het weergeven van een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Bij kleine n en onbekende populatiestandaarddeviatie moet je daar ook de t -verdeling gebruiken in plaats van de z -verdeling.

Een fabrikant van colaflessen met een inhoud van 1,5 L wil weten op welk gemiddelde vulvolume zijn machine staat afgesteld. Hij doet daarom een steekproef van 15 flessen en vindt een gemiddelde vulvolume $\bar{V} = 1523$ mL met een standaardafwijking van $s_V = 18$ mL.

- a** Met welk 95% betrouwbaarheidsinterval kan hij het juiste populatiegemiddelde vaststellen?
- b** Vergelijk het bij a gevonden betrouwbaarheidsinterval met een betrouwbaarheidsinterval dat je zou vinden door de z -verdeling te gebruiken en (onterecht) aan te nemen dat $\sigma = s_V = 18$.
- c** Leg uit, waarom voor grote waarden van n er weinig verschil is tussen een betrouwbaarheidsinterval berekend met de t -verdeling en een betrouwbaarheidsinterval berekend met de z -verdeling.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X .

Iemand vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld) dat het niet gelijk is aan μ_X .

Je toetst $H_0: \mu = \mu_X$ tegen $H_1: \mu \neq \mu_X$ met een bepaald significantieniveau α , dus met een betrouwbaarheid van $(1 - \alpha) \cdot 100\%$.

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n . Er zijn dan twee mogelijkheden:

- De populatiestandaarddeviatie is bekend.

Gebruik hierbij de standaardnormale z -verdeling $z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$

en de **Standaardnormale tabel**.



- De populatiestandaarddeviatie is niet bekend.

Gebruik dan **Student's t-verdeling** $t = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{s_X}{\sqrt{n}}}$

met de steekproefstandaarddeviatie s_X en **vrijheidsgraad** $\nu = n - 1$.

Hierbij hoort deze **Student-t-tabel**.

Ook bij het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen heb je deze twee mogelijkheden:

- De populatiestandaarddeviatie is bekend.

Het betrouwbaarheidsinterval is $\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- De populatiestandaarddeviatie is niet bekend.

Het betrouwbaarheidsinterval is $\bar{X} - t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}}$.

Voorbeeld 1

De fabrikant wil dat het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal is verdeeld met $\mu_G = 1002$.

De fabrikant test zijn vulmachine door middel van een aselechte steekproef. Hij doet uiteraard een dubbelzijdige toets.

In een steekproef van 30 pakken is het gemiddelde gewicht $\bar{G} = 1003,4$ gram met een standaardafwijking van $s_G = 2,6$ gram. Is de bewering van de fabrikant bij een significantieniveau van 5% terecht?

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- $H_0: \mu = 1002$.
- $H_1: \mu \neq 1002$.

Omdat de populatiestandaardafwijking onbekend is, hoort hierbij een t -verdeling met $\nu = 30 - 1 = 29$ en $S_{\bar{G}} = \frac{2,6}{\sqrt{30}} \approx 0,4747$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.

Uit de **Student-t-tabel** lees je af $t = 2,05$.

$$\frac{g_1 - 1002}{0,4747} = -2,05 \text{ geeft } g_1 \approx -2,05 \cdot 0,4747 + 1002 \approx 1001,0.$$

$$\frac{g_2 - 1002}{0,4747} = 2,05 \text{ geeft } g_2 \approx 2,05 \cdot 0,4747 + 1002 \approx 1003,0.$$

Het kritieke gebied wordt daarom: $\bar{G} < 1001,0 \vee \bar{G} > 1003,0$.

Het in de steekproef gevonden gemiddelde ligt in het kritieke gebied, dus de fabrikant moet concluderen dat zijn vulmachine beter moet worden afgesteld.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe de fabrikant met een steekproef van 30 pakken het vulgewicht van kilopakken suiker controleert.

- Voer de beschreven toets zelf uit, laat duidelijk zien hoe je aan de twee grenswaarden komt.
- Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

Ook de Consumentenbond test de pakken suiker. Zij toetsen met een steekproef van 10 pakken of het gemiddelde vulgewicht niet lager is dan 1002 g.

- a Hoe ziet hun hypothesetoets er uit?
- b In die steekproef is het gemiddelde $\bar{G} = 1000,5$ met een standaardafwijking van $S_G = 2,5$ gram.
Stel met een betrouwbaarheid van 99% vast of de Consumentenbond mag zeggen dat de pakken gemiddeld minder dan 1002 gram bevatten.

Voorbeeld 2

Een fabrikant controleert het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker. Hij weegt een steekproef van 30 pakken en ziet dat hun gemiddelde gewicht $\bar{G} = 1002$ g is met standaardafwijking $s_G = 3$ g.

Tussen welke grenzen ligt het vulgewicht van al zijn pakken suiker met een betrouwbaarheid van 99%?

Antwoord

Omdat alleen de steekproefstandaardafwijking bekend is, gebruik je de t -verdeling met $\nu = 30 - 1 = 29$.

Bij een (dubbelzijdige) betrouwbaarheid van 99% hoort $t = 2,76$, gebruik de **Student-t-tabel**.

Het 99% betrouwbaarheidsinterval is dus

$$1002 - 2,76 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} < \mu_G < 1002 + 2,76 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}}.$$

Het gemiddelde gewicht μ_G ligt tussen 1000,5 en 1003,5 gram.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een betrouwbaarheidsinterval bepaalt met behulp van de t -verdeling.

- a Bepaal zelf het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
- b Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval ook met de z -verdeling waarbij je aanneemt $\sigma_G = 3$ g. Vind je een groot verschil?

Oefenen

Opgave 7

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijtjes geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat 3600 uur te laten werken.

In een aselekt gekozen groep van 10 rekenmachines stop je de batterijen van deze firma. De gemiddelde levensduur blijkt 3300 uur te zijn met een standaardafwijking van 600 uur.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 8

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van 54,2 kg en een standaarddeviatie van 4,7 kg. Om dit gemiddelde te toetsen wordt van 20 aselekt gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald. Het gemiddelde gewicht in de steekproef is 53,3 kg met een standaarddeviatie van 5,0 kg.

- Waarom moet je hier met een t -verdeling werken?
- Bevestigt het onderzoek de bewering van het tijdschrift met een significantieniveau van 1%?

Opgave 9

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de keuringsdienst van waren controleren ze dit percentage. Hier vind je de meetgegevens.

0,0219	0,0226	0,0225	0,0225	0,0216
0,0219	0,0220	0,0216	0,0229	0,0226
0,0214	0,0219	0,0226	0,0220	0,0212
0,0225	0,0223	0,0215	0,0221	0,0223
0,0224	0,0215	0,0228	0,0223	0,0223

Tabel 17.1

- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van deze gegevens.
- Je toetst $H_0 : \mu = 0,022$ tegen $H_1 : \mu > 0,022$. Bepaal het bijbehorende kritieke gebied als het significantieniveau $\alpha = 0,01$ is.
- Welke conclusie trek je uit deze metingen?

Opgave 10

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehalten in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

- Waarom kun je in deze situatie geen z -toets toepassen? Waarom ligt het niet voor de hand om de standaardafwijking van de steekproef als standaardafwijking voor alle metingen te nemen?
- Is er met een significantie van $\alpha = 0,01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt?



Opgave 11

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselechte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van $\bar{V} = 25,1$ cL. De standaardafwijking is $s_V = 0,4$.

- Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde μ_V .
- Laat zien dat je schatting van μ_V beter wordt als je een grotere steekproef neemt.

Toepassen

Je wilt het gehalte stikstof in een bepaald monster kunstmest meten. Voor de zekerheid meet je dat gehalte 5 keer.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)				
14,0	13,9	13,8	14,2	14,0

Tabel 17.2

Van dit monster is het gemiddelde stikstofgehalte 14,0 m%.

Natuurlijk is er maar één werkelijk gehalte aan stikstof, de verschillen ontstaan hier alleen door de manier van meten en de meetnauwkeurigheid.

Bekend is dat deze metingen van het stikstofgehalte 2% kunnen afwijken van de werkelijke waarde. Je spreekt dan van een **gevalideerde meetmethode**.

Daarbij is die 2% afwijking de variatiecoëfficiënt $\frac{\sigma_x}{\mu_x}$.

De populatiestandaardafwijking van alle metingen is dus $\sigma_N = 0,02 \cdot \mu_N \approx 0,02 \cdot 14,0 = 0,28$.

Nu kun je in je uitspraken gewoon van de z-toets gebruik maken.

Opgave 12

Bekijk wat je verstaat onder een gevalideerde meetmethode in **Toepassen**.

- Bereken zelf het gemiddelde en de standaardafwijking van de 5 metingen.
- Waarom wordt deze standaardafwijking bij een gevalideerde meetmethode niet gebruikt?
- Stel een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het stikstofgehalte op.

Opgave 13

Met een gevalideerde meetmethode wordt het zoutgehalte van een oplossing bepaald. Bekend is dat bij deze metingen een standaarddeviatie van $\sigma = 0,40$ mg/L moet worden gehanteerd.

In een sessie van 10 metingen wordt een gemiddeld zoutgehalte van $\bar{Z} = 15,2$ mg/L gevonden.

- Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het zoutgehalte.
- Is het 99% betrouwbaarheidsinterval groter of kleiner dan het 95% betrouwbaarheidsinterval? Licht je antwoord toe.



Met deze metingen wil je de nulhypothese $\mu_Z = 15,0$ mg/L controleren.

- c Bepaal het kritieke gebied van de bijbehorende toets als je een significantieniveau van $\alpha = 0,05$ hanteert en trek een conclusie.

Opgave 14

Van een monster wordt door middel van vlamemissie-spectrometrie (VES) het gehalte Natrium (mmol/L) bepaald.

De volgende waarden worden gevonden: 140, 133, 144, 148 en 132.

- a Is hier sprake van een gevalideerde meetmethode?
- b Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het natriumgehalte.

Testen

Opgave 15

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g met een standaardafwijking van 2 g.

Toets, met significantieniveau $\alpha = 0,05$, $H_0 : \mu = 250$ g tegen $H_1 : \mu \neq 250$ g.

Opgave 16

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Hier zie je de resultaten van de metingen.

Geef een 99% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde kobaltgehalte μ_K .

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

Tabel 17.3

17.3 f-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de f-toets om precisie van metingen te vergelijken.

Voorkennis

- werken met de normale verdeling en Student's t-verdeling;
- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de pH-waarde (zuurgraad) van een vloeistof in een tank gemeten. Twee laboranten doen 10 metingen. Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden									
lab.A	8,1	7,1	7,3	7,9	7,5	7,0	8,4	7,4	7,3	8,0
lab.B	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,6	6,4	7,0	7,3

Tabel 17.1

- Bereken van beide laboranten de gemiddelde pH-waarde en de bijbehorende standaardafwijking.
- Welke van beide laboranten heeft de grootste precisie bereikt? Zie je dat aan het gemiddelde of aan de standaardafwijking?
- Hoe zou je kunnen toetsen of de standaarddeviaties van beide meetsessies significant van elkaar verschillen?

Uitleg

In een laboratorium wordt de pH-waarde (zuurgraad) van een vloeistof in een tank gemeten. Twee laboranten doen 10 metingen. Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden									
lab.A	8,1	7,1	7,3	7,9	7,5	7,0	8,4	7,4	7,3	8,0
lab.B	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,6	6,4	7,0	7,3

Tabel 17.2

De gemiddelden van deze metingen verschillen niet veel. Maar de standaarddeviaties lopen wel wat uiteen, je vindt:

- Laborant A: $\overline{pH1} = 7,6$ en $s_{pH1} \approx 0,47$.
- Laborant B: $\overline{pH2} = 7,5$ en $s_{pH2} \approx 0,64$.

Het toetsen van het gemiddelde, of betrouwbaarheidsintervallen voor de schatting van het populatiegemiddelde opstellen, kun je



met de t -verdeling doen. Je zegt dan iets over de juistheid van je metingen.

Maar om vast te stellen of laborant B significant minder precies is dan laborant A gebruik je een verdeling die is bedacht door de Britse statisticus **Ronald Fisher (1890–1962)** en daarom de f -verdeling heet. Daarbij gaat het om relatieve percentages die horen bij de grootte:

$$f = \frac{s_A^2}{s_B^2}$$

waarin s_A en s_B de standaardafwijkingen zijn van twee metingen van dezelfde grootte. Daarbij is altijd $s_A \geq s_B$.

Je kunt er de f -toets voor standaardafwijkingen mee uitvoeren. Daarbij is:

- $H_0: s_A = s_B$ (beide standaardafwijkingen verschillen niet);
- $H_1: s_A \neq s_B$ (beide standaardafwijkingen verschillen) of $H_1: s_A > s_B$.

Hierbij bestaat een **f -tabel** waarin je de grenswaarde van f kunt opzoeken bij een gegeven betrouwbaarheid en de steekproefgroottes van de metingen van A en B. Bij laborant A hoort een vrijheidsgraad $\nu_A = n - 1$ bij steekproefgrootte n . Bij laborant B hoort een vrijheidsgraad $\nu_B = m - 1$ bij steekproefgrootte m . In de gegeven tabel is de betrouwbaarheid 95%.

Opgave 1

Bekijk de metingen van beide laboranten in de **Uitleg**.

Je gaat nu een f -toets uitvoeren.

- a Leg uit, waarom hier $f = \frac{s_{pH2}^2}{s_{pH1}^2}$ geldt en bereken de f -waarde.

In dit geval is $\nu_{pH1} = 10 - 1 = 9$ en $\nu_{pH2} = 10 - 1 = 9$.

Gebruik de **f -tabel met betrouwbaarheid 95%**.

- b Bepaal met een dubbelzijdige f -toets of de precisie van beide metingen significant van elkaar verschilt.

Omdat bij de gegeven metingen al meteen zichtbaar is dat $s_{pH2} > s_{pH1}$ is ook als alternatieve hypothese $H_1: s_{pH2} > s_{pH1}$ denkbaar.

- c Bepaal met een enkelzijdige f -toets of s_{pH2} significant groter is dan s_{pH1} .

Opgave 2

In de **Uitleg** vind je de f -verdeling.

- a Welke waarde heeft f als beide metingen even precies zijn gedaan, dus als $s_A = s_B$?

Bekijk de **f -tabel met betrouwbaarheid 95%**.

- b Welke waarde benadert f als zowel n als m heel groot worden? Geef hiervoor een verklaring.



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je met behulp van twee series metingen A en B een bepaalde grootheid X wilt vaststellen, krijg je bij A een steekproefgrootte n , een gemiddelde $\bar{X}_1$ met standaardafwijking s_{X_1} en bij B een steekproefgrootte m , een gemiddelde $\bar{X}_2$ met standaardafwijking s_{X_2} .

Met een **f-toets** kun je de precisie van beide metingen vergelijken.

Neem aan $s_{X_1} \geq s_{X_2}$, dan toets je

- $H_0: s_{X_1} = s_{X_2}$;
- $H_1: s_{X_1} \neq s_{X_2}$ (dubbelzijdige toets)
of
 $H_1: s_{X_1} > s_{X_2}$ (enkelzijdige toets).

Daarbij gebruik je de f -verdeling

$$f = \frac{s_{X_1}^2}{s_{X_2}^2}$$

omdat $s_{X_1} > s_{X_2}$.

Meestal neem je een betrouwbaarheid van 95% en daarbij hoort deze **f-tabel**.

Je kunt ook de juistheid van beide series metingen vergelijken. Daartoe gebruik je een t -toets, zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,0	13,9	13,8	14,2	14,0	
manier 2	13,6	14,4	13,2	14,0	14,6	14,1

Tabel 17.3

Bereken van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking. Bepaal met behulp van een f -toets of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.

Antwoord

Ga na:

- Manier 1: $\bar{N}_1 \approx 14,0$ en $s_{N_1} \approx 0,15$ m%.
- Manier 2: $\bar{N}_2 \approx 14,0$ en $s_{N_2} \approx 0,52$ m%.

Dit betekent dat $f = \frac{s_{N_2}^2}{s_{N_1}^2} \approx 12,02$.

Gebruik de **f-tabel met betrouwbaarheid 95%**.



In dit geval zijn de vrijheidsgraden $\nu_{N1} = 4$ en $\nu_{N2} = 5$.

Een enkelzijdige toets ligt voor de hand: $H_0: s_{N1} = s_{N2}$ tegen

$H_1: s_{N2} > s_{N1}$.

De tabel geeft daarbij $f = 6,26$.

De tweede manier is daarom significant minder precies.

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe de precisie van twee series metingen van het stikstofgehalte van een portie kunstmest kan worden vergeleken.

- a Bereken zelf de gemiddelden en de standaardafwijkingen van beide series metingen.
- b Voer de (enkelzijdige) toets zelf uit met een betrouwbaarheid van 95%.

Ook hier zou je kunnen zeggen dat er tweezijdig getoetst moet worden. Het gaat immers alleen om het vergelijken van de precisie van twee meetseries, je hoeft niet van te voren al te weten dat de tweede serie minder precies is.

- c Laat zien, dat dit hier niet tot een andere conclusie zou hebben geleid.

Voorbeeld 2

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Telkens wordt een monster eerst op de éne manier en dan op de andere manier gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,1	13,8	13,7	14,3	14,0	14,1
manier 2	13,4	14,5	13,3	14,7	14,5	14,6

Tabel 17.4

Bereken van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking. Bepaal met behulp van een f -toets of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.

Bepaal met behulp van een t -toets of de juistheid van beide metingen met dezelfde betrouwbaarheid significant verschilt.

Antwoord

Ga na:

- Manier 1: $\overline{N1} \approx 14,0$ en $s_{N1} \approx 0,22$ m%.
- Manier 2: $\overline{N2} \approx 14,2$ en $s_{N2} \approx 0,64$ m%.

Eerst toets je de precisie: $f = \frac{s_{N2}^2}{s_{N1}^2} \approx 8,46$.

De enkelzijdige f -tabel geeft (denk om de juiste vrijheidsgraden): $f = 5,05$.

De tweede manier is daarom weer significant minder precies.

Nu toets je de juistheid.

Je kijkt daarvoor naar de serie verschillen van elk paar metingen $N1 - N2$. Zijn beide series metingen even juist, dan is



$\overline{N1} - \overline{N2} = 0$. Zijn ze niet even juist dan is $\overline{N1} - \overline{N2} \neq 0$. Je toetst dus:

$H_0: \overline{N1} - \overline{N2} = 0$ tegen $H_1: \overline{N1} - \overline{N2} \neq 0$

in een steekproef van $n = 5$ met standaardafwijking $s_{N1-N2} \approx 0,57$.

De significantie is $\alpha = 0,05$.

Voer deze dubbelzijdige toets zelf uit en trek de juiste conclusie.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe niet alleen de precisie, maar ook de juistheid van twee series metingen kan worden vergeleken.

- Waarom heb je nu twee even grote series metingen?
- Voer zelf de f -toets uit met een betrouwbaarheid van 95%.
- Voer zelf de t -toets uit met een betrouwbaarheid van 95%.

Oefenen

Opgave 5

Twee laboranten hebben de nitraatconcentratie X in mg/L van het grondwater op een bepaald perceel gemeten. Hier zie je de resultaten.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% beweren dat laborant B minder precies is geweest? Gebruik een f -toets.

	lab.A	lab.B
aantal	8	10
$\bar{X}$	25,2	24,9
s_X	1,8	2,9

Tabel 17.5

Opgave 6

De pH (zuurgraad) van zwemwater wordt regelmatig gemeten. In een zwembad is de spreiding binnen de gevonden pH-waarden nogal groot en men besluit een nieuwe manier van meten te gaan hanteren. Hier zie je het verschil tussen de oude meetwaarden en de nieuwe op twee opeenvolgende dagen.

	gemeten pH-waarden						
oud	7,9	6,8	7,2	7,6	7,2	6,9	7,9
nieuw	7,2	7,3	7,5	7,2	7,1	7,4	7,3

Tabel 17.6

- Bereken van beide series metingen het gemiddelde en de standaardafwijking.
Lijkt de nieuwe meetmethode preciezer te zijn?
- Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de nieuwe meetmethode preciezer is?

Opgave 7

Van een tiental personen worden reactietijden gemeten.

Het is de bedoeling om de reactietijd t_G op een geluidssignaal te vergelijken met de reactietijd t_L op een lichtsignaal. Beide reactietijden zijn in milliseconden.

- Bereken gemiddelde en standaardafwijking van beide reactietijden.
- Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de reactietijden op geluid dichter bij elkaar liggen dan de reactietijden op licht? Gebruik een f -toets.
- Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de reactietijden op geluid kleiner zijn dan de reactietijden op licht? Gebruik een t -toets.

persoon	t_L	t_G
1	305	280
2	240	205
3	360	350
4	230	230
5	430	340
6	250	220
7	310	290
8	420	390
9	260	265
10	295	245

Tabel 17.7

Opgave 8

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehalten in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn met standaardafwijking 10 mg/dL.

De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

- Waarom kun je in deze situatie een f -toets toepassen om na te gaan of de controlemetingen even precies zijn als de standaardmetingen?
- Is er met een betrouwbaarheid van 95% reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet nauwkeurig meer werkt?

Toepassen

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,0	13,9	13,8	14,2	14,0	
manier 2	13,6	14,4	13,2	14,0	14,6	14,1

Tabel 17.8

Je kunt van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking berekenen en met een f -toets nagaan of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.

Maar het vergelijken van de juistheid van beide metingen met een t -toets is nu lastig, de metingen van N_1 en N_2 gaan over verschillende steekproeven, dus je kunt niet naar $N_1 - N_2$ kijken omdat de waarden van N_1 en N_2 niet over hetzelfde monster hoeven te gaan. Dit zijn **geen gepaarde waarnemingen**.

Maar je kunt wel de twee verdelingen combineren.

Je toetst $H_0: \bar{N}_1 - \bar{N}_2 = 0$ tegen $H_1: \bar{N}_1 - \bar{N}_2 \neq 0$.

De bijbehorende standaardafwijking is een soort van gewogen gemiddelde van de twee standaardafwijkingen s_{N1} en s_{N2} :

- Als s_{N1} en s_{N2} weinig van elkaar verschillen, bepaal je de grens g van het kritieke gebied door bij de gegeven betrouwbaarheid en $\nu = n_{N1} + n_{N2} - 1$ de waarde van t op te zoeken:

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{\nu_{N1} \cdot s_{N1}^2 + \nu_{N2} \cdot s_{N2}^2}{\nu_{N1} + \nu_{N2}} \cdot \left(\frac{1}{n_{N1}} + \frac{1}{n_{N2}} \right)}}$$

- Als s_{N1} en s_{N2} significant van elkaar verschillen, bepaal je de grens g van het kritieke gebied door bij de gegeven betrouwbaarheid en $\nu = \text{minimum}(n_{N1}, n_{N2}) - 1$ de waarde van t op te zoeken:

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{s_{N1}^2}{n_{N1}} + \frac{s_{N2}^2}{n_{N2}}}}$$

Het aannemelijk maken van deze formules voert te ver. Je gaat ze alleen toepassen.

Opgave 9

In **Toepassen** heb je te maken met twee onafhankelijke steekproeven. Je weet al, dat hun standaardafwijkingen significant verschillen, zie **Voorbeeld 1**. Nu wil je nog onderzoeken of hun gemiddelden significant verschillen met een betrouwbaarheid van 95%.

- Welke van beide t -toets methoden moet je gebruiken, de eerste of de tweede?
- Voer deze t -toets voor de gegeven steekproeven uit. Zoek de gemiddelden en de standaardafwijkingen van de afzonderlijke steekproeven in het voorbeeld op.

Ook de gegevens in **Voorbeeld 2** moet je op deze manier behandelen als het onafhankelijke steekproeven zouden zijn geweest. Neem aan dat dit het geval is. Weer verschillende de standaardafwijkingen significant van elkaar.

- Vergelijk met een t -toets de juistheid van beide steekproeven. Zoek de gemiddelden en de standaardafwijkingen van de afzonderlijke steekproeven in het voorbeeld op.

Opgave 10

Twee laboranten hebben de nitraatconcentratie X in mg/L van het grondwater op een bepaald perceel gemeten. Hier zie je de resultaten.

Na het toepassen van een f -toets blijkt laborant B niet significant minder precies te zijn geweest. Je wilt nu hun juistheid vergelijken met een betrouwbaarheid van 95%.

- Welke van beide t -toets methoden in **Toepassen** moet je gebruiken, de eerste of de tweede?
- Voer deze t -toets voor de gegeven steekproeven uit.

	lab.A	lab.B
aantal	8	10
$\bar{X}$	25,2	24,9
s_X	1,8	2,9

Tabel 17.9



Testen

Opgave 11

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. De acht flessen die de laatste uren zijn gemeten gaven een gemiddelde van 250 g met een standaardafwijking van 2 g. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 5 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g met een standaardafwijking van 6 g.

Is er reden om aan te nemen dat deze inspecteur niet precies genoeg heeft gewerkt?

Gebruik een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 12

Messing is een legering van koper en zink, met soms (om bepaalde eigenschappen te bereiken) toevoegingen. In een metaalfabriek wordt messing geproduceerd met een kopergehalte dat 65% zou moeten bedragen.

Het kopergehalte van de geproduceerde hoeveelheid messing wordt bepaald door hetzelfde monster op twee manieren te meten.

	kopergehalte messing				
manier 1	64,30	65,20	64,90	64,80	65,30
manier 2	65,00	64,10	65,70	65,90	64,30

Tabel 17.10

- Bepaal met 95% betrouwbaarheid of beide metingen even precies zijn.
- Bepaal met 95% betrouwbaarheid of beide metingen even juist zijn.

17.4 Regressielijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen twee statistische variabelen in beeld brengen als spreidingsdiagram;
- de correlatiecoëfficiënt gebruiken om de sterkte van het (statistisch) verband tussen twee variabelen te berekenen;
- het verband tussen twee statistische variabelen beschrijven met behulp van een regressielijn.

Voorkennis

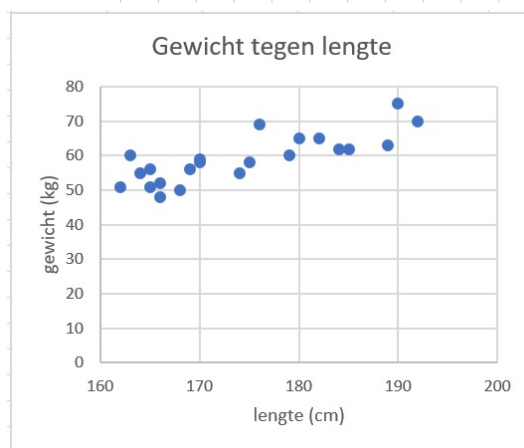
- gemiddelde en standaardafwijking van een dataset bepalen (ook met behulp van Excel);
- werken met grafieken in Excel.

Verkennen

Opgave V1

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud heb je gegevens nodig. Op het werkblad [LengteGewicht22Studenten.xls](#) vind je de gegevens van een groep van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.

- Welke drie gegevens zijn er verzameld?
- Welke afspraken moet je maken bij het verzamelen van deze gegevens? Beschrijf er een paar. (Denk om de manier van meten!)
- Bekijk het spreidingsdiagram. Trek je op grond van de gegevens op het werkblad de conclusie dat er zo'n verband bestaat? En is dat dan uitsluitend een statistisch verband of is het ook een oorzakelijk verband, m.a.w. wordt een groter gewicht veroorzaakt door een grotere lengte?



Figuur 17.1

Uitleg 1

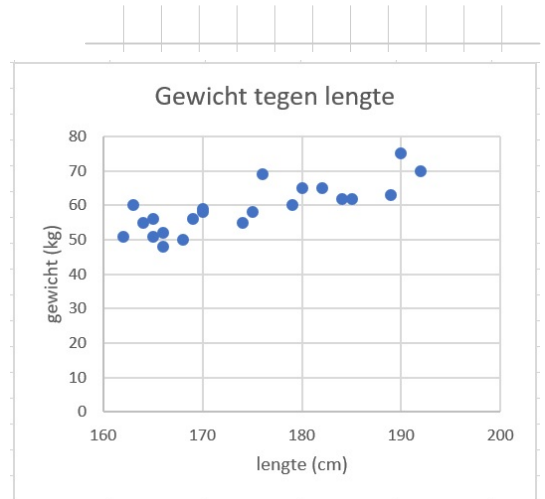
Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad [LengteGewicht22Studenten.xls](#) vind je de gegevens van een steekproef van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.

Is er binnen deze groep studenten sprake van een verband tussen lengte en gewicht?

Als je de figuur bekijkt, zie je dat bij grotere lengtes vaak ook grotere gewichten horen.

Er lijkt dus een zeker verband te zijn.

Maar de getekende punten liggen zeker niet op één lijn, dus hoe sterk is het verband?



Figuur 17.2

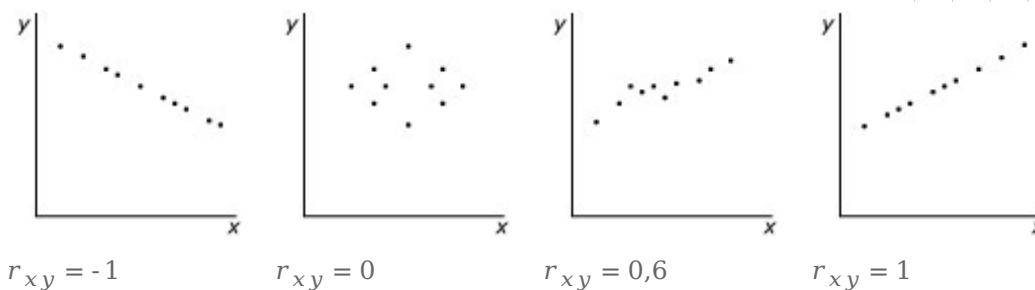
De sterkte van het verband wordt uitgedrukt in de correlatiecoëfficiënt r_{lG} , waarin l de lengte in cm en G het gewicht in kg is. r_{lG} is een maat voor de gemiddelde van de afstanden van de punten tot het punt $(\bar{l}, \bar{G})$:

$$r_{lG} = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})(G_i - \bar{G})}{(n-1) \cdot s_l \cdot s_G}$$

Hierin is n het aantal metingen van combinaties (l, G) .

Met behulp van Excel kun je een correlatiecoëfficiënt r_{xy} berekenen.

Hij kan alleen waarden aannemen vanaf -1 tot en met 1. Hoe dichterbij -1 of 1, hoe beter de correlatie. Bij $r_{xy} = 0$ is er geen enkele correlatie en dus geen verband tussen x en y .



Figuur 17.3

Opgave 1

Gebruik het werkblad [LengteGewicht22Studenten.xls](#) in [Uitleg 1](#).

- Maak zelf zo'n spreidingsdiagram.
- Hoe zie je in het spreidingsdiagram dat er een zeker verband tussen l en G bestaat?
- Bereken de correlatiecoëfficiënt r_{lG} in twee decimalen nauwkeurig.

Je hebt de waarde van r_{IG} berekend. Maar hoe weet je nu of deze correlatie genoeg is om vast te stellen dat er een verband is? Daarvoor gebruik je deze **r-tabel**. Als jouw waarde van r_{IG} groter is dan die in de tabel, dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.

- d Kun je vaststellen dat er een duidelijk verband is tussen lengte en gewicht van deze jongeren met een betrouwbaarheid van 99%?

Opgave 2

Je hebt in de voorgaande opgave een verband aangetoond tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Daarbij gebruikte je een steekproef van 22 studenten.

- a Geef commentaar op deze steekproef.
Stel je voor dat je met een aselechte steekproef te maken hebt. En neem ook aan dat de groep representatief is voor studenten van 15 tot 17 jaar oud. Er is een duidelijk verband gevonden.
- b Is er nu sprake van een oorzakelijk verband, dus is de lengte oorzaak van het gewicht?
Of is er alleen een statistisch verband? Licht het antwoord toe.

Uitleg 2

Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls** vind je de gegevens van een steekproef van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.

Er is binnen deze groep studenten sprake van een verband tussen lengte en gewicht, maar hoe beschrijf je dit verband?

Je ziet in de figuur hoe Excel automatisch het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt berekent en een best passende lijn door de puntenwolk trekt. Deze lijn heet de regressielijn. En r^2 heet de determinatiecoëfficiënt.

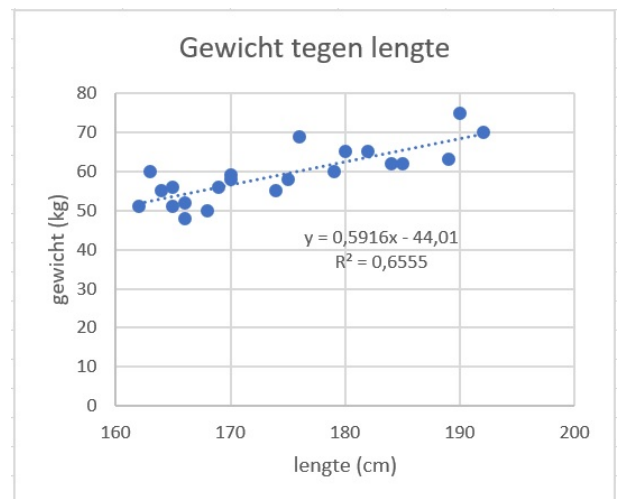
De regressielijn gaat door $(\bar{l}, \bar{g}) = (174,3; 59,1)$ en de hellingswaarde (richtingscoëfficiënt) is:

$$a = r_{IG} \cdot \frac{s_G}{s_l} = 0,81 \cdot \frac{7,0}{9,5} \approx 0,60$$

Daarmee vind je de formule voor de regressielijn: $G \approx 0,60 \cdot l - 45,48$.

In Excel vind je afwijkende waarden omdat daar met veel meer decimalen wordt gerekend.

De determinatiecoëfficiënt $r_{IG}^2 \approx 0,66$ geeft aan dat ongeveer 66% van het gewicht wordt veroorzaakt door de lengte.



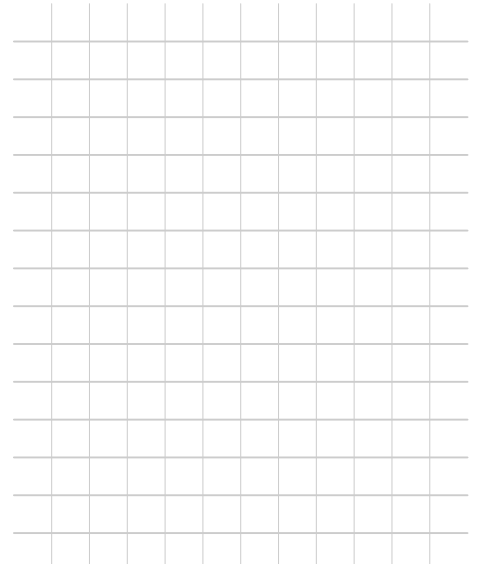
Figuur 17.4



Opgave 3

Je ziet in **Uitleg 2** hoe Excel een lijn door de puntenwolk trekt en de bijbehorende formule berekent.

- Doe dit zelf met het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls**.
- Je ziet in de uitleg hoe je zelf de formule voor de trendlijn kunt berekenen.
Voer die berekening uit.
Je kunt nu met behulp van de gevonden regressielijn (trendlijn) voorspellingen doen.
- Hoe zwaar zou iemand van 2,00 m volgens de regressielijn moeten zijn?



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **spreadsdiagram** van twee statistische variabelen x en y zet je alle combinaties (x,y) als een **puntenwolk** in een assenstelsel. Of er een sterk **lineair statistisch verband** bestaat tussen de variabelen wordt bepaald door de **correlatiecoëfficiënt** r_{xy} . Er geldt in een steekproef van grootte n :

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1) \cdot s_x \cdot s_y}$$

- Als $r_{xy} = 1$ dan is er een perfecte positieve correlatie tussen x en y . De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een stijgende lijn.
- Als $r_{xy} = 0$ dan is er geen enkele correlatie tussen x en y .
- Als $r_{xy} = -1$ dan is er een perfecte negatieve correlatie tussen x en y . De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een dalende lijn.

De correlatie tussen x en y wordt beter naarmate r_{xy} dichterbij 1 of -1 ligt.

Gebruik de **r-tabel**.

Als bij positieve correlatie $r_{xy} > r_{\text{tabel}}$ dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.

Als bij negatieve correlatie $r_{xy} < r_{\text{tabel}}$ dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.

In Excel wordt vaak de determinatiecoëfficiënt r_{xy}^2 gegeven.

Een verband waarbij de toename (of afname) van de éne variabele een gevolg is van een toename (of afname) van de andere heet een **causaal verband**: er is dan sprake van oorzaak en gevolg. Een statistisch verband tussen twee variabelen hoeft niet causaal te zijn. Andere variabelen kunnen de oorzaak zijn dat er bij twee variabelen een statistisch verband optreedt. Het is zeker niet zo, dat een grotere lengte veroorzaakt dat je daardoor automatisch ook een groter gewicht hebt.

Als de correlatie tussen de variabelen x en y groot genoeg is, kun je een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen die het verband tussen x en y weergeeft. Deze formule heeft als grafiek een rechte lijn, de **regressielijn** van y op x . Zo'n regressielijn gaat door het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ en heeft als richtingscoëfficiënt (hellingsgetal):

$$a = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Deze richtingscoëfficiënt heet wel de **regressiecoëfficiënt** van y op x . Met behulp van deze regressiecoëfficiënt en het feit dat de regressielijn door $(\bar{x}, \bar{y})$ gaat, kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

De makers van een veelgebruikte weerapp en de uitbaters van een dierentuin doen een onderzoek naar een eventueel verband tussen de kans op regen die de weerapp voor een zaterdag voorspelt en het aantal dierentuinbezoekers op die zaterdag.

Na een aantal weken hebben ze de volgende gegevens verzameld.

Aantal bezoekers dierentuin tegen de regenkans								
regenkans (%)	95	5	20	95	85	55	5	30
aantal bezoekers	876	3102	3263	1278	1491	2984	4312	4916

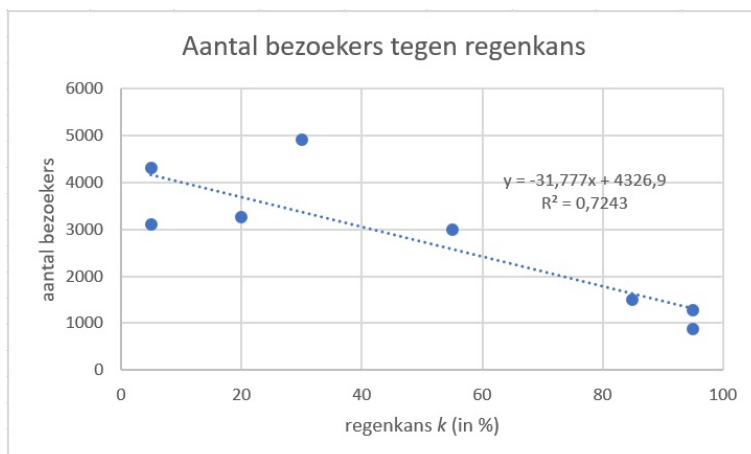
Tabel 17.1

Maak hiervan een spreidingsdiagram en stel een formule op voor de regressielijn.

Hoe groot is de correlatiecoëfficiënt van de kans op regen k en het aantal bezoekers a in deze steekproef?

Antwoord

Laat Excel de determinatiecoëfficiënt r_{ka}^2 berekenen en de formule voor de trendlijn opstellen.



Figuur 17.5

De regressielijn is $a = -32 \cdot k + 4327$. (Afronden op gehele bezoekers lijkt logisch.)

Je vindt: $r_{ka} \approx -0,851$.

Opgave 4

Gebruik de gegevens in **Voorbeeld 1**.

- Maak zelf het spreidingsdiagram en laat Excel de formule van de regressielijn opstellen en de determinatiecoëfficiënt berekenen.
- Bereken de correlatiecoëfficiënt.
- Wat betekent het dat de correlatiecoëfficiënt een negatief getal is?
- Je kunt de formule van de regressielijn ook berekenen met behulp van de correlatiecoëfficiënt en de gemiddelden en de standaarddeviaties. Laat zien hoe.
- Is er met een betrouwbaarheid van 95% een verband tussen k en a ?
- Voorspel op basis van de regressielijn het aantal bezoekers bij een regenkans van 100%.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

Behalve de regenkans wordt ook het voorspelde aantal uren zon bijgehouden. Bij de dierentuin zit ook een vennetje waarin kinderen kunnen zwemmen en dit aantal kinderen heeft men bijgehouden:

aantal uren zon	0,7	7,6	2,3	1,1	2,4	4,9	8,1	3,6
aantal zwemmende kinderen	6	802	121	6	48	123	964	32

Tabel 17.2

- Bereken de correlatiecoëfficiënt.
- Is dit een betekenisvol correlatieonderzoek? Zegt de correlatiecoëfficiënt in dit geval ook echt iets over een mogelijk verband tussen het voorspelde aantal uren zon en het aantal kinderen dat gaat zwemmen?

Voorbeeld 2

Om bij iemand bloedarmoede aan te tonen wordt vooraf spectrofotometrisch het ijzergehalte in serum bepaald.

Van een kalibratielijns worden de absorptiewaarden gemeten, zie tabel.

Maak hiervan een spreidingsdiagram en bereken de bijbehorende correlatiecoëfficiënt.

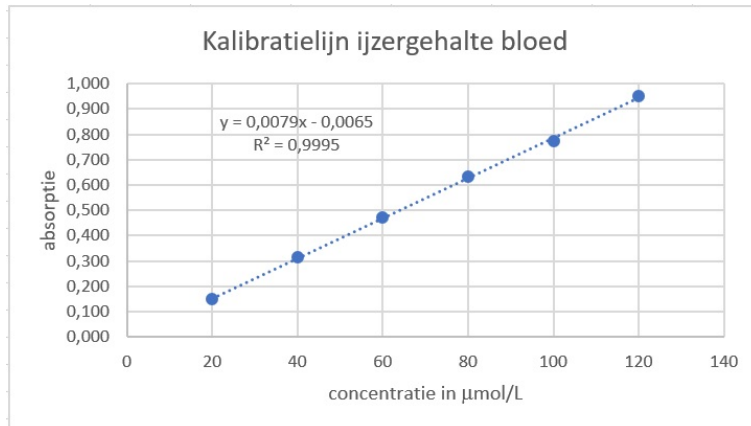
Stel een formule op voor de regressielijn van de absorptiewaarde a afhankelijk van de concentratie C in $\mu\text{mol/L}$ en bepaal met behulp daarvan het ijzergehalte van iemand waarbij een absorptiewaarde van 0,814 wordt gemeten.

monster	concentratie in $\mu\text{mol/L}$	absorptie
1	20	0,150
2	40	0,313
3	60	0,471
4	80	0,631
5	100	0,774
6	120	0,951

Tabel 17.3

Antwoord

Gebruik Excel en je vindt dit.



Figuur 17.6

De correlatiecoëfficiënt is daarom $r_{Ca} \approx \sqrt{0,9995} \approx 0,9997$ en er is een vrijwel perfecte positieve correlatie.

Het verband tussen a en C is: $a \approx 0,0079 \cdot C - 0,0065$.

Als bij iemand $a = 0,814$ wordt gemeten, dan is

$$0,814 \approx 0,0079 \cdot C - 0,0065.$$

Dit geeft $C \approx 103,9 \mu\text{mol/L}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een kalibratielijlijn opzet om het ijzergehalte in het bloed te meten.

- Voer zelf de berekening van de correlatiecoëfficiënt en de formule voor de regressielijn uit.
- Laat zien dat als $a = 0,814$ het ijzergehalte $C \approx 103,9 \mu\text{mol/L}$ is.
- Waarom vind je hier een r_{Ca} die vrijwel 1 is?

Oefenen

Opgave 7

Van 100 vrouwen zijn de lichaamsmaten opgemeten en vergeleken met hun lengtes. Hier zie je een tabel met de gevonden correlatiecoëfficiënten.

Gebruik de **r-tabel**.

	gewicht	bovenwijdte	taille	heup	ruglengte	rugbreedte	vuistomvang	kniehoopte	voetlengte
lengte	0,2124	-0,0779	-0,1578	-0,0107	0,5933	0,0647	0,2668	0,8263	0,6737

Tabel 17.4

- Welke variabele heeft de sterkste samenhang met de lengte?
- Welke variabelen hebben met een betrouwbaarheid van 99% een positieve correlatie met de lengte?
- Welke variabelen hebben vrijwel geen correlatie met de lengte?

Opgave 8

Om te onderzoeken of er enig verband bestaat tussen de lengte van een vader en die van zijn zoon zijn de lengtes van 12 vaders en die van hun oudste zoons gemeten op het moment dat die zoons volwassen werden. De gegevens staan in deze tabel.

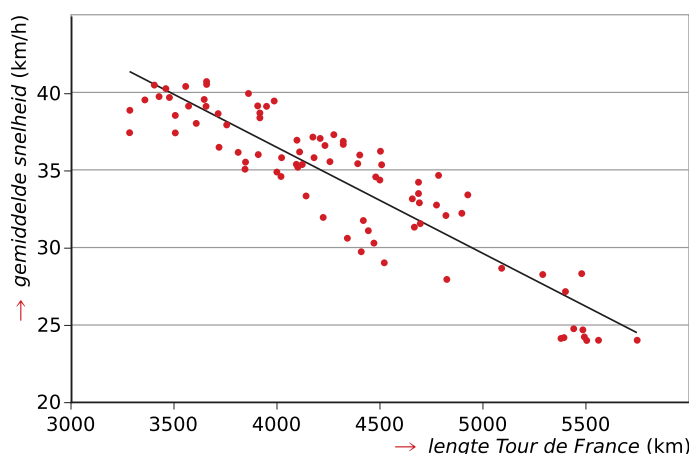
lengte vader v in cm	173	168	178	170	180	165	185	175	180	178	183	188
lengte zoon z in cm	180	175	180	173	183	175	180	173	188	178	180	185

Tabel 17.5

- Teken een spreidingsdiagram (een puntenwolk) bij deze gegevens.
- Bereken de correlatiecoëfficiënt in drie decimalen nauwkeurig. Is er met 95% betrouwbaarheid sprake van een positieve correlatie?
- Stel een vergelijking op voor de regressielijn van z afhankelijk van v .
- Een vader van 1,95 m lengte krijgt een zoon. Hoe lang zal die zoon naar verwachting worden?

Opgave 9

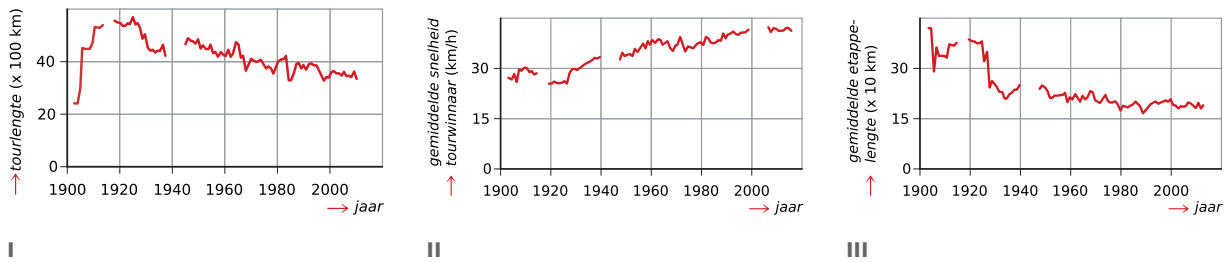
In deze figuur staan twee statistische variabelen. Op de horizontale as staat de totale lengte van de Tour de France in kilometer. Op de verticale as staat de gemiddelde snelheid van de winnaar.



Figuur 17.7

- Welke samenhang is er tussen de lengte van de Tour de France en de gemiddelde snelheid van de winnaar?

Bekijk de drie grafieken:



Figuur 17.8

Twee van de grafieken kun je combineren tot een spreidingsdiagram.

- Hoe komt het dat je deze grafieken kunt combineren tot een spreidingsdiagram?
- De drie grafieken hebben allemaal twee gaten. Wat betekent dit en wat is de oorzaak?
- Welke twee (van de drie) grafieken tonen gecombineerd het gegeven spreidingsdiagram?
- Geef drie redenen waarom de gemiddelde snelheid van de winnaar los staat van de tourlengte.

Opgave 10

Bekijk de tabel. In een Amerikaans laboratorium heeft men proeven gedaan waarbij gelet werd op het verband tussen de hoogte van de bewaartemperatuur T in graden Fahrenheit en de werkzaamheid W van een bepaald geneesmiddel. Bij temperaturen van 30° , 50° , 70° en 90° (Fahrenheit) werden drie porties van gelijk gewicht uit eenzelfde productie 20 dagen bewaard. Na deze periode werd op identieke wijze de werkzaamheid van de porties vastgesteld. De werkzaamheid werd uitgedrukt in percentages van de werkzaamheid zoals die was voor het bewaren.

bewaartemperatuur T ($^\circ\text{F}$)	30	50	70	90
werkzaamheid W (%)	39, 42, 35	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21

Tabel 17.6

- In hoeverre is er met een betrouwbaarheid van 99% sprake van correlatie tussen bewaartemperatuur T en werkzaamheid W ?
- Geef een statistisch verantwoorde schatting voor de werkzaamheid van het geneesmiddel bij een bewaartemperatuur van 0° Fahrenheit.



Toepassen

Je kunt met behulp van correlatie en een regressielijn ook **meetmethoden vergelijken**.

Hier zie je de resultaten van drie laboranten die de concentratie eiwit in eiersalade elk op hun eigen wijze hebben gemeten vanuit dezelfde 20 monsters.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A																			
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66	65	66	63	64	67	68	65	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B																			
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66	65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C																			
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66	67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 17.7

Je kunt hierbij een spreidingsdiagram maken en de correlatiecoëfficiënt en de regressielijn berekenen.

Als twee meetmethoden vergelijkbare resultaten hebben zal er een hoge positieve correlatie tussen beide bestaan.

Opgave 11

Bekijk de twee sets gepaarde gegevens in **Toepassen** van de laboranten A en B.

- a Maak een bijpassend spreidingsdiagram en zet daarin de regressielijn.

Zet de resultaten van laborant A op de horizontale as.

- b Bereken de correlatiecoëfficiënt en stel met een betrouwbaarheid van 95% vast of beide meetmethoden overeen komen.

- c Maakt het verschil als je de gegevens van laborant A op de verticale as van het spreidingsdiagram zet?

De 17e meting van laborant A lijkt nogal een uitschieter te zijn. Hij doet die meting over en vindt nu 65% eiwit.

- d Laat zien dat dit een grote invloed heeft op de correlatiecoëfficiënt.

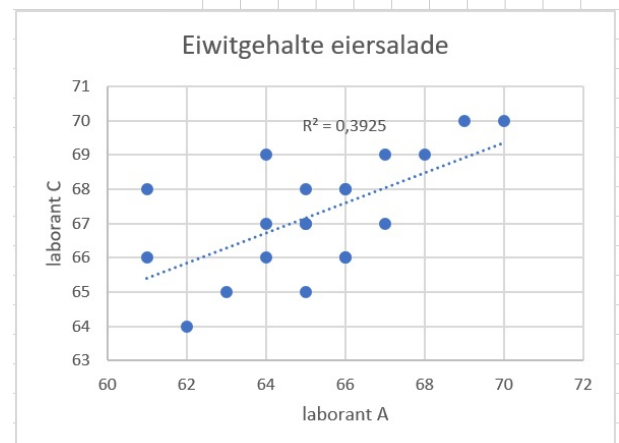
Opgave 12

Hier zie je het spreidingsdiagram met de gegevens van laborant C vergeleken met die van laborant B.

- a Bereken de correlatiecoëfficiënt en ga na dat ook deze correlatie nog steeds voldoet aan de 95%-betrouwbaarheidsgrens.

Kijk je echter naar de gegevens, dan kun je moeilijk volhouden dat de metingen overeen komen.

- b Leg dat uit en verklaar wat er waarschijnlijk aan de hand is.

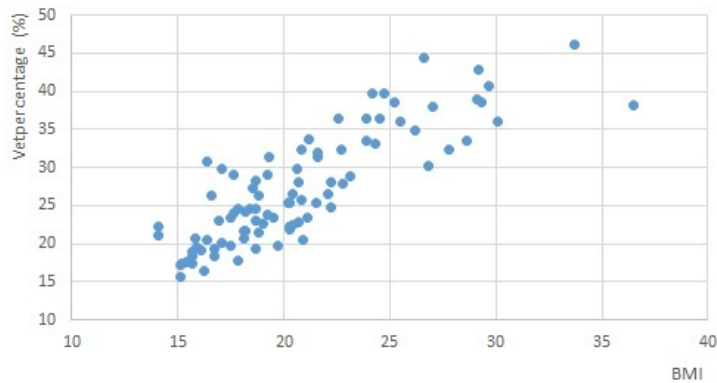


Figuur 17.9

Testen

Opgave 13

Bekijk de puntenwolk BMI-Vetpercentage. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek onder 90 jongeren. BMI is een getal dat samenhangt met lengte en gewicht, vetpercentage is het percentage van het lichaamsgewicht dat bestaat uit vet.



Figuur 17.10

- Is er een statistische samenhang? Geef een schatting van de correlatiecoëfficiënt.
- Is er een oorzakelijk verband?
- Bij deze puntenwolk kun je een trendlijn tekenen die door (15,17) en (30,42) gaat. Welke formule hoort bij deze trendlijn?
- Voorspel met behulp van de gevonden trendlijn het vetpercentage van iemand met een BMI van 21.

Opgave 14

Van een tiental personen worden reactietijden gemeten. Iemand onderzoekt of de reactietijd t_G op een geluidssignaal afhangt van de reactietijd t_L op een lichtsignaal. Beide reactietijden zijn in milliseconden.

- Teken een bijpassend spreidingsdiagram en bepaal de correlatiecoëfficiënt.
- Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat er inderdaad een positieve correlatie bestaat?
- Iemand reageert op een geluidssignaal na 300 ms. Hoe snel zal zij op een lichtsignaal reageren?

persoon	t_L	t_G
1	305	280
2	240	205
3	360	350
4	230	230
5	430	340
6	250	220
7	310	290
8	420	390
9	260	265
10	295	245

Tabel 17.8

17.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het trekken van conclusies uit metingen in steekproeven aan bod gekomen. Bij het doen van een uitspraak over één statistische variabele gaat het bij de juistheid om een z -toets of een t -toets en bij de spreiding om een f -toets. Bij twee statistische variabelen gaat het om het vinden van een lineair verband tussen beide en het vaststellen van de sterkte van de samenhang.

Je hebt nu alle theorie van **Conclusies trekken** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- hypothese toetsen, enkelzijdig of dubbelzijdig — significantieniveau — kritieke gebied — nulhypothese en alternatieve hypothese — normale toets van het gemiddelde, z -toets
- Student's t -verdeling — vrijheidsgraad — t -toets van het gemiddelde
- Fisher's f -verdeling — f -toets van de spreiding
- spreidingsdiagram, puntenwolk — correlatiecoëfficiënt — regressielijn

Activiteitenlijst

- het gemiddelde van een normaal verdeelde populatie toetsen met een bepaalde betrouwbaarheid als de populatiestandaarddeviatie bekend is met behulp van een steekproef;
- het gemiddelde van een normaal verdeelde populatie toetsen met een bepaalde betrouwbaarheid als de populatiestandaarddeviatie niet bekend is met behulp van een kleine steekproef;
- de standaarddeviaties van twee steekproeven uit een normaal verdeeld populatie met een bepaalde betrouwbaarheid vergelijken;
- bij een spreidingsdiagram de correlatiecoëfficiënt berekenen en interpreteren — bij een spreidingsdiagram een regressielijn berekenen en daarmee voorspellingen doen.



Testen

Opgave 1

Volgens de informatie op een pakje drinkyoghurt zou dit gemiddeld 12,5 gram suiker bevatten. Een onderzoeksbureau beweert dat er in werkelijkheid veel meer suiker in de pakjes zit.

De leverancier van de pakjes besluit een steekproef van 50 pakjes te nemen. De pakjes uit de steekproef bevatten gemiddeld 16,4 gram suiker.

Neem aan dat de hoeveelheid per pakje normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 3,1 gram.

Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de informatie die op de pakjes staat te verwerpen. Neem een significantieniveau van 1%.

Opgave 2

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald en in een tabel gezet.

Je mag aannemen dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.

- Formuleer de hypothesen in deze situatie.
- Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het percentage rietsuiker in de steekproef. Rond af op drie decimalen.
- Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0,10$.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

Tabel 17.1

Opgave 3

Artsen schrijven aspirines voor aan hartpatiënten om te voorkomen dat bloedklonters aderen zullen verstoppen. Bij 12 volwassen mannen is onderzocht of het gebruik van aspirines een positieve invloed heeft op klontervorming in het bloed, dat wil zeggen, dat de stollingstijd groter wordt.

De stollingstijd (in minuten) werd gemeten vóórdat de mannen aspirines innamen en drie uur na het innemen van twee aspirines, zie de tabel.

stollingstijd vooraf	11,3	10,9	11,0	11,2	11,8	11,3	12,3	12,8	13,0	12,0	12,0	12,3
stollingstijd achteraf	11,7	11,3	11,5	11,5	11,6	10,7	12,7	13,5	12,0	12,5	12,3	12,5

Tabel 17.2

- Onderzoek met behulp van een f -toets of beide steekproeven even precies zijn met een betrouwbaarheid van 95%.
- Onderzoek met behulp van een t -toets of de stollingstijd van het bloed significant is toegenomen. Gebruik een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 4

Bekijk de tabel met de (geschatte) woordenschat die eentalige Nederlandse kinderen hebben.

Wat mag je, op basis van de gegevens uit deze tabel, concluderen omtrent het verband tussen de leeftijd en de woordenschat van een eentalig Nederlands kind? En kun je hiermee bijvoorbeeld voorspellen hoe groot de woordenschat van een volwassene is?

bron: www.cbsdeakker.nl

leeftijd	woordenschat
4	3000
5	3800
6	4500
7	5200
8	6000
9	8500
10	11000
11	14000
12	17000

Tabel 17.3

Opgave 5

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Zij lieten daarbij een grote verscheidenheid aan lichaamsmaten opmeten van 5001 vrouwen. Zij vonden onder andere een sterke correlatie tussen de taille (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de navel) en de bovenwijdte (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de borst). De gevonden correlatiecoëfficiënt bedroeg ongeveer 0,9058.

In hun rapport 'De juiste maat' geven zij voor de bovenwijdte b een gemiddelde van 97,99 cm met een standaardafwijking van 10,12 cm en voor de taille t een gemiddelde van 80,45 cm met een standaardafwijking van 10,80 cm.

- Welke betekenis heeft deze hoge correlatie tussen b en t voor een spreidingsdiagram van deze twee variabelen?
- Stel een vergelijking op van de regressielijn voor b .
- Geef een statistisch verantwoorde schatting van de bovenwijdte van een vrouw met een taille van 90 cm.

Toepassen

Opgave 6: Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram. Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking σ van 4 gram.

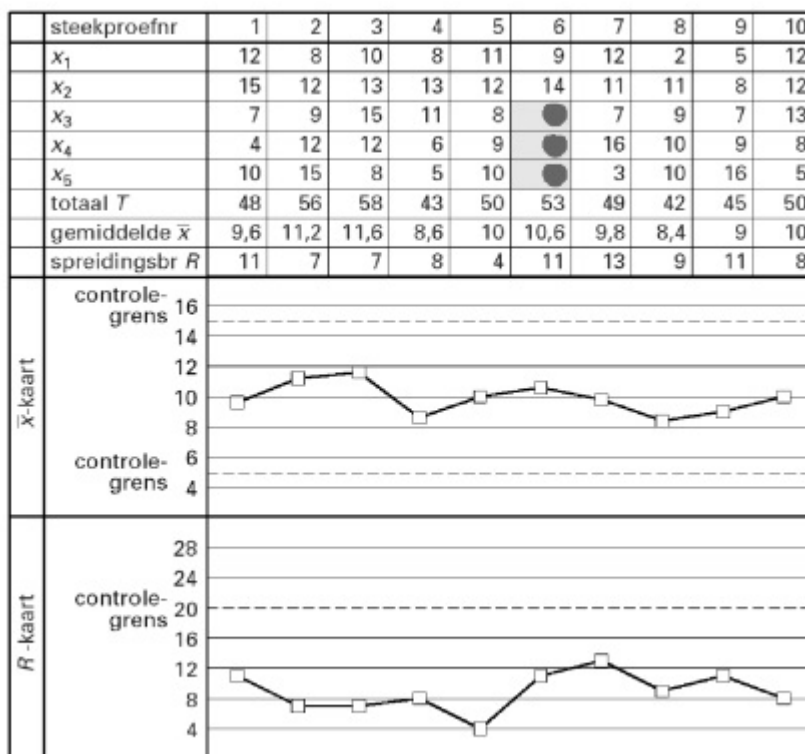
- Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselechte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

- b** Bereken het percentage steekproeven waarvan het totale gewicht minder is dan 2525 gram in één decimaal nauwkeurig.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting). Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\bar{x}/R$ -kaart. Op de $\bar{x}/R$ -kaart hieronder staan de meetresultaten van 10 steekproeven. Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 . Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9.

Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6. De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is $515 - 504 = 11$ gram.



Figuur 17.1

De derde steekproef heeft de grootste gemiddelde afwijking en de achtste steekproef de laagste gemiddelde afwijking.

- c** Vergelijk de precisie van beide steekproeven met een betrouwbaarheid van 95%.

- d** Vergelijk ook de juistheid van de derde en de achtste steekproef met een betrouwbaarheid van 95%.

Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.

- e Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\bar{x}/R$ -kaart let men erop of $\bar{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm.

Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\bar{x}$ niets mis is.

- f** Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

a

absolute frequentie 28
absolute onnauwkeurigheid 19
absolute spreiding 51
actiegrens 111
alternatieve hypothese 128
 f -verdeling 145
aselect 9

b

beelddiagram 28
beschrijvende statistiek 9
betrouwbaarheid 101
betrouwbaarheidsinterval 101
boxplot 40

c

causaal verband 154
centrummaat 40
cirkeldiagram 28
conclusie 9
controlekaart 110
correlatiecoëfficiënt 154

d

data 9
de t -verdeling 138
diagram 28

f

frequentietabel 28
frequentieverdeling, vorm 67

g

gaa 51
gemiddelde 40, 79

h

hypothese toetsen 128

i

iqr 51
indeling in klassen 28

j

juiste metingen 19
juistheid 40

k

kaartdiagram 29
kritiek gebied 128
kromme van gauss 79
kwalitatieve variabelen 9

kwantitatieve variabelen 9

l

lijndiagram 28
lineair statistisch verband 154
linkszijdige toets 128

m

meetfout 19
meetonnauwkeurigheid 19
modale klasse 40

n

normale statistische variabele 89
normale verdeling 79, 89
nulhypothese 128

o

ordenen 9

p

parallax 19
persoonlijke fout, blunder 19
populatie 9
populatiegemiddelde 101
precisie 52
precisie metingen 19
puntenwolk 29, 154

r

rechtszijdige toets 128
regelkaart 110
regressiecoëfficiënt 155
regressielijn 155
relatieve frequentie 28
relatieve onnauwkeurigheid 19
representatief 9

s

shewhartkaart 110
significantieniveau 128
spreidingsdiagram 29, 154
spreidingsmaat 51
staafdiagram 28
stam-blad-diagram 29
standaardafwijking 79
standaarddeviatie 79
standaardnormale verdeling 90
statistisch onderzoek 9

statistische variabele **9**
steekproef **9**
steekproefgemiddelde **101**
steekproevenverdeling **101**
systematische onnauwkeurigheid **19**

t
toevallige onnauwkeurigheid **19**
tolerantiegrens **111**
tweede kwartiel **40**

tweezijdige toets **128**

u
uitbijter **52**

v
variantie **79**
vrijheidsgraad **138**

w
waarschuwingsgrens **111**

α
 α **128**

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All



www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

