

Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel breed (KS 1348)

Katern 1

Inhoud

Algebra

Lineaire verbanden

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

1 Algebra 5

1.1 Rekenen met variabelen 6

1.2 Breuken 13

1.3 Haakjes 19

1.4 Machten 27

1.5 Wortels 35

1.6 Formules herleiden 42

1.7 Totaalbeeld 49

2 Lineaire verbanden 53

2.1 Lineaire functies 54

2.2 Lineaire verbanden 62

2.3 Stelsels vergelijkingen 70

2.4 Lineaire modellen 78

2.5 Totaalbeeld 86

Register 90

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Algebra

1.1	Rekenen met variabelen	6
1.2	Breuken	13
1.3	Haakjes	19
1.4	Machten	27
1.5	Wortels	35
1.6	Formules herleiden	42
1.7	Totaalbeeld	49

1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met variabelen (met letters), variabelen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

Voorkennis

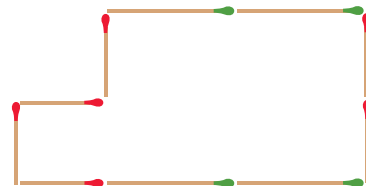
- het begrip variabele (als letter) gebruiken in formules, in vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers (groen) met een lengte van a cm en korte lucifers (rood) met een lengte van b cm.

- Kies $a = 3$ cm en $b = 2$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.
- Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 4$ cm en bereken opnieuw de omtrek en de oppervlakte van de figuur.
- Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.



Figuur 1.1

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm.

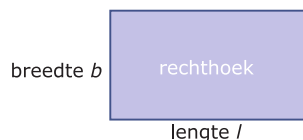
- Teken een rechthoek met lengte l en breedte b . Schrijf de formules voor de oppervlakte en de omtrek van deze rechthoek in je figuur.
- Gebruik nu de gegeven waarden voor de oppervlakte en de omtrek en zoek waarden voor l en b die voldoen.

Uitleg

Van een rechthoek zijn lengte en breedte onbekend, je kunt er dus nog verschillende getallen voor kiezen. De lengte en de breedte zijn variabel, veranderlijk. Je noemt de lengte en de breedte daarom variabelen. Variabelen stel je in de wiskunde voor door letters, meestal kleine letters en cursief gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b . Voor deze rechthoek geldt dan:

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de afspraak dat je het maalteken weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.



Figuur 1.2

Verder gebruik je bij het rekenen met variabelen dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

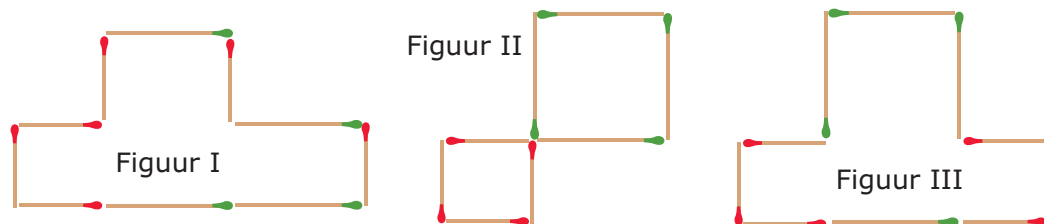
- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De gelijksoortige termen $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken.
- Maar zo kun je $2a + 5b$ niet korter schrijven. De ongelijksoortige termen $2a$ en $5b$ kun je niet optellen of aftrekken.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. (De wisseleigenschap voor optellen en vermenigvuldigen.)
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat herschrijven of herleiden van zo'n uitdrukking. Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met variabelen rekt. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De lange lucifers hebben lengte a , de korte hebben lengte b .



Figuur 1.3

- Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?
- Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?
- Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

- Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.
- Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.
Herleid nu zelf:
- $18a + 6b + 10a + 4b$

- d $12p + 6q + 10p + 4p$
 e $x + 3y + 5y + 8x + 7y$
 f $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

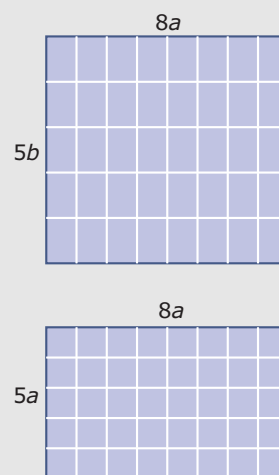
Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg.

Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken:
 $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken:
 $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je niet korter schrijven.
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Verder maak je regelmatig gebruik van de **wisseleigenschap** van optellen en vermenigvuldigen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en is $0x = 0$ en zo'n losse nul laat je weg.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

De omtrek van de bovenste rechthoek is
 $8a + 5b + 8a + 5b = 16a + 10b$.

De omtrek van de onderste rechthoek is
 $8a + 5a + 8a + 5a = 26a$.

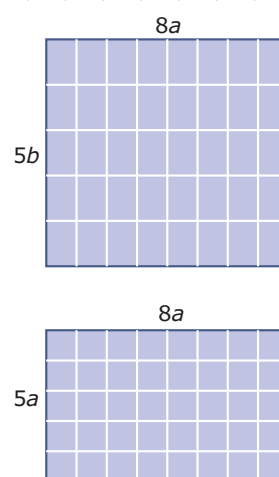
Je ziet hoe gelijksoortige termen worden samengenomen en ongelijksoortige niet.

De oppervlakte van de bovenste rechthoek is
 $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$.

Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte ab zijn.

De oppervlakte van de onderste rechthoek is
 $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte a^2 zijn.



Figuur 1.5



Opgave 3

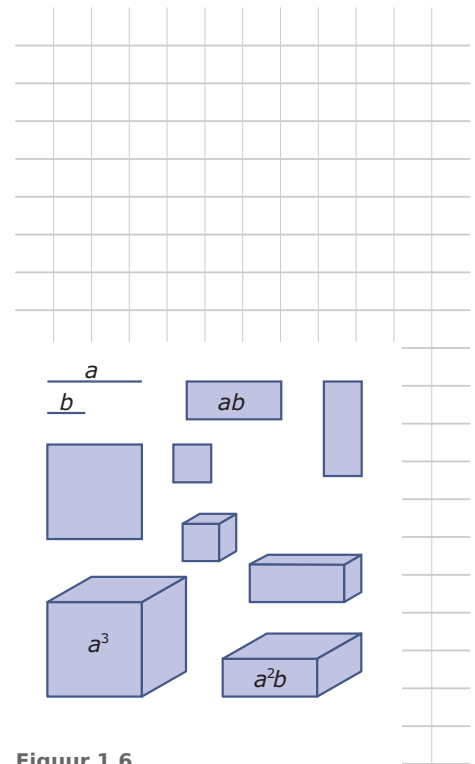
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen optelt. Herleid nu zelf:

- a $3a + 12b + 2a + 4b$
- b $8p + q + 2p + q$
- c $4a + 3b + 4a + a$
- d $p + 6p + 5q$

Opgave 4

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het **werkbblad**.

- a Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- b Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- c Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?



Figuur 1.6

Opgave 5

Herleid:

- a $7b + b$
- b $2abc + 8abc + bac$
- c $12p \cdot 4q + 3qp$
- d $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$
- e $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$
- f $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen vermenigvuldigt en soms daarna weer optelt. Herleid nu zelf:

- a $4a \cdot 3b$
- b $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$
- c $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$
- d $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

Voorbeeld 2

Bij het herleiden van uitdrukkingen met variabelen kun je ook met negatieve getallen werken en/of termen van elkaar aftrekken. Je ziet hier enkele voorbeelden.

- $9a - 7a = 9a + -7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a + -6b + -1a + 5b = 5a + -1a + -6b + 5b = 4a + -1b = 4a - b$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$



Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je met mintekens werkt bij het optellen en aftrekken van termen. Herleid nu zelf:

- a $-7p - 5p$
- b $3a - 5b + 2a + 7b$
- c $3 + 2x - 5x - 7$

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je met mintekens werkt bij het herleiden als er ook vermenigvuldigingen voorkomen. Herleid nu zelf:

- a $-7p \cdot -5p$
- b $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$
- c $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 9

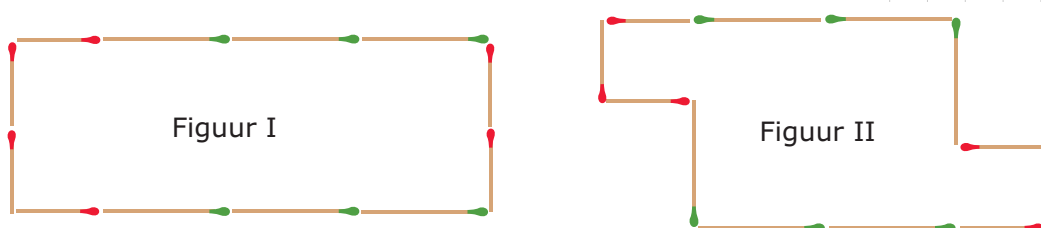
Herleid:

- a $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$
- b $-5xy - 3x \cdot -2y$
- c $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$
- d $-3 - 2p - 6 - 8p$
- e $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$
- f $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



Figuur 1.7

- a Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot ze zo kort mogelijk zijn.
- b Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 11

Herleid:

- a $7x + 20x$
- b $7x \cdot 20x$
- c $7x \cdot 20y$



- d** $6x - x$
e $6x \cdot -10xy$
f $6x \cdot -20x - 15x \cdot -10x$
g $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$
h $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 12

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $r = -2$:

- a** $4p \cdot -2q + 6q \cdot p$
b $3p \cdot -5q \cdot r$
c $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$
d $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$
e $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$
f $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$

Opgave 13

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het **Practicum** vind je twee oefenvenster. In het linker venster oefen je het samennemen van gelijksoortige termen, in het rechter venster oefen je het vermenigvuldigen van variabelen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

Toepassen

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm . Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

Dergelijke problemen kun je oplossen door gewoon getallen te proberen, zeker als de uitkomsten gehele getallen zijn.

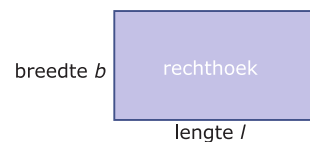
Maar ook dan is het vaak handig om de gegevens eerst te 'vertalen' naar wiskundige uitdrukkingen. Zowel de lengte als de breedte zijn hier onbekend. Je kunt er daarom variabelen voor invoeren: noem de lengte bijvoorbeeld l en de breedte b .

De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 22$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.

Opgave 14



Figuur 1.8

Het probleem van **Uitleg** wordt nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

- De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.
- Maak een tabel zoals die hiernaast.
- Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?
- Welke twee getallen voldoen aan beide formules?
- In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2	12	24	14
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

Tabel 1.1

Opgave 15

Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm.

Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Testen

Opgave 16

Herleid:

- $2x - 3y + 4x + 5y$
- $2x \cdot -3y + 4x \cdot 5y$
- $2x \cdot -3y \cdot 4x \cdot 5y$

Opgave 17

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo kort mogelijk.

- $4a + 5b - 3a - 7b$
- $p^2 - 2pq + p^2 + 3pq$
- $-2ab \cdot b + 2a^2 \cdot b - 2a \cdot -b^2$
- $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

1.2 Breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken met variabelen vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- rekenen met breuken met variabelen.

Voorkennis

- uitdrukkingen met variabelen herleiden;
- rekenen met breuken zonder variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken $\frac{5}{a} / \frac{3}{b}$.
- Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je er voor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 5 en 4 gemeen hebben.
Dat is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 6 en 4 gemeen hebben.
Dat is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.

- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat b en d gemeen hebben.
Dat is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat a en $2a$ gemeen hebben.
Dat is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

En nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig, je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12).
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$).

Belangrijk is nog dat bij breuken de noemer niet 0 kan zijn, want delen door 0 heeft geen betekenis. Daar moet je voortdurend van uit gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} \cdot \frac{3}{b}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} \cdot \frac{3}{5a}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

- Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.
- Tel beide breuken op.
- Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{beide breuken met } b \cdot d \text{ vermenigvuldigen})$$

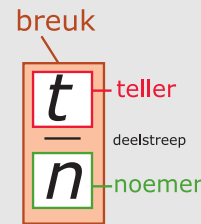
$$\text{Je ziet nu dat } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Dus is delen door een breuk hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Ook daarvan kun je gebruik maken bij delen.

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** van de noemers van de breuken.



Figuur 1.1

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de breuken $\frac{4ab^2}{3ab}$ en $\frac{5b^2}{bc}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.

Neem aan, dat $a \neq 0$, $b \neq 0$ en $c \neq 0$.

Antwoord

Eerst vereenvoudigen:

$$\frac{4ab^2}{3ab} = \frac{4b}{3} \quad (\text{teller en noemer delen door } ab).$$

$$\frac{5b^2}{bc} = \frac{5b}{c} \quad (\text{teller en noemer delen door } b).$$

Nu $\frac{4b}{3}$ en $\frac{5b}{c}$ gelijknamig maken.

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 3 en c is $3c$.

De eerste breuk wordt $\frac{4b}{3} = \frac{4bc}{3c}$ (teller en noemer keer c).

De tweede breuk wordt $\frac{5b}{c} = \frac{15b}{3c}$ (teller en noemer keer 3).

Opgave 4

Vereenvoudig de breuken $\frac{3pq}{5p^2}$ en $\frac{4r}{2p}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.
Neem aan dat $p \neq 0$.

Opgave 5

Maak de volgende breuken gelijknamig.

- a $\frac{16}{4p}$ en $\frac{2}{3}$.
- b $\frac{a^2b}{3a}$ en $\frac{ab^2}{2b}$.
- c $\frac{3k^2l}{6kl}$ en $\frac{3kl}{2k^2}$.

Voorbeeld 2

Gegeven de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4p+3q}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} \div \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} \div \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 6

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- a Bereken de som en het product van beide breuken.
- b Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

- c Bereken de som en het product van beide breuken.
- d Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 7

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.
Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

- a $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$
- b $\frac{-3b}{ab} \div \frac{2a}{a^2}$
- c $\frac{2pq}{p} - \frac{15p}{3}$
- d $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Oefenen

Opgave 8

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- a Bereken de som en het product van beide breuken.
- b Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \div \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

- c Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 9

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

- a $\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}$
- b $\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b}$
- c $\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$
- d $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$
- e $\frac{6}{a} \div \frac{1}{2a}$
- f $\frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Opgave 10

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

- a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$
- b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$
- c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$
- d $\frac{2p}{pq} \div \frac{6}{q}$

Opgave 11

Oefen nu het rekenen met breuken met variabelen via [Practicum](#).

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het 'gewogen gemiddelde' (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden.

In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.

Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...



Figuur 1.2

Opgave 12

Bekijk hierboven het probleem van het berekenen van de gemiddelde snelheid van de vlucht van Amsterdam naar Moskou over de heen en de terugreis samen gerekend.

- a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de **Wikipedia: Harmonisch gemiddelde**: “ De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.”

- b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Testen**Opgave 13**

Reken met de twee breuken $\frac{p}{2q}$ en $\frac{3p}{5q}$.

Neem aan dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- a Bereken de som en het product van beide breuken.
- b Bereken $\frac{p}{2q} - \frac{3p}{5q}$.
- c Bereken $\frac{p}{2q} \div \frac{3p}{5q}$.
- d Neem $p = 4$ en $q = -5$ en bereken som en product van de gegeven breuken.

Opgave 14

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

- a $\frac{2kl}{5lm} - \frac{5lm}{20m^2}$.
- b $\frac{2kl}{5lm} \div \frac{5lm}{20m^2}$.

1.3 Haakjes

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de juiste rekenvolgorde gebruiken wanneer er van haakjes sprake is;
- haakjes wegwerken;
- ontbinden in factoren.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve getallen en breuken.
- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) met uitdrukkingen waarin variabelen voorkomen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.

- Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.
- Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.
- Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.

- Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.
- Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.
- Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

Uitleg

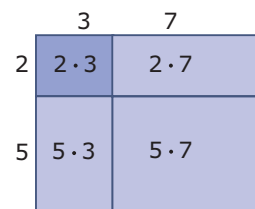
De figuren hiernaast laten zien dat

- $2 \cdot (x + 7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$
Het product van de factoren 2 en $x + 7$ herleid je zo tot de tweeterm $2x + 14$.
- $(x + 5) \cdot (x + 7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$
Het product van de factoren $x + 5$ en $x + 7$ herleid je zo tot de drieterm $x^2 + 12x + 35$.

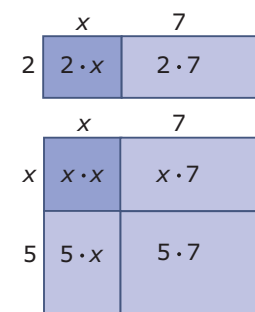
Een product bestaat uit factoren en een optelling (of aftrekking) uit termen. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x + 7$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.



Figuur 1.1



Figuur 1.2



Figuur 1.3

Dit is de verdeeleigenschap of ook wel distributieve eigenschap van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel haakjes wegwerken of haakjes uitwerken. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $2x + 14 = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (x + 7)$
- $x^2 + 12x + 35 = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = (x + 7) \cdot (x + 5)$

Dit heet ontbinden in factoren omdat je nu van een tweeterm of een drieterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de grootste gemeenschappelijke deler van beide termen. Je kunt dan die deler buiten haakjes halen. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je haakjes kunt uitwerken.

- a Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.
- b Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)(x + 4) = 2x^2 + 14x + 12$.
- c Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.
Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes uitwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + -3)$.
- d Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?
- e Werk van $(x + 5)(2x - 3)$ de haakjes uit.
- f Laat met behulp van de verdeeleigenschap zien, dat $-(x - 3) = -x + 3$.

Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

- a $5(a + 2b)$
- b $5a(a - 2b)$
- c $(x + 4)(x + 5)$
- d $(2x - 4)(x - 5)$
- e $3(2p + 4) + 5(4 - p)$
- f $3(2p + 4) - (4 - p)$

Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes uitwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

- a Bekijk de uitdrukking $6x + 9$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- b Bekijk de uitdrukking $8x - 6x^2$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?



- c Bekijk de uitdrukking $2x^2 - 6x + 12$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- d Bekijk de uitdrukking $x^2 + 5x + 6$. Is er een grootste gemeenschappelijke deler van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De figuren hiernaast laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Het product van de factoren a en $b + c$ herleid je zo tot de **tweeterm** $ab + ac$.
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
Het product van de factoren $a + b$ en $c + d$ herleid je zo tot de **vierterm** $ac + ad + bc + cd$.

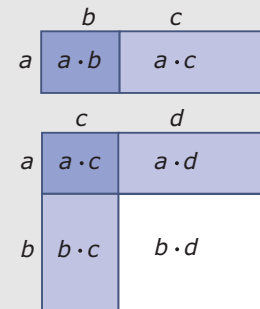
Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de **verdeeleeigenschap** of ook wel **distributieve eigenschap** van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel **haakjes wegwerken**. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren** omdat je nu van een tweeterm of een vierterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD **buiten haakjes halen**. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Hier zie je nog enkele voorbeelden van haakjes wegwerken.

- $3(5 + 2x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2x = 15 + 6x$
- $-2k(k - 4) = -2k(k + -4) = -2k \cdot k + -2k \cdot -4 = -2k^2 + 8k$
- $(p + 3)(p - 4) = (p + 3) \cdot (p + -4) = p \cdot p + -4 \cdot p + 3 \cdot p + 3 \cdot -4 = p^2 - p - 12$
- $2(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - x + x - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$
- $2(q + 1) - 2(2 - q) = 2q + 2 - 4 + 2q = 4q - 2$
- $q(q + 1) - (q - 1) = q^2 + q - q + 1 = q^2 + 1$

Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zo ver mogelijk.

- a $2x + 3(4 - x)$
- b $(2k + 3)(k + 4)$
- c $4x(x - y + 5)$
- d $3(2x - 1)(4 - x)$
- e $2(x^2 - 3x) - x(2 - x)$
- f $(6 - p) \cdot -p + 2(p - 3)$

Opgave 5

Bij het uitwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- a Laat zien, dat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- b Laat zien, dat: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller uitwerken. Pas dit bij het uitwerken en herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

- c $(k - 5)(k + 5)$
- d $(x + 10)^2$
- e $(3p + 1)(1 - 3p)$
- f $(2x - 3)^2$
- g $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$
- h $x(5x - 4) - (x - 2)(x + 2)$

Opgave 6

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

- a Wat is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van x en $x + 1$?
- b Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.
- c Schrijf de breuk zonder haakjes.

Voorbeeld 2

Een uitdrukking zonder haakjes kun je soms ontbinden in factoren door de grootste gemeenschappelijke deler van alle termen buiten haakjes te halen. Hier zie je er enkele voorbeelden van.

- $5x + 10 = 5 \cdot x + 5 \cdot 2 = 5(x + 2)$
- $-5x + 10 = -5 \cdot x - 5 \cdot 2 = -5(x - 2)$
- of
- $-5x + 10 = 5 \cdot -x + 5 \cdot 2 = 5(-x + 2)$
- $-5x^2 - 10x = -5x \cdot x + -5x \cdot 2 = -5x(x + 2)$
- $5x^2 - 10x + 15 = 5 \cdot x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 5(x^2 - 2x + 3)$
- $5x^2 - 10xy = 5x \cdot x - 5x \cdot 2y = 5x(x - 2y)$
- $5xy - 5y = 5y \cdot x - 5y \cdot 1 = 5y(x - 1)$

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

- Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?
- Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

Opgave 8

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

- $6x + 8y$
- $14k^2 - 21k$
- $-4xy - 12y^2 + 6y$
- $p^2 - p$
- $3a^2 + 16ab$
- $-12x^2 - 6x + 18$

Voorbeeld 3

De uitdrukking $x^2 + 5x + 6$ kun je niet ontbinden in factoren door een grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, die is er namelijk niet (behalve 1).

In de figuur hiernaast zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Maar hoe kom je nu aan die 2 en die 3?

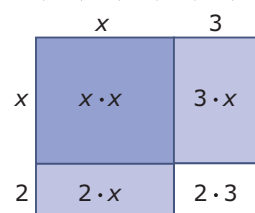
Je ziet in de figuur dat de term $5x$ ontstaat door de oppervlaktes $2x$ en $3x$ op te tellen en dat de term 6 de oppervlakte van het rechthoekje van 2 bij 3 is. Kortom: het getal in de term met x is de som van 2 en 3 en het getal in de term zonder x is het product van 2 en 3 .

Wil je een uitdrukking zoals $x^2 + 5x + 6$ ontbinden, dan zoek je twee gehele getallen die opgeteld 5 en vermenigvuldigd 6 opleveren. Je gaat dan systematisch alle mogelijkheden voor de vermenigvuldiging na.

Dit heet de som-en-productmethode.

product	getallen	som
6	6 en 1	7
6	3 en 2	5

Tabel 1.1



Figuur 1.5

Opgave 9

Neem **Voorbeeld 3** eerst door.

Bekijk de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$.

Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

- Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?
- Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?
- Schrijf de juiste ontbinding op.
Controleer je ontbinding door de haakjes weer weg te werken.

Bekijk de uitdrukking $x^2 - 6x + 8$.

Je wilt deze uitdrukking ontbinden. Nu moet je ook met negatieve getallen rekenen.

- d** Maak een tabel van alle gehele (ook negatieve) getallen die vermenigvuldigd 8 opleveren.
Maak daarmee je ontbinding af.

Opgave 10

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

- a** $x^2 + 7x + 12$
- b** $x^2 + 12x + 20$
- c** $x^2 + 13x + 12$
- d** $x^2 + 2x + 1$
- e** $x^2 - 19x + 90$
- f** $x^2 + 18x - 40$

Opgave 11

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

- a** $x^2 - 7x + 12$
- b** $x^2 + 2x - 48$
- c** $x^2 - 9$
- d** $x^2 - 9x$
- e** $2x^2 + 16x + 24$
- f** $3x^2 - 48$

Oefenen

Opgave 12

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk.

- a** $2x(x + 5)$
- b** $2x - (x + 5)$
- c** $(2x - 1)(x + 5)$
- d** $3(2x - 1) - 4(x + 5)$
- e** $(x + 5)^2$
- f** $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$
- g** $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$
- h** $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

Opgave 13

Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

- a** $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$
- b** $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

Opgave 14

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

- a $14x + 21y$
- b $3p^2 - 6pq$
- c $-4a^2b - 4ab$
- d $p^3 - 3p^2 - p$

Opgave 15

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

- a $x^2 + 17x + 30$
- b $x^2 - x - 12$
- c $16 - 10x + x^2$
- d $k^2 - 100$

Opgave 16

Ontbind in factoren.

- a $12a^2 - 8a$
- b $6p - 16 + p^2$
- c $\frac{1}{2}k^2 - 8$
- d $3x^2 - 6x - 9$
- e $-4pq + 8pq^2$
- f $8x - 16 - x^2$

Opgave 17

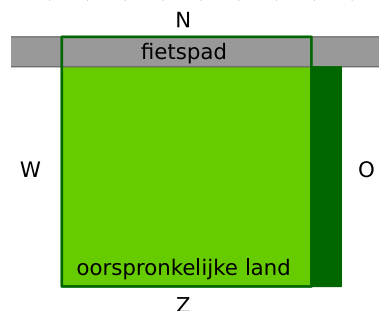
Je kunt zowel het haakjes wegwerken als het het ontbinden in factoren via het [Practicum](#) oefenen.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijt raakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?



Figuur 1.6

Opgave 18

Bekijk het probleem dat hierboven wordt beschreven.

De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend.

Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele x kiezen.

- a** Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.

- b** Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?
- c** Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.
- d** Welke conclusie trek je?

Opgave 19

De boer vraagt zich af of hij ervoor kan zorgen dat hij echt evenveel land terug krijgt als hij moet inleveren.

Er wordt afgesproken dat er van het vierkante land aan de Noordkant 3 m afgaat voor het fietspad, maar dat de boer ter compensatie 4 m extra krijgt aan de Oostkant.

Het oorspronkelijke land heeft een oppervlakte van $x^2 \text{ m}^2$.

- a** Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het land na de ruilverkaveling?
- b** Bij welke waarde van x wordt de boer nu netjes gecompenseerd?

Testen

Opgave 20

Werk de haakjes weg:

- a** $x(x - 5)$
- b** $(x + 8)(x - 5)$
- c** $15 - (10 - 3p)$
- d** $15 - (10 - p)^2$

Opgave 21

Ontbind in factoren:

- a** $x^2 - 10x$
- b** $x^2 - 10x + 9$
- c** $\frac{1}{2}x^2 - 10x$
- d** $\frac{1}{2}x^2 - 10x - 48$

1.4 Machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met het begrip macht;
- de rekenregels voor machten toepassen.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde.
- werken met de wetenschappelijke en de technische notatie.

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

- a Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2 ? En wat stelt 5^3 voor?
- 5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds door gaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.
- b Hoeveel is 5^4 ?
- c Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- d Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.
- e Leg uit waarom $(5^4)^2 = 5^8$.
- f Hoeveel is $(5^4)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V2

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je al snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

- a Hoeveel is 5^{10} ?
- b Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?
- Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.
- c Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.
- d In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?

Voorbeeld kettingbrief

*Stuur deze brief door
naar vijf van jouw
vrienden en maak 1 euro
over naar ...*

Figuur 1.1

Uitleg

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Het getal waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $5^0 = 1$.
- Als je een macht tot een macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(5^4)^2 = 5^8$.
- Ook negatieve exponenten komen voor:
 $5^{-3} = 5^{0-3} = 5^0 / 5^3 = \frac{1}{5^3}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.

Een getal zoals 135 miljard = 135000000000 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $1,35 \cdot 10^{11}$ en in de technische notatie als $135 \cdot 10^9$.

Een getal zoals 32 miljoenste = 0,000032 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $3,2 \cdot 10^{-5}$ en in de technische notatie als $32 \cdot 10^{-6}$.

Zowel in de wetenschappelijke notatie als in de technische notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$.

Alleen bij de wetenschappelijke notatie is $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal.

En bij de technische notatie is $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud.

Opgave 1

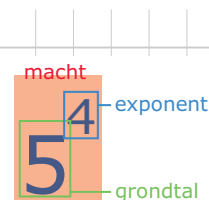
Bekijk in de **Uitleg** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

- a Je rekenmachine kan $5^{200} / 5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.

- b Bereken $\frac{19^{121} \cdot (19^{50})^2}{19^{220}}$.

Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.

- c Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.
- d Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.
- e Bereken $(15^{14})^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.



Figuur 1.2

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk.
Neem aan dat $a \neq 0$.

- a $a^5 \cdot a^2$
- b $3a^5 \cdot 4a^2$
- c $3a^5 / 4a^2$
- d $(3a^5)^4$
- e $(-2a^3)^4 \cdot a^3 / (-2a^5)^3$

Opgave 3

De omtrek van de Aarde is 40000 km.

- a Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.
- b Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke en in de technische notatie.
- c Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de technische notatie rekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n . Het getal g waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren n dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $g^a / g^b = g^{a-b}$.

Hieruit volgt meteen:

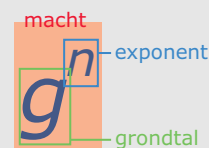
- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $g^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.

In de **wetenschappelijke notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

In de **technische notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud is.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het werken met machten. Denk er om dat je alleen gelijksoortige termen kunt optellen en aftrekken.

- $2a^7 \cdot 5a^4 = 2 \cdot 5 \cdot a^7 \cdot a^4 = 10a^{7+4} = 10a^{11}$
- $\frac{2a^7}{5a^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^7}{a^4} = 0,4a^{7-4} = 0,4a^3$
- $\frac{5a^4}{2a^7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^4}{a^7} = 2,5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2,5}{a^3}$
- $(-2a^3)^4 = -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 = 16a^{12}$
- $(-2a^3)^4 + (a^2)^6 = 16a^{12} + a^{12} = 17a^{12}$
- $18a^2b^3 - (2ab)^2 \cdot 3b = 18a^2b^3 - 12a^2b^3 = 6a^2b^3$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- a $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$
- b $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$
- c $(4a)^2 - 4a^2$
- d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$
- e $8a^3 \cdot 2ab^2 - (2a^2b)^2$
- f $\frac{2a \cdot (-2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

- a $2p^3(1 - 6p^2)$
- b $(x^2 - 4)(x^2 + 1)$
- c $(y^3 - 2)^2$
- d $4k^2(k + 3) - 2k(k^2 - 4)$
- e $(4 + 3k^2)^2 - (k^2 - 1)(k^2 + 1)$
- f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

- a $2k^4 + 6k^3$
- b $a^2b^3 - 4a^3b^5$
- c $x^3 - 4x$
- d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Voorbeeld 2

Deze getallen zijn geschreven in de technische notatie: $a = 36 \cdot 10^{12}$, $b = 1,2 \cdot 10^{12}$, $c = 1,2 \cdot 10^{-6}$ en $d = 900 \cdot 10^{-9}$.

Bereken $a + b$, $a \cdot c$, $c - d$ en a/d . De antwoorden geef je dan natuurlijk ook in de wetenschappelijke notatie!

Antwoord

Let vooral op het werken met de machten van 10. Alleen gelijksoortige uitdrukkingen mag je optellen of aftrekken.

- $a + b = 36 \cdot 10^{12} + 1,2 \cdot 10^{12} = 37,2 \cdot 10^{12}$
- $a \cdot c = 36 \cdot 10^{12} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 43,2 \cdot 10^6$
- $c - d = 1,2 \cdot 10^{-6} - 900 \cdot 10^{-9} = 12000 \cdot 10^{-9} - 900 \cdot 10^{-9} = 300 \cdot 10^{-9}$
- $\frac{a}{d} = \frac{36 \cdot 10^{12}}{900 \cdot 10^{-9}} = 0,04 \cdot 10^{21} = 40 \cdot 10^{18}$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je met getallen in de technische notatie rekent.

- a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.
- b Bereken $a \cdot d$.
- c Bereken $a - b$.
- d Bereken b^3 .
- e Waarom is $a - c \approx a$?

Opgave 8

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon.

$$1 \text{ AE} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km.}$$

Gebruik de wetenschappelijke notatie.

- a Hoeveel AE is 1 km?
- b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?
- c Pluto bevindt zich ongeveer $5,9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?
- d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^8$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?

Oefenen

Opgave 9

Bereken $\frac{8^{60} \cdot 2^{200}}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.



Figuur 1.4

Opgave 10

Werk eventuele haakjes uit en herleid zover mogelijk.

- a $3p^2q^3 \cdot -2pq^2$
- b $\frac{3p^2q^3}{-2pq^2}$
- c $(3k^2)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$
- d $3a^2(ab^2 - 2b) - 2ab(a^2b - a)$
- e $(x^3 + 5)^2 - x^2 \cdot x^4$
- f $\frac{2a^2b + 3ab^2}{2ab}$
- g $p^5(p^2 - 4)(p^2 + 1)$
- h $2x(3y^2)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

- a $12k^6 - 18k^3$
- b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$
- c $x^5 - x^4 - 2x^3$
- d $4x - 8x^2 + 4x^3$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1,66 \cdot 10^{-24}$ gram.

- a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?
Geef je eindantwoord in de technische notatie.
- b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?
Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.
- c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.
Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.
- d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

Oefen het werken met machten van variabelen via het **Practicum**.

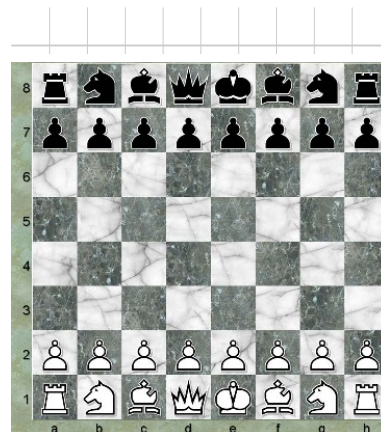
Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Sissah ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah ben Dahir zei: "Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken."

De koning lachte en antwoordde: "Is dat echt alles dat je wilt hebben?" en hij gaf opdracht het graan uit te betalen.

Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk het verhaal van Sissah ben Dahir.

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

- Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?
- Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?
- Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

- Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

- Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in [Toepassen](#).

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

- Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?
- Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.
De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.
- Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

1.5 Wortels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met het begrip wortel en rekenen met wortelvormen;
- werken met hogere machtswortels;
- werken met variabelen binnen wortelvormen.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met variabelen;
- het begrip macht en rekenen met machten.

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.

Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.

Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

- a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $A E F D$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

- c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

- d Laat ook zien, dat $2 \cdot (2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$.

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.

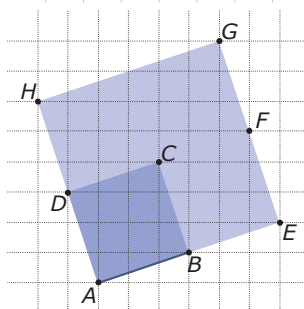
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.

Derde machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

- a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?



Figuur 1.1

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

- c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Zo geldt in het algemeen:

$$\sqrt{a^2} = a \text{ als } a \geq 0.$$

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen. Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Je weet al hoe dat gaat:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derde machts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierde machts worteltrekken, enz.

Met dergelijke hogere machtswortels kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Nu is:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0.$$

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{8} = -2$, maar $\sqrt[4]{16}$ geen reëel getal is.

Opgave 1

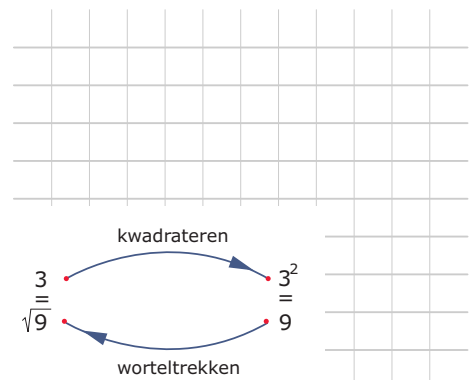
In de **Uitleg** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

- $\sqrt[3]{64}$
- $\sqrt[3]{343}$
- $\sqrt[4]{16}$
- $\sqrt[4]{16}$
- $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

- Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?
- Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.



Figuur 1.2

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- c $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
d $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

- e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met 'gewone' wortels. Toch is er een verschil.

- a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.
b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a . Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$
d $\frac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

- e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **nde machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een n de macht. Zo geldt in het algemeen:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0.$$

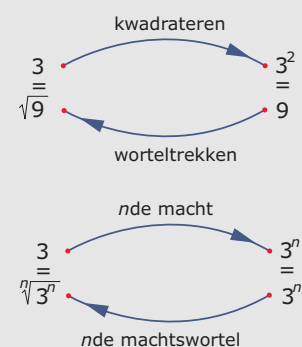
Het rekenen met n de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn.

Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{8} = 2$, maar dat $\sqrt[4]{16}$ geen reëel getal is.

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b .



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels enkele uitdrukkingen kunt vereenvoudigen.

- $\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = \sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
- $\sqrt{3a^2} + 2a\sqrt{12} = \sqrt{a^2 \cdot 3} + 2a\sqrt{4 \cdot 3} = a\sqrt{3} + 2a \cdot 2\sqrt{3} = 5a\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
- $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$
- $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)
- $3\sqrt{a^2b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)
- $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$
- $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

Opgave 5

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoeks-zijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben. Met de stel-ling van Pythagoras kun je dan de hypotenusa (een andere, meer internationale, naam voor de langste zijde van een rechthoekige driehoek) berekenen.

- Neem $a = 4$. Toon aan dat de hypotenusa dan een lengte van $4\sqrt{2}$ heeft.

- Toon aan dat de hypotenusa altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.

Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.

- Neem $a = 4$. Laat zien dat de langste rechthoekszijde $4\sqrt{3}$.

- Toon aan dat in het algemeen de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$ heeft.

Opgave 6

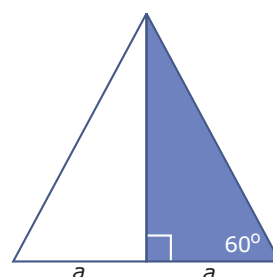
Van een kubus zijn alle zijvlaksdagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a .

- Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $4\sqrt{2}$ is.

- Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $a\sqrt{2}$ is.

- Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiaagonaal $4\sqrt{3}$ is.

- Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiaagonaal $a\sqrt{3}$ is.



Figuur 1.4

Voorbeeld 2

Bij breuken met wortels in de noemer is het vaak handig om die wortel weg te werken uit de noemer. Dat kun je doen door teller en noemer met die wortel te vermenigvuldigen. Bekijk deze voorbeelden maar.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

Bij hogere machtswortels is dit minder eenvoudig.

Opgave 7

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2** en loop ze even na.

Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

- $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$
- $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$
- $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$
- $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$
- $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2**.

- Waar wordt bij $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vermenigvuldigd met $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?
- Waarom is $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?
- Laat zelf zien dat $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Vereenvoudig, neem aan dat $a \geq 0$.

- $\sqrt{a^4}$
- $\sqrt{a^5}$
- $\sqrt{a^{10}}$

Opgave 10

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

- $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$
- $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $(\sqrt{6} - 1)^2$

d $(\sqrt[4]{10})^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$

g $\frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$

h $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 11

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a \geq 0$ en $b \geq 0$.

a $\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{3}}$

b $\frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$

c $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$

Opgave 12

Een balk heeft ribben met een lengte van a , $2a$ en $3a$ scm.

- a Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdagonalen.
- b Bereken de lengte van alle lichaamsdagonalen.

Opgave 13

Oefen het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het [Practicum](#).

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.

De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek.

De zijden van die driehoek zijn a , a en $a\sqrt{2}$.

De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek.

De zijden van die driehoek zijn a , $2a$ en $a\sqrt{3}$.



Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk de twee tekendriehoeken hierboven.

Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

- Laat zien, dat de langste zijde $a\sqrt{2}$ cm is.
- Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?
Neem nu de andere tekendriehoek.
- Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?
- Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 12 cm is?

Opgave 15

Je tekent op de langste zijde van een driehoek met hoeken van 90° , 60° en 30° een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zo krijg je een vierhoek met twee rechte hoeken en een kortste zijde van a cm.

Hoe groot is de omtrek van deze vierhoek?

Testen

Opgave 16

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$.

- $\sqrt{a^3} + 2a\sqrt{a}$
- $\frac{a^2}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{a^3}$

Opgave 17

Herleid tot een zo kort mogelijke uitdrukking. Neem aan dat $p \geq 0$.

- $(\sqrt{48p} + 2\sqrt{3p})^2$
- $\frac{\sqrt{48p^2}}{2\sqrt{3p}} + \sqrt{9p}$

Opgave 18

Bereken de lengte van de ribben van een kubus met een lichaamsdiagonaal van 12 cm.

1.6 Formules herleiden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met formules in het algemeen;
- formules met twee variabelen herleiden naar een functienotatie met een formule.

Voorkennis

- rekenen met getallen en variabelen met de juiste rekenvolgorde;
- bij formules met twee variabelen een tabel en een grafiek tekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b .

- Stel bij dit probleem een formule op passend bij de gegeven omtrek en een formule passend bij de gegeven oppervlakte.
- Schrijf beide formules in de vorm $l = \dots$
- Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?

Uitleg

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b , beide in m.

Voor de oppervlakte geldt dan de formule $l \cdot b = 5000$.

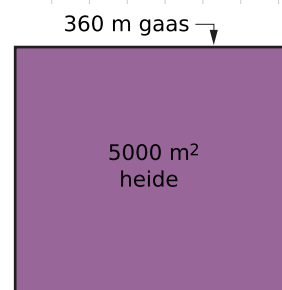
Voor de omtrek geldt dan de formule $2l + 2b = 360$.

Beide formules geven een verband tussen de twee variabelen l en b .

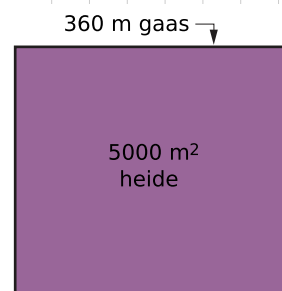
Je kunt beide verbanden vergelijken door de formules zo te herschrijven (herleiden) dat de éne variabele is uitgedrukt in de andere. Bijvoorbeeld door l uit te drukken in b , ofwel beide formules te herleiden naar de vorm $l = \dots$

Dat doe je met de balansmethode:

$$\begin{array}{rcl} 2l + 2b & = & 360 \\ l + b & = & 180 \\ l & = & 180 - b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{beide zijden : 2} \\ \text{beide zijden } -b \end{array}$$



Figuur 1.1



Figuur 1.2



Op dezelfde manier wordt de andere formule $l = \frac{5000}{b}$.

Je zegt nu wel dat je twee keer l als functie van b hebt geschreven. Dat noteer je als l_b of als $l(b)$.

Let er op dat deze haakjes niet dezelfde betekenis hebben als de haakjes die je gebruikt om de rekenvolgorde te beïnvloeden, deze haakjes kun je niet wegwerken!

Opgave 1

Bekijk in de uitleg hoe je de twee formules herleidt naar een vorm waarin l is uitgedrukt in b .

- a Hoe gaat dat met de formule voor de oppervlakte?
- b Waarom moet l dan op de verticale as?
- c De functie $l(b) = 180 - b$ beperkt de waarden die je voor b kunt kiezen en daarmee ook de uitkomsten voor l . Leg uit welke waarden je voor b kunt kiezen.
- d Teken beide grafieken in één assenstelsel en probeer de vraag te beantwoorden.

Opgave 2

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = \dots$

- a $x^2 - 2y = 7x^2 - 4x$
- b $2x - 4y = 13$
- c $40 + 5xy = 0,5x - 30$
- d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem met zijden van x cm. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft met hoogte h cm.

- a Welke formule kun je opschrijven voor de oppervlakte A van het doosje?
De doosjes krijgen een oppervlakte van 800 cm^2 .
- b Welke formule kun je opschrijven voor $h(x)$, dus voor h als functie van x ?
- c Bereken $h(8)$, dat is de waarde van h als $x = 8$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een zin waarin variabelen voorkomen. Vaak beschrijven formules een verband tussen die variabelen, maar niet altijd. Formules hebben meestal de vorm van een vergelijking, dus een zin met een isgelijkteken zoals $l + b = 180$.

Als een formule een verband beschrijft tussen twee variabelen, kun je er een grafiek bij tekenen. Je maakt dan eerst een tabel. Vervolgens zet je de gevonden punten in een assenstelsel.



In dat geval is het meestal handig om de formule te herleiden naar een vorm waarin de éne variabele een **functie** is van de andere. Bijvoorbeeld een formule zoals $2x + 4y = 5$ kun je schrijven als $y = -0,5x + 1,25$.

Nu is y een functie van x , notatie: $y(x) = -0,5x + 1,25$.

Je kunt zo'n functie ook een naam geven, bijvoorbeeld f .

Dan zeg je dat $y = f(x)$ met $f(x) = -0,5x + 1,25$ als formule.

Denk er wel om dat de haakjes in $y(x)$ en $f(x)$ niets te maken hebben met de haakjes die je gebruikt bij het rekenen (met variabelen), je kunt ze niet wegwerken.

Met iets als $f(2)$ bedoel je nu de waarde van y bij $x = 2$.

Bij het herleiden van formules gebruik je algebraïsche technieken als de balansmethode, haakjes wegwerken, rekenen met breuken met variabelen, etc.

Voorbeeld 1

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

- $2xy - 4x = 15$
- $y(x - 2) = 10$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

Antwoord

- $2xy - 4x = 15$ geeft $2xy = 4x + 15$ en $y = \frac{4x+15}{2x} = 2 + \frac{15}{2x}$
- $y(x - 2) = 10$ geeft $y = \frac{10}{x-2}$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$ geeft $\frac{1}{y} = -2x + 10$ en $y = \frac{1}{-2x+10}$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ geeft $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{2x-3}{3x}$ en $y = \frac{3x}{2x-3}$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je formules kunt herleiden.

- Laat zien hoe je bij de eerste formule komt aan $y = 2 + \frac{15}{2x}$
- Je hebt de eerste formule herleid tot $f(x) = 2 + \frac{15}{2x}$.
Bereken nu $f(3)$.
- Waarom kun je $f(0)$ niet berekenen?
- De tweede formule is herleid tot $g(x) = \frac{10}{x-2}$.
Bereken $g(7)$.
- Welke waarde van x levert in de tweede formule geen waarde van y op?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** het herleiden van de derde formule.

- a Laat zien hoe je bij de derde formule komt aan $y = \frac{1}{-2x+10}$
- b De derde formule heeft de vorm $h(x) = \frac{1}{-2x+10}$ gekregen.
Bereken $h(0)$.
- c Herleid zelf de vierde formule tot $k(x) = \frac{3x}{2x-3}$.
- d Bereken $k(2)$.

Opgave 6

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = \dots$

- a $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5$
- b $4x\sqrt{2y} = 3$

Voorbeeld 2

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).

Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt een grafiek maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Schrijf daarom je formule in de vorm $P(v)$ en maak een geschikte tabel.

Antwoord

Vul $D = 20$ in.

De formule wordt dan $P(v) = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 20^2 = 0,052 \cdot v^3$.

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken. Het is wel verstandig om vooraf even op te zoeken welke windsnelheden geschikt zijn.

Opgave 7

Bekijk het verhaal van de windmolen in **Voorbeeld 2**.

Bij een windsnelheid van 20 m/s (dus 72 km/h) is er bijna sprake van storm, dus wordt een windmolen vastgezet.

- a Bereken $P(0)$, $P(5)$, $P(10)$, $P(15)$ en $P(20)$.
- b Teken een geschikte grafiek en lees daaruit af bij welke windsnelheid het opgewekte vermogen op 26 kW uitkomt.



Figuur 1.3



Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2** de eerste formule van het vermogen van een windmolen nog eens.

- a Je hebt een windmolen met een wieklengthe van 15 m.
Hoe ziet de formule $P(v)$ er dan uit?
Neem aan dat je een vermogen van 26 kW wilt opwekken. Je plaatst een windmolen met een wieklengthe die bij een bepaalde gemiddelde windsnelheid dat vermogen oplevert.
- b Stel een formule op van de dubbele wieklengthe D afhankelijk van de windsnelheid v .
- c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Oefenen

Opgave 9

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

- a $0,5x + 1,5y = 12$
- b $(x + y)^3 = 8$
- c $2x^2 + 4xy = 100$

Opgave 10

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

- a $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 12$
- b $\frac{3}{y} = 2x + \frac{1}{x}$
- c $x\sqrt{y-2} = 6$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y = f(x)$ met formule

$$f(x) = 2x + \sqrt{8 - x^2}.$$

- a Bereken $f(0)$.
- b Leg uit, waarom $f(3)$ geen uitkomst heeft.
Welke getallen kun je wel invullen voor x ?
- c Teken een grafiek van deze functie f .
- d Schat met behulp van de grafiek voor welke waarde van x geldt $f(x) = 1$.

Opgave 12

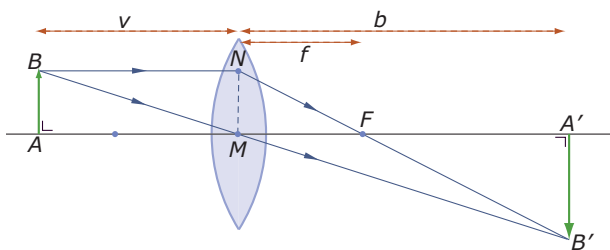
Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij er aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af. Daar maakt hij een smalle boswal van.

Verder maakt hij aan een van de korte zijden een bredere boswal van 10 meter. Zijn land wordt daarmee in totaal 2690 m^2 kleiner.

- Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (meter).
Geef een formule voor de oppervlakte $A(x)$ van het oorspronkelijke land.
- Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef dit verband als formule met haakjes.
- Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 1.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.



Opgave 13

Hierboven vind je de lenzenformule voor zuiver sferische lenzen.

- a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $b = \frac{vf}{v-f}$.
- b Neem aan dat de brandpuntafstand $f = 4$ cm.
Schrijf nu de formule van $b(v)$ op.
- c Hoe kun je aan deze formule zien dat hij geen betekenis heeft als de voorwerpafstand kleiner is dan de brandpuntafstand? Hoe volgt dat uit de figuur hierboven?
- d Hoe groot is de beeldafstand bij een voorwerpafstand van 12 cm?

Testen

Opgave 14

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

- a $3x - 0,5y = 6$
- b $x\sqrt{y} = 6 - x$
- c $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 12$

Opgave 15

De formule voor een éénparig versnelde beweging is:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in s
- v_0 de snelheid in m/s op $t = 0$
- a de versnelling in m/s^2 is

Je kunt bijvoorbeeld versnellen als je met een constante snelheid van 3 m/s fietst door een kracht uit te oefenen die zorgt voor een versnelling van bijvoorbeeld $a = 1,2 \text{ m/s}^2$.

- a Welke formule geldt dan voor $s(t)$?
- b Bereken $s(10)$.
Welke betekenis heeft dit getal?
- c Hoe ziet de grafiek van $s(t)$ er uit als je deze versnelling precies 10 seconden volhoudt?

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met variabelen en formules. In dit onderwerp zijn de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het begrip variabele — gelijksoortige termen — herleiden
- breuk met variabelen — gelijknamig maken
- termen en factoren — haakjes wegwerken — ontbinden in factoren
- macht met variabelen, grondtal, exponent — wetenschappelijke/technische notatie
- worteltrekken — hogere machtswortel
- functie — formule

Activiteitenlijst

- in uitdrukkingen met variabelen termen en/of factoren samen nemen;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- in uitdrukkingen met variabelen haakjes wegwerken — uitdrukkingen met variabelen ontbinden in factoren;
- werken met machten en de rekenregels daarbij toepassen — werken met de wetenschappelijke en de technische notatie;
- (hogere machts)worteltrekken en rekenen met wortelvormen, ook met variabelen;
- formules die een verband tussen twee variabelen beschrijven herleiden naar een functie — tabellen en grafieken bij functies tekenen.

Testen

Opgave 1

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen.

- a $5x^2 + 6x - x(x + 3)$
- b $(p^2 - 4)(p^2 + 4) - p^3(p + 1)$
- c $4ab^2 - 2a^2b + 6ab \cdot 4a - 6ab \cdot 4b$
- d $4p - (8 - 4p)$
- e $(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 1)$
- f $(-2a)^3 \cdot 3b^2 - 6ab \cdot -a^2b$

Opgave 2

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één breuk.

- a $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$
- b $\frac{4}{10}p \cdot \frac{5p}{8p^2}$
- c $\frac{2}{3k} + \frac{3}{k} \cdot \frac{5}{k}$
- d $\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k}$
- e $\frac{-p}{3q} \div \frac{2}{5q}$
- f $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

Opgave 3

Bereken als $p = 4$, $q = -5$ en $r = 3$.

- a $\frac{3p^2q}{4pqr}$
- b $(-2p)^4 + 6p^6 \div (-2p^2)$
- c $4q(2r + p) - 2p(1 + 2q)$

Opgave 4

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm $y = f(x)$.

- a $x - 2y = 6$
- b $2xy = 13$
- c $\frac{x}{2y} = 12$
- d $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Opgave 5

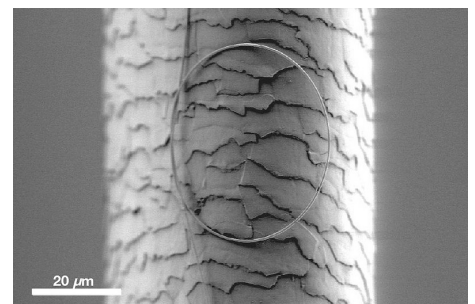
Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

- a $4x^2 - 6x$
- b $4x^3y - 6xy^3$
- c $4x^2 - 4$
- d $x^2 - 9x - 22$
- e $4x^2 + 40x + 64$
- f $2x + x^2 - x^3$

Opgave 6

In de **nanotechnologie** gaat het om hele kleine afstanden: 1 nm (nanometer) is 10^{-9} m. Dit is een schaal van grootte die net boven die van atomen (0,060 nm tot 0,275 nm) en eenvoudige moleculen ligt. Hiernaast zie je een foto van een koolstofnanobuis die in een lus op een haar ligt. Gebruik in deze opgave steeds de wetenschappelijke notatie.

- a Hoeveel m is de grootte van een atoom dat 0,060 nm is?
- b Je ziet in de figuur een afstand van 20 μm aangegeven door een balkje. Hoeveel m is 20 μm ?
- c Hoeveel balkjes van 20 μm gaan er in een haar van 16 cm?



Figuur 1.1



- d Schat de diameter van de koolstofnanobuis. Hoeveel van die nanobuizen tegen elkaar hebben dezelfde diameter als één haar?

Opgave 7

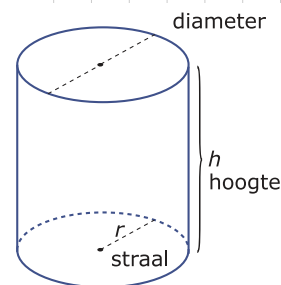
Schrijf de volgende uitdrukkingen met wortels zo eenvoudig mogelijk en in ieder geval zonder worteltekens in de noemer van een breuk. Neem aan dat $p \geq 0$.

- a $4\sqrt{2p} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{p}$
- b $\frac{18\sqrt{5p}}{3\sqrt{p}}$
- c $\sqrt{32p^2} - \sqrt{8p} \cdot \sqrt{p}$
- d $\frac{2p}{\sqrt{p}}$

Opgave 8

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter. Ze passen dus precies in een kubus.

- a Voor deze serie blikjes is V een functie van r . Geef de bijpassende formule.
- b Bereken $V(5)$ in gehele eenheden nauwkeurig.
- c Neem aan dat $0 < r < 20$. Maak de grafiek van de functie $V(r)$.
- d Bij welke afmetingen van de cilinder geldt: $V = 1000 \text{ cm}^3$?



Figuur 1.2

Toepassen

Opgave 9: Oppositie van planeten

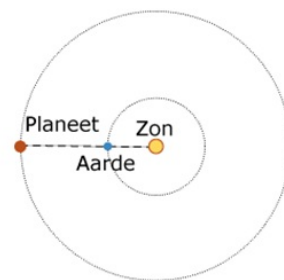
Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.

- a Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P . Betekent dit dat dan ook T groter wordt?
- b Tussen twee opposities van Jupiter zitten 398,6 dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de aarde is 365,25 dagen.
- c De omlooptijd van Mars is 1,88 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat $T_P^2 = 3,95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

- d Voor Saturnus geldt $r \approx 1,43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.



Figuur 1.3

Opgave 10: Vermenigvuldigen en delen

Ook uitdrukkingen met letters kun je gewoon vermenigvuldigen door 'onder elkaar zetten' en delen met behulp van een staartdeling. Hier zie je daar twee eenvoudige voorbeelden van. In de linkerfiguur wordt de vermenigvuldiging $(2x + 1) \cdot (x - 3)$ uitgevoerd, in de rechterfiguur wordt $2x^2 - 5x - 3$ gedeeld door $x - 3$.

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 \underline{x - 3} \times \\
 -6x - 3 \\
 \underline{2x^2 + x} + \\
 2x^2 + 5x - 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2x^2 - 5x - 3 \div x - 3 = 2x + 1 \\
 \underline{2x^2 - 6x -} \\
 x - 3 \\
 \underline{x - 3} - \\
 0
 \end{array}$$

Tenslotte alles optellen

Bereken $1(x - 3)$ en trek dat van $x - 3$ af. Je komt op 0 uit, de deling komt uit.

Figuur 1.4

- a** Voer zelf zowel de vermenigvuldiging als de deling uit. Waarom horen er in de deling eigenlijk haakjes te staan?

Eerst even een paar vermenigvuldigingen oefenen. Bereken:

b $(3x + 5)(2x - 1)$

c $(x^2 + 5x - 6)(2x - 4)$

En nu een paar delingen oefenen. Bereken:

d $(3x^2 + 15x + 18) / (x + 3)$

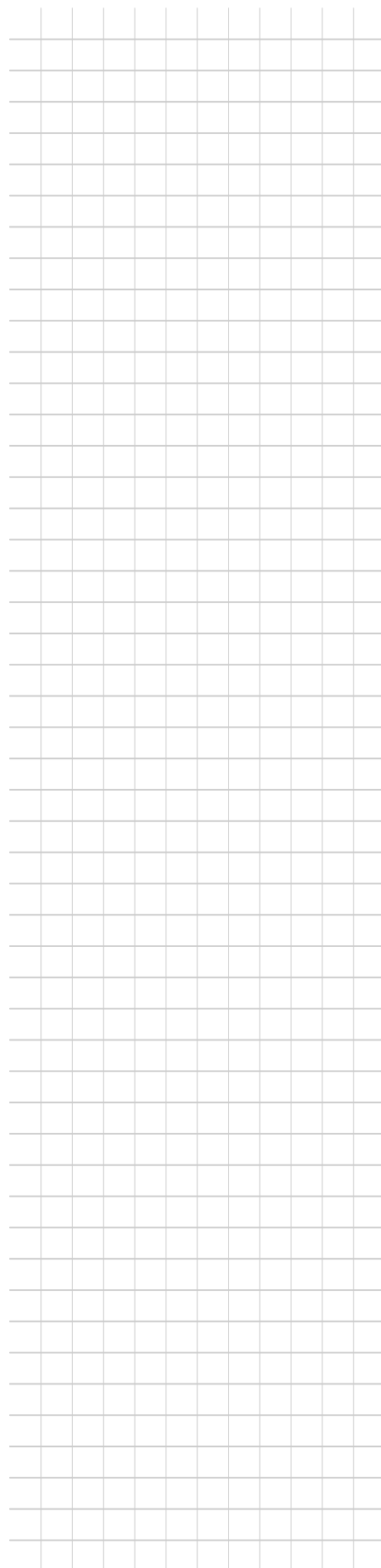
e $(3x^3 + 17x^2 + 42x + 16) / (3x - 1)$

- f** Gebruik nu je antwoord bij e om $3x^3 + 17x^2 + 42x + 16$ in factoren te ontbinden.

2

Lineaire verbanden

2.1	Lineaire functies	54
2.2	Lineaire verbanden	62
2.3	Stelsels vergelijkingen	70
2.4	Lineaire modellen	78
2.5	Totaalbeeld	86



2.1 Lineaire functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) lineaire functie een passende formule opstellen en daarbij de notatie $f(x) = \dots$ gebruiken;
- de grafiek van een lineaire functie tekenen en daarbij het begrip hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) gebruiken;
- berekeningen met lineaire functies uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij functies;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en een vast bedrag van € 65,00 per jaar.

- Welke formule past bij de jaarlijkse kosten K afhankelijk van het verbruikte aantal in m^3 water a per jaar?
- Maak een grafiek van K als functie van a .
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zullen er huishoudens van vier personen in deze regio zijn, die meer dan € 1000,00 per jaar aan water kwijt zijn?

Uitleg

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Bij $a = 0$ hoort $K = 65$, het vaste jaarbedrag.

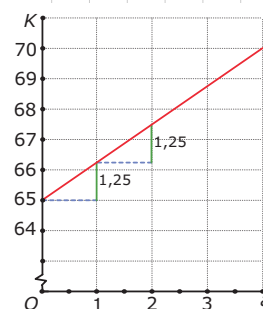
Elke extra m^3 water die je verbruikt, zorgt voor een toename van K met 1,25. Dus elke toename van a met 1 heeft een stijging van K met 1,25 tot gevolg. De grafiek wordt een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt. Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat. Het getal 1,25 heet het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

Omdat de formule de vorm $K = \dots$ heeft, hoort bij elke (positieve) waarde van a precies één waarde van K . Je zegt dan dat K een functie is van a .

De formule schrijf je dan ook zo: $K(a) = 1,25 \cdot a + 65$.



Figuur 2.1



Figuur 2.2

Met $K(200)$ bedoel je dan de kosten bij een jaarverbruik van 200 m^3 .

Ga na dat $K(200) = 315$ euro.

Als een huishouden de kosten wil beperken tot € 250,00 dan kun je uitrekenen hoeveel ze jaarlijks mogen verbruiken door de vergelijking $1,25 \cdot a + 65 = 250$ op te lossen. Je vindt dan $a = 148 \text{ m}^3$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrecht van € 70,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?
- Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Schat op basis hiervan hoeveel een gemiddeld huishouden van vier personen dan jaarlijks betaalt voor het waterverbruik.
- Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 250$? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bij een kaars hoort de formule $L(t) = 25 - 3,1t$, hierbij is L de lengte in centimeter en t de brandtijd in uren.

- Hoe lang was de kaars, voordat hij is aangestoken?
- Met hoeveel centimeter neemt de lengte van de kaars per uur af, als hij is aangestoken?
- Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Opgave 3

In de éne regio betaal je voor het verbruik van $a \text{ m}^3$ water per jaar een bedrag van $K_1(a) = 1,25a + 65$.

In een andere regio betaal je $K_2(a) = 1,20a + 70$.

- Een gezin in regio 1 verbruikt 200 m^3 water per jaar. Een gezin in regio 2 verbruikt evenveel water per jaar. Welk gezin is het duurst uit?
- Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Bij welk jaarverbruik aan water ben je in beide regio's even duur uit?"
- Los deze vergelijking op en beantwoord de vraag.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

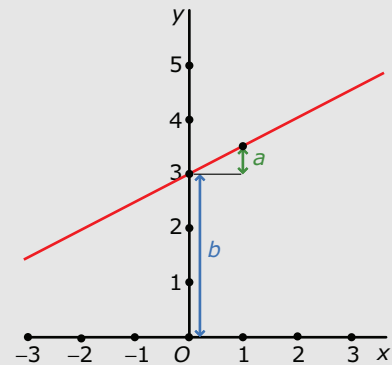
Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 ophoogt, neem de uitkomst met a toe. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Soms geef je zo'n lineaire functie de naam f en schrijf je $f(x) = a \cdot x + b$.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$. Je zegt in dat geval dat y **recht evenredig** is met x .



Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Bereken ook de snijpunten met de assen.

Antwoord

Er zijn twee manieren om de grafiek te tekenen:

- Manier I: het begingetal is 4 dus de grafiek 'start' in $(0, 4)$.
Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt $(0, 4)$ ga je elke keer dat de x -waarde met 1 toeneemt 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden.
Dit betekent dat de grafiek ook door bijvoorbeeld $(1; 4,5)$, $(2,5)$ en $(3; 5,5)$ gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
Bij $x = 6$ hoort $y = 0,5 \cdot 6 + 4 = 7$.
Trek de lijn door de twee bijbehorende punten $(0, 4)$ en $(6, 7)$.

Het snijpunt met de y -as vind je door $x = 0$ in te vullen. Dit geeft $(0, 4)$.

Het snijpunt met de x -as vind je door $y = 0$ te nemen. Je krijgt de vergelijking $0,5x + 4 = 0$.

En dit levert $x = -8$ op.

Het snijpunt met de x -as wordt $(-8, 0)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie $f(x) = -0,2x + 6$.

- Waaraan kun je zien dat de grafiek van f dalend is?
- Teken de grafiek van f .
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- De grafiek van lineaire functie g heeft hetzelfde hellingsgetal als de grafiek van f en gaat door het punt $(10,9)$. Bepaal de formule van g .

Opgave 5

Gegeven zijn de functies $y_1 = 3x - 2$ en $y_2 = -0,5x + 4$.

- Teken de grafieken van deze functies in één assenstelsel.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken. Rond af op twee decimalen.

Opgave 6

Elke lineaire functie heeft een formule van de vorm $y = ax + b$.

- Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van deze functie in beeld. Ga na of de grafiek door het punt $(99,200)$ gaat.
- Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van b . Voor welke waarde van b gaat deze functie door het punt $(99,200)$?
- Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van a . Voor welke waarde van a gaat deze functie door het punt $(99,200)$?

Voorbeeld 2

Gegeven is het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Waarom is y niet recht evenredig met x ?

Welke waarde van x hoort bij $y = 100$. Laat je berekening zien.

Antwoord

y is niet recht evenredig met x omdat de grafiek bij dit lineaire verband niet door $O(0,0)$ gaat. Er is namelijk sprake van een vast bedrag dat niet verandert als x toeneemt. Daarom wordt de waarde van y niet twee keer zo groot als de waarde van x twee keer zo groot wordt.

$y = 100$ betekent $0,5x + 4 = 100$ en dus $0,5x = 96$ zodat $x = \frac{96}{0,5} = 192$.

Je gebruikt voor het oplossen van zo'n vergelijking de balansmethode.



Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Laat met een getallenvoorbeeld zien, dat de y -waarde niet twee keer zo groot wordt als de waarde voor x twee keer zo groot wordt.
- b In het voorbeeld wordt een vergelijking opgelost met de balansmethode. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 8

Gegeven zijn de formules $h_1(t) = 60 - 1,5 \cdot t$ en $h_2(t) = 3 \cdot t$.

- a Waarom kun je de grafieken van beide formules in één assenstelsel tekenen? Doe dit.
- b Welke van beide formules beschrijft een recht evenredig verband?
- c Je ziet aan de grafieken dat er een snijpunt is. Welke vergelijking hoort daar bij? Laat zien hoe je deze vergelijking oplost en het snijpunt berekent.

Oefenen

Opgave 9

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 km/h van A naar B . Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A . De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 km. a is de afstand tot A en t is de tijd in uren.

- a Teken in een a, t -assenstelsel de grafiek van beide fietstochten.
- b Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t .
- c Na hoeveel tijd komen beide fietsers elkaar tegen? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Bereken van de volgende lineaire functies de snijpunten van de grafieken met de assen.

- a $h(t) = 3t - 5$
- b $f(x) = x - 4$
- c $g(x) = -0,5x + 4$
- d $k(x) = -2(x + 3)$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y_1 = -4 + 5x$.

- a Teken de grafiek van deze functie en geef het begingetal en het hellingsgetal in die grafiek aan.
- b De grafiek van y_1 wordt 10 eenheden langs de y -as omhoog geschoven. Bepaal de formule van de grafiek van y_2 die daardoor ontstaat.
- c De grafiek van y_1 wordt gespiegeld in de y -as. Bepaal de formule van de grafiek van y_3 die daardoor ontstaat.



Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 0,5x$ en $g(x) = 2x - 1$.

- a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van deze functies met de beide assen.
- b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 13

De Elfstedentocht is een schaatstocht langs de elf Friese steden. Het laatste stuk is een vrijwel rechte tocht van Dokkum naar Leeuwarden met een lengte van 26 km. Ireen komt na zeven uur schaatsen in Dokkum aan. Zij schaatst dit laatste stuk voor de wind met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier is zij in Leeuwarden en heeft zij in totaal ongeveer 200 km afgelegd.

- a Met welke snelheid heeft zij het laatste deel van de tocht gereden?
- b Stel je voor dat t de tijd in uren is, $t = 0$ op het moment dat Ireen aan de Elfstedentocht begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welke formule $a(t)$ geldt er voor het laatste deel van haar tocht?
- c Ireen is tegelijk met Margot begonnen aan de schaatstocht. Margot komt echter twee uur na Ireen pas in Dokkum aan. Ook zij schaatst het laatste stuk met een constante snelheid, maar doet er een uur over. Welke formule geldt voor haar tocht van Dokkum naar Leeuwarden?

Opgave 14

Gegeven is de lineaire functie f met formule: $f(x) = -3x$.

- a Waarom is hier sprake van een recht evenredig verband tussen x en y ?
- b De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- c De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$. De nieuwe grafiek gaat door $(5,20)$. Welke formule past bij die nieuwe grafiek?
- d De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$ en vervolgens 3 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(3,1)$. Welke formule past bij die nieuwe grafiek?

Toepassen

De kosten voor het verbruik van elektriciteit bedragen bij een bepaalde leverancier € 0,20 per kWh (kiloWattuur) en een vast bedrag van € 280,00 per jaar.

Hierbij past de formule $K = 0,20 \cdot a + 280$ waarin a het jaarverbruik (in kWh) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Je ziet dat de jaarkosten niet recht evenredig zijn met het verbruik a .

Met deze formule kun je de jaarkosten berekenen als je het verbruik weet. Maar omgekeerd kun je ook je verbruik berekenen als je de jaarkosten weet.



Figuur 2.4

Opgave 15

Bekijk de formule voor de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van a kWh elektriciteit.

- Waarom is K niet recht evenredig met a ?
- Bereken de jaarkosten voor elektriciteit in deze regio als je 2500 kWh verbruikt in een jaar.
- Je wilt de kosten voor elektriciteit beperken tot € 500,00. Hoeveel kWh kun je daarvoor in een jaar verbruiken?

Opgave 16

Bij een andere aanbieder van elektriciteit zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik € 0,16 per kWh met een vastrecht van € 310,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in kWh voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 kWh toeneemt?
- Hoeveel betaal je bij deze aanbieder als je geen elektra verbruikt, maar wel een aansluiting hebt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 2950 kWh elektriciteit. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 800$? Licht je antwoord toe.

Opgave 17

Je vergelijkt de twee aanbieders van elektriciteit met elkaar.

- Met welke vergelijking kun je berekenen voor welke waarde van a beide even duur zijn?
- Los deze vergelijking op.
- Bij welk verbruik heb je liever de tweede aanbieder die hogere vaste kosten per jaar heeft?



Testen

Opgave 18

Voor het plaatsen van een ketel vraagt bedrijf A € 45,00 voorrijkosten en € 60,00 per uur dat ze bezig zijn. Bedrijf B vraagt geen voorrijkosten, maar bij hen moet je € 70,00 per uur betalen.

- a Waarom zijn de kosten K_B (in €) voor het plaatsen van een ketel bij bedrijf B recht evenredig met de gewerkte tijd t (in uren)?
- b Stel een formule voor zowel bedrijf A als bedrijf B op voor de kosten K (in €) als functie van de tijd t (in uren).
- c Als het plaatsen van een ketel drie uur duurt, welk bedrijf is dan goedkoper?
- d Na hoeveel uur is bedrijf A goedkoper?
- e De familie Berendsen heeft door bedrijf A een ketel laten plaatsen, maar later kwamen ze erachter dat bedrijf B € 20,00 goedkoper zou zijn geweest als zij er net zo lang over hadden gedaan. Hoelang is bedrijf A met het plaatsen van de ketel bezig geweest?

Opgave 19

Gegeven is de lineaire functie f met formule: $f(x) = 7x + 10$.

- a Bereken exact de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.
- b De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welke formule hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- c De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$. De nieuwe grafiek gaat door $(10,15)$. Welke formule past bij die nieuwe grafiek?
- d De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$ en vervolgens 2 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(10,0)$. Welke formule past bij die nieuwe grafiek?

2.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- grafieken tekenen bij lineaire verbanden in het algemeen;
- lineaire formules herleiden naar lineaire functies.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- werken met lineaire functies.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De omtrek van rechthoek $OAPB$ is 30.

Noem de lengte van deze rechthoek l en de breedte b .

- Welke formule geldt voor het verband tussen l en b ?
- Waarom is de bijbehorende grafiek in een l, b -assenstelsel een rechte lijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

Een formule als $2x + 3y = 6$ is een lineaire vergelijking met twee variabelen. De grafiek bij zo'n lineaire vergelijking is een rechte lijn.

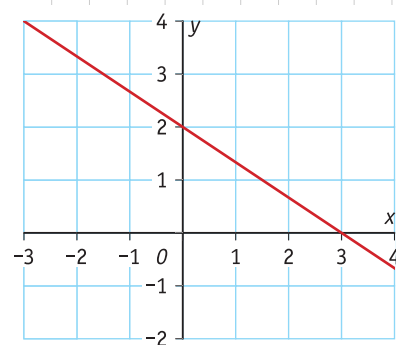
Je kunt de formule herleiden tot de vorm $y = ax + b$. In deze vorm is y uitgedrukt als een functie van x :

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\3y &= -2x + 6 \\y &= -\frac{2}{3}x + 2\end{aligned}$$

Nu is y een lineaire functie van x .

Je kunt ook schrijven $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.

Op de rechte lijn liggen alle punten (x, y) die voldoen aan $2x + 3y = 6$ en ook aan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Om die rechte lijn te tekenen, is het niet nodig om de formule te herschrijven.



Figuur 2.1



Je kunt ook enkele punten van de lijn bepalen:

- Als $x = 0$, dan is $3y = 6$ en dus $y = 2$. Het punt $(0,2)$ ligt op de lijn.
- Als $x = 1$, dan is $2 + 3y = 6$ en dus $y = 1\frac{1}{3}$. Het punt $(1, 1\frac{1}{3})$ ligt op de lijn.
- Als $y = 0$, dan is $2x = 6$ en dus $x = 3$. Het punt $(3,0)$ ligt op de lijn.

Omdat de grafiek bij een lineaire vergelijking een rechte lijn is, heb je genoeg aan twee punten om de grafiek te tekenen. Vaak neem je daarvoor de punten met $x = 0$ of $y = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de lineaire vergelijking $3x - 4y = 12$.

- Teken de lijn van deze lineaire vergelijking door eerst de snijpunten met de beide assen te berekenen.
- Herleid de vergelijking tot de vorm $y = \dots$

Opgave 2

Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $-2x + y = 2$ en $5x + 2y = 13$.

- Teken de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
- Bepaal het snijpunt van de grafieken met behulp van de grafiek.
- Schrijf de eerste formule in de vorm $f(x) = \dots$ en de tweede in de vorm $g(x) = \dots$
- Bereken nu het snijpunt door $f(x) = g(x)$ op te lossen.
- Wat is het nut van het berekenen van een snijpunt door een vergelijking op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

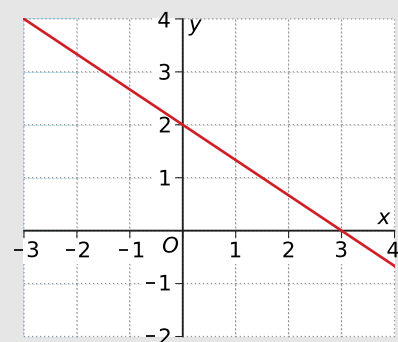
Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar een lineaire functie als $b \neq 0$.

Zo is $2x + 3y = 6$ te schrijven als $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Dit is een lineaire functie met begingetal 2 en hellingsgetal $-\frac{2}{3}$.

Je kunt hem ook schrijven als $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



Figuur 2.2

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $by = c$ en is te herleiden tot $y = \frac{c}{b}$.
Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $ax = c$ en is te herleiden tot $x = \frac{c}{a}$.
Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y -as.

Voorbeeld 1

Een museum trok op een zaterdag veel bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 1,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 2,50. In totaal is er voor € 1245,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Hoeveel kinderen en hoeveel volwassenen hebben het museum bezocht?

Antwoord

Er zijn meerdere combinaties mogelijk. Bijvoorbeeld 50 kinderen en 468 volwassenen of 150 kinderen en 408 volwassenen. Met een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos kun je gemakkelijk alle oplossingen bepalen.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y , dan geldt:

$$1,50x + 2,50y = 1245. \text{ Dit is een lineair verband tussen } x \text{ en } y.$$

Je kunt de formule herleiden tot $y = 498 - 0,6x$.

Maak je nu een grafiek of een tabel, dan krijg je alle mogelijke combinaties van x en y .

Je kunt dan de volgende waarden vrij snel vinden: $x = 0$ en $y = 498$, $x = 5$ en $y = 495$, $x = 10$ en $y = 492$, ..., tot aan $x = 830$ en $y = 0$.

Opgave 3

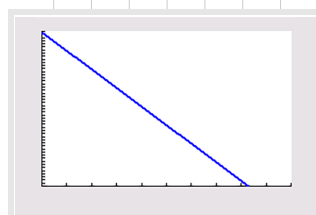
Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een lineair verband tussen de variabelen x en y gegeven door $1,50x + 2,50y = 1245$.

- Laat zien dat je deze formule kunt herleiden tot $y = -0,6x + 498$.
- Kunnen er 300 kinderen bij de voorstelling aanwezig zijn geweest? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Een marktkoopman verkoopt grote en kleine vazen. Grote vazen verkoopt hij voor € 12,00 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij voor € 240,00 aan vazen verkocht.

- Hoeveel kleine en grote vazen kan hij verkocht hebben? Schrijf alle combinaties op.
- Stel dat de marktkoopman 34 vazen op die dag heeft verkocht. Hoeveel kleine en hoeveel grote vazen heeft hij dan verkocht?



Figuur 2.3

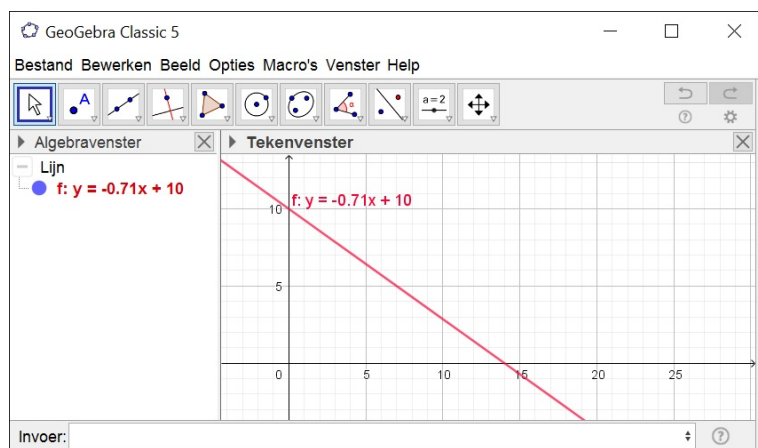
Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire formule $2,5x + 3,5y = 35$. Maak een grafiek bij het verband tussen beide variabelen.

Antwoord

De lineaire vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$ kun je ook schrijven als $5x + 7y = 70$. Er zijn meerdere manieren om hierbij een grafiek te tekenen:

- Omdat bij een lineair verband de grafiek een rechte lijn is, heb je aan twee punten (x, y) die aan de vergelijking voldoen genoeg. Je vindt die snel door eerst $x = 0$ en vervolgens $y = 0$ te kiezen: $(0, 10)$ en $(14, 0)$.
- Je herleidt de vergelijking tot $y = -\frac{5}{7}x + 10$. De grafiek wordt een rechte lijn die door het punt $(0, 10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{7}$ heeft.



Figuur 2.4

Opgave 5

In [Voorbeeld 2](#) zie je hoe je een grafiek maakt bij de vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$.

- Waarom kun je in dit geval de grafiek het beste tekenen door eerst de snijpunten met de assen te berekenen?
- Laat zien hoe je de formule herleidt tot een lineaire functie. En maak zelf daarmee de grafiek.
- Welke waarde van x hoort bij $y = -20$? Schrijf je antwoord in de vorm $x = \dots$

Opgave 6

Je ziet hieronder vier keer de vergelijking van een lijn. Om die lijn te tekenen kun je eerst de snijpunten met de assen berekenen en dan een rechte lijn door die twee snijpunten trekken.

Je kunt ook de vergelijking eerst herleiden tot een lineaire functie en dan het begingetal en de richtingscoëfficiënt gebruiken voor het tekenen van de lijn.



Gebruik bij de onderstaande lijnen elk van deze methoden in ieder geval één keer.

- a $5x + 4y = 20$
- b $5x - 4y = 20$
- c $2x + y = 10$
- d $x - 2y = 10$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Bij een lineair verband hoort in het algemeen de vergelijking $ax + by = c$.

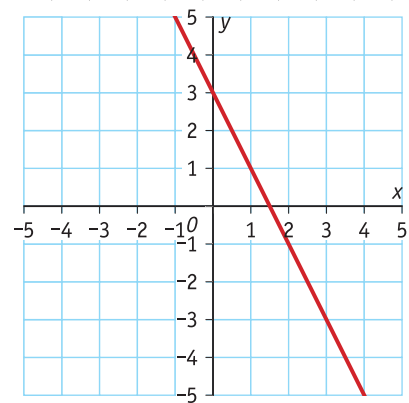
Stel $a = 4$, $b = 2$ en $c = 6$, dan krijg je de vergelijking $4x + 2y = 6$.

Bekijk de grafiek.

Er is een aantal bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de x -as is;
- $b = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de y -as is;
- $c = 0$: de grafiek gaat door $O(0,0)$.

Wat gebeurt er met de grafiek als $a = b$, of $a = -b$?



Figuur 2.5

Opgave 7

- a Hoe ziet de vergelijking van een verticale lijn eruit?
- b Waarom hoort bij een verticale lijn geen lineaire functie?

Opgave 8

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met twee variabelen is $ax + by = c$.

- a Herleid deze vergelijking tot een functie van de vorm $f(x) = \dots$
- b Waarom moet bij a gelden dat $b \neq 0$?
- c Welk bijzonder geval krijg je als $a = 0$ terwijl $b \neq 0$ en $c \neq 0$?
- d Welk bijzonder geval krijg je als $b = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $c \neq 0$?
- e Welk bijzonder geval krijg je als $c = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Opgave 9

Welke van deze vergelijkingen kun je herleiden tot een lineaire functie? Bepaal in die gevallen de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn en maak de grafiek ervan.

- a $2x - 3y = 12$
- b $2x - 3 = 12$
- c $x = -2y + 6$
- d $4y - 6 = 0$



Oefenen

Opgave 10

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $-2x + 3y = 6$
- b $6x - 2y = 24$
- c $y = 2x + 1$
- d $4x + y = 10$
- e $20x = 45$
- f $y + 2 = 0$

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen $l: 2x - 4y = -3$ en $m: 5x + 4y = 8$.

- a Bereken van beide lijnen algebraïsch de snijpunten met de coördinaatassen.
- b Maak van beide lijnen de grafieken in één assenstelsel.
- c Bereken de coördinaten van hun snijpunt in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Stel je voor dat je een groep van 180 personen van drinken wilt voorzien. Je koopt daarvoor literpakken appelsap en sinaasappelsap. Je hebt 90 pakken nodig. Appelsap kost € 0,90 per literpak en sinaasappelsap € 1,05 per literpak. Noem het aantal pakken appelsap a en het aantal pakken sinaasappelsap s . Aan de kassa moet je € 90,00 betalen.

- a Aan welke twee vergelijkingen moeten deze variabelen voldoen?
- b Teken de bijbehorende grafieken.
- c Bepaal hoeveel pakken appelsap en sinaasappelsap je hebt gekocht.

Opgave 13

Een winkelier verkoopt grote en kleine ballen. De grote ballen verkoopt hij voor € 8,50 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij 60 ballen verkocht en dat leverde hem € 387,50 op. Hoeveel grote en hoeveel kleine ballen heeft hij verkocht?

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen:

$$k: \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y = 21$$

$$l: 0,01x + 2,75 = y$$

$$m: x = 7y + 4$$

- a Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen k en l . Geef je antwoord als coördinaat en rond af op twee decimalen.
- b Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k , l en m met de x -as. Geef je antwoord als coördinaat.

Opgave 15

Gegeven zijn de lijnen $l: 0,5y - 2x = c$ en $m: y - ax = -4$.

- a Voor welke a zijn de lijnen evenwijdig?
- b Voor welke c ligt het snijpunt van de lijnen op de y -as?
- c Voor welke a en c snijden de lijnen elkaar in het punt $(5,8)$?

Opgave 16

Deze puzzel wordt toegeschreven aan Euclides (ongeveer 300 voor Christus).

Een ezel en een muildier sjokken voort, beladen met allemaal even zware zakken. De ezel zucht onder zijn last, waarop het muildier tegen zijn lotgenoot zegt: Wat kreun en jammer je toch! Tweemaal zoveel zou ik dragen als jij, als je mij één zak van jou zou geven, terwijl we evenveel zouden dragen als je er één van mij nam. Hoeveel zakken draagt ieder dier?

Los de puzzel op.

Toepassen

Het hekwerk om een rechthoekig weiland heeft een totale lengte van 240 m.

Het weiland zit met één zijde tegen een brede rivier, dus daar is geen hekwerk nodig.

Noem je de lengte l en de breedte b , dan kun je voor de omtrek opschrijven:

$$2 \cdot l + b = 240$$

Er zijn nu verschillende waarden voor l en b mogelijk.

Opgave 17

Bekijk het inleidende verhaal hierboven.

- a Is het belangrijk wat je lengte en wat je breedte noemt? Moet de lengte altijd groter zijn dan de breedte?
- b Herleid de formule voor de lengte van het hekwerk tot de vorm $l = \dots$
- c Hoe lang is het weiland als de breedte 40 m is?
- d Hoe lang is het weiland als het vierkant is?

Opgave 18

Neem aan dat de oppervlakte van het weiland uit de vorige opgave 5400 m^2 is.

- a Hoe kun je dan de lengte en de breedte ervan berekenen?
- b Welke formule met l en b kun je opschrijven voor de oppervlakte van het weiland?

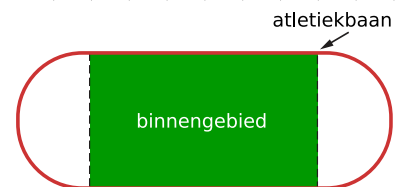


- c Je hebt nu twee formules voor l en b .
Maak daar een vergelijking met één onbekende van door ze te combineren.
- d Je kunt de vergelijking die je bij c hebt gevonden oplossen. Laat zien hoe.

Opgave 19: Atletiekbaan

Een atletiekbaan heeft een lengte van 400 m. Daarmee wordt de omtrek van het binnengebied bedoeld. Dat binnengebied bestaat uit een rechthoek met daartegen twee halve cirkels, zie figuur. De lengte van de rechthoek is l en de breedte b .

- a Welke formule kun je hieruit afleiden?
- b Als de lengte van elk van beide rechte stukken van de atletiekbaan 100 m is, hoe groot moet dan de breedte van de rechthoek zijn? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.



Figuur 2.6

Testen

Opgave 20

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $5x + 2y = 10$
- b $-2x + 5y = 7$
- c $x = 4$
- d $4 - 2y = 0$

Opgave 21

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje van € 9,00, in de overige zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes in de bak is € 3000,00.

“De vraag is: Hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 zitten er in de bak?”

- a Stel twee lineaire vergelijkingen op om dit probleem op te lossen.
- b Maak grafieken bij deze vergelijkingen.
- c Bepaal de oplossing van het probleem.

2.3 Stelsels vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van substitutie;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine;
- opstellen van een stelsel van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen.

Bereken algebraïsch hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal zijn de inkomsten door kaartverkoop € 1110,00. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Dit probleem kun je aanpakken door bijvoorbeeld twee variabelen in te voeren:

- het aantal kinderen in de zaal is x ;
- het aantal volwassenen in de zaal is y .

Natuurlijk kun je ook letters als k en v nemen, maar het voordeel van deze keuze is dat je meteen weet wat je op de x -as en wat je op de y -as uitzet. Er zijn twee gegevens:

- het totaal aantal bezoekers is 300, dus $x + y = 300$
- de totale inkomsten zijn 1110 euro, dus $2,5x + 4,5y = 1110$

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit stelsel wil je oplossen, dat wil zeggen een combinatie van waarden voor x en y zoeken die aan beide vergelijkingen tegelijk voldoen.



Figuur 2.1



Zo'n stelsel van vergelijkingen wordt vaak als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

In de voorbeelden leer je verschillende methoden om zo'n stelsel op te lossen.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de [Uitleg](#).

- Herleid beide vergelijkingen naar lineaire functies.
- Bepaal of bereken het snijpunt van beide grafieken.
- Hoeveel kinderen zaten er in de zaal?

Opgave 2

Stel dat een theatervoorstelling 500 bezoekers trekt. Een kinderkaartje kost € 4,00, een volwassenenkaartje kost € 6,50. De totale inkomsten door kaartverkoop zijn € 3300,00.

Welk stelsel van vergelijkingen kun je hierbij opstellen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je in veel gevallen vinden door:

- beide vergelijkingen te herleiden naar functies (als dat kan) en dan de gevraagde snijpunten te berekenen door beide functies gelijk te stellen;
- beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- substitutie**: je drukt bij één van beide vergelijkingen de éne variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking.
- de **balansmethode**: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan een van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen).

Een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft soms geen oplossing. Het is dan een **strijdig stelsel**. De beide bijbehorende grafieken zijn evenwijdige lijnen.

Het meest bijzondere geval is de situatie dat beide vergelijkingen (ook al zien ze er verschillend uit) toch dezelfde lijn voorstellen. Er zijn dan oneindig veel oplossingen, namelijk alle punten op die lijn.

Voorbeeld 1

Los dit stelsel met behulp van substitutie op.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. In de andere vergelijking kun je nu y vervangen door $300 - x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2,5x + 4,5(300 - x) = 1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Het stelsel is dus op te lossen: $x = 120$. Er zaten dus 120 kinderen in de zaal.

Opgave 3

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

- Druk in de eerste vergelijking y uit in x .
- Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?
- Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.
- Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y . Schrijf je oplossing nu volledig op en laat zien hoe je die kunt controleren.
- Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y . Los ook op die manier het stelsel op.

Opgave 4

Los het stelsel van vergelijkingen door middel van substitutie op.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel van vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig in de bovenste vergelijking beide zijden met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2,5x + 2,5y = 750 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking de onderste vergelijking af trekt, dan krijg je $-2y = -360$.

Dit geeft $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.



Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

- a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.
- b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.
- c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en in de onderste vergelijking beide zijden met -2. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

Opgave 6

Los de stelsels van vergelijkingen op eenzelfde manier als in het voorbeeld op.

a
$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 6x + 8y = 1 \end{cases}$$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig veld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b . Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt: $(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$. Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

- a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?
- b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van grafieken.



Opgave 8

Los op met behulp van een stelsel van vergelijkingen.

- a Bereken welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 110 m^2 en een omtrek van 55 meter heeft.
- b Bereken algebraïsch welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 100 m^2 en een omtrek van 50 meter heeft.

Opgave 9

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen:
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

- a Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.
- b Welk probleem doet zich voor?
- c Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Oefenen

Opgave 10

Los de stelsels van vergelijkingen op.

- a
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$
- b
$$\begin{cases} 2x + 4y = -7 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$$
- c
$$\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$$
- d
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
- e
$$\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$$
- f
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$$

Opgave 11

Van een rechthoek is de oppervlakte 200 cm^2 en de omtrek 90 cm. Noem de lengte l en de breedte b , beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken algebraïsch de oplossing van dit stelsel.

Opgave 12

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

- a Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.



- b** Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?
- c** Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q .
- d** Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verfhandelaar?

Opgave 13

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kg melk 1 kg volvette kaas gemaakt. 22,5 kg melk verwerkt men daar tot 1 kg boter. Er is 1000 kg melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zoveel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kg kaas en hoeveel kg boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 14

Voor een heg koopt een tuinman jonge groenblijvende planten: twintig thuja's en twaalf jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar komen er vijf thuja's tekort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

En natuurlijk zijn er ook stelsels van meer dan twee vergelijkingen met soms ook meer dan twee onbekenden.

De technieken om een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** op te lossen zijn hetzelfde als de technieken die je in dit onderwerp hebt geleerd. Van een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden ga je naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden en daarna naar één vergelijking met één onbekende.

In de opgaven hieronder zie je hoe dat gaat.

Opgave 15

Je wilt het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden oplossen.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y - 6z = 1 \\ 7x - 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

- a** Neem eerst de bovenste twee vergelijkingen en elimineer de z .
- b** Neem nu de bovenste en de onderste vergelijking en elimineer weer de z .
- c** Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden gekregen. Los dat stelsel op.



- d Bereken tenslotte de waarde van z door de gevonden waarden voor x en y in één van de drie gegeven vergelijkingen in te vullen.

Opgave 16

Los de volgende stelsels van drie vergelijkingen met drie onbekenden op. Soms zitten er vergelijkingen tussen die al meteen maar twee onbekenden hebben, dan kun je sneller werken dan in de vorige opgave.

a
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + z = -3 \\ x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} u = v + 0,5 \\ w = v + 2,5 \\ u + v + w = -1,5 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} p + q = 4 \\ q + r = 6 \\ p - q + r = 10 \end{cases}$$

Opgave 17

levensmiddel	eiwit (gram)	vet (gram)	koolhydr. (gram)	aantal kcal
achterham	18,2	5,5	1,7	129
komijnekaas	20,0	21,5	0,1	271
hagelslag (melk)	6,5	16,0	70,0	458
sla	1,3	0,2	1,0	11

Tabel 2.1

Hoeveel calorieën er in eten zitten, hangt af van de hoeveelheid vet, koolhydraten en eiwitten. Dat aantal calorieën heet de voedingswaarde, meestal uitgedrukt in kcal (kilocalorie). Via voedingswaardetabel.nl kun je van heel veel levensmiddelen de voedingswaarde per 100 mg bekijken. Een paar voorbeelden vind je in de tabel. Die voedingswaarde wordt berekend door uit te gaan van vaste caloriewaarden per gram eiwit, per gram vet en per gram koolhydraten.

Bereken de hoeveelheid kcal in 1 gram eiwit, in 1 gram vet en in 1 gram koolhydraten.



Testen

Opgave 18

Los de volgende stelsels van vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} k + 3v = 200 \\ k + v = 110 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0,5p \end{cases}$$

Opgave 19

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: 'zaal' en 'balkon'. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats en hoeveel een zaalplaats?

2.4 Lineaire modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

<i>tijd</i> (in uren)	0	2	4	6	8	10
<i>lengte</i> (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 2.1

- a Maak bij deze tabel een puntengrafiek.
- b Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Uitleg

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens:

<i>jaar</i>	1960	1970	1980	1990	2000	2010
<i>aantal inwoners</i> ($\times 100000$)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 2.2

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei niet precies lineair is, kun je hem goed benaderen door een lineair model. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Kies eerst een paar variabelen: N is het aantal inwoners ($\times 100000$) en t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft gaat door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$. Ga dat zelf na door de punten te tekenen. Om een formule bij deze lijn op te stellen, zoek je



eerst het hellingsgetal. In $50 - 20 = 30$ jaar tijd neemt N toe met $9,8 - 5,3 = 4,5$.

Per jaar is dat een toename van $\frac{4,5}{30} = 0,15$.

Dit is het hellingsgetal van de rechte lijn. De bijbehorende formule is dus $N = 0,15 \cdot t + b$. Om b te bepalen, gebruik je het feit dat de grafiek door $(20; 5,3)$ gaat, dus: $5,3 = 0,15 \cdot 20 + b$.

Dit betekent dat $b = 2,3$. Het lineaire model heeft daarom als formule $N = 0,15 \cdot t + 2,3$.

Hiermee kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 1

Bekijk het lineaire model dat in de **Uitleg** wordt opgesteld voor de bevolking van deze stad.

- Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn bestaat die door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$ gaat.
- Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.
- Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Opgave 2

Een cilindervormige kaars is anderhalf uur na het aansteken 25 cm lang en vier uur na het aansteken nog 20 cm lang. Voor deze kaars kun je aannemen dat de lengte L (in centimeter) afhangt van de brandtijd t (in uren).

- Bereken het hellingsgetal van die lineaire functie. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?
- Stel de formule $L(t)$ op.
- Bereken met behulp van die formule na hoeveel uur deze kaars volledig is opgebrand.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

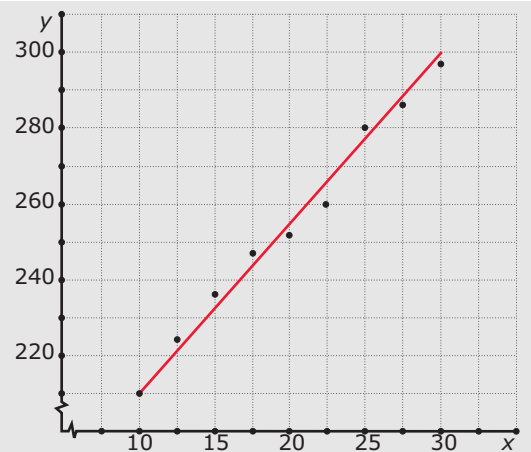
Bekijk de applet

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. En daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten (10,210) en (30,300), dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- x neemt toe met $30 - 10 = 20$;
- y neemt toe met $300 - 210 = 90$;
- als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{90}{20} = 4,5$ toe;
- het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) van de lijn is 4,5;
- de gevraagde formule is $y = 4,5x + b$;
- (10,210) moet op de lijn liggen, dus $210 = 4,5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4,5x + 165$.



Figuur 2.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Stel een formule op voor de lijn die door de punten A en B gaat.

Antwoord

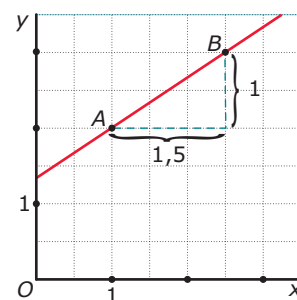
Lees af: $A(1,2)$ en $B(2,5)$. De gevraagde formule heeft de vorm $y = ax + b$.

Zo bereken je a en b :

- $a = \frac{3-2}{2,5-1} = \frac{2}{3}$;
- de formule wordt dan $y = \frac{2}{3}x + b$;
- $A(1,2)$ invullen geeft: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.

Als je het punt $B(2,5)$ invult, moet je dezelfde waarde voor b krijgen.

De gevraagde formule is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.



Figuur 2.2

Opgave 3

Bekijk eerst **Voorbeeld 1**.

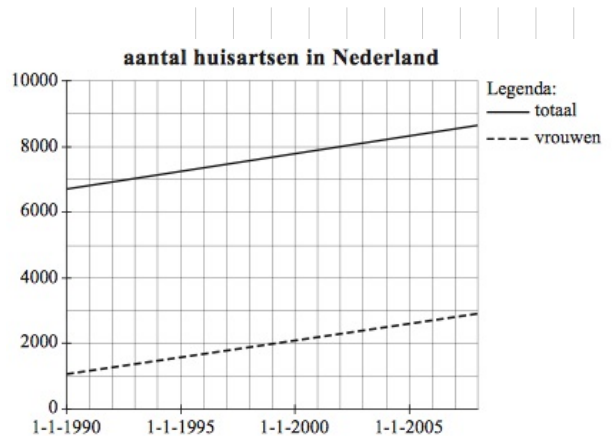
- Lijn l gaat door de punten $(-3,2)$ en $(17,10)$. Stel de vergelijking van lijn l op.
- Lijn m gaat door de punten $(5,20)$ en $(10,-25)$. Stel de vergelijking van lijn m op.
- Gegeven is dat f een lineaire functie is en dat $f(6) = 8$ en $f(10) = 14$. Stel de formule op van f .



Opgave 4

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar tegenwoordig zijn er steeds meer vrouwelijke huisartsen en dat aantal neemt nog steeds toe. Bekijk de figuur. Neem aan dat de stijging lineair verloopt.

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als $H_V = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.



Figuur 2.3 Bron: havo A examen 2013

- a Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a op één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule $H_T = 107 \cdot t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

- b Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je kunt een formule voor de lijn die door de punten $A(1,2)$ en $B(2,5;3)$ gaat ook opstellen door beide punten in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen:

- $A(1,2)$ geeft: $2 = a + b$.
- $B(2,5;3)$ geeft: $3 = 2,5a + b$.

Trek je beide vergelijkingen van elkaar af, dan vind je: $1 = 1,5a$.

Dus $a = \frac{2}{3}$. En (na invullen): $b = \frac{4}{3}$. De vergelijking van de lijn is

$$y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}.$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** tref je een andere manier aan om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen. Lijn l gaat door de punten $(-4,2)$ en $(20,10)$.

Stel een vergelijking van l op door deze methode toe te passen.



Voorbeeld 3

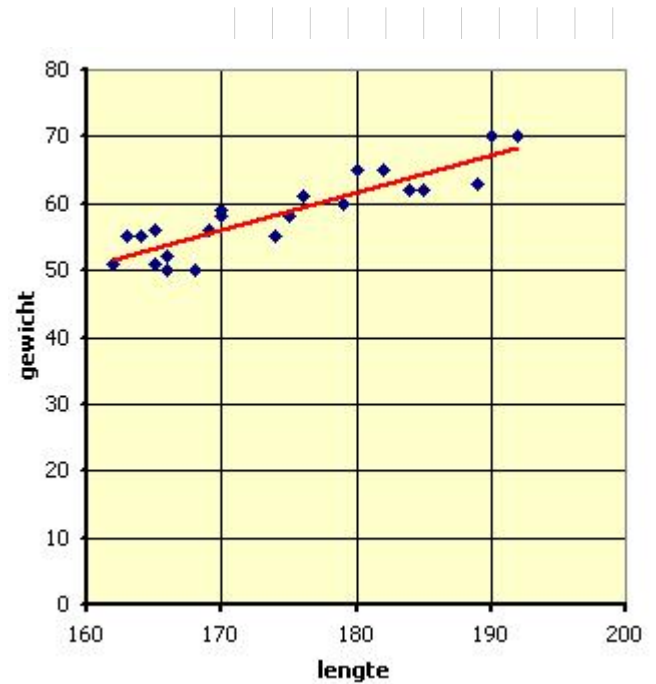
Van 22 scholieren in een 4 havo klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenaamde trendlijn doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft dan een verband tussen lengte L (in centimeter) en gewicht G (in kilogram). Er is gekozen voor een lineair verband. Stel daarbij een passende formule op.

Antwoord

De formule krijgt de vorm: $G = a \cdot L + b$. De lijn gaat ongeveer door (160,50) en (190,67).

- $a = \frac{67-50}{190-160} \approx 0,57$;
- de formule wordt dan $G = 0,57L + b$;
- punt (160,50) invullen geeft $50 = 0,57 \cdot 160 + b$, dus $b \approx -41,2$.

De gevraagde formule is $G = 0,57L - 41,2$.



Figuur 2.4

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe bij een verzameling meetpunten een lineair model wordt opgesteld door een zo goed mogelijk passende lijn te trekken en twee punten op die lijn af te lezen uit de figuur.

- Stel dat je afleest dat de rechte lijn door de punten (170,56) en (195,70) gaat. Welke formule past er dan bij de lijn?
- Bepaal met de formule die je bij a hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 meter uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 7

Dit zijn twee bijzondere situaties.

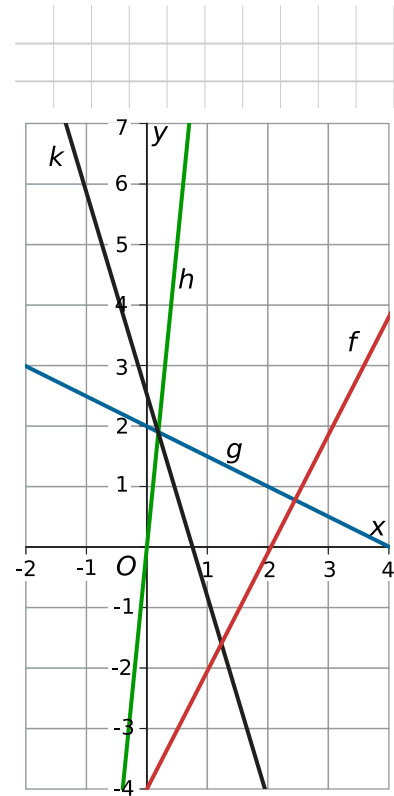
- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten (2,1) en (12,1) gaat.
- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten (2,1) en (2,10) gaat.

Oefenen

Opgave 8

In dit assenstelsel staan vier grafieken van lineaire functies.

- a Stel de formule van f op.
- b Stel de formule van g op.
- c Stel de formule van k op.
Neem aan dat de grafiek door de punten $(-1, 6)$ en $(1, -1)$ gaat.



Figuur 2.5

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de rechte lijn l bij de volgende situaties.

- a l gaat door de punten $(30, 68)$ en $(34, 56)$.
- b l gaat door de punten $(-2, 100)$ en $(-3, 100)$.
- c l heeft richtingscoëfficiënt $0,5$ en gaat door $(-2, 4)$.
- d l is de x -as.
- e l is de y -as.

Opgave 10

Lijn l gaat door de punten $P(13, 8)$ en $Q(43, 68)$ en lijn m gaat door de punten $R(23, 38)$ en $T(43, 28)$. Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m .

Opgave 11

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$ waarin $s(t)$ de afgelegde weg (in meters) na t seconden is.

- a Wat stelt $s(0)$ voor?
- b Wat stelt v voor?
- c Neem $s(0) = 0$ en $v = 20$ voor een bepaald voorwerp. Breng de bijbehorende grafiek van $s(t)$ in beeld.
- d Een tweede voorwerp heeft 400 meter voorsprong en beweegt langs dezelfde baan met een snelheid van 15 m/s. Geef de formule die bij de beweging van dit voorwerp past en breng de bijbehorende grafiek in beeld.
- e Bereken op welk tijdstip het eerste voorwerp het tweede heeft ingehaald.

Opgave 12

Bij een eenparig versnelde beweging beweegt een voorwerp met een constante versnelling a (in m/s^2) langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven door: $v(t) = v(0) + a \cdot t$ waarin $v(t)$ de snelheid (in m/s) na t seconden is.

- Wat stelt $v(0)$ voor?
- Albert weet op twee momenten de snelheid van een voorwerp. Hij weet namelijk dat het voorwerp vertrekt met een beginsnelheid van 40 m/s en dat het voorwerp na $3,5$ seconden een snelheid van 75 m/s heeft. Stel eerst de formule $v(t)$ voor dit voorwerp op en bereken dan na hoeveel seconden het voorwerp met een snelheid van 350 m/s beweegt.
- Om een voorwerp met een massa m van 1000 kg dat met een constante snelheid van 40 m/s beweegt tot stilstand te brengen, wordt een bepaalde remkracht F (in newton) uitgeoefend. Het voorwerp moet binnen acht seconden tot stilstand komen. Er geldt $F = m \cdot a$ met F in newton, m in kg en a (de versnelling) in m/s^2 . Bereken de grootte van de remkracht F .

Toepassen

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

tijd (in uren)	0	2	4	6	8	10
lengte (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 2.3

Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Opgave 13

Bekijk de gegevens in de tabel van de lengtes van de brandende kaars.

- Licht toe waarom de grafiek bij benadering een rechte lijn is.
- Met welke formule kun je de kaarslengte L in cm als functie van de tijd t in uren benaderen?
- Na hoeveel uur is de kaars volgens de formule opgebrand?

Opgave 14: Hogedrukpan

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,7	1,94
temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$)	100	105	110	115	120

Tabel 2.4

Als je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel tekent, dan kun je daar (bij benadering) een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat de lijn door het punt $(1,100)$. Bij de tabel past dan een lineair verband van de vorm $T = a \cdot p + b$. De rechte lijn gaat ook langs bijvoorbeeld het punt $(1,70; 115)$. Met behulp van deze punten vind je dan een geschikt lineair model: $T = 21,43p + 78,57$.

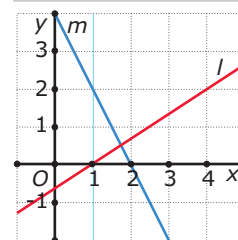
- Stel zelf de gegeven formule voor $T(p)$ op. Welke eenheden worden er gebruikt?
- Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?
- Bij welke druk kun je een temperatuur van 150°C bereiken?

Testen

Opgave 15

In deze figuur staan twee lijnen l en m .

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op. Bereken vervolgens algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 2.6

Opgave 16

Stel een vergelijking op van de rechte lijnen die als volgt beschreven worden.

- De lijn gaat door de punten $(40,32)$ en $(34,56)$.
- De lijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en gaat door het punt $(-2,4)$.
- De lijn gaat door het punt $(3,2)$ en is evenwijdig aan de y -as.

Opgave 17

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l(T) = l(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ gebruikt, waarin $l(T)$ de lengte (in m) van de staaf na het verhitten tot $T^\circ\text{C}$ is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

- Wat stelt $l(0)$ voor?
- Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$. Ga uit van een ijzeren staaf met $l(0) = 0,5$ m. Hoe lang is deze staaf op kamertemperatuur (20°C)? En tot hoeveel graden Celsius moet je hem verhitten om de staaf 1 mm langer dan $l(0)$ te laten worden?
- Voor koper geldt: $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5}$. Een staaf koper van 50 cm bij 20°C wordt verhit tot 100°C . Bereken de lengte van deze staaf bij 100°C .

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- lineair verband — lineaire vergelijking met twee variabelen
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen — oplossen door substitutie en/of de balansmethode
- lineair model

Activiteitenlijst

- bij lineaire functie hellingsgetal en begingetal herkennen om snel de grafiek te kunnen tekenen
- algemene lineaire verbanden herkennen — herleiden naar lineaire functie
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen oplossen
- lineair model opstellen, vergelijking lijn door twee gegeven punten opstellen

Testen

Opgave 1

Breng de lineaire vergelijkingen in beeld op de grafische rekenmachine. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn.

- a $3x - 2y = 24$
- b $x + 3y = 6$
- c $x = 2y + 1$
- d $y = 2$

Opgave 2

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond waar nodig af op 1 decimaal.

- a $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$
- b $\begin{cases} K = 40 + 0,16a \\ K = 36 + 0,18a \end{cases}$

c
$$\begin{cases} q = 200 - 0,25p \\ p \cdot q = 10000 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Opgave 3

Gegeven is lijn l die door de punten $(-40,46)$ en $(110,96)$ gaat en lijn m die een richtingscoëfficiënt heeft van -3 en door het punt $(2,14)$ gaat.

- Stel de formules op van beide lijnen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 4

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km/h, Henk met een snelheid van 12 km/h. Henk begint twee minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

- Hoe groot zijn hun snelheden in meter per minuut?
- Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?
- Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter) is. Welke eenheden zijn er gebruikt?
- Waarom is voor Ton de afgelegde afstand a wel recht evenredig met de tijd t en is dit voor Henk niet het geval?
- Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk?
- Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel lag hij toen op de ander voor?

Opgave 5

Iemand investeert € 10000,00 die voor hem worden belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Het fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, het fonds B levert na een jaar 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 aan winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Opgave 6

In de jaren zeventig van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro.

In een zekere plaats gold:

1. bij een jaarverbruik tot 600 m^3 : vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (tarief 1);
2. bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3 : vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (tarief 2).

- a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1200 m^3 .
- b De grafiek van a valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a , het aantal verbruikte m^3 . Geef van elk van die lineaire functies een formule.
- c Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden. Wat wordt daarmee bedoeld? Waarom deed hij dat?
- d Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het gas afbranden een besparing op? En vanaf welk jaarverbruik was tarief 2 goedkoper?
- e Welke maatregelen kon het gasbedrijf treffen om het afbranden van gas te voorkomen?

Opgave 7

Iemand hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in gram, u is de uitrekking van de veer in centimeter. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 2.1

- a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?
- b Geef de formule die u uitdrukt in m .
- c Als er 50 gram aan de veer hangt is de totale lengte l van de veer 35 centimeter. Geef de formule die l uitdrukt in m .
Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 centimeter lang en met 10 gram eraan 15,5 centimeter lang.
- d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m .
- e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.



Toepassen

Opgave 8: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

Bij een eenparige beweging is de snelheid constant. Bij een eenparig versnelde beweging is de versnelling constant. In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbij schieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor start. Dit is 6 seconden nadat de auto de motoragent passeert. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor eenparig versnelt met een versnelling van 4 m/s^2 .

- a Hoeveel seconden na $t = 0$ rijdt de motor sneller dan de auto?
- b Hoeveel m voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor start?
- c Stel een formule op voor de afgelegde weg $s_A(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.
- d De topsnelheid van de motor is 200 km/uur. Hoe lang doet de motor er over om die te bereiken?
- e Als de motor op topsnelheid rijdt, is zijn snelheid constant. Welke formule geldt dan voor de afgelegde weg $s_M(t)$ van de motor?
- f Na hoeveel seconden heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 9: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c . Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

- a Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?
- b Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeelten.
- c Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?
- d Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afsprekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.
- e Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

Register

a

algebra 8

b

balansmethode 71

begingetal 56

buiten haakjes halen 21

c

combineren 71

d

Distributieve eigenschap 21

nde machts worteltrekken
37

e

exponent 28, 29

f

factoren 21

formule 43

functie 44

g

gelijknamig 15

gelijksoortige termen 8

grondtal 28, 29

grootste gemeenschappelijke
delers 21

h

haakjes uitwerken 21

hellingsgetal 56

herleiden 8

k

kleinste gemeenschappelijke
veelvoud 15

l

lineair model 79

lineair verband 63

lineaire functie 56, 79

m

macht 28, 29

o

ongelijksoortige termen 8

ontbinden in factoren 21

r

rekenen 8

recht evenredig 56

rekenen met breuken 15

richtingscoëfficiënt 56

s

stelsel van twee vergelijkingen
71

strijdig stelsel 71

substitutie 71

t

technische notatie 29

termen 21

tweeterm 21

v

variabelen 8

verdeeleeigenschap 21

vierterm 21

w

worteltrekken 36, 37

wetenschappelijke notatie 29

wisseleeigenschap 8

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

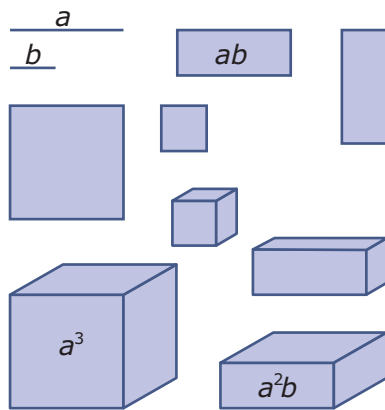


www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 4.



- a** Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- b** Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- c** Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?