

Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel breed (KS 1348)

Katern 2

Inhoud

Vergelijkingen

Kwadratische functies

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

1 Vergelijkingen 5

1.1 Basistechnieken 6

1.2 Balansmethode 14

1.3 Ontbinden 21

1.4 Breuken in vergelijkingen 28

1.5 Wortels in vergelijkingen 35

1.6 Totaalbeeld 40

2 Kwadratische functies 43

2.1 Kwadratische functies 44

2.2 De abc-formule 53

2.3 Domein en bereik 62

2.4 Ongelijkheden 70

2.5 Totaalbeeld 77

Register 82

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Vergelijkingen

1.1	Basistechnieken	6
1.2	Balansmethode	14
1.3	Ontbinden	21
1.4	Breuken in vergelijkingen	28
1.5	Wortels in vergelijkingen	35
1.6	Totaalbeeld	40

1.1 Basistechnieken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Voorkennis

- werken met variabelen in formules, in uitdrukkingen;
- bij formules grafieken maken.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt twee cilindervormige kaarsen. De ene kaars is blauw en 27 cm lang, de andere is geel en 17 cm lang. De blauwe kaars wordt 4,5 cm per uur korter en de gele kaars wordt elk uur 2 cm korter.

- Hoeveel verschil zit er in de tijd waarin beide kaarsen opbranden?
- Op welk tijdstip zijn beide kaarsen even lang?
- Hoeveel uur is de gele kaars langer dan de blauwe?

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die op hetzelfde moment zijn aangestoken. In de grafiek zie je dat ze steeds korter worden. De bijbehorende formules zijn:

- Rode kaars: $h = 20 - 4 \cdot t$
- Groene kaars: $h = 30 - 7,5 \cdot t$

met h de lengte van de kaars in cm en t de tijd in uren.

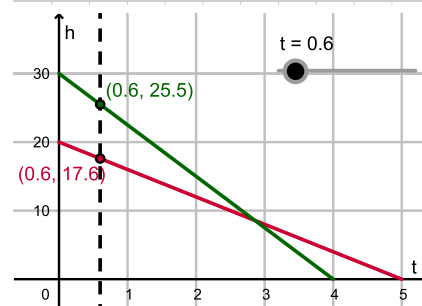
De rode kaars lijkt in de grafiek na 5 uur helemaal op. Dat is het punt waarin $h = 0$. Een dergelijk punt heet een **nulpunt**.

Om zeker te weten of dit ook echt het geval is gebruik je de formule van de rode kaars. Je lost op $h = 0$ dus $20 - 4t = 0$. Dit heet een **vergelijking**. Ga na dat voor $t = 5$ de vergelijking waar is. $t = 5$ heet de **oplossing** van de vergelijking.

Je ziet dat beide grafieken elkaar snijden.

Beide kaarsen zijn dan even lang, dus de hoogte van de groene kaars is gelijk aan de hoogte van de rode kaars. Als je het bijbehorende tijdstip wilt bepalen dan los je de vergelijking $20 - 4t = 30 - 7,5t$ op.

Je ziet dat de formule van de rode kaars gelijk is gesteld aan die van de groene.



Figuur 1.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Waarom zie je dat de kaarsen opbranden? Welke kaars brandt het snelst op en hoe zie je dat aan de grafiek?
- Hoe zie je aan de formules welke kaars het snelst opbrandt?
- Hoe lang zijn deze kaarsen op het moment van aansteken?
- Geef de coördinaten van het nulpunt van de groene grafiek. Welke vergelijking hoort hierbij? Laat zien hoe je met deze vergelijking het antwoord kunt controleren.
- Hoeveel tijd zit er tussen het opbranden van de groene en de rode kaars?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

- Hoe lang is de rode kaars na 1 uur? En de groene kaars?
- Hoe groot is het verschil in lengte op $t = 1$? En welke kaars is dan het langst?
- Bepaal met de grafieken op welk tijdstip het verschil tussen de lengtes van beide kaarsen 0 is. Wat betekent dit?
- Hoe zou dit tijdstip met behulp van de vergelijking in de uitleg kunnen controleren? Waarom klopt dit niet precies?
- Hoe zou je een nauwkeuriger tijdstip kunnen vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een formule waarin een isgelijktteken voorkomt heet een **vergelijking**.

Dat isgelijktteken wijst erop dat wat links ervan staat dezelfde waarde moet hebben als wat er rechts van staat. De vergelijking is in 'balans'.

Het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen is hiervan een voorbeeld. Je ziet dit in beide grafieken in beeld gebracht.

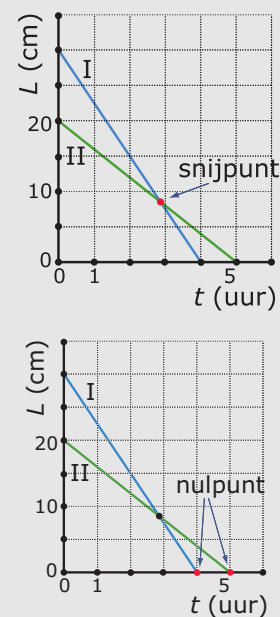
Als beide kaarsen gelijk zijn geldt

$$20 - 4t = 30 - 7,5t.$$

De waarde van t die linker- en rechterkant van deze vergelijking gelijk maakt heet de **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

Als de lengte van een kaars 0 is, heb je te maken met een **nulpunt** van de grafiek. Je ziet hiernaast twee nulpunten. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7,5t = 0$ op te lossen. Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.

Het oplossen van een vergelijking met één onbekende doe je door **inklemmen**, of door slim te rekenen, bijvoorbeeld door **terugrekenen**. Bekijk de voorbeelden.

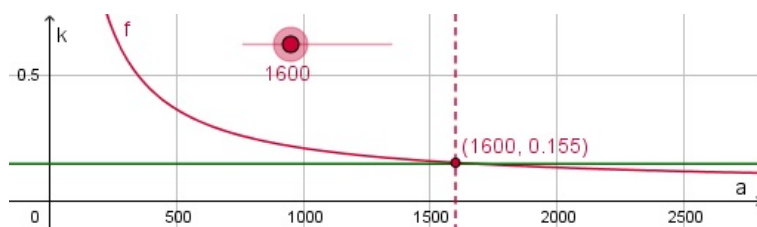


Figuur 1.2

Voorbeeld 1

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Bekijk de applet.



Figuur 1.3

Antwoord

De grafiek brengt het probleem in beeld. Je kunt de kosten per kopie van de school en die van de leerling aflezen.

Bekijk zelf wanneer beide even groot zijn. Je zult nog geen nauwkeurig antwoord kunnen geven, er zijn nog steeds meerdere getallen waar je op afgerond 15 cent per kopie uitkomt.

Om te bepalen welke daarvan het juiste getal is, moet je het aantal decimalen waarmee je het snijpunt afleest verhogen. Dan kun je tot op de kopie nauwkeurig antwoord geven. De oplossing wordt door inklemmen gevonden. Je doet dit handmatig met een tabel.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- Waarom zijn de kosten per kopie voor de leerling constant? Welke formule hoort daar bij?
- Waarom zijn de kosten per kopie voor de school niet constant?
- Bereken de kosten per kopie voor de school als er 1000 kopieën worden gemaakt. Hoeveel zijn deze kosten bij 2000 kopieën? En bij 3000 kopieën?
- Welke formule beschrijft dus de kosten per kopie voor de school?
- Onderzoek bij welk aantal kopieën de kosten per kopie onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Welk probleem kom je tegen?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- In hoeveel decimalen nauwkeurig kun je de kosten per kopie aflezen?
- Onderzoek opnieuw bij welk aantal kopieën de kosten onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Hoeveel antwoorden zijn er nu nog mogelijk?

- c Hoe kun je nu bepalen welke van deze antwoorden het juiste is?
- d Laat zien hoe dit met een tabel door inklemmen kan.

Voorbeeld 2

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Antwoord

De kosten kun je k noemen en het aantal kopieën is a .

Voor de school geldt dan $k = 0,06 + \frac{152}{a}$ en voor de leerling geldt $a = 0,15$ want je betaalt voor elke kopie 15 cent.

Je moet dus deze vergelijking oplossen: $0,06 + \frac{152}{a} = 0,15$.

Linkerkant en rechterkant moeten gelijk blijven dus moet $\frac{152}{a} = 0,09$.

Nu maak je gebruik van een rekenopgave die er erg op lijkt zoals $\frac{6}{2} = 3$.

Dit kun je ook schrijven als $2 = \frac{6}{3}$ en voor onze vergelijking betekent dat $a = \frac{152}{0,09} \approx 1689$.

Deze manier van werken heet wel **analogierekenen**.

Hier moet je afronden op gehele getallen.

Opgave 5

Bekijk de oplossing die in **Voorbeeld 2** wordt gegeven.

- a Waarom past de gegeven vergelijking bij het gestelde probleem?
- b Bij een vergelijking moeten de linkerkant en de rechterkant van het isgelijktteken dezelfde waarde hebben. Leg uit hoe hieruit volgt dat $\frac{152}{a} = 0,09$.
- c En hoe is hieruit afgeleid dat $a = \frac{152}{0,09}$?
- d Komt je antwoord overeen met het voorgaande voorbeeld? Vanaf hoeveel kopieën gaat de school verdienen?

Opgave 6

Los nu de volgende vergelijkingen op met behulp van analogierekenen:

- a $\frac{600}{x} = 0,05$
- b $20 + \frac{40}{g} = 23$
- c $\frac{200-x}{20} = 0,4$
- d $\frac{20}{200-x} = 0,4$



Voorbeeld 3

Los op: $2(x - 3)^2 - 8 = 10$

Antwoord

Hier komt de variabele x op één plaats aan de linkerzijde van het isgelijktteken voor. Hier kan terugrekenen dus helpen.

- Rekenschema: $x \xrightarrow{-3} \dots \xrightarrow{(\dots)^2} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-8} 10$
- Terugrekenenschema: $x \xleftarrow{+3} \dots \xleftarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xleftarrow{/2} \dots \xleftarrow{+8} 10$

De oplossing is dus $x = \pm \sqrt{\frac{10+8}{2}} + 3$.

Het teken $\pm$ betekent dat er twee oplossingen zijn namelijk $x = 6 \vee x = 0$.

Bij terugrekenen vanuit een kwadraat moet je daar altijd rekening mee houden.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je een vergelijking oplost door terug te rekenen.

- Wanneer kun je het terugrekenen toepassen om een vergelijking op te lossen?
- Voer zelf de oplossing van de gegeven vergelijking uit. Controleer vervolgens beide oplossingen door ze voor x in te vullen.

Opgave 8

Los op door terugrekenen:

- $5(x - 3) = -3$
- $0,5(x - 4)^2 - 2,5 = 10$
- $4\sqrt{x + 2} = 2$

Oefenen

Opgave 9

Twee aanbieders van mobiele telefonie hebben een aanbieding:

- Tele3: € 30,00 per maand en 11 cent per minuut.
- E-Mobile: € 25,00 per maand en 13 cent per minuut.

- Stel een formule op voor de telefoonkosten bij de aanbieding van Tele3.
- Doe hetzelfde voor E-Mobile.
- Bij welk aantal belminuten is E-Mobile duurder dan Tele3? En bij welk aantal is juist Tele3 duurder?
- Jij weet je gemiddelde aantal belminuten per maand wel. Kies je voor de aanbieding van Tele3 of voor die van E-Mobile?



Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen nauwkeurig:

- a $x^3 = 6 - x$
- b $\frac{750}{2x+1} = 300$
- c $2^x = 12$
- d $2 - \frac{1}{x} = 0,5$
- e $2(x + 4)^3 = 128$

Opgave 11

Bekijk hoe je de vergelijkingen in de voorgaande opgave hebt opgelost.

In welke gevallen kon je het analogierekenen toepassen? En wanneer kon je terugrekenen?

Opgave 12

Een winkel huurt een kopieerapparaat speciaal voor haar klanten. Dit kost maandelijks 180 euro en het maken van een kopie met dit apparaat kost de winkelier 6,5 cent. De klanten betalen 10 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt wil de winkelier er niet bij inschieten?

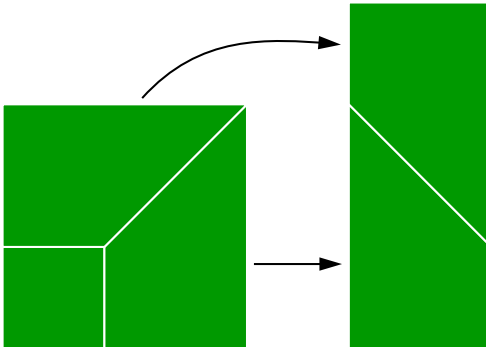
- a Welke vergelijking kun je nu opstellen om het probleem op te lossen?
- b De winkelier schat 6000 kopieën per maand voldoende is om uit de kosten te zijn. Klopt dit met de vergelijking die je hebt gevonden?
- c Kun je een nauwkeuriger oplossing vinden met behulp van de vergelijking?

Opgave 13

Van Apeldoorn naar Deventer is met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof. Je doet over deze rit 14 minuten. Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid?

Opgave 14

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



Figuur 1.4

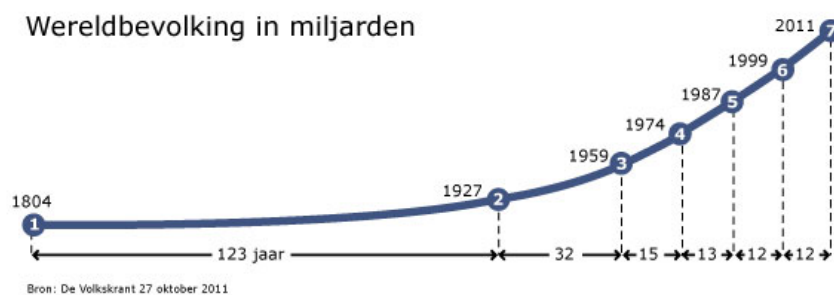
De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2 . Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

In gevallen van vergelijkingen met exponentiële groei kun je werken met het inklemmen of met logaritmen.

In 'De Volkskrant' van 27 oktober 2011 staan grafieken over de groei van de wereldbevolking. Hier zie je er één. Uit deze grafiek blijkt dat de wereldbevolking op dit moment toeneemt met 1,3% per jaar.

In een artikel van 29 oktober 2011 wordt verteld dat in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen. Klopt dit met deze grafiek?



Figuur 1.5

Opgave 15

Bekijk het verhaal van het verloop van de wereldbevolking hierboven.

- Controleer de toename van 1,3% per jaar met de gegevens voor 1999 en 2011.
- Ga na of in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen met het gegeven percentage.



- c Maak jij nog mee dat de 10 miljardste mens op aarde mag worden begroet?
- d Welke onderbouwde kritiek kun je op deze redeneringen hebben?

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op door redeneren:

- a $15x - 400 = 515$
- b $\frac{200}{x} + 10 = 15$
- c $\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 4 = 22$

Opgave 17

De vergelijking $\frac{1}{x} = x + 1$ kun je oplossen met behulp van inklemmen.

- a Maak eerst de bijbehorende grafieken.
- b Bepaal de snijpunten van deze grafieken in twee decimalen nauwkeurig.
- c Geef de oplossing van deze vergelijking in twee decimalen nauwkeurig.
- d $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

1.2 Balansmethode

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met de balansmethode.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

- Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?
- Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g . Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die in evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Uitleg

Je kent de balansmethode voor het oplossen van een vergelijking met één onbekende.

Daarbij maak je de vergelijking systematisch eenvoudiger door aan beide zijden van het isgelijktteken hetzelfde op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. (Je mag alleen niet beide zijden door 0 delen of met 0 vermenigvuldigen.)

De vergelijking $2g + 21 = 6g + 5$ kun je daarmee zo oplossen:

$$\begin{array}{lcl} 2g + 21 & = & 6g + 5 \\ 2g + 16 & = & 6g \\ 16 & = & 4g \\ g & = & 16/4 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{beide zijden } -5 \\ \text{beide zijden } -2g \\ \text{beide zijden } /4 \end{array}$$

Als je een vergelijking oplost door redeneren (zoals met de balansmethode) dan noem je dat: algebraïsch oplossen.

Vooraf bij vergelijkingen met machten erin heeft het algebraïsch oplossen voordelen. Je krijgt dan meteen alle oplossingen.



Opgave 1

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $5g + 6 = 3g + 9$
- b $5g + 6 = 8g - 18$
- c $-2,5g + 14 = 8g - 19$
- d $-2,5g - 19 = 8g - 14$

Opgave 2

Bekijk de vergelijking $2x^2 + 5 = 55$.

- a Los deze vergelijking op met de balansmethode.
Denk er aan, dat er twee oplossingen moeten zijn.
- b Waarom moesten er wel twee oplossingen zijn?
- c Hoe kun je je antwoorden controleren?

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 8$
- b $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x^2$
- c $\frac{1}{2}x^3 + 3 = 8$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele op meerdere plaatsen voorkomt op te lossen maak je vaak gebruik van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijktteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijktteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijktteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe.

Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: "Links en rechts worteltrekken."

Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: "Links en rechts kwadrateren."

Dit kan niet altijd zomaar...



Figuur 1.1

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = -5x + 1,5$ algebraïsch op.

Antwoord

Je gebruikt de balansmethode:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} &= -5x + 1,5 \\ x + 2 &= -30x + 9 && \text{beide zijden } \times 6 \\ x &= -30x + 7 && \text{beide zijden } -2 \\ 31x &= 7 && \text{beide zijden } +30x \\ x &= 7/31 = \frac{7}{31} && \text{beide zijden } /31\end{aligned}$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x = \frac{7}{31}$.

Laat een breuk in het antwoord staan en rond niet af. Je hebt dan de vergelijking **exact** opgelost. Afronden doe je alleen als daar om gevraagd wordt!

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** de oplossing van de gegeven vergelijking.

- Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?
- Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?
- Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?
- Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- $7x - 15 = 4x - 3$
- $0,7 - 0,2x = 1 - 0,6x$
- $\frac{1}{5}x + 2 = 0,3x - 3$
- $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $-2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b$.

Antwoord

Ook hier doe je de balansmethode, maar nu werk je eerst de haakjes uit.

$$\begin{aligned}-2(b + 3) &= 5(b + 7) + 2b && \text{beide zijden haakjes uitwerken en verder herleiden} \\ -2b - 6 &= 7b + 35 && \text{beide zijden } +6 \\ -2b &= 7b + 41 && \text{beide zijden } -7b \\ -9b &= 41 && \text{beide zijden } /-9 \\ b &= 41/-9 = -\frac{41}{9}\end{aligned}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.



Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de gegeven vergelijking.

- Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.
- Controleer je antwoord door substitutie.
- Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- $5(x + 2) = 2x + 15$
- $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$
- $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x + 5)$
- $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2 - p)$
- $x - \frac{1}{4}(x + 3) + \frac{3}{4} = 0$

Opgave 8

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijktteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

- $2(x + 4) = x - (4 - x)$
- $2(x - 2) = x - (4 - x)$

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $0,5(x - 3)^2 - 10 = 50$.

Antwoord

Deze vergelijking kun je snel oplossen door terugrekenen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen:

$$\begin{aligned} 0,5(x - 3)^2 - 10 &= 50 \\ 0,5(x - 3)^2 &= 60 && \text{beide zijden } +10 \\ (x - 3)^2 &= 120 && \text{beide zijden } /0,5 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{120} && \text{terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)} \\ x &= 3 \pm \sqrt{120} && \text{beide zijden } +3 \end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x = 3 + \sqrt{120} \vee x = 3 - \sqrt{120}$.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de gegeven vergelijking.

- Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.
- Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.
- Bij de stap 'terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)' is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?
- Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- $5(x + 10)^2 + 50 = 70$
- $10 - x^2 = 3x^2$
- $10 - (x - 1)^2 = 5$

Oefenen

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

- $3x - 7 = -x + 10$
- $5x - 4 = 3(5 - x)$
- $0,2x + 10 = 310$
- $4\left(5 - \frac{3}{4}x\right) + 5x = -x + 10$
- $5x - (3 - 2x) = 11$
- $\frac{5-x}{3} = \frac{1}{2}(x + 6)$
- $6 - 2(x - 5)^2 = 2$
- $(x - 5)^2 = 5 + x^2$

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

- $1 - (x - 3) = 2(3x - 7)$
- $2x - 4 = 2(1 + x)$
- $\frac{3x-5}{2} = 0,25(2x - 10) + x$
- $6 + 2(x - 2)^2 = 4$
- $6 - 2(x - 2)^2 = 4$

Opgave 13

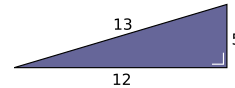
Oefen nu het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.

- Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hier naast is getekend.
De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.
- Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x + 1$ noemen? Welke van beide is de hypotenusa (de langste zijde) van de driehoek?
- Aan welke vergelijking moet x voldoen?
- Laat zien dat deze vergelijking alleen $x = 12$ als oplossing heeft.



Figuur 1.2

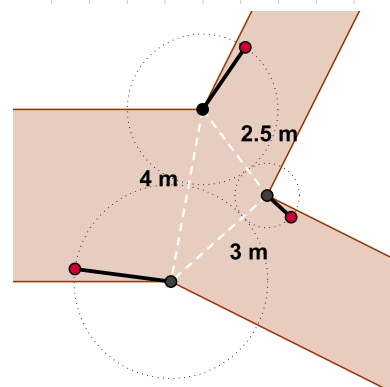
Toepassen

Bekijk de applet.

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m.

Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid.

Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...



Figuur 1.3

Opgave 15

Bekijk het hekkenprobleem hierboven.

- Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...
- Neem voor de lengte van het grootste hek x . Wat geldt dan voor het middelste hek? En het kleinste hek?
- Hoe lang moeten het middelste en het kleinste hek samen zijn? Welke vergelijking krijg je daarmee?
- Los je vergelijking en daarmee het probleem op.



Opgave 16: Leeftijdenprobleem

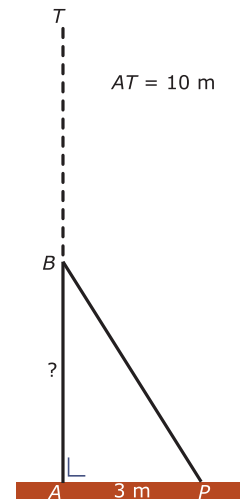
Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was zij 26 jaar.

- Stel Joop's leeftijd op x jaar. Wat geldt dan voor Myrthe's leeftijd?
- Hun leeftijdsverschil is niet veranderd. Welke vergelijking levert dit op?
- Los de vergelijking die je hebt gevonden op. Hoe oud zijn beiden nu?

Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A . Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

- Je wilt weten op welke hoogte het breekpunt B zit. Welk lijnstuk wordt je onbekende?
- Er zit een rechthoekige driehoek in je figuur. Welke vergelijking levert dit op?
- Los de gevonden vergelijking op en bereken hoe hoog punt B boven de grond zit.



Figuur 1.4

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op:

- $\frac{x-4}{6} = \frac{1}{3}x + 2$
- $0,1(x+5)^2 = x + 15$
- $\frac{1}{2}\sqrt{x-5} + 4 = 22$

Opgave 19

De vergelijking $x^2 = 5x + 6$ kun je niet oplossen met de balansmethode.

- Waarom niet?
- Hoe kun je zo'n vergelijking toch oplossen?
- Geef de oplossing van deze vergelijking.

1.3 Ontbinden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met behulp van ontbinden in factoren.

Voorkennis

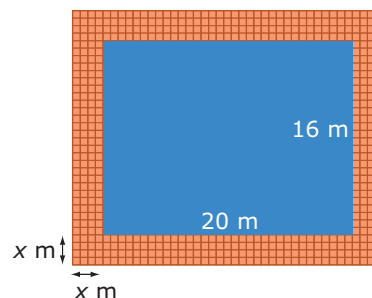
- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen en/of door de balansmethode te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.

- Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20 + 2x$ meter is.
- Hoeveel is dan de breedte?
- Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?



Figuur 1.1

Opgave V2

Het zwembadterrein uit de vorige opgave heeft een totale oppervlakte van 480 m^2 . Hoe breed is het tegelpad?

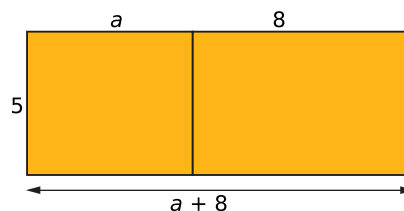
- Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?
- Hoe los je die vergelijking op?

Uitleg 1

Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren is op hetzelfde principe gebaseerd:

- haakjes wegwerken: $5 \cdot (a + 8) = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5a + 40$
- ontbinden in factoren: $5a + 40 = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5 \cdot (a + 8)$

Bij ontbinden in factoren breng je de grootste gemeenschappelijke factor (hier 5) buiten haakjes.

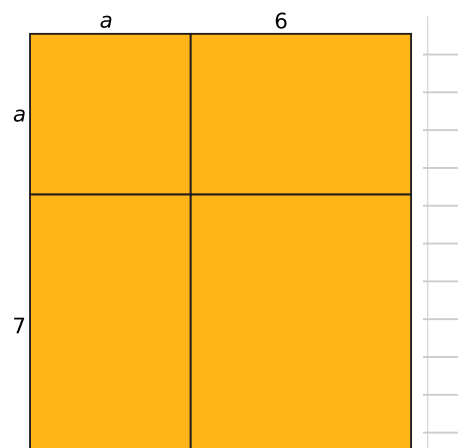


Figuur 1.2

Dit kunt je ook toepassen in ingewikkelder situaties:

- haakjes wegwerken:
 $(a + 6) \cdot (a + 7) = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
 $= a^2 + 13a + 42$
- ontbinden in factoren:
 $a^2 + 13a + 42 = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
 $= (a + 6)(a + 7)$

Bij het ontbinden gebruik je nu de som-product-methode: je zoekt twee getallen waarvan het product 42 is en de som 13.



Figuur 1.3

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet eerst hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke factor buiten haakjes te halen. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

- a $4x - 20$
- b $4x^2 - 20x$
- c $4x^2 - 4x$
- d $16x - 20x^3$

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Je ziet ook hoe je kunt ontbinden in factoren door de som-product-methode te gebruiken. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

- a $x^2 + 5x + 6$
- b $x^2 - 5x + 6$
- c $x^2 - x - 6$
- d $0,5x^2 + 0,5x - 3$

Uitleg 2

Het ontbinden in factoren kun je soms toepassen om vergelijkingen op te lossen waarin naast de onbekende ook machten ervan voorkomen. Het doel van het ontbinden is het splitsen van de vergelijking in eenvoudiger vergelijkingen. Omdat je dan gebruik maakt van $a \cdot b = 0$ betekent $a = 0 \vee b = 0$ moet je beginnen met op 0 herleiden.

Je wilt bijvoorbeeld de vergelijking $5x^2 = 25x$ oplossen.

Dat kan zo:

$$\begin{aligned}
 5x^2 &= 25x \\
 5x^2 - 25x &= 0 && \text{op 0 herleiden} \\
 5x \cdot (x - 5) &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 5x = 0 \vee x - 5 &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\
 x = 0 \vee x &= 5 && \text{oplossing opschrijven}
 \end{aligned}$$

Dit kun je soms ook doen bij ingewikkelder vergelijkingen zoals $x^2 + 4x = 45$.

Dan heb je na het op 0 herleiden de som-product-methode nodig om te ontbinden.

Ontbinden in factoren is een handige en snelle manier om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Veel handiger dan de abc-formule. Maar je kunt er ook vergelijkingen met hogere machten mee aanpakken.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Neem nu de vergelijking $x^2 + 4x = 45$.

- Herleid deze vergelijking op 0 en laat zien hoe je de linkerkzijde kunt ontbinden in factoren.
- Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.
- Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^2 + 12x - 45 = 0$
- $x^2 - 12x = 45$
- $x(x - 1) = 90$

Theorie en voorbeelden

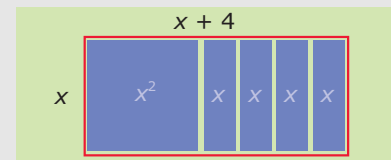
Om te onthouden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen. Hierbij kun je gebruik maken van een tabel.

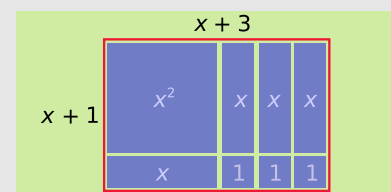
Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen. Ook hierbij is een tabel handig.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking kun je dan herleiden tot een product van factoren waar 0 uit komt. De vergelijking kun je dan schrijven in de vorm $a \cdot b = 0$. En omdat $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$ kun je de vergelijking dan **splitsen** in twee eenvoudigere vergelijkingen.

Omdat dit splitsen alleen lukt bij een product waar 0 uit komt, moet je de vergelijking altijd eerst de vorm $\dots = 0$ geven. Dat heet **op 0 herleiden**.



$$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$$



$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$$

Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $2x^2 = 10x - 8$ algebraïsch op.

Antwoord

$$\begin{aligned}
 2x^2 &= 10x - 8 && \text{op 0 herleiden} \\
 2x^2 - 10x + 8 &= 0 && \text{beide zijden } /2 \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\
 x - 1 = 0 \vee x - 4 = 0 &&& \text{oplossing opschrijven} \\
 x = 1 \vee x = 4 &&&
 \end{aligned}$$

Opgave 5

Bekijk de vergelijking van **Voorbeeld 1**.

- Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.
- Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?
- Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op.

- $a^2 + 2a = 35$
- $(b - 2)(2b + 3) = 0$
- $x^2 - 15 = 2x$
- $3x^2 - 45 = -6x$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^3 = 6x$.

Antwoord

Ook hier kun je het ontbinden in factoren toepassen.

$$\begin{aligned}
 x^3 &= 6x && \text{op 0 herleiden} \\
 x^3 - 6x &= 0 && \text{linkerlid ontbinden in factoren} \\
 x(x^2 - 6) &= 0 && \text{splitsen} \\
 x = 0 \vee x^2 - 6 &= 0 && \text{rechter vergelijking verder oplossen} \\
 x = 0 \vee x^2 &= 6 && \text{rechter vergelijking worteltrekken} \\
 x = 0 \vee x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} &&&
 \end{aligned}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Er zijn nu drie oplossingen. Kun je dat verklaren vanuit de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$?



Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Maak de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$.
Leg uit waarom er drie oplossingen zijn.
- b Controleer de drie gevonden oplossingen door substitutie in de gegeven vergelijking.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $x^3 = 9x$
- b $x^3 = 9x^2$
- c $x^3 = 9x^2 + 10x$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $x^4 = 9x$
- b $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 80$
- c $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 0$

Oefenen

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

- a $3x^2 - 36x = 0$
- b $k^2 - 9 = 7$
- c $x^2 = x$
- d $c^2 + 2c = 35$
- e $2x^2 - 4x - 16 = 0$
- f $2x^2 - 8x - 17 = 0$

Opgave 11

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2 . De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

- a Neem voor de lengte x meter. Hoeveel bedraagt de breedte dan?
- b Je kunt nu bij de oppervlakte van het land een vergelijking opschrijven. Welke?
- c Los deze vergelijking op. Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

- a $(x - 5)(2x - 6) = 0$
- b $(x - 5)(2x - 6) = 30$



- c $2(x - 3)^2 = 8x$
d $2(x - 3)^2 = 18$
e $x^3 = 27x$
f $x^3 = 27x^2 + 90x$

Opgave 13

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via [Practicum](#).

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

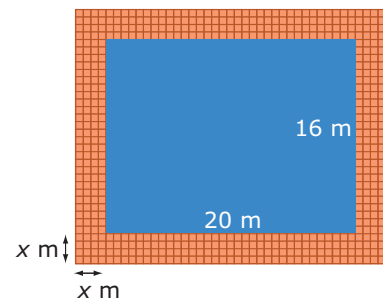
Opgave 14

Een vierkant heeft zijde x . Een rechthoek heeft zijden $12 - x$ en $x - 2$. Voor welke waarden van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?

Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen.

Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit zwembad bedraagt.



Figuur 1.5

Opgave 15

Bekijk het zwembadprobleem hierboven.

- a Welke vergelijking vind je als je de oppervlakte van het totale terrein bekijkt?
b Los deze vergelijking nu op met behulp van ontbinden in factoren. Bereken de breedte van het tegelpad.

Opgave 16: Boer Harmsen

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer af gaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.

De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsens land nu geworden is. Stel zelf een geschikte vergelijking op.

**Opgave 17: Kubus en cilinder**

Een kubus met ribbelengte x en een cilinder met hoogte 10 en diameter x hebben een even groot volume.

Alle afmetingen zijn in cm.

Welke afmetingen heeft de kubus?

Testen**Opgave 18**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^2 - 13x = 0$

b $x^2 - 13x = 30$

c $\frac{1}{2}(x - 5)^2 = 18$

d $(x - 6)\left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -30$

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^4 = 16x^2$

b $x^4 = 16x$

c $x^4 + 6x^3 = 16x^2$

1.4 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin breuken met de onbekende in de noemer voorkomen.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

- a** Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t .

- b** Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- c** Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?
- d** Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?
- e** Probeer deze vergelijking op te lossen.

Opgave V2

Je hebt als het goed is eerder geleerd hoe je twee breuken kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Neem nu de breuken $\frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$.

- a** Laat zien hoe je beide breuken optelt en de tweede breuk van de eerste aftrekt.
- b** Laat zien hoe je beide breuken vermenigvuldigt.
- c** Laat zien hoe je de eerste breuk door de tweede deelt.

Uitleg

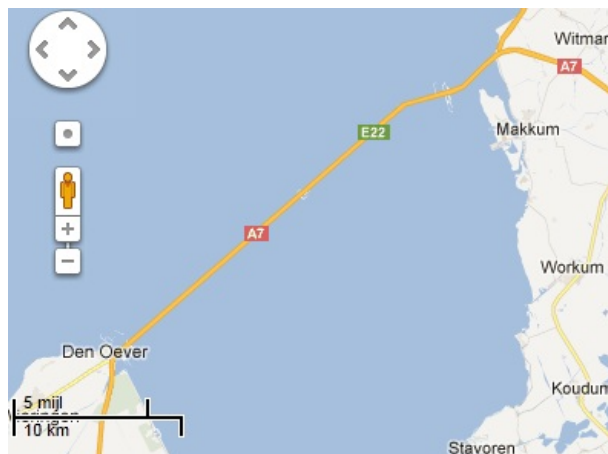
Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5.$$

Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$



Figuur 1.1

oplossen. Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel analogierekenen.

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dan val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 1.2

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k . Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.



Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel **analogierekenen**.

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.

De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de **gebroken vergelijking**:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de **balansmethode**. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{aligned} \frac{1920}{v} + 5 &= 25 \\ \frac{1920}{v} &= 20 && \text{beide zijden } -5 \\ 1920 &= 20v && \text{beide zijden } \cdot v \\ v &= \frac{1920}{20} = 96 && \text{beide zijden } /20 \end{aligned}$$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

- a $12 - \frac{1}{x} = 8$
- b $\frac{50}{2x-3} = 10$
- c $\frac{6}{x} + x = 5$
- d $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$



Opgave 4

Je wilt de vergelijking $\frac{x^2+9x-10}{x-1} = 0$ algebraïsch oplossen.

- a Waarom helpt analogierekenen nu niet?
- b Dan maar de balansmethode. Waarmee ga je beide zijden vermenigvuldigen? En waar moet je dan om denken?
- c Los de vergelijking verder op.
- d Eén van beide waarden die je bij c hebt gevonden hoort nu niet bij de oplossing. Hoe komt dat?

Voorbeeld 2

Wielrenner A doet over een afstand van 100 km precies 1 uur korter dan wielrenner B die gemiddeld 5 km/h langzamer rijdt. Hoe snel rijden ze gemiddeld?

Antwoord

De gemiddelde snelheid van A noem je v km/h, dan is die van B gelijk aan $v - 5$ km/h. Uit de tekst volgt dan de vergelijking:

$$\frac{100}{v} + 1 = \frac{100}{v-5}$$

Deze vergelijking los je op door beide zijden zowel met v als met $v - 5$ te vermenigvuldigen. Je vermenigvuldigt dus met $v(v - 5)$.

$$\text{Dit geeft } \frac{100}{v} \cdot v(v - 5) + 1 \cdot v(v - 5) = \frac{100}{v-5} \cdot v(v - 5).$$

$$\text{En dat wordt } 100(v - 5) + v(v - 5) = 100v.$$

Dit ga je verder oplossen. Je vindt $v = 25$ km/h.

A fietst gemiddeld met 25 km/h en B met 20 km/h.

Opgave 5

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** een gebroken vergelijking wordt gebruikt om de gemiddelde snelheid van twee wielrenners te berekenen.

- a Ga na, dat de gegeven vergelijking bij het verhaal past.
- b Laat zien hoe de vergelijking stap voor stap met de balansmethode kan worden opgelost.
- c Waarom voldoet maar één van beide gevonden waarden voor v ?

Opgave 6

Twee automobilisten A en B rijden dezelfde afstand van 60 km met een constante snelheid. B rijdt 20 km/h langzamer dan A, maar A moet onderweg tanken en heeft daar 6 minuten voor nodig. Daardoor doen ze even lang over de gegeven afstand.

Hoe snel rijden ze?



Oefenen

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{200}{a} + 0,3 = 0,7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{p}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

e $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

f $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 8

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a .

- a Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?
- b Los deze vergelijking op.
- c Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 9

Voor een gas in een afgesloten ruimte geldt de **algemene gaswet**. Het verband tussen de druk p in pascal, het volume V in m^3 en de temperatuur T in kelvin is:

$$\frac{pV}{T} = c \text{ waarin } c \text{ een constante is.}$$

Omdat de temperatuur toeneemt met 80 kelvin, neemt de druk toe van 1,2 naar 1,5 pascal bij een gelijkblijvend volume van 4 m^3 .

- a Welke vergelijking kun je opstellen bij deze situatie?
- b Los deze vergelijking op.

Opgave 10

Iemand legt de 6 km van huis naar school altijd in dezelfde tijd af. Op een bepaalde dag vertrekt hij door omstandigheden 4 minuten te laat van huis. Hij komt precies in dezelfde tijd aan omdat hij 3 km/h sneller rijdt dan normaal.

Hoe hard rijdt hij normaal? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 11

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$. Hierin is U het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

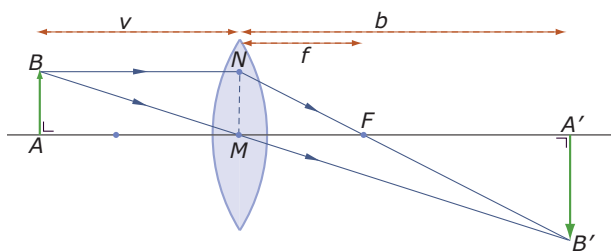
- a Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2 \text{ mA}$ en $R = 1,5 \text{ M}\Omega$.

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

- b Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 1.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpapstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 12

- a Neem $v = 10 \text{ cm}$ en $f = 4 \text{ cm}$. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?
- b Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?
- c Los nu de vergelijking van a op.
- d Neem $v = 6 \text{ cm}$ en $f = 4 \text{ cm}$ en bereken de beeldafstand.



- e Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \dots$. Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 13

Gebruik de lenzenformule uit de voorgaande opgave.

Van een bepaalde lens is de brandpuntafstand 3 cm. De beeldafstand is 8 cm groter dan de voorwerpaafstand.

Bereken de voorwerpaafstand.

Testen

Opgave 14

Willem en zijn vriendin Arina leggen een afstand van 18 km af en komen gelijktijdig aan. Willem ging op de fiets en kreeg een voorsprong van 30 minuten op Arina die op haar scooter twee keer zo snel reed als Willem. Ga er van uit dat beiden een constante snelheid aanhielden.

Hoe snel reed Willem? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{600}{x} = 24$

b $\frac{600}{x^2} = 24$

c $\frac{2}{x} - 10 = \frac{1}{2x}$

d $\frac{2}{x} - 3x = \frac{1}{2x}$

1.5 Wortels in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin wortels voorkomen met de onbekende binnen het wortelteken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Omdat het aardoppervlak bij benadering een bolvorm heeft, is je kijkafstand (de afstand tot de horizon) beperkt. Er geldt:

$$a \approx 3568 \cdot \sqrt{h}.$$

Hier is:

h de hoogte in meter van je oog boven de begane grond en

a de afstand in meter die je kunt kijken.

- Je staat op een toren, je oog is 25 m boven de grond.
Hoe ver kun je kijken?
- Hoe hoog moet je oog boven de grond zijn om op een rustige zee 20 km ver te kunnen kijken?

Uitleg

Voor het verband tussen de kijkafstand a (in m) in een aards landschap zonder obstakels en je ooghoogte h (in m) geldt $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$. Deze formule kun je zelf afleiden...

Als je hiermee wilt berekenen hoe hoog je oog boven de grond moet zitten om bijvoorbeeld 20 km te kunnen kijken, dan moet je de vergelijking

$$3568 \cdot \sqrt{h} = 20000$$

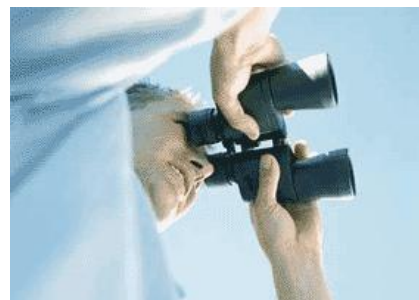
oplossen. Dat is een vergelijking waarin een wortelvorm voorkomt waar de onbekende, de variabele, in zit.

Je kunt hier beginnen met aan beide zijden van het isgelijktteken te delen door 3568.

Dit levert op: $\sqrt{h} = 20000/3568 = 5,605...$

Het wortelteken kun je nu wegwerken door te kwadrateren:

$$h = 5,605...^2 \approx 31,4 \text{ m}.$$



Figuur 1.1



Een vergelijking met één onbekende die voorkomt in een wortelvorm kun je oplossen door hem te schrijven in de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan te kwadrateren. Heb je hogere machtswortels dan moet je diezelfde hogere macht gebruiken om de wortelvorm weg te werken.

Opgave 1

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de [Uitleg](#).

- a Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 10 km?
- b Verdubbelt je kijkafstand als je ooghoogte verdubbelt?

Opgave 2

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de [Uitleg](#).

Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 1000 keer zo groot als je ooghoogte?

- a Je moet nu oplossen $3568 \cdot \sqrt{h} = 1000 \cdot h$.
Hoe begin je daar mee?
- b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Af en toe heb je te maken met een vergelijking waarbij de variabele binnen een wortelvorm voor komt.

Een voorbeeld is $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Zo'n vergelijking kun je oplossen door hem eerst in de vorm $\sqrt{x} = \dots$ te schrijven.

Daarna ga je beide zijden kwadrateren.

Het is bij vergelijkingen met wortelvormen wel van belang om achteraf je oplossing(en) te controleren. Er mag immers geen negatief getal onder het wortelteken uitkomen, want dat krijg je geen reële waarde.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $2 \cdot \sqrt{36 - x^2} = 10$

Antwoord

De vergelijking kun je herleiden naar de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan kun je kwadrateren.



De oplossing gaat zo:

$$\begin{array}{lcl}
 2 \cdot \sqrt{36 - x^2} = 10 & \rightarrow & \text{beide zijden delen door 2} \\
 \sqrt{36 - x^2} = 5 & \rightarrow & \text{kwadrateren} \\
 36 - x^2 = 25 & \rightarrow & \text{beide zijden } -36 \text{ en vermenigvuldigen met } -1 \\
 x^2 = 11 & \rightarrow & \text{beide zijden worteltrekken} \\
 x = \pm\sqrt{11}
 \end{array}$$

Er zijn twee oplossingen, die allebei voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking, vul ze maar in.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $4 + \sqrt{2x} = 18$
- b $3 \cdot \sqrt{15 + x^2} = 15$
- c $\frac{25}{\sqrt{1+x^2}} = 5$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Antwoord

Eerst werk je toe naar de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan kwadrateren.

Je krijgt dan een kwadratische vergelijking.

$$\begin{array}{lcl}
 4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x & \rightarrow & \text{beide zijden } -4 \\
 2 \cdot \sqrt{x} = 2x - 4 & \rightarrow & \text{beide zijden } /2 \\
 \sqrt{x} = x - 2 & \rightarrow & \text{beide zijden kwadrateren} \\
 x = (x - 2)^2 & \rightarrow & \text{haakjes wegwerken en op 0 herleiden} \\
 x^2 - 5x + 4 = 0 & \rightarrow & \text{ontbinden in factoren} \\
 (x - 4)(x - 1) = 0 & \rightarrow & \text{oplossingen opschrijven} \\
 x = 1 \vee x = 4
 \end{array}$$

Je moet bij vergelijkingen met de onbekende in een wortelvorm altijd goed nagaan of de oplossingen wel kunnen.

Ga na, dat $x = 1$ niet voldoet, maar $x = 4$ wel.

Opgave 4

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** een vergelijking met een wortelvorm wordt opgelost.

- a Waarom moet je nu de vergelijking eerst in de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ schrijven?
- b Ga zelf na dat $x = 1$ niet voldoet en $x = 4$ wel.
- c Laat zien wat het oplossen van deze vergelijking betekent door de grafieken van $y_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{x}$ en $y_2 = 2x$ te tekenen.

**Opgave 5**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $4 + \sqrt{2x} = \frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$
 b $2 - \sqrt{x} = x$

Oefenen**Opgave 6**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

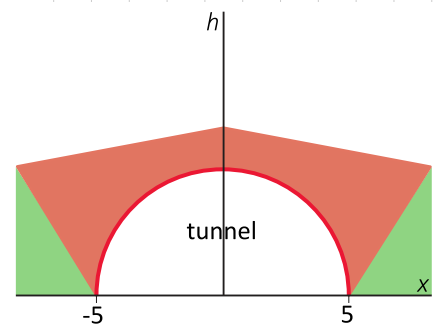
- a $3\sqrt{x} = 14$
 b $3 + \sqrt{2x} = 14$
 c $x + \sqrt{x} = 6$

Opgave 7

Een tunnel heeft boven het wegdek de vorm van een halve cirkel. Je maakt een assenstelsel met de x -as langs het wegdek. Daar loodrecht op staat de as die de hoogte h van een punt van de tunnel boven het wegdek weergeeft. Deze as gaat door het midden van het wegdek.

Er geldt nu $h = \sqrt{25 - x^2}$.

- a Laat zien, dat de getallen -5 en 5 bij de x -as kloppen.
 b Hoe hoog is deze tunnel in het midden? Licht je antwoord toe.
 c Kunnen twee vrachtauto's met een hoogte van 4 m elkaar passeren in deze tunnel? Hoe breed kunnen die vrachtauto's dan zijn?

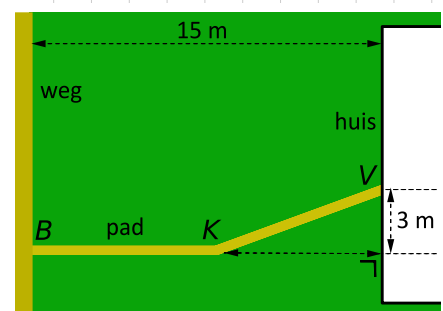


Figuur 1.2

Opgave 8

Iemand legt een pad aan vanaf de weg naar zijn voordeur. Het huis ligt 15 m van de weg af, het pad begint bij B loodrecht op de weg en maakt halverwege bij K een knik richting de voordeur bij V . De afstand BK van de weg tot de knik is dus even groot als de afstand KV van de knik tot de voordeur. Zie voor verdere afmetingen het bovenaanzicht hiernaast.

Hoe lang is dit pad?



Figuur 1.3

Opgave 9

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van

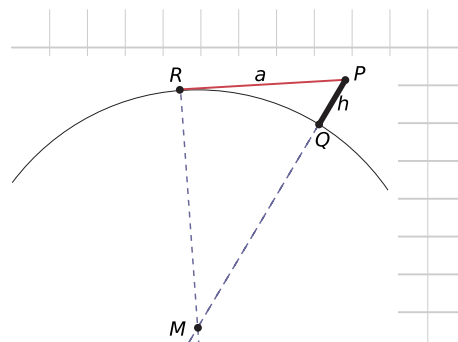
$$y_1 = x + \sqrt{8 - x^2} \text{ en } y_2 = 2x.$$



Toepassen

De formule voor de kijkafstand $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ uit de **Uitleg** kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 1.4

Opgave 10

Bekijk de formule voor de kijkafstand.

Je ziet hierboven een figuur waarmee je die formule kunt afleiden.

- Hoe kun je a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h .
- Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h}$.
- Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.
- Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

Testen

Opgave 11

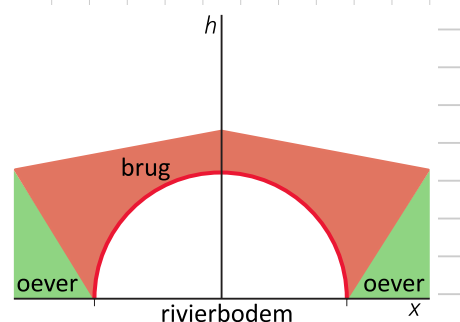
Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $\sqrt{25 - x^2} = 3$
- $x + \sqrt{2x} = 4$

Opgave 12

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h = \sqrt{36 - x^2}$ (met x en h in meter). Het lijnstuk tussen beide nulpunten van deze formule stelt de rivierbodem voor.

- Hoe breed is die rivierbodem?
- De waterhoogte van de rivier is twee meter boven de bodem. Bereken de breedte van de waterspiegel onder deze boog in centimeter nauwkeurig.



Figuur 1.5

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met vergelijkingen. In dit onderwerp komen de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij.

Je hebt nu alle theorie van **Vergelijkingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vergelijking — snijpunt — nulpunt — inklemmen — terugrekenen
- balansmethode
- ontbinden in factoren — buiten haakjes brengen — som-product-methode
- gebroken vergelijking
- wortelvormen

Activiteitenlijst

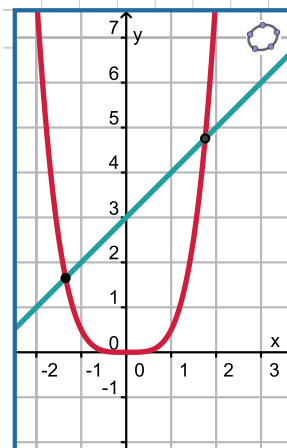
- vergelijkingen oplossen door inklemmen of slim rekenen — oplossingen van een vergelijking interpreteren in termen van grafieken;
- de balansmethode gebruiken om vergelijkingen algebraïsch op te lossen;
- vergelijkingen oplossen door op 0 herleiden, ontbinden in factoren en splitsen;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt in de noemer van een breuk;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt binnen een wortelvorm.

Testen

Opgave 1

Hier zie je grafieken bij de formules $y_1 = 0,5x^4$ en $y_2 = x + 3$. Alle snijpunten van beide grafieken zijn in beeld.

- Welke vergelijking moet je oplossen om de snijpunten van de grafieken te berekenen?
- Bereken door inklemmen de coördinaten van de snijpunten van deze grafieken in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 1.1



Opgave 2

Los de volgende kwadratische vergelijkingen algebraïsch op.

- a $x^2 + 3x - 4 = 0$
- b $x^2 - 2x = 24$
- c $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$
- d $0,5(x - 6)^2 = 11$
- e $2(x - 3)(2x + 5) = 0$
- f $2(x - 3)(2x + 5) = -30$
- g $9x^2 = 16$
- h $x(x - 3) = 2 + x^2$

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}x - 1$
- b $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = -1$
- c $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4x} - 1$
- d $x + \frac{18}{x+5} = 6$

Opgave 4

Bij een ruilverkaveling worden stukken land verruild voor even grote stukken land die voor beide partijen gunstiger liggen (dichter bij huis bijvoorbeeld). Onder andere wordt een vierkant stuk land verruild voor een rechthoekig stuk land dat 40 m langer, maar 30 m minder breed is.

- a Met welke vergelijking kun je de zijde van het vierkante stuk land berekenen?
- b Los deze vergelijking op en bepaal de oppervlakte van het land dat bij deze ruil betrokken was in ha.

Opgave 5

In een stroomkring kun je twee weerstanden R_1 en R_2 die parallel zijn geschakeld vervangen door één weerstand R_s . Die weerstand R_s heet dan de substitutieweerstand van de andere twee. Er geldt:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

waarin elke weerstand R in Ω wordt uitgedrukt.

- a Bereken de substitutieweerstand van $R_1 = 2 \Omega$ en $R_2 = 5 \Omega$.
- b De substitutieweerstand van de parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 is $R_s = 3 \Omega$. Nu is R_2 precies twee keer zo groot als R_1 . Bereken de grootte van R_1 .

Als je vaak substitutieweerstanden moet berekenen, dan is het handig om de formule in de vorm $R_s = \dots$ te schrijven.

- c Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 6

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van

$$y_1 = x + \sqrt{x^2 - 8} \text{ en } y_2 = 1,5x.$$

Toepassen

Opgave 7: Omgeschreven cirkel

Van een gelijkbenige driehoek is de basis 60 en zijn de twee benen elk 50 cm. Er gaat een cirkel door de drie hoekpunten van deze driehoek.

Bereken de straal van deze cirkel.

Opgave 8: Stadsmuur in het Oude China

Een vraagstuk van de oude Chinese geleerde **Liu Hui** (ongeveer 220 - ongeveer 280).

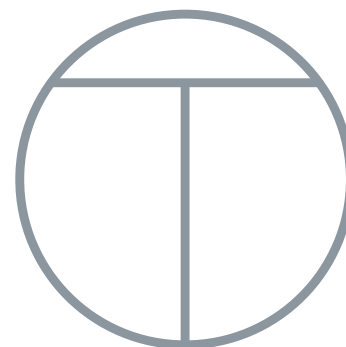
Veel steden in het Oude China waren omgeven door vier stadsmuren die een vierkant vormen. De Noordelijke muur bijvoorbeeld kijkt uit op het Noorden en loopt precies Oost-West. Er is een poort in het midden van elke zijde van dit vierkant. Twintig passen in de Noordelijke richting buiten de Noordelijke poort bevindt zich een boom. Als je de stad vanuit de Zuidelijke poort verlaat en je loopt 14 passen naar het Zuiden en 1775 passen naar het Westen, kun je die boom net zien.

Wat zijn de afmetingen van de muur van deze stad?

Opgave 9: Orhan-Teerenstra logo

Dit is het lijnsymmetrische logo van transportbedrijf Orhan-Teerenstra. De twee lijnstukken die de T vormen zijn 6 dm lang en staan loodrecht op elkaar. Het logo wordt gemaakt van dunne stalen buizen en aan de gevel van hun bedrijfspand opgehangen.

Hoe groot moet de straal van de cirkel worden die de letter O voorstelt?



Figuur 1.2

2

Kwadratische functies

2.1	Kwadratische functies	44
2.2	De abc-formule	53
2.3	Domein en bereik	62
2.4	Ongelijkheden	70
2.5	Totaalbeeld	77

2.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische functie herkennen aan de formule en aan de grafiek;
- nulpunten en top van een parabool berekenen.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = \dots$ of $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

- Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 20$?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?
- Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?
- Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

Bekijk de applet: Kwadratische functies

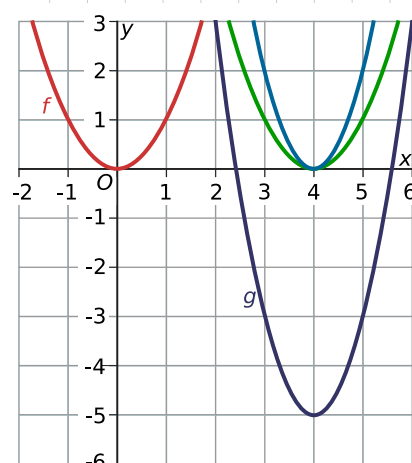
Kwadratische functies zijn $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door verschuiven en/of vermenigvuldigen uit die van f ontstaan. Je schrijft ze in de vorm $g(x) = a(x - p)^2 + q$.

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie met formule $g(x) = 2(x - 4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f ontstaat door:

- een verschuiving van 4 in de x -richting;
- vermenigvuldiging met 2 in de y -richting;
- een verschuiving van -5 in de y -richting.

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt de formule $h(x) = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek van h is een bergparabool, omdat tekenwisseling van a een spiegeling betekent.



Figuur 2.1



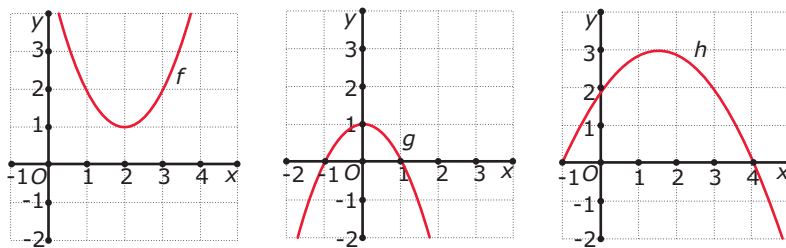
Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

- Hoe kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Lees de coördinaten van de top van de parabool uit de formule af.
- Heeft deze functie een minimum of een maximum?
- Hoe kun je aan de formule zien of de functie een minimum of een maximum heeft?

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef de bijbehorende formules.



Figuur 2.2

Opgave 3

Voor de baan van een tennisbal die op 0,8 m hoogte op 12 m voor het net wordt afgeschoten in de richting van het net, geldt de formule $h = -0,01(x - 11)^2 + 2$.

Hierin is:

- x de afstand over de grond vanaf de plek van afschieten;
- h de hoogte van de bal boven de grond.

- Laat zien, dat deze bal inderdaad op ongeveer 80 cm boven de grond is afgeschoten.
- Het net is 1 m hoog. Gaat de bal over het net?
- Na hoeveel m komt de bal op de grond als niemand hem terugslaat?

Theorie en voorbeelden

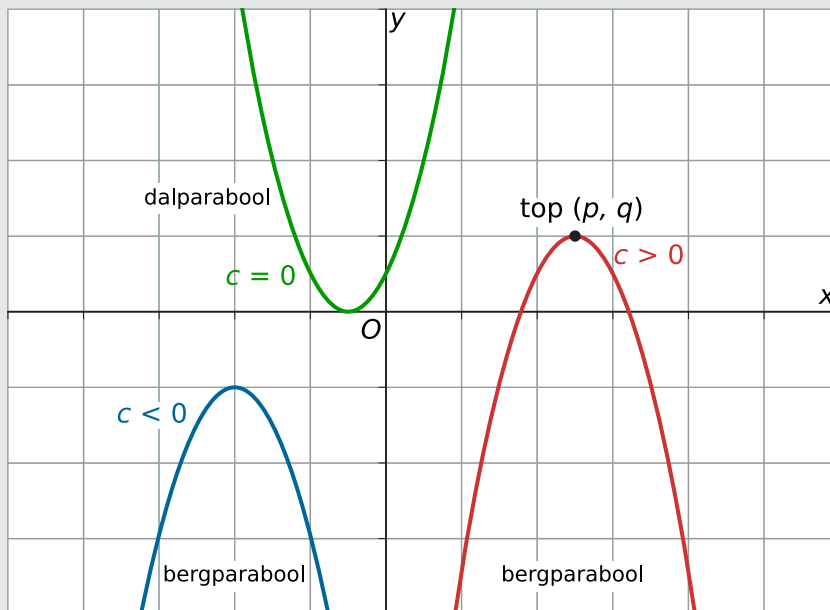
Om te onthouden

Bekijk de applet: Kwadratische functies

Een functie van de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door verschuiven en/of vermenigvuldigen van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**.

Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.



Figuur 2.3

De **kwadratische vergelijking** $a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot: $(x - p)^2 = c$ met $c = \frac{u - q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.

Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

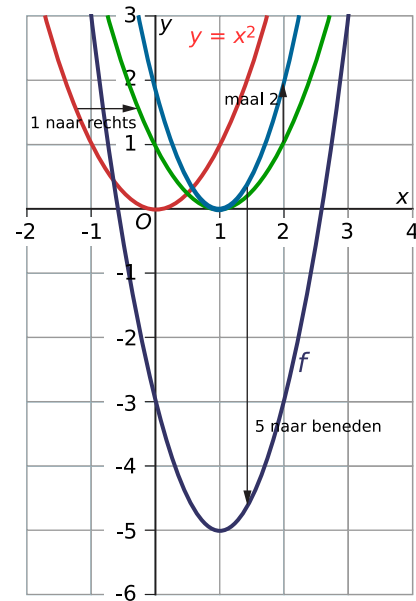
Bepaal de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

De grafiek wordt verkregen door de grafiek van $y = x^2$:

- te verschuiven met 1 in de x -richting;
- te vermenigvuldigen met 2 in de y -richting;
- te verschuiven met -5 in de y -richting.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit de formule af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 2.4

Opgave 4

Gegeven is de kwadratische functie $h(x) = -3(x + 1)^2 + 5$.

- Hoe kan de grafiek van h uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- De top van $y = x^2$ is $(0,0)$. Hoe kun je de top van $h(x)$ uit die van $y = x^2$ afleiden?
- Is de grafiek van h een dalparabool of een bergparabool? Geef de coördinaten van de top.
- Kun je de vergelijking $-3(x + 1)^2 + 5 = 6$ oplossen? Waarom wel/niet?

Opgave 5

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en in de y -richting vermenigvuldigt, krijg je een grafiek met de formule $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

- Hoe kun je aan de formule zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is?
- Hoe kun je aan de formule zien of de grafiek een maximum of een minimum heeft?
- Hoe kun je aan de formule zien hoe groot het maximum of minimum is?
- Hoe kun je aan de formule zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?



Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ exact op.
Los ook de volgende twee vergelijkingen op:

- $2(x - 1)^2 - 5 = -8$
- $2(x - 1)^2 - 5 = -5$

Antwoord

$$2(x - 1)^2 - 5 = 3$$

$$2(x - 1)^2 = 8$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x = 1 \pm 2$$

Je vindt $x = -1 \vee x = 3$.

Voor de tweede vergelijking krijg je $2(x - 1)^2 = -3$. Dit kan niet aangezien $2(x - 1)^2 \geq 0$.

De derde vergelijking wordt $2(x - 1)^2 = 0$ en heeft precies één oplossing, namelijk $x = 1$.

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- Maak de grafiek van $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ twee oplossingen heeft?
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = -8$ geen oplossingen heeft?
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = -5$ één oplossing heeft?

Opgave 7

Los de vergelijkingen exact op (dus rond wortels niet af).

- $x^2 = 100$
- $(x - 4)^2 = 64$
- $-3(x + 1)^2 = -75$
- $3(x + 2)^2 - 3 = 27$
- $2x^2 - 10 = 0$



Voorbeeld 3

Bereken de snijpunten met de assen en de top van een parabool die is gegeven door de formule $y = -0,5x^2 + 2,5x - 3$.

Antwoord

De gegeven formule heeft niet de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, dus je kunt de top er niet onmiddellijk uit aflezen.

Daarom wil je eerst een beeld hebben van de grafiek: een bergparabool.

Om een goed idee te krijgen waar die bergparabool precies ligt, begin je met het berekenen van de nulpunten. Dus met het oplossen van $-0,5x^2 + 2,5x - 3 = 0$. Hierbij kun je ontbinden in factoren toepassen:

$$\begin{array}{lcl} -0,5x^2 + 2,5x - 3 = 0 & \xrightarrow{\text{beide zijden delen door } -0,5} & \\ x^2 - 5x + 6 = 0 & \xrightarrow{\text{ontbinden in factoren, de somproductmethode}} & \\ (x - 2)(x - 3) = 0 & \xrightarrow{\text{antwoorden opschrijven}} & \\ x = 2 \vee x = 3 & & \end{array}$$

De snijpunten met de x -as zijn daarom $(2,0)$ en $(3,0)$.

Het snijpunt met de y -as zit bij $x = 0$, dus dat is $(0, -3)$.

De top ligt op de symmetrieas van de parabool, dus die zit bij $x = \frac{2+3}{2} = 2,5$.

Ga na, dat de top de coördinaten $(2,5; 0,125)$ heeft.

Opgave 8

Gegeven is de functie f door de formule

$$f(x) = x^2 - x - 30.$$

Bereken de snijpunten met de beide assen en de top van de grafiek van f .

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $5x^2 - 10x = 40$
- b $x(x - 6) = 7$
- c $7x(x - 6) = 0$
- d $(x + 3)(x + 6) = 18$
- e $-0,5(x - 40)^2 + 3 = 2$
- f $(x - 3)^2 = (2x - 1)^2$



Oefenen

Opgave 10

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x + 8)^2 + 6$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$.

- Hoe kun je de grafiek van f uit die van $y = x^2$ afleiden?
- Bepaal de coördinaten van de top van de parabool die de grafiek van f voorstelt.
- Hoe kun je aan de formule zien dat er geen nulpunten zijn?

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = -2(x + 4)^2 + 5$.

- Geef het maximum, dan wel minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze uiterste waarde krijgt.
- Los de vergelijking $-2(x + 4)^2 + 5 = -5$ op.
- Los op: $f(x) = 5$
- Los op: $f(x) = -11$

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x + 2)^2 + 10$.

- Voor welke waarden van x is deze functie dalend?
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Los de volgende kwadratische vergelijkingen op:

- $x^2 - 8x + 7 = 0$
- $(x + 2)(2x + 1) = 2$
- $(x + 2)(2x + 1) = 0$
- $x(x + 2) = 2x + 4$

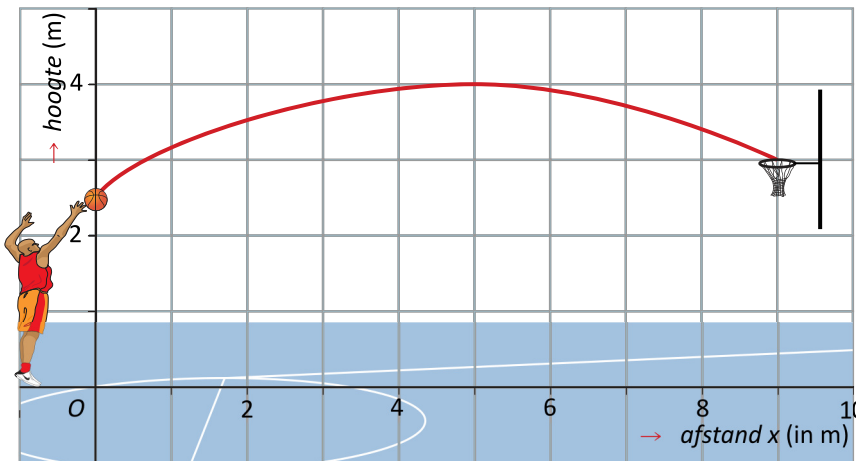
Opgave 14

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie figuur.

De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0,06(x - 5)^2 + 4$.

Hierin is:

- x de afstand vanaf de voeten van de speler tot recht onder de bal in m
- h de hoogte van de bal boven de vloer in m.



Figuur 2.5

- Bereken de hoogte waarop de speler de bal heeft losgelaten.
- De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + x + 90$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f . Heeft f een maximum of een minimum?

Toepassen

Een **kogelbaan** is de baan die een voorwerp doorloopt als het onder een bepaalde hoek wordt afgeschoten en daarna alleen onder invloed van de zwaartekracht beweegt.

Gelukkig weet je wel hoe de baan van een kogel er uit ziet: een mooi boogje. Neem maar even aan vanaf de grond tot hij weer op de grond komt. (Dat hoeft natuurlijk niet, de kogel wordt meestal boven de grond afgevuurd. Dit is alvast een model-aanname...). Hier zie je een schets van zo'n baan in een xy -assenstelsel.

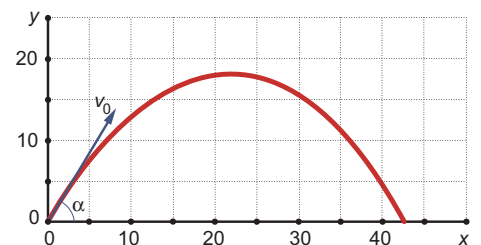
De kogel heeft op het moment van 'loslaten' een snelheid, noem die maar v_0 .

Verder wordt hij onder een hoek afgeschoten, zeg maar α .

Houd geen rekening met de luchtweerstand. (Nog een model-aanname!)

In de x -richting is de afgelegde afstand het product van de snelheid in die richting en de tijd t .

In de y -richting geldt dit ook, maar nu doet de zwaartekracht mee, die 'trekt' de kogel 'naar beneden'. Daar heb je wat natuurkunde bij nodig: even de zwaartekrachtwetten bekijken...



Figuur 2.6



Opgave 16

Bekijk hoe de kogelbaan er uit ziet.

De snelheid in de x -richting is $v_0 \cdot \cos(\alpha)$. De snelheid in de y -richting is $v_0 \cdot \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee. Dus is: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

a Waarom is de snelheid in de x -richting $v_0 \cdot \cos(\alpha)$?

b Waarom is de snelheid in de y -richting niet $v_0 \cdot \sin(\alpha)$?

Voor elk punt van de kogelbaan geldt $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

c Je kunt hieruit een verband afleiden van de vorm $y = f(x)$. Geef de juiste formule.

Opgave 17

Als het goed is heb je in de voorgaande opgave afgeleid dat

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \text{ met } g \approx 9,81 \text{ m/s}^2.$$

a Welke formule geldt voor de baan van een kogel die wordt afgeschoten onder een hoek van 60° met een snelheid van 30 m/s ?

b Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?

c Moet je om de kogel verder te laten komen de hoek waaronder de kogel vanaf de grond wordt afgeschoten groter of juist kleiner maken? Laat dit met een voorbeeld zien.

Testen

Opgave 18

Bepaal bij de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek. Heeft de functie een maximum of een minimum?

a $f(x) = -2x^2 - 2$

b $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$

c $h(x) = -(x + 9)^2$

Opgave 19

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $3(x - 5)^2 - 5 = -2$

b $3(x - 5)^2 - 5 = -5$

c $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

Opgave 20

Gegeven is de functie f met formule $f(x) = 0,5x^2 - 4x + 6$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.

b Heeft de functie f een maximum of een minimum? Welke waarde heeft dit maximum/minimum?

2.2 De abc-formule

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadraat afsplitsen van een kwadratische uitdrukking;
- de abc-formule gebruiken voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met de discriminant van een kwadratische vergelijking.

Voorkennis

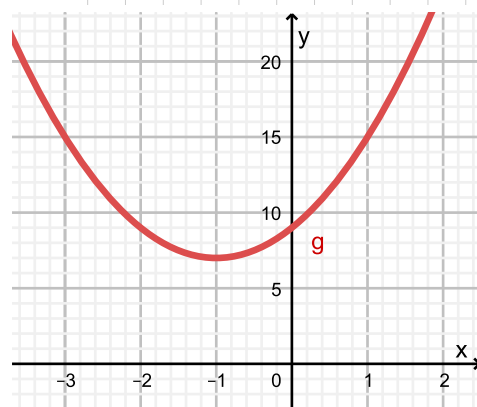
- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = \dots$ of $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = 2(x + 1)^2 + 7$.

- Schrijf de formule van g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- Hoe kun je nagaan of je dit goed hebt gedaan?
- Hoe kun je aan een formule in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ zien of de grafiek van g een dal- of een bergparabool is?
- Hoe bepaal je de top van de grafiek van g ?



Figuur 2.1

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terug te rekenen. Maar bekijk de figuur eens. Zie je dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2$? Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x + 3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

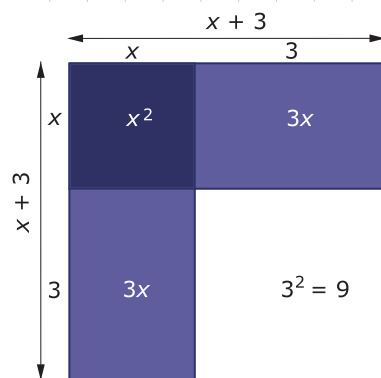
$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 9 &= 16 \\(x + 3)^2 &= 25 \\x + 3 &= \pm 5 \\x &= -3 \pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is dus $x = 2 \vee x = -8$.

De gebruikte techniek heet kwadraat afsplitsen.

Hiermee is $x^2 + 10x = x^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2 - 5^2 = (x + 5)^2 - 25$.

En ook is $x^2 - 10x = x^2 + 2 \cdot (-5)x = (x - 5)^2 - 5^2 = (x - 5)^2 - 25$.



Figuur 2.2



Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

- a Laat met behulp van een figuur zoals die in de **Uitleg 1** zien, dat $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.
- b Splits een kwadraat af bij $x^2 + 5x$.
Je ziet in de uitleg, dat $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$.
Dat kun je niet echt gemakkelijk in een tekening duidelijk maken.
- c Leg uit dat dit toch ook klopt door rechts van het isgelijktteken de haakjes weg te werken.
- d Splits een kwadraat af bij $x^2 - 5x$.

Opgave 2

Splits van deze functies een kwadraat af.

- a $f(x) = x^2 + 12x$
- b $g(x) = x^2 - 8x + 15$
- c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$
- d $k(x) = -x^2 + 4x + 3$
- e $m(x) = x^2 + 4x - 16$
- f $k(x) = 3x^2 + 18x - 6$

Opgave 3

Bekijk de kwadratische functie f met formule $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

- a Schrijf $f(x)$ in de vorm $(x - p)^2 + q$ door een kwadraat af te splitsen.
- b Je weet nu de coördinaten van de top van de grafiek van f . Welke coördinaten zijn dit?
- c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

De techniek van een kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen (door eerst te delen door 3). Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen een algemene formule opgesteld.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a , b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$$x = \frac{-17 + \sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17 - \sqrt{829}}{6}$$



De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 4

Los de vergelijkingen op met de abc-formule.

- a $3x^2 + 17x = 45$
- b $x^2 - 6x + 1 = 0$
- c $x^2 + 4x = 0$
- d $4x^2 - 3x - 8 = 0$

Opgave 5

- a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.
- b Probeer op dezelfde manier de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. Kun je zelf de abc-formule vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nu zie je aan de formule niet meteen hoe hij uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je de formule van f omzetten naar de vorm: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ waarin (p, q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij:

$$x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

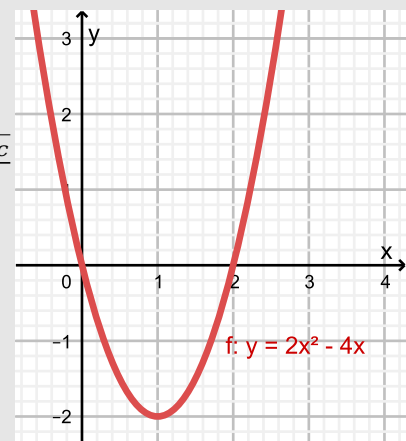
Het berekenen van de nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je ook doen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Hieruit is de **abc-formule** afgeleid.

$$\text{De oplossing van } ax^2 + bx + c = 0 \text{ is: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.



Figuur 2.3



$-\frac{b}{2a}$ is de x -coördinaat van de top, omdat deze waarde precies tussen de nulpunten ligt.

De bijbehorende **functiewaarde** (uitkomst) $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ is het maximum (bergparabool) of het minimum (dalparabool) van de functie f .

Voorbeeld 1

Los op: $x^2 + 10x = 15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op $x^2 + 10x$ kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$(x + 5)^2 - 25 = 15$$

$$(x + 5)^2 = 40$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{40}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{40}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen. Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$. Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$. Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$. De discriminant is positief, er zijn twee oplossingen: $x = \frac{-10 + \sqrt{160}}{2}$ ∨ $x = \frac{-10 - \sqrt{160}}{2}$. Ga na dat beide oplossingsmethoden hetzelfde opleveren.

Opgave 6

Los nu zelf de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

- a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Doe dit ook met de abc-formule.

Opgave 7

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

- a $x^2 - x - 3 = 0$
- b $-4x^2 + 5x - 12 = 0$
- c $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$
- d $x - 5x^2 = 10$
- e $x(x - 7) = 8$



Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Antwoord

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Je hebt verschillende technieken gezien om deze vergelijking op te lossen.

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) =$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$$

De nulpunten vind je door de vergelijking $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$ op te lossen. Ga na dat je door terugrekenen de nulpunten $x = -1$ en $x = 2$ vindt.

De coördinaten van de top kun je nu gemakkelijk uit de formule aflezen: $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Je kunt ook de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ met de abc-formule oplossen, maar ontbinden in factoren is een snellere manier. Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit de formule kunt aflezen. Als je voor het bepalen van de nulpunten gaat ontbinden in factoren of gebruikmaakt van de abc-formule, dan kun je met behulp van de nulpunten of $-\frac{b}{2a}$ de x-coördinaat van de top bepalen.

Opgave 8

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek van f bepalen.

- Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- Bepaal a , b en c . Bereken daarna de discriminant.
- Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?
- Los de vergelijking $f(x) = 0$ met behulp van de abc-formule op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.
- Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?



Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel je nu voor dat je een functie hebt zoals $f(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x -as ligt.

Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

De vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$ moet precies één oplossing hebben. Uit $D = 0$ volgt dan: $k^2 - 12 = 0$.

Kennelijk moet dan gelden $k^2 = 12$. Dus: $k = \pm\sqrt{12}$.

Opgave 9

De formule $f(x) = x^2 + kx + 3$ voor verschillende waarden van k levert steeds een andere functie met een andere grafiek op.

- a Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.
- b Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.
- c Schrijf functie f in de vorm $f(x) = (x + p)^2 + q$.
- d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 1$?

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = px^2 - 4x - 5$.

- a Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f nu geen parabool?
- c Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?

Oefenen

Opgave 11

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

- a Schrijf de formule in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.
- b Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door de formule dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.
- c Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.
- d Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 12

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- a $x^2 - 3x - 13 = 0$
- b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$
- c $2x^2 - 5x = x$
- d $2x^2 - 12x = -18$
- e $x^2 - 5x + 10 = 0$

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- a $x(x - 1) = 12$
- b $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$
- c $x - 5x^2 = 3$
- d $60 - x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + kx + 5$, waarin k een nog onbekende constante is.

- a Voor welke waarde van k gaat de grafiek van f door het punt $(2, 7)$?
- b Voor welke waarde(n) van k ligt de top van de parabool op de y -as?
- c Voor welke k ligt de top van de parabool op de x -as?
- d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4$?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = -0,5x^2 + x + 90$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
- b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f . Heeft f een maximum of een minimum?

Opgave 16

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

- a Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Voor welke exacte waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?
- c Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 3$?
- d Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 0,5$?
- e Voor welke exacte waarden van p hebben de grafieken van f en g precies één snijpunt? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

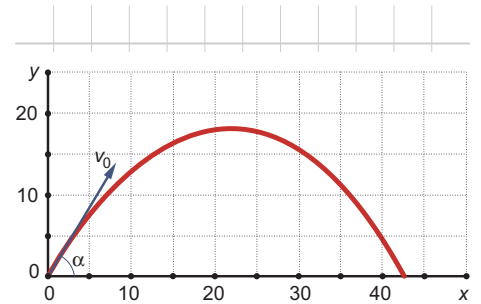
In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.

Je hebt eerder afgeleid dat hierbij deze formule past:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is

- x de horizontale afstand in m
- y de verticale afstand in m
- α de hoek waaronder de kogel is afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de kogel in m/s
- $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ de gravitatieconstante.



Figuur 2.4

Opgave 17

Bekijk de formule van de kogelbaan in [Toepassen](#).

Neem $\alpha = 45^\circ$ en $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

a Welke kwadratische functie beschrijft dan de baan van de kogel?

b Bereken na hoeveel m deze kogel weer op de grond komt.

De kogel wordt nu onder dezelfde hoek en met dezelfde beginsnelheid afgeschoten vanaf 1,8 m hoogte.

c Welke kwadratische functie beschrijft nu de kogelbaan?

En na hoeveel m komt nu de kogel op de grond?

Opgave 18

Een kogelstoter stoot zijn kogel met een beginsnelheid van 20 m/s onder een hoek van 42° .

Hij laat de kogel los op 2,00 m hoogte.

Hoeveel m verder komt de kogel op de grond?

Testen

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $-x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $3x^2 = 6 + 5x$

Opgave 20

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

- Voor welke waarde(n) van p heeft functie f precies één nulpunt?
- Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g .
- Neem $p = 4$ en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

2.3 Domein en bereik

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de beperkingen voor x - en y -waarden noteren met intervallen, de begrippen domein en bereik;
- werken met tweedegraads en hogeregraads veeltermen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule.

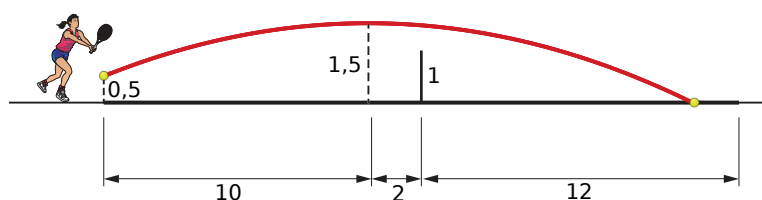
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.

Bij deze parabool hoort de formule $h = -0,01(x - 10)^2 + 1,5$.



Figuur 2.1

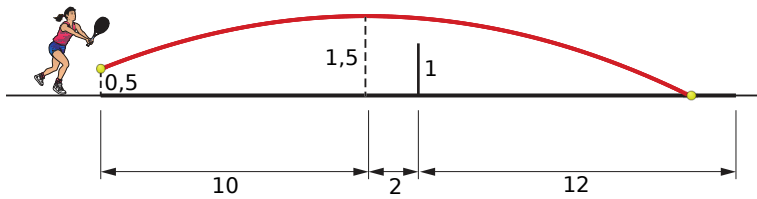
- Ga na, dat de gegevens overeen stemmen met de formule.
- Welke waarden kan x in deze situatie aannemen?
- Welke waarden kan h in deze situatie aannemen?

Uitleg

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

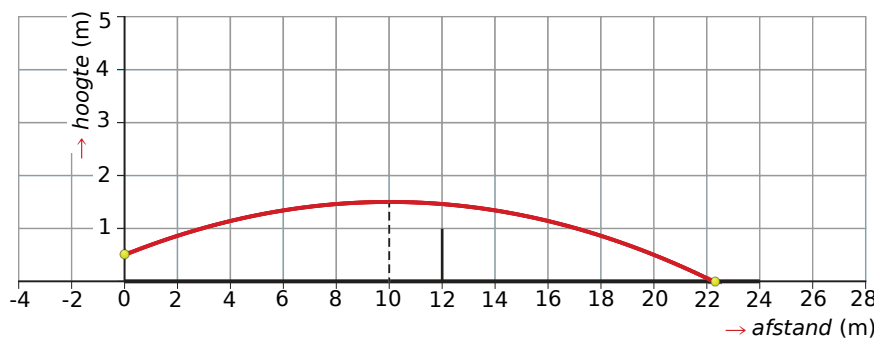
Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.

net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



Figuur 2.2

Je brengt een geschikt assenstelsel aan, zie figuur. De top van de parabool is dan $(10; 1,5)$ en de parabool moet ook door het punt $(0; 0,5)$ gaan.



Figuur 2.3

Bij deze parabool hoort de formule $h = -0,01(x - 10)^2 + 1,5$.

Door haakjes wegwerken kun je dit schrijven als $h = -0,01x^2 + 0,2x + 0,5$.

Die vorm noem je een veelterm van graad 2.

De bal komt op de grond als $h = 0$. Ga na, dat dan $x = 10 + \sqrt{150}$. Omdat dat minder dan 24 m is, is de bal in.

In dit geval is de gevonden formule niet voor elke waarde van x geldig, maar alleen voor de waarden van x vanaf 0 tot en met $x = 10 + \sqrt{150}$. Deze waarden vormen het domein van de functie.

Het domein van h schrijf je als $[0, 10 + \sqrt{150}]$.

Alle mogelijke waarden van h vormen het bereik van de functie. Dit zijn de getallen in $[0; 1,5]$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de baan van een tennisbal beschreven met een kwadratische functie.

- De baan is alleen ongeveer parabolisch.
Waarom is hij zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?
- Laat zien dat $x = 10 + \sqrt{150}$ als $h = 0$.
- Wat is het bereik van deze functie (in de beschreven situatie)?
Gebruik de notatie die je in de uitleg ziet en licht toe hoe je aan de waarden van het bereik komt.
- Laat zien, hoe je de formule als veelterm schrijft.

Opgave 2

Nu wordt een tennisbal geslagen vanaf 10 m voor het net op een hoogte van 0,5 m boven de grond.

De bijbehorende formule is $h(x) = -0,03(x - 12)^2 + 3,5$.

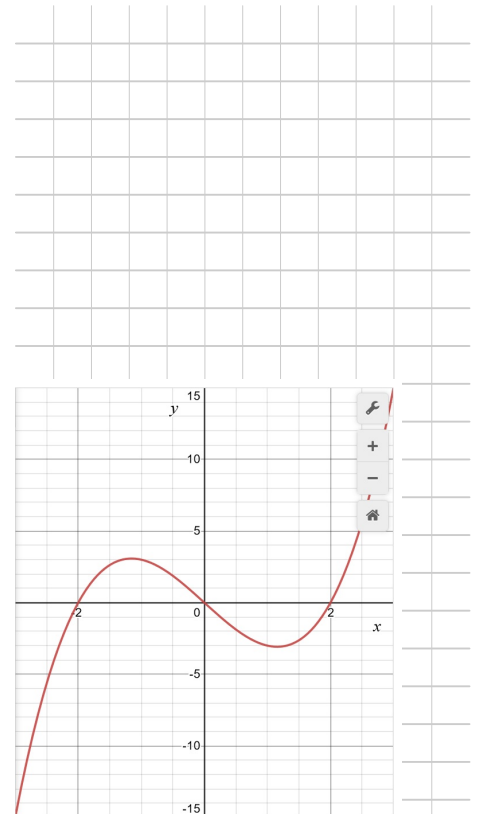
- Hoe groot is de maximale hoogte van de bal?
- Is de bal ook nu in?
- Schrijf het domein en het bereik van de functie h op.

Opgave 3

Er bestaan ook veeltermen van hogere graad dan 2.

Een voorbeeld is de functie $f(x) = x^3 - 4x$. Hier zie je de grafiek ervan met domein $[-3, 3]$, getekend in Desmos.

- Bereken de nulpunten van de grafiek van f .
- Schrijf het bereik van f bij het gegeven domein op.



Figuur 2.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke formule van de vorm $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ heet een tweedegraads **veelterm**.

Soms kom je ook derdegraads veeltermen tegen, of veeltermen van een nog hogere graad.

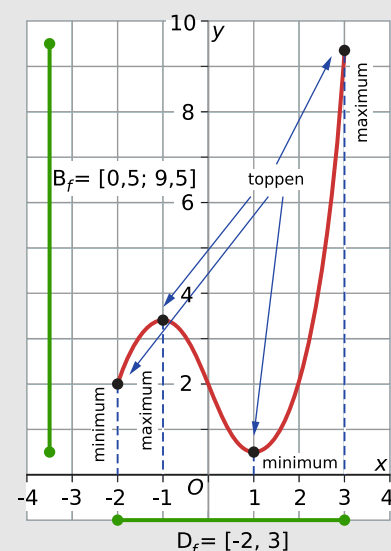
Niet altijd is de gegeven formule voor alle waarden van x geldig. De waarden van x waarop dit wel het geval is noem je het **domein** D_f van de bijbehorende functie f . Alle mogelijke functiewaarden vormen het **bereik** B_f van de functie. Het bereik hangt af van het gekozen domein en soms speelt een **maximum** of een **minimum** een belangrijke rol, zie figuur.

Je noteert zowel het domein als het bereik door de kleinste en de grootste waarde ervan tussen haken te zetten. Dat heet een **interval**. Is er geen kleinste of grootste waarde, dan gebruik je een pijltje.

Alle getallen groter dan of gelijk aan 0 schrijf je zo: $[0, \rightarrow)$.

Alle getallen groter dan 0 schrijf je zo: $\langle 0, \rightarrow)$.

De vorm van de haakjes hangt er dus van af of het getal dat er bij staat wel bij het interval hoort (rechte haken) of niet bij het interval hoort (puntige haken).



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

Dit is de brug over de rivier de Tyne in het noordoosten van Engeland. De boog heeft ongeveer de vorm van een parabool. Kies een assenstelsel waarin de y -as langs de verticale rechterwand van de linkertoren ligt en de x -as over de bovenkant van het horizontale wegdek ligt. Dan past bij de (bovenrand van de) boog bij benadering de formule

$$y = -0,0084(x - 81)^2 + 33$$

Welke maximale hoogte heeft de boog ten opzichte van het wegdek? Welke waarden kunnen x en y aannemen?

Antwoord

De top van de parabool is $(81, 33)$. Dus de maximale hoogte boven het wegdek is 33 m.

De waarden die x kan aannemen lopen vanaf 0 tot en met 162 m. Het domein van de functie is $[0, 162]$.

De minimale y -waarde is $y(0) = -22,1124$.

De waarden die y kan aannemen lopen vanaf $-22,1124$ tot en met 33 m. Het bereik van de functie is $[-22,1124; 33]$.

Op een grafische rekenmachine of in GeoGebra of Desmos kun je een venster waarbinnen de grafiek past noteren als $[0, 162] \times [-23, 35]$.

Opgave 4

Bekijk het bepalen van domein en bereik bij de kwadratische veelterm in **Voorbeeld 1**.

- Laat zien, hoe je het domein bepaalt.
- Laat zien, hoe je de minimale y -waarde bepaalt.
- De bovenrand van de boog snijdt de bovenkant van het wegdek op twee plaatsen. Bereken de afstand tussen die twee plaatsen in dm nauwkeurig.

Opgave 5

Gegeven is de tweedegraads veelterm $f(x) = 0,1x^2 - 20x + 800$ met domein $[0, 150]$.

- Bepaal de maximale en de minimale y -waarde op dit domein.
- Je gebruikt een apparaat om de grafiek te maken van de paraboolvorm. Binnen welk venster past de parabool precies?
- Bereken de afstand tussen de twee snijpunten met de x -as in gehelen nauwkeurig.



Figuur 2.6



Voorbeeld 2

De functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ is een derdegraads veelterm met domein $[0,5]$.

Bepaal de nulpunten van deze functie. Bepaal ook het bijbehorende bereik.

Antwoord

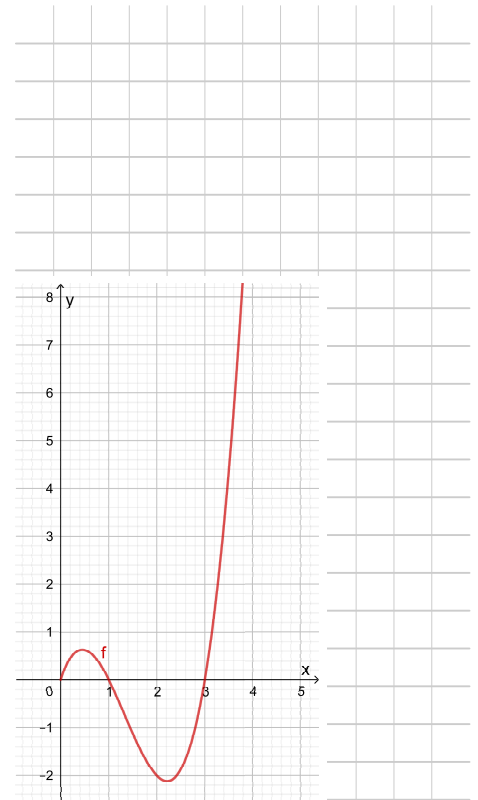
Nulpunten: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ geeft $x(x^2 - 4x + 3) = 0$.

Verder ontbinden geeft $x(x - 1)(x - 3) = 0$, dus de nulpunten zijn $x = 0$, $x = 1$ en $x = 3$.

Voor het bereik moet je de minimale en de maximale waarden van y weten.

Daarvoor heb je (nog) geen technieken geleerd, dus je werkt met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Dan breng je eerst de grafiek in beeld met het gewenste domein ingesteld voor de x -waarden. De hele grafiek is nog niet in beeld, maar alle 'toppen' wel. Met behulp van de software kun je die toppen bepalen. Hier vind je in twee decimalen nauwkeurig $(0,0)$, $(0,45; 0,63)$ en $(2,22; -2,11)$. De waarde bij $x = 5$ is $f(5) = 40$.

Het bereik is dus $[-2,11; 40]$.



Figuur 2.7

Opgave 6

Bekijk de derdegraads functie in [Voorbeeld 2](#).

Pak ook GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine erbij.

- Breng zelf de grafiek van f op het juiste domein in beeld.
- Bepaal zelf de minimale en de maximale y -waarden in drie decimalen nauwkeurig.
- Met welk venster krijg je de grafiek van f nog net helemaal in beeld. Rond af op gehele getallen.

Opgave 7

Gegeven is de derdegraads veeltermfunctie $g(x) = 0,5x^3 - 3x^2 - 4x$ met domein $[-2,8]$.

- Bereken de nulpunten van deze functie in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken alle minimale en maximale waarden van y op het domein. Schrijf het bereik op.
- Met welk venster krijg je de grafiek van g nog net helemaal in beeld. Rond af op gehele getallen.

Oefenen

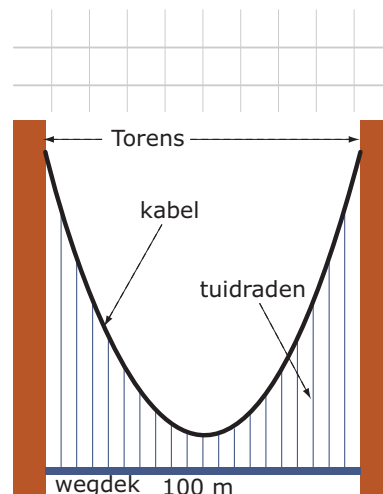
Opgave 8

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens en er zijn 19 tuidraden.

Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de x -as samenvalt met het wegdek en de y -as door het linker ophangpunt gaat. Dan geldt voor de kabel:

$$y = \frac{9}{250}(x - 50)^2 + 10.$$

- Bepaal de minimale y -waarde van de kabel.
- Bepaal domein en bereik van de functie die de paraboelvorm van de kabels beschrijft.
- Je gebruikt een apparaat om de grafiek te maken van de paraboelvorm. Binnen welk venster past de parabool precies?
- Welk venster kies je als je behalve de parabool ook het wegdek wilt kunnen zien?



Figuur 2.8

Opgave 9

Gegeven is de tweedegraads veeltermfunctie $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$ met domein $[0,5]$.

Opgave 10

Een derdegraads veeltermfunctie is gegeven door $g(x) = x^3 - 4x$ met domein $[-3,3]$.

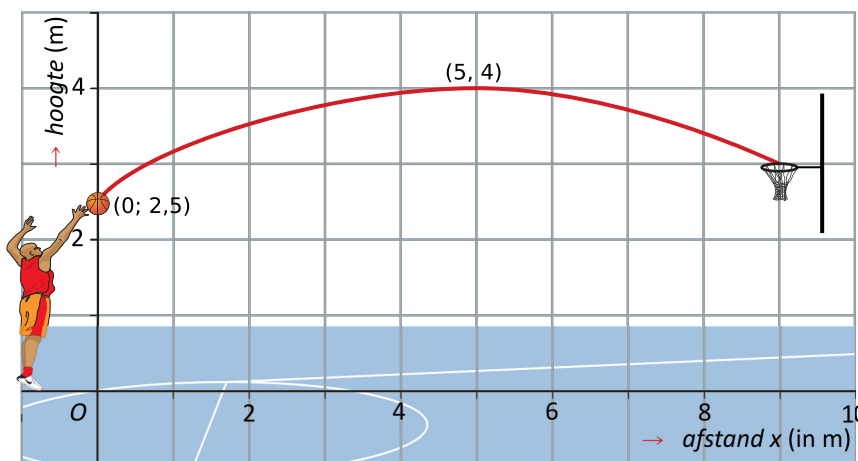
- Bereken de nulpunten van g .
- Welke minimale en welke maximale waarden heeft y op dit domein? Bepaal ze allemaal, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig. Schrijf het bereik op.

Opgave 11

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool. Het hoogste punt van de baan is gegeven in de figuur. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.

Hierbij past de formule: $h = -0,06x^2 + 0,6x + 2,5$.

Daarin is h de hoogte van de bal boven de grond in m afhankelijk van de x -waarde in m.



Figuur 2.9

- Ga na, dat het hoogste punt in de grafiek inderdaad de top van de gegeven parabool is.
- De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.
- Schrijf het domein en het bereik op van de functie h .

Opgave 12

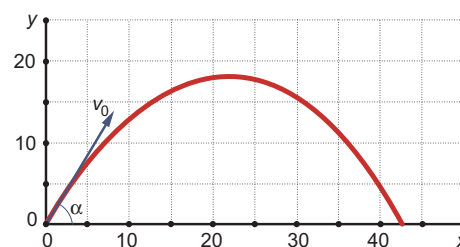
Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 21q - 40$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro.

- Wat is de winst als het bedrijf 2500 producten maakt?
- Wat is de laagste productie waarbij het bedrijf € 100875,00 winst maakt?
- Bij welke productie is de winst maximaal? En wat is die maximale winst?

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 2.10

Opgave 13: Kogelbaan

Voor de kogelbaan geldt de formule:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is:

- α de hoek waaronder de kogel wordt afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de afgeschoten kogel in m/s
- $g \approx 9,81$ de gravitatieconstante in m/s^2

- Waarom zie je dat er wordt aangenomen dat de kogel op de grond wordt afgeschoten?



Een kogel wordt afgeschoten met een snelheid van 300 m/s op een hoogte van 1,5 m en onder een hoek van $\alpha = 2^\circ$.

- b** Na hoeveel m komt hij op de grond terecht?
- c** Welke waarden kan y aannemen? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de tweedegraads veeltermfunctie $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ met domein $[0, 5]$.

- a** Bereken de nulpunten van f .
- b** Bepaal het bereik van f op dit domein.
- c** Binnen welk venster past deze grafiek nog precies?

Opgave 15

Gegeven is de derdegraads veeltermfunctie $g(x) = 0,2x^3 + x^2 - 2x$ met domein $[-7, 2]$.

- a** Bereken de nulpunten van g in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Bepaal het bereik van g op dit domein. Rond af op twee decimalen.
- c** Binnen welk venster past deze grafiek nog precies?

2.4 Ongelijkheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- vergelijkingen oplossen met terugrekenen vanuit machten, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule;
- grafieken van functies goed in beeld brengen (plotten).

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat speciaal voor gebruik door leerlingen.

- a Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).

De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- b Bij welk aantal kopieën per maand verdient de school aan het apparaat?

Uitleg

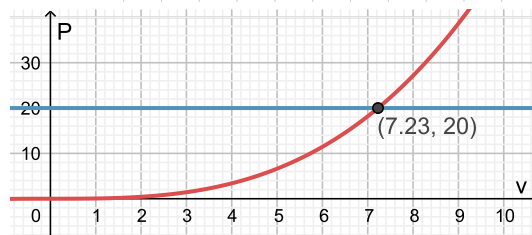
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, is afhankelijk van de wiek lengte en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt) en v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de **ongelijkheid**: $0,052v^3 > 20$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat prima met GeoGebra of een grafische rekenmachine:

- Je voert beide functies in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,272...; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid af uit de figuur: $v > 7,27$.

Belangrijk is het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v \geq 7,3$. Want bij 7,2 is het vermogen nog niet meer dan 20 kW.



Figuur 2.1

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt GeoGebra gebruikt.

- a** Los zelf de ongelijkheid zo op.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

- b** Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.

- c** Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = 0,01x(x^2 - 400)$ en $g(x) = x$. In deze opgave ga je de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ oplossen.

- a** Hoe moet je de assen instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?

- b** Los nu de ongelijkheid op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

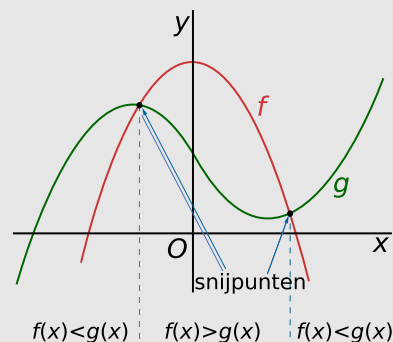
- c** Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst plot je beide functies.
Breng ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.
Dat kan vaak ook door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Reken door met de maximale nauwkeurigheid van de grafische rekenmachine en rond alleen af als dat wordt gevraagd en aan het einde van je uitwerking.



Figuur 2.2

Voorbeeld 1

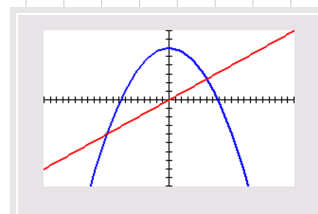
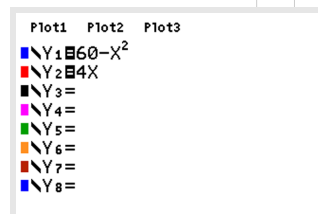
Bekijk de applet

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Bekijk eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$ zoals die zijn gemaakt met een grafische rekenmachine. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De snijpunten vind je door de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ op te lossen. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.



Figuur 2.3

Opgave 3

Je gaat in deze opgave de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ exact oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. De oplossing bestaat uit twee delen!

Opgave 4

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- $(x - 4)^2 < 10$
- $-2(x + 3)^2 + 10 < 4$
- $3(x - 5)^2 - 2 \geq 10$

Voorbeeld 2

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden. Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

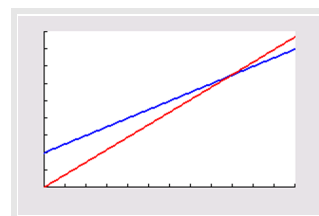
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. De variabele q is de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$ liter.

De oplossing lees je uit de grafiek af: vanaf 889 liter verf maakt de verfhandelaar winst.



Figuur 2.4

Opgave 5

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op gas kunt gaan rijden. Je huidige kosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

- a** Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost € 0,80 per liter en je rijdt 10 kilometer op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen.

- b** Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G) afhankelijk van het aantal kilometers (a).
- c** Je wilt weten hoeveel kilometer je in dat jaar moet rijden om de kosten van de gastank er weer uit te halen. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- d** Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 4x$.

Los algebraïsch op: $f(x) > g(x)$.

Antwoord

Eerst los je de vergelijking $x^3 = 4x$ op:

$$x^3 = 4x$$

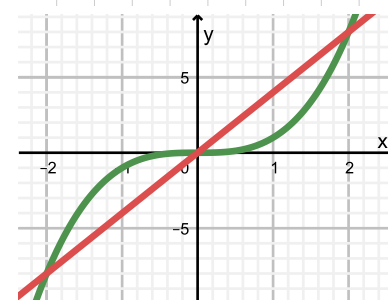
$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

Je vindt $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Vervolgens maak je de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 4x$. Zorg dat alle snijpunten in beeld komen.

Tenslotte lees je de oplossing uit de grafiek af. De groene grafiek moet boven de rode grafiek liggen, dus je vindt $-2 < x < 0 \vee x > 2$.



Figuur 2.5



Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je algebraïsch de ongelijkheid $x^3 > 4x$ oplost.

- a Welke oplossing heeft de ongelijkheid $x^3 \leq 4x$?

Bekijk nu de ongelijkheid $x^3 < x^2$.

- b Los de ongelijkheid algebraïsch op.

Oefenen

Opgave 7

Los de ongelijkheden met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a $x^3 + 3x^2 - 3 > 0$
b $2(x - 4)^2 - 5 < 5x$
c $(x + 3)^2 < 5x$
d $x^4 - 3x > -x^2 + 3$

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $5(x - 1)^2 - 9 > 11$
b $x^3 > x$
c $x^3 \leq 80x - 2x^2$
d $-2x^2 < 8 - x$
e $x^2 - 4x > -3$

Opgave 9

Twee auto's rijden op de A1, beide met constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door $s(t)$.

- a Stel bij beide auto's een lineaire functie voor $s(t)$ op.
b Bereken na hoeveel minuten auto A door auto B wordt ingehaald.
c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + px + 12$ en $g(x) = -x + 9$.

- a Voor welke exacte waarden van p snijdt de grafiek van f de x -as twee keer?
b Neem $p = 3$ en los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ algebraïsch op.

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- a Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.
- b Los algebraïsch op: $f(x) < 36$.

Toepassen

Bij een autodealer kun je vier jaar lang in een Smart Fortwo rijden voor € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer sluit je een abonnement af waarmee alle onderhoudskosten worden afgedekt. Je hebt verder alleen nog benzinekosten.

Met 1 liter benzine rijd je 16 kilometer.

1 liter benzine kost € 1,60.

Opgave 12

Bekijk de abonnementsgegevens voor de Smart Fortwo.

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost je deze Smart per jaar als je er 16000 km/jaar mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 4000,00 wilt besteden dat jaar? Los daarna de ongelijkheid algebraïsch op.
- d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je een vast bedrag aan onderhoudskosten alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel de complete formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Testen

Opgave 13

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op:

- a $6 - x < x^2$
- b $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 14

De afstand Utrecht - Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B.

- a Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
- b Los deze ongelijkheid algebraïsch op.
- c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

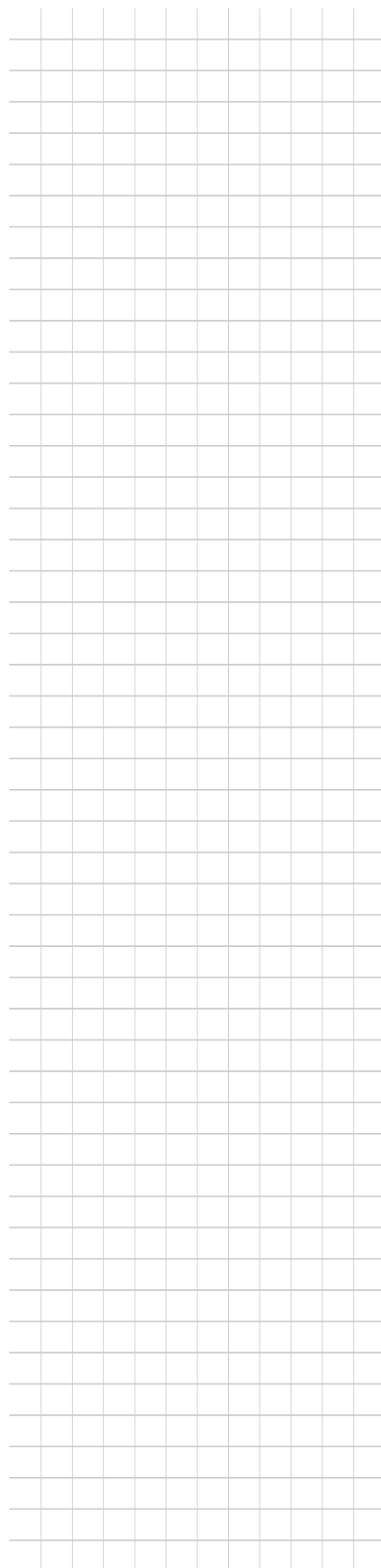


Figuur 2.6

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

- a** Bepaal de snijpunten van de grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Los op: $f(x) \geq g(x)$.



2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Kwadratische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- kwadraat afsplitsen — abc-formule;
- domein en bereik — veelterm, veeltermfunctie;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen en ontbinden in factoren;
- een kwadraat afsplitsen — kwadraat afsplitsen en de abc-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met intervalnotatie om domein en bereik van een veeltermfunctie te bepalen — werken met tweedegraads en derdegraads veeltermen;
- ongelijkheden systematisch oplossen.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x - 1)^2$.

- Laat zien hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^2$.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de coördinaatassen.
- Los algebraïsch op: $f(x) = -712$.
- Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- $-0,5(x - 2)^2 + 45 \leq 4,5$
- $x(x - 2) = 3x - 6$
- $x^3 - 4x^2 = 10x$
- $6 - 0,001(x - 3)^3 = 5$
- $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$
- $(x^2 - 9)(x - 2)^3 > 0$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

- Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f met behulp van kwadraat afsplitsen.
- Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x -as?
- Voor welke waarde(n) van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De maximale hoogte van de vuurpijl is 122,5 meter en die hoogte bereikt hij na 5 seconden. Er bestaat een kwadratisch verband tussen de hoogte van de vuurpijl h in meters vanaf de grond en de tijd t in seconden.

De formule van $h(t)$ wordt gegeven door $h(t) = -4,9t^2 + 49t$.

- Toon aan dat deze formule overeenkomt met de maximale hoogte van de vuurpijl.
- Als de vuurpijl niet uit elkaar spat, na hoeveel seconden is hij dan weer op de grond?
- De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Bereken algebraïsch hoelang de vuurpijl op een hoogte van meer dan 30 meter is. Rond af op één decimaal.

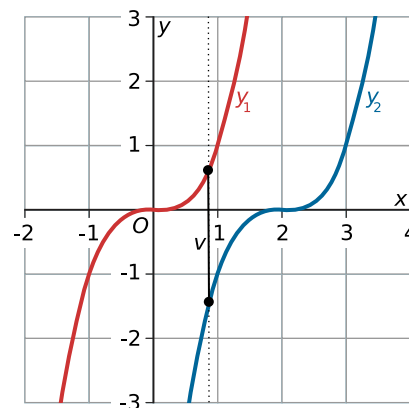
Opgave 5

Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2 . De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x -as de lengte 2 hebben.

- Geef de formule van y_2 .

De functie $v(x)$ stelt de lengte voor van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y -as.

- Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.
- Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as minder dan 8?
- Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as.



Figuur 2.1

Opgave 6

Een parabolische baan gaat ten opzichte van een xy -assenstelsel door de punten: $A(0,10)$, $B(2,13)$ en $C(5,10)$. Een voorwerp doorloopt deze baan vanaf punt A tot het weer op de grond komt ($y = 0$).

Voor de baan geldt de formule $y = -0,5x^2 + 2,5x + 10$.

- Ga na, dat de grafiek van deze formule inderdaad door de drie gegeven punten gaat.
- Waar komt het voorwerp dat deze baan doorloopt op de grond?
- Welk domein en welk bereik heeft de functie f die deze baan beschrijft?

Toepassen

Opgave 7: Boekenkast

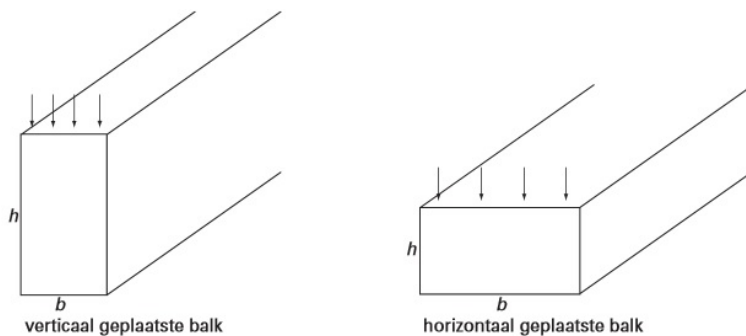
Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium. Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?

Bekijk de applet: [boekenkast op zolder](#)

- Experimenteer eerst met de applet.
- Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.
- Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K .

Opgave 8: Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort. We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.



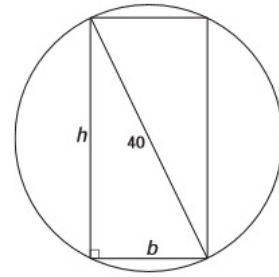
Figuur 2.2

Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm. Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

- In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.
De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2 . Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.
- Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h . Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie de figuur hiernaast.



Figuur 2.3

- c Laat zien dat in deze situatie voor de sterkte de formule $S = 192b - 0,12b^3$ kan worden gevonden.
- d Bereken de afmetingen h en b van de dwarsdoorsnede met de grootste sterkte. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af (zie bovenste foto). Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

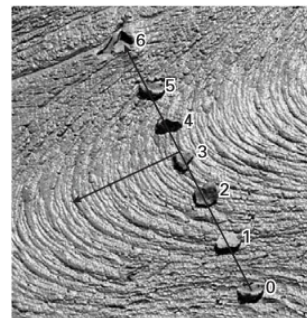
Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand. Het resultaat zie je op de onderste foto.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de onderstaande figuren zie je de ligging na één uur en na drie uur.

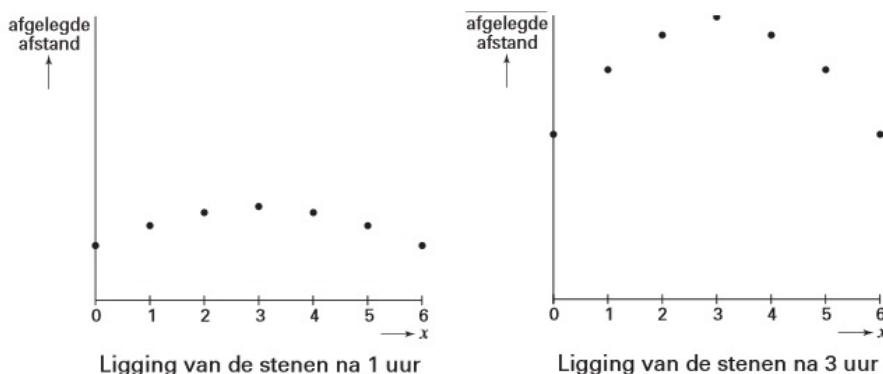
De afstand A (in dm) die de stenen na één uur hebben afgelegd, wordt beschreven door de formule:

$$A = -0,1x^2 + 0,6x + 19,4$$

Hierbij is x de afstand in dm van het midden van een steen tot het midden van steen 0 bij het begin van het proces.



Figuur 2.4



Figuur 2.5

- a Bereken de afstand die steen nummer 2 het eerste uur heeft afgelegd.



De stenen gaan met de modder mee de berg af. Elke steen heeft zijn eigen constante snelheid.

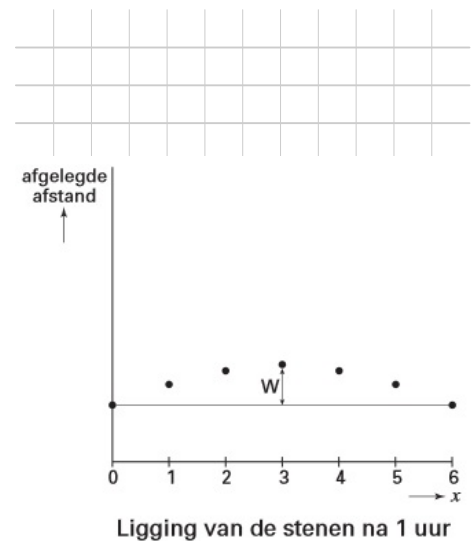
- b** Van welke stenen ligt die snelheid het dichtst bij 20 dm per uur? Licht je antwoord toe met een berekening.

De geoloog heeft de stenen op een rechte lijn loodrecht op de stroomrichting gelegd. Steen nummer 3 zal door de stroom sneller vooruit komen dan de andere stenen. Het weglengteverschil W dat op die manier tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur ontstaat, is afgebeeld in de figuur hiernaast.

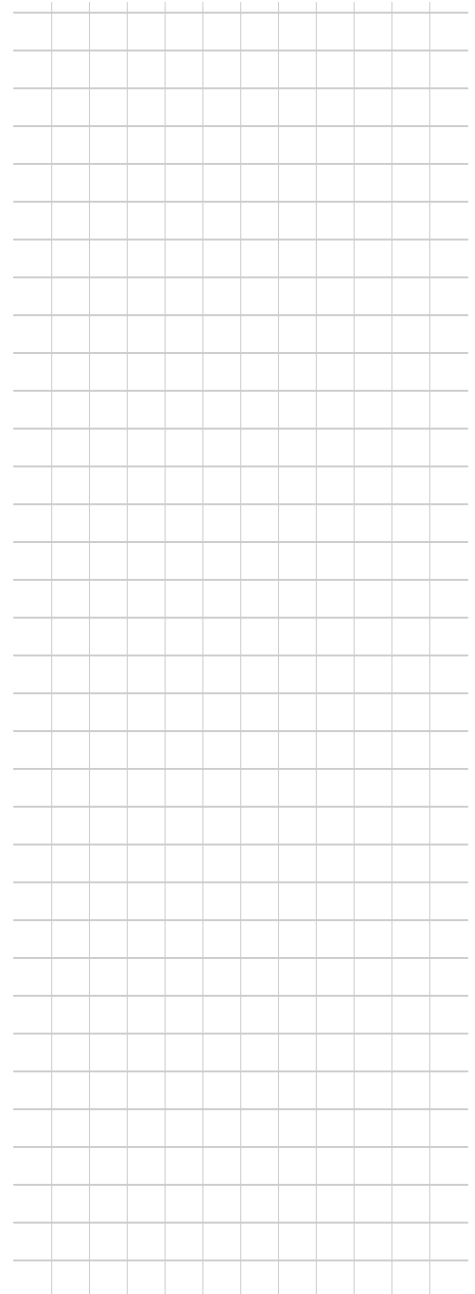
- c** Toon aan dat het weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur 9 cm is.

Op een gegeven moment meet de geoloog een weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 van 83 cm.

- d** Bereken de totale afgelegde weg van de steen met nummer 3, gerekend vanaf de plek waar de geoloog de stenen in de modderstroom gelegd heeft. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.



Figuur 2.6



Register

a

abc-formule 55
analogierekenen 9, 30

b

balansmethode 15, 30
bereik 64
bergparabool 46
buiten haakjes 23

d

dalparabool 46
discriminant 55
domein 64

e

exact 16

f

functiewaarden 56

g

gebroken vergelijking 30

i

inklemmethode 7
intervalnotatie 64

k

kwadraat afsplitsen 55
kwadratische functie 46, 55
kwadratische vergelijking 46

m

maximum 64
minimum 64

n

nulpunt 6, 7

o

ongelijkheid 70, 71
ontbinden in factoren 23
op 0 herleiden 23
oplossing 6
oplossing van een vergelijking 7

p

parabool 46

s

snijpunt 7
som product methode 23
splitsen 23
symmetrieas 46

t

terugrekenmethode 7
top 46

v

veelterm 64
vergelijking 6, 7

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All



www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

