Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel breed (KS 1348)

Katern 3

Inhoud

Logaritmen
Exponenten en machten

Context College

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Logaritmen

1.1 Logaritmen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

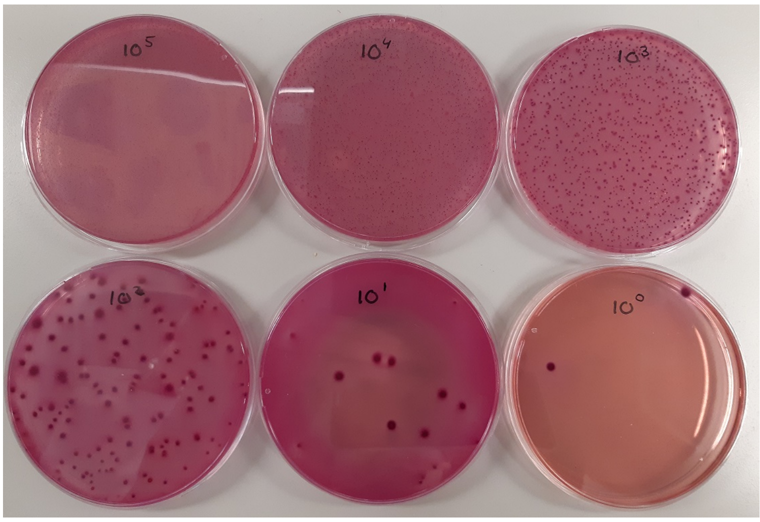
- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.
Bekijk de voedingsbodem waarbij het monster 10^2 keer is verdund, omdat het aantal kolonies daarop goed is te tellen. Bij het ontstaan van de kolonies groeit het aantal bacteriën in een kolonie exponentieel. Voor de exponentiële groei van aantal bacteriën geldt daarin $B = 8^t$ waarin B het aantal bacteriën is en t de tijd in uren.



Figuur 1.1

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) is het aantal bacteriën in een kolonie uitgegroeid tot 6000?

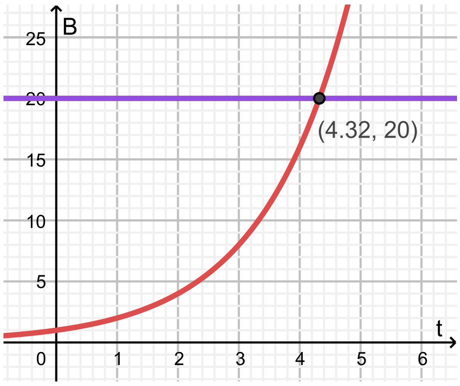
Uitleg 1

Bekijk de applet: logaritme

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 120 bacteriën?
$6 \cdot 2^t = 120$ geeft: $2^t = 20$
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 4{,}32$.
Dit antwoord is afgerond.
De exacte oplossing schrijf je als: $t = {}^2\log(20)$.
Dit is de logaritme van 20 met grondtal 2.

Het is ook de tijd waarin de hoeveelheid bacteriën 20 keer zo groot is geworden.

Wil je bijvoorbeeld weten hoeveel de verachtvoudigingstijd van deze hoeveelheid bacteriën is, dan moet je oplossen: $2^t = 8$. De oplossing is $t = {}^2\log(8)$. Met de grafiek vind je dan precies $t = 3$. Dat komt omdat $8 = 2^3$.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in de **Uitleg 1**.

a Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 60 is.
Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.

b Waarom is het getal dat je bij a hebt gevonden de vertienvoudigingstijd van deze exponentiële groei?

c Schrijf de verdrievoudigingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd in twee decimalen nauwkeurig.

d Schrijf de verdubbelingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd.

e Bereken $t = {}^2\log(16)$.
Leg uit welke betekenis het antwoord heeft.

Opgave 2

Een andere kolonie bacteriën groeit volgens de functie $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$.

a Bereken de verdubbelingstijd bij deze exponentiële groei. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken op dezelfde manier de verdrievoudigingstijd en de verzesvoudigingstijd.

c Vergelijk de antwoorden bij a en b. Valt je iets op?

d Waarom is ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log\left(2^2\right)$?

e Waarom is $3 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log\left(2^3\right)$?

Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is B de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren.

De tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt volgt uit $1{,}5^t = 2$ en is dus $t = {}^{1{,}5}\log(2) \approx 1{,}71$.
De verdrievoudigingstijd is ${}^{1{,}5}\log(3) \approx 2{,}71$ jaar.
De verzesvoudigingstijd is ${}^{1{,}5}\log(6) \approx 4{,}42$ jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je ook door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen:
${}^{1{,}5}\log(2) + {}^{1{,}5}\log(3) = {}^{1{,}5}\log(6)$
Ofwel: ${}^{1{,}5}\log(2) + {}^{1{,}5}\log(3) = {}^{1{,}5}\log(2 \cdot 3)$
Als je twee logaritmen optelt, moet je de getallen waarop ze werken vermenigvuldigen.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1{,}5}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.
${}^{1{,}5}\log(8) \approx 5{,}13$ en $3 \cdot {}^{1{,}5}\log(2) \approx 5{,}13$
Er geldt: ${}^{1{,}5}\log\left(2^3\right) = 3 \cdot {}^{1{,}5}\log(2)$.
Dit geldt ook voor andere grondtallen en andere getallen.

Deze laatste eigenschap kun je gebruiken om op een rekenmachine een logaritme uit te rekenen met de log-knop. Deze knop werkt namelijk met grondtal 10, een soort van standaardgrondtal van een logaritme dat je zelfs niet opschrijft: $\log(2) = {}^{10}\log(2)$.
Als je $1{,}5^t = 2$ moet oplossen, kun je ook met grondtal 10 werken:

$1{,}5^t = 2$ geeft $\log\left(1{,}5^t\right) = \log(2)$

Nu kun je $\log\left(1{,}5^t\right)$ schrijven als $t \cdot \log(1{,}5)$.
De vergelijking wordt dan $t \cdot \log(1{,}5) = \log(2)$ en dus is $t = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)}$.
En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: $t = {}^{1{,}5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)} \approx 1{,}71$.
Dit werkt met elk toegestaan grondtal.

Opgave 3

In de **Uitleg 2** zie je voorbeelden van enkele eigenschappen van logaritmen.

a Laat zelf zien dat de verdubbelingstijd plus de verviervoudigingstijd hetzelfde is als de verachtvoudigingstijd.
Schrijf dit ook met logaritmen op.

b Schrijf als één logaritme: ${}^{1{,}5}\log(5) + {}^{1{,}5}\log(10)$.

c Schrijf als één logaritme: ${}^{1{,}5}\log(6) - {}^{1{,}5}\log(2)$.

d Leg uit waarom $5 \cdot {}^{1{,}5}\log(3) = {}^{1{,}5}\log\left(3^5\right)$.

Opgave 4

In de **Uitleg 2** wordt de vergelijking $1{,}5^t = 2$ opgelost met behulp van de 10-logaritme.

a Ga na dat inderdaad ${}^{1{,}5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)} \approx 1{,}71$.

b Los de vergelijking $4 \cdot 1{,}5^t = 100$ op met behulp van de 10-logaritme. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:

$x = {}^g\log(y)$ is de oplossing van $g^x = y$.

Uit de definitie van logaritme volgt dat g^x en ${}^g\log(x)$ elkaars terugrekenfunctie zijn. Er geldt dan ook:

${}^g\log(g^x) = x$ en $g^{{}^g\log(y)} = y$

De logaritme ${}^g\log(y)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Het grondtal 10 laat je weg: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.

${}^g\log(a)$ kun je met de rekenmachine berekenen: ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.

Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan vaak rechts onder de log: $\log_g(a)$

Voorbeeld 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar.
In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

Over hoeveel jaar is dat aantal gestegen tot meer dan 60000 passagiers per jaar?

Antwoord

Het aantal passagiers is $P(t) = 43000 \cdot 1{,}02^t$ met P het aantal passagiers en t de tijd in jaren.

Je moet oplossen: $43000 \cdot 1{,}02^t = 60000$.

$$\begin{aligned} 43000 \cdot 1{,}02^t &= 60000 \\ 1{,}02^t &= 1{,}395... \\ t &= {}^{1{,}02}\log(1{,}395...) = \frac{\log(1{,}395...)}{\log(1{,}02)} \approx 16{,}8 \end{aligned}$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

17 jaar na 2018 zijn er voor het eerst meer dan 60000 passagiers op dit vliegveld.
Dat is in 2035.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken na hoeveel jaar het aantal passagiers per jaar de 100.000 gaat overstijgen als de groei zo door gaat.

b Bereken de verdubbelingstijd van de groei van het jaarlijkse aantal passagiers in maanden nauwkeurig.

Opgave 6

Een hoeveelheid neemt per dag met 20% af.

a Bepaal de bijbehorende groeifactor.

b Na hoeveel dagen is deze hoeveelheid gehalveerd?
Stel een vergelijking voor dit probleem op en los deze vergelijking op met behulp van logaritmen.

Voorbeeld 2

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^{3}\log(10) + {}^{3}\log(20) = {}^{3}\log(200)$
- $5 \cdot {}^{3}\log(2) = {}^{3}\log(32)$

Antwoord

Bij deze exponentiële groei hoort een groeifactor van 3.

${}^{3}\log(10)$ is de vertienvoudigingstijd en ${}^{3}\log(20)$ is de vertwintigvoudigingstijd.
Als je eerst de hoeveelheid met 10 en vervolgens met 20 vermenigvuldigt, heb je de hoeveelheid met $10 \cdot 20 = 200$ vermenigvuldigd.

${}^{3}\log(2)$ is de verdubbelingstijd.
Als je de verdubbelingstijd vijf keer neemt, heb je vijf keer met 2 vermenigvuldigd.
De hoeveelheid wordt dan met $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ vermenigvuldigd.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(6) = {}^{1,5}\log(12)$
- $4 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log(16)$

Opgave 8

Bereken de logaritmen en controleer of de uitdrukkingen waar zijn.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(9) = {}^{3}\log(81)$

Opgave 9

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b $\log(125) + 3\log(2)$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0{,}5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Voorbeeld 3

Met behulp van de eigenschap $g^{{}^{g}\log(y)} = y$ kun je bij elke exponentiële functie schrijven met het standaard grondtal 10.

Schrijf de functie $B(t) = 6 \cdot 2^{t}$ met het grondtal 10.

Antwoord

Je hebt een grondtal van 2.

Met de genoemde eigenschap geldt: $10^{{}^{10}\log(2)} = 2$, of korter $10^{\log(2)} = 2$.

Hiermee wordt de gegeven formule:

$B(t) = 6 \cdot \left(10^{\log(2)}\right)^{t} = 6 \cdot 10^{\log(2) \cdot t} \approx 6 \cdot 10^{0{,}301t}$.

Opgave 10

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je een exponentiële functie kunt schrijven met het standaard grondtal 10.

a Schrijf de functie $H_{A}(t) = 160 \cdot 1{,}3^{t}$ met het grondtal 10.

b Schrijf de functie $H_{B}(t) = 120 \cdot 1{,}4^{t}$ met het grondtal 10.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $H_{A}(t) = H_{B}(t)$.

Oefenen

Opgave 11

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

a $500 \cdot 1{,}5^{x} = 6000$

b $0{,}5 \cdot 10^{x} = 2000$

c $1500 \cdot 0{,}95^{t} = 100$

Opgave 12

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 3 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdubbeld. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 13

Bereken met behulp van de rekenregels voor logaritmen.

a $\log(5) + \log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 14

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties?
Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 15

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Stel een formule op voor het verval van de hoeveelheid natrium-24.
Schrijf deze formule ook in de vorm met standaard grondtal 10.

d Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

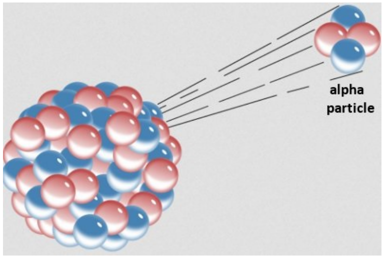
Toepassen

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.

Een voorbeeld is U-235, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-231:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{231}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-235 is ongeveer $7{,}038 \cdot 10^8$ jaar. Het verval van U-235 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-235, dan heb je na 704 miljoen jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-231). Je kunt dus het beste de tijd in miljoenen jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,9990. En $H = 1000 \cdot 0{,}9990^t$ gram.



Figuur 1.3 **bron: Wikipedia**

Opgave 16: Alfastraling

Bekijk hoe uranium-235 vervalt tot thorium-231 door alfastraling.

a Laat zien dat de halveringstijd bij een groeifactor van 0,9990 per miljoen jaar ongeveer $7 \cdot 10^8$ jaar is.

b Bereken hoe lang het duurt totdat de 1000 g U-235 gerekend in grammen volledig is omgezet in Th-231.

Opgave 17: Radium

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium- 224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg van de beschikbare 1000 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 2^x = 180$

b $1050 \cdot 0{,}98^t = 800$

Opgave 19

Vereenvoudig deze uitdrukkingen tot één logaritme.

a ${}^{2}\log(7) + {}^{2}\log(5)$

b ${}^{3}\log(51) - {}^{3}\log(17)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(3) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

1.2 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats op aarde:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Deze formule betekent dat je bijvoorbeeld in een luchtballon de hoogte kunt bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. Daarvoor bestaan apps op je telefoon. Die maken gebruik van deze formule, maar in de vorm waarin h is uitgedrukt in p.

Figuur 1.1

a Schrijf de gegeven formule zo, dat h is uitgedrukt in p.

b In de figuur zie je dat h is uitgedrukt in 'foot', een oude engelse lengtemaat.
1 foot = 0,3048 m.
Komt de figuur overeen met de formule die je bij a hebt gevonden?

Uitleg

De luchtdruk p (in hectopascal) hangt af van de hoogte h (in km) boven zeeniveau. Er geldt op zeker moment op een bepaalde plaats op aarde:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

In een luchtballon kun je hiermee de hoogte berekenen door de luchtdruk te meten.

Je schrijft dan de formule liever zo: $h = {}^{0{,}866}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

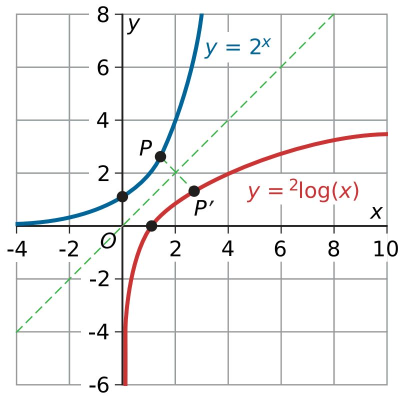
Bij beide formules kun je een grafiek maken, maar niet in één figuur.

Bij de eerste formule komt p op de verticale as.
Dit is een exponentiële functie met een horizontale asymptoot.

Bij de tweede formule komt h op de verticale as.
Dit is een logaritmische functie met een verticale asymptoot.

Bekijk de applet: logaritme

Uit $y = 2^x$ volgt $x = {}^2\log(y)$.
Als je in de tweede formule x en y verwisselt kun je beide grafieken in één figuur tekenen. Ze zijn dan elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
Nu zie je dat $y = {}^2\log(x)$ een logaritmische functie is waarvan de eigenschappen het spiegelbeeld zijn van die van $y = 2^x$.
Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: een exponentiële functie kun je wegwerken met een logaritme met hetzelfde grondtal, en omgekeerd kun je een logaritmische functie wegwerken met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Maak beide grafieken.

b Het punt (4,2) ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Laat met een voorbeeld zien dat y_1 en y_2 elkaars terugrekenfunctie zijn.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van y_2?

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $H(t) = 12 \cdot 3^t$.

a Schrijf t als functie van H.

b Voor welke waarden van t is $H > 100$?

c Voor welke waarden van H is $t > 100$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: logaritme

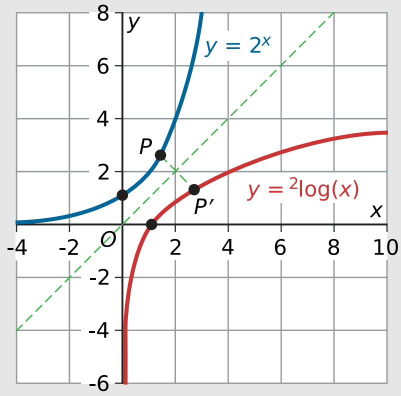
Een functie van de vorm $f(x) = {}^{g}\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^{x}$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^{x}$:

- alleen x-waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door transformatie uit $f(x) = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Bepaal domein en bereik van de logaritmische functie
$f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$.
Bepaal de verticale asymptoot en bereken het nulpunt van f.

Antwoord

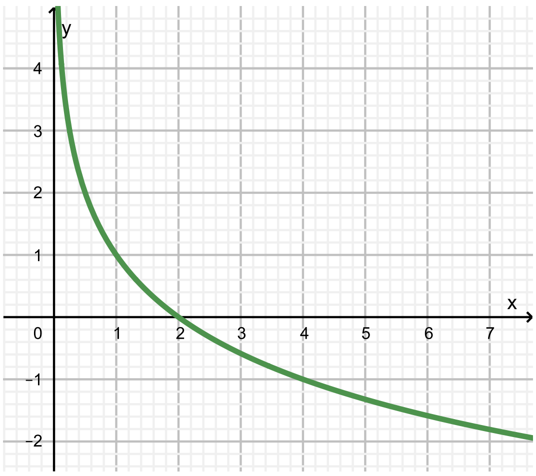
Maak de grafiek van f.
Deze grafiek kan ontstaan uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$ door deze 1 eenheid ten opzichte van de x-as te verschuiven.
Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

- Uit $x > 0$ volgt $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.

Het nulpunt vind je zo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ {}^{0,5}\log(x) &= -1 \\ x &= (0,5)^{-1} = 2 \end{aligned}$$

Het nulpunt is $x = 2$.



Figuur 1.4

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$.

a Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.

b Bepaal het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = {}^{0,886}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $h = a \cdot \log(p) + b$ waarin het standaard grondtal 10 wordt gebruikt. Laat zien hoe.

Antwoord

Gebruik de eigenschap ${}^{g}\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

Dit betekent: $h = {}^{0,886}\log\left(\frac{p}{1013}\right) = \frac{\log\left(\frac{p}{1013}\right)}{\log(0,886)}$.

Omdat $\log(0,886) = -0,5256...$ wordt dit

$h = \frac{1}{-0,5256...} \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

Vervolgens is $\log\left(\frac{p}{1013}\right) = \log(p) - \log(1013)$.

Dus is

$h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) = -19(\log(p) - \log(1013)) \approx -19\log(p) + 57$.

Opgave 6

Ga in **Voorbeeld 2** na hoe je een logaritmische functie kunt herleiden naar een logaritmische functie met het standaardgrondtal 10.

De formule met grondtal 0,886 is afgeleid van $p = 1013 \cdot 0,886^{h}$.

Je kunt ook eerst deze formule herleiden naar de vorm $p = 1013 \cdot 10^{k \cdot h}$ en dan h als functie van p schrijven.

a Laat zien hoe de herleiding dan verloopt.

b Maak de grafiek van $h \approx -19 \cdot \log(p) + 57$ en zorg dat zowel het nulpunt als de verticale asymptoot goed in beeld komen.

c Bij welke luchtdruk is $h > 10$ km?

Opgave 7

Gegeven is een groeiproces met formule $H = 20 \cdot 1{,}2^t$.

a Herleid dit tot een formule met het standaardgrondtal 10.

b Schrijf de formule in de vorm $t = a \log(H) + b$.

c Na hoeveel tijd is $H > 240$?

Oefenen

Opgave 8

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 10 \cdot 2^t$.

a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $t = {}^{2}\log\left(\frac{B}{10}\right)$.

b Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.

c Welke waarden heeft B als $t > 3$?

Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32{,}8 \cdot {}^{0{,}9}\log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule van de vorm $h = a \log(p) + b$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter.
Daarvoor geldt bij benadering:

$$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

b Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $m \approx 0{,}67 \cdot \log(E) - 3{,}20$.

c Wat gebeurt er met de hoeveelheid vrijkomende energie als m met 1 toeneemt?

Opgave 12

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit dertien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$T = b \cdot {}^{2}\log(n+1)$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

Figuur 1.5

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van achttien knoppen te maken
- methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor T aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat deze bewering klopt.

Toepassen

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2} dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde **Alexander Graham Bell** een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB. Het verband tussen L en p wordt gegeven door

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Je kunt je afvragen hoe groot de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB) is.
En hoeveel dB het geluidsdrukniveau van twee van die brommers bedraagt.

Opgave 13

Bekijk de formule van Bell voor het geluidsdrukniveau.

a Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB)?

b Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die brommers?

Opgave 14

Bekijk weer de formule van de effectieve geluidsdruk. Neem ook nu $p_0 = 0{,}00002$ Pa.

a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

c Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Testen

Opgave 15

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 150 \cdot 1{,}4^t$.

a Herleid deze formule zo, dat t is uitgedrukt in B.

b Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.

c Welke waarden heeft B als $t > 5$?

Opgave 16

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constante G_0 hangt af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Hoe zwaar is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

b Herleid de gegeven formule naar de vorm $L = a\log(G) + b$.

1.3 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmen oplossen onder andere met behulp van de rekenregels;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies en logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Verkennen

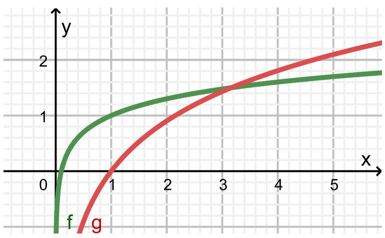
Opgave V1

Los op: $\log(x) + 1 < 3 \cdot \log(x)$.

Uitleg

Los op: $\log(x) + 1 \geq 3 \cdot \log(x)$.

- Los de bijbehorende vergelijking op:
  $\log(x) + 1 = 3 \cdot \log(x)$ geeft $2 \cdot \log(x) = 1$ en $\log(x) = 0{,}5$ zodat $x = 10^{0{,}5} \approx 3{,}16$.
- Maak de grafieken van $f(x) = \log(x) + 1$ en $g(x) = 3 \cdot \log(x)$.
  Lees de oplossing uit de figuur af.
  Houd rekening met de domeinen van beide functies.
- De oplossing is $0 < x \leq 3{,}16$.



Figuur 1.1

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe een vergelijking met meerdere logaritmen kan worden opgelost. Los op dezelfde manier op:

a $4 \cdot \log(x) \geq 1 - \log(x)$

b ${}^{2}\log(x) - 1 > 2 \cdot {}^{2}\log(x)$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x - 1) + 16$.

a Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f.

b Los de ongelijkheid $f(x) \leq 38$ op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ moet gelden:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De oplossing vind je door aan beide zijden de inverse bewerking van de
logaritme toe te passen:

${}^{g}\log(x) = a$ geeft $g^{{}^{g}\log(x)} = g^{a}$ en hieruit volgt $x = g^{a}$.

Een **logaritmische ongelijkheid** van de vorm ${}^{g}\log(x) < a$ kun je zo oplossen:

- Los de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Maak de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) \leq 45$.

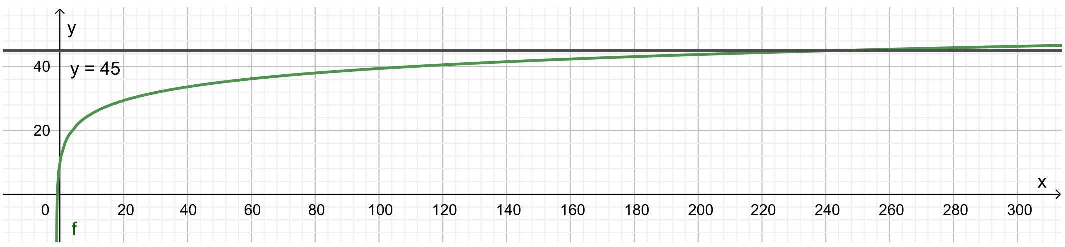
Antwoord

Los bijbehorende vergelijking op:

$$\begin{aligned} 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) &= 45 \\ {}^{3}\log(x+1) &= 5 \\ x + 1 &= 3^{5} \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Maak de grafieken van: $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1)$ en $y_2 = 45$.

Gebruik het domein $\langle -1, \rightarrow \rangle$, de uitkomst $x = 242$ en $y_2 = 45$ om de vensterinstellingen te bepalen.



Figuur 1.2

Lees af: $-1 < x \leq 242$.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x+5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en bepaal het domein en bereik van f.

c Los op: $f(x) \geq -3$

Opgave 4

Maak de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2-x)$.

a Bepaal van beide functies de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies het domein.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3\\
{}^{2}\log(x(x+2)) &= 3\\
{}^{2}\log\left(x^2+2x\right) &= 3\\
x^2+2x &= 2^3\\
x^2+2x-8 &= 0\\
x &= -4 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Vanwege het domein van de eerste logaritme geldt $x > 0$. Alleen de oplossing $x = 2$ voldoet hieraan en dit is de enige oplossing.

Opgave 5

Los algebraïsch op: ${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x-1) = 1$.

Opgave 6

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\log(2x) - \log(x-1) = 2$

b ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L (in dB) en de effectieve geluidsdruk p (in Pa) is

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

met $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0{,}00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = \ldots$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ \frac{L}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{1}{20}L} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1{,}12^L$ kun je dit schrijven als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$. p is een exponentiële functie van L.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdruk-niveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 8

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau is

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 0$.
Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Los algebraïsch op ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter.
Daarvoor geldt bij benadering:

$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.

b Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4 - x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

c Los op: $f(x) \leq g(x)$

d Los op: $f(x) > g(x)$

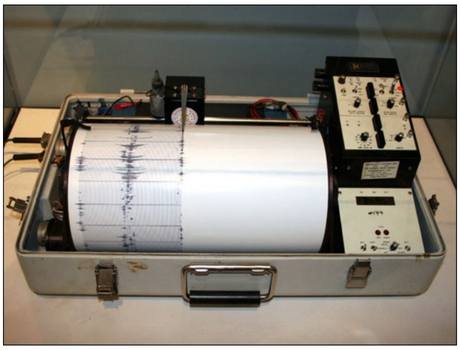
Opgave 13

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herleiden dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 1.3

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 15

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in µm (1 µm = 0,001 mm)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 µm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8{,}8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los algebraïsch op en geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig:

a $4 + {}^{2}\log(x - 5) = 0$

b $5 - \log(x) = 3\log(x)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 0$

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f en g met formules
$f(x) = {}^{3}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(6 - x)$.

a Bepaal het domein, bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 18

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constante G_0 hangt af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Herleid de gegeven formule naar de vorm $G = a \cdot 10^{k \cdot L}$.

b Hoeveel weegt een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

1.4 Logaritmische schalen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch papier bij exponentiële functies;
- werken met dubbellogaritmisch papier bij machtsfuncties.

Voorkennis

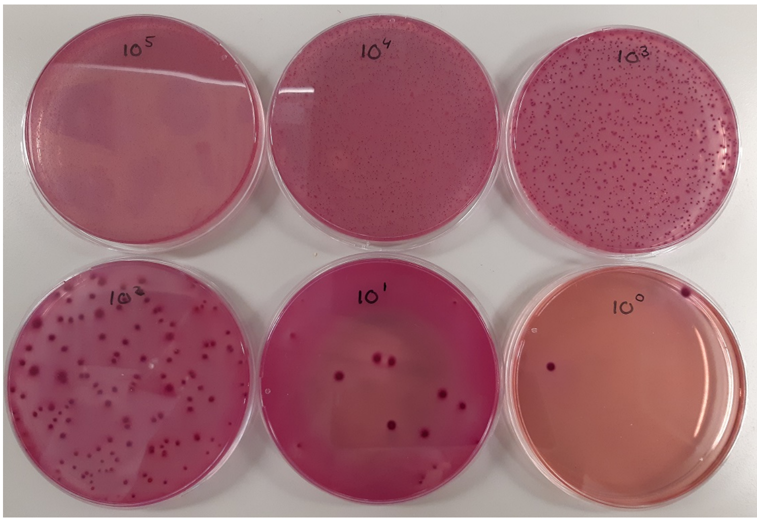
- werken met exponentiële functies en logaritmische functies;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponenten of logaritmen oplossen onder andere met behulp van de rekenregels;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies en omgekeerd;
- het begrip logaritmische schaalverdeling.

Verkennen

Opgave V1

Exponentiële groei is ook nogal explosieve groei. Vaak heb je al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon.

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B(t) = 2 \cdot 2^t$ met t in uren.



Figuur 1.1

a Laat zien, dat deze groeiformule kan worden geschreven als $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(2)$.

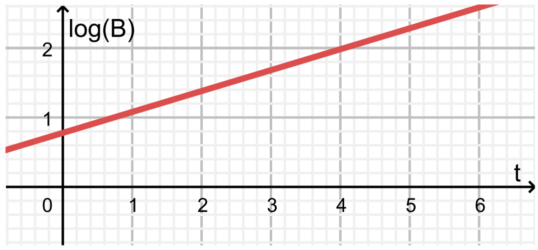
b Waarom is de grafiek van $\log(B)$ als functie van t een rechte lijn?

c Teken de grafiek van $\log(B)$ als functie van t.

d Lees uit je grafiek af bij welke waarde van t geldt $B = 100$.

Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.
Je kunt deze formule herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.
Dit betekent dat $\log(B)$ een lineaire functie is van t.
Je zet dan $\log(B)$ op de y-as en t op de x-as en je krijgt de grafiek hiernaast.

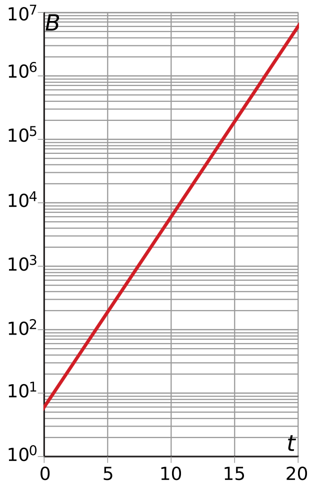


Figuur 1.2

Je kunt ook een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruiken.

Op de plaats van 0, 1, 2, 3, 4, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort. Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme.

Bijvoorbeeld op $t = 15$ heb je $B = 6 \cdot 2^{15} = 196608$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^5 en 10^6. De logaritme van dat getal is: $\log(196608) \approx 5{,}29$. Je zet het daarom op 5,29 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{5.29} = 10^5 \cdot 10^{0{,}29} \approx 2{,}0 \cdot 10^5$ dus.



Figuur 1.3

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook **enkellogaritmisch grafiekenpapier**.

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn.

a Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

b Neem een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

Maak ook een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

c Zet de bijbehorende punten in het assenstelsel. Als het goed is, krijg je de bovenste grafiek in de **Uitleg**.

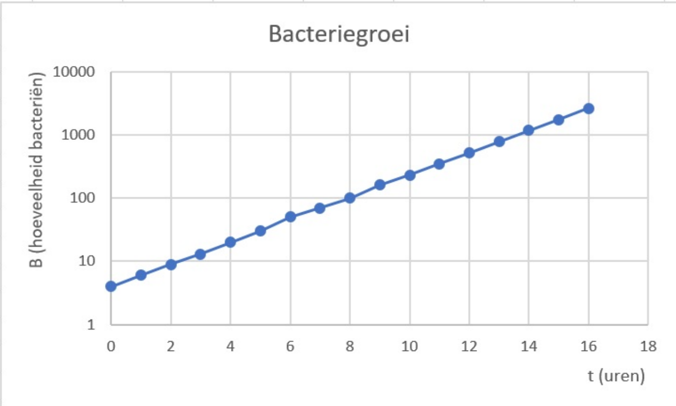
d Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

Bekijk nu de onderste grafiek in de **Uitleg**.
Deze is getekend op enkellogaritmisch papier.

e Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

Opgave 2

In een ander petrischaaltje groeien de bacteriën volgens $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$ met t in uren en B de hoeveelheid bacteriën. Deze formule is afgeleid uit deze grafiek die is gemaakt vanuit een tabel in Excel.



Figuur 1.4

a Je ziet in de formule dat $B(0) = 4$.
Hoe past dit bij de figuur?

b In de figuur zie je dat $B(8) \approx 100$ en $B(2) \approx 9$.
Laat zien, hoe je met deze gegevens de formule voor $B(t)$ kunt opstellen.

Opgave 3

De lichtsterkte L van een lamp is afhankelijk van de spanning V die op de lamp staat. Er geldt een formule van de vorm:

$L = k \cdot V^p$

Hierin is:

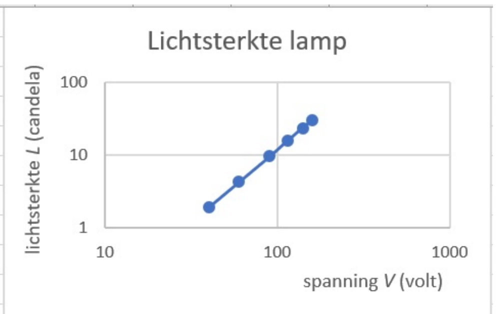
- k en p een constante
- V de spanning in volt (V)
- L de lichtsterkte in candela (cd)

a Laat zien dat de bijbehorende grafiek een rechte lijn is als je op beide assen een logaritmische schaal gebruikt. Laat dus zien dat deze formule te schrijven is in de vorm $\log(L) = \log(V^p) + \log(k)$.

Hier zie je de experimentele gegevens van een lamp.

V	*L*
40	1,92
60	4,32
90	9,72
115	15,87
140	23,52
160	30,72

V = spanning (volt)
L = lichtsterkte (candela)



Figuur 1.5

b Hoe zie je aan de grafiek dat er een formule van de vorm $L = k \cdot V^p$ bij past?

c Stel met de gegevens de bij deze lamp passende formule voor $L(V)$ op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

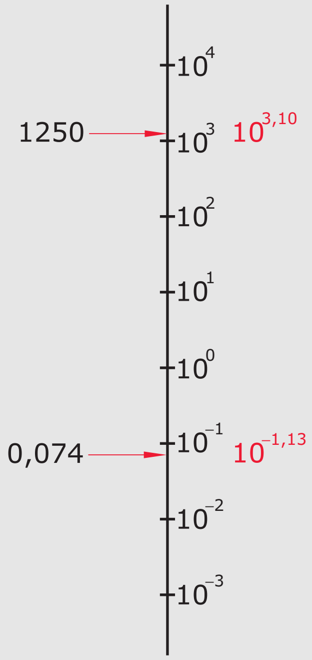
- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat.

Gebruik je op beide assen een logaritmische schaal, dan wordt de grafiek van een machtsfunctie altijd een rechte lijn. Er bestaat speciaal **dubbellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op dubbellogaritmisch papier de grafiek is van een machtsfunctie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een machtsverband bestaat.



Figuur 1.6

Voorbeeld 1

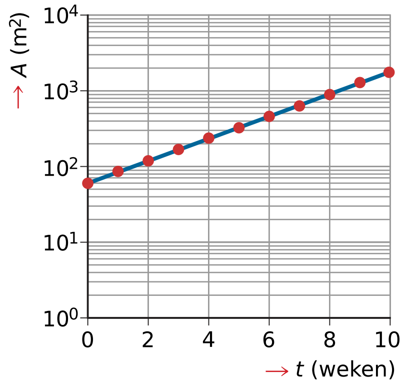
Bekijk de grafiek van de groei van waterplanten. De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t, en wel: $A = b \cdot g^t$.

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$, dus $b \approx 60$;
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$.



Figuur 1.7

De groeifactor per acht weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A(t) \approx 60 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** staat een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daar kun je een formule bij opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden $A(t)$ op.

c Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 5

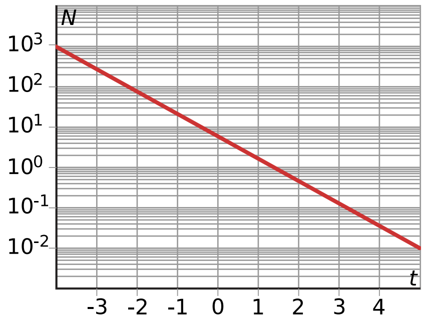
Bekijk de grafiek van de functie $N(t)$.

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de t-as met de N-as?

b Lees twee waarden voor $N(t)$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N(t)$.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N(t) = 0$?



Figuur 1.8

Voorbeeld 2

De slingertijd t (in s) is de tijd die een gewicht dat aan een touw is opgehangen en aan het heen en weer slingeren wordt gebracht nodig heeft voor één heen- en weer gaande beweging. Die slingertijd hangt af van de lengte L (in m) van het touw. Hier zie je enkele meetgegevens:

L in m	0,25	0,42	0,56	0,81	1,00	1,32
t in s	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3

Tabel 1.1

Laat zien dat een bijpassende grafiek met op beide assen een logaritmische schaalverdeling ongeveer een rechte lijn oplevert en stel een bijpassende formule op.

Antwoord

De grafiek kun je op verschillende manieren maken:

- De tabel uitbreiden met rijen voor $\log(L)$ en $\log(t)$. Vervolgens zet je in een assenstelsel met gewone lineaire schaalverdelingen $\log(L)$ tegen $\log(t)$ uit.
- De tabel in Excel invoeren en een spreidingsgrafiek maken. Vervolgens kies je op beide assen een logaritmische schaalverdeling.
- Een blad **dubbellogaritmisch papier** gebruiken.

De grafiek moet in alle gevallen ongeveer een rechte lijn worden.

Je weet dan dat de bijbehorende formule de vorm $t = c \cdot L^p$ moet hebben.

Lees twee punten op de lijn af, bijvoorbeeld $L(0{,}25) = 1{,}0$ en $L(1{,}00) = 2{,}0$.

Vul je deze waarden in de formule in, dan kun je c en p berekenen.

Je vindt: $t \approx 2{,}0 \cdot L^{0{,}5}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** vind je de gegevens van de slingertijd t afhankelijk van de slingerlengte L.

a Maak een bijbehorende grafiek met op beide assen een logaritmische schaalverdeling.

b Stel zelf de formule op die in het voorbeeld staat.

c Laat zien, dat dit in overeenstemming is met de uit de natuurkunde bekende formule

$t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.

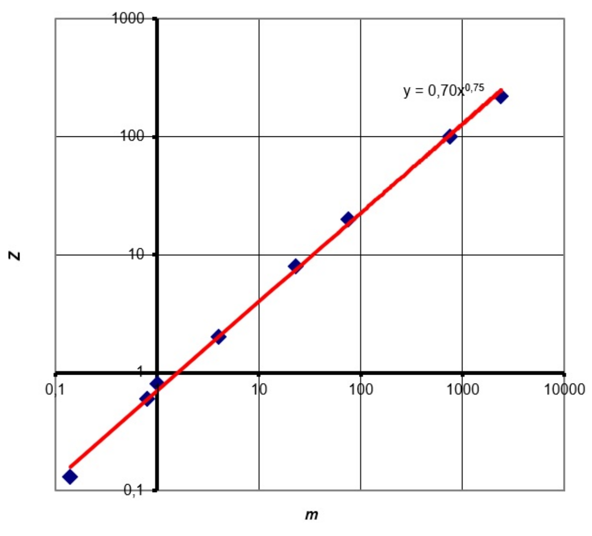
Hierin is $g \approx 9{,}8$.

Opgave 7

Bekijk deze tabel en bijbehorende grafiek van het zuurstofverbruik Z (in liter/uur) afgezet tegen de lichaamsmassa m in kg.

Zuurstofverbruik Z (L/uur) tegen massa m (kg)

diersoort	m	Z
muis	0,14	0,13
eekhoorn	0,8	0,6
rat	1	0,8
kat	4	2
hond	23	8
mens	75	20
paard	750	100
olifant	2400	220



Figuur 1.9

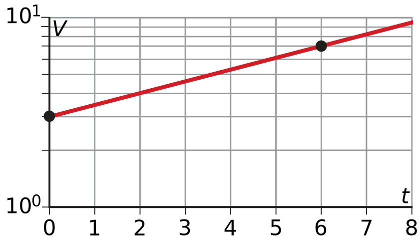
a Door de punten is ongeveer een rechte lijn te trekken.
Laat door berekening zien, dat bij deze lijn inderdaad de formule $Z = 0{,}70 \cdot m^{0{,}75}$ hoort.

b De massa van een koe bedraagt 500 kg. Hoeveel bedraagt het zuurstofverbruik?

Oefenen

Opgave 8

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t.



Figuur 1.10

a Geef een formule voor $V(t)$.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 5$. Rond af op twee decimalen. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t. Rond af op twee decimalen.

Opgave 9

Bekijk de tabel met gegevens over een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 1.2

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t. Rond af op twee decimalen.

b Teken de bijbehorende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn?

d Is er sprake van exponentiële groei?

e Stel een formule op voor $\log(N)$ als functie van t.

f Stel met behulp van het antwoord uit c een formule op voor N als functie van t.

Opgave 10

Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier en ga na of er sprake is van een machtsverband tussen x en y. Stel een bijpassende formule op en bepaal de waarde van y bij $x = 1000$.

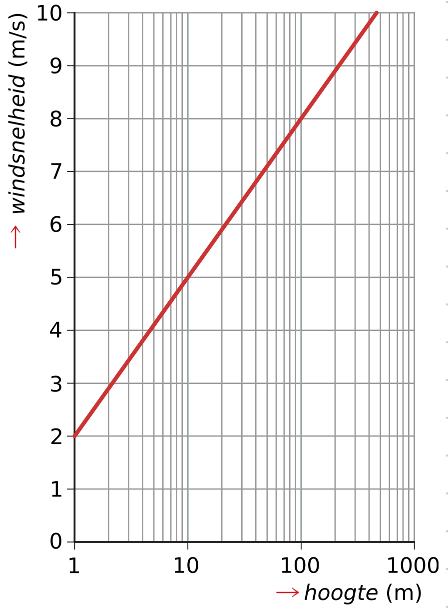
x	1	5	17	55	250	880
y	35	78	144	260	553	1038

Tabel 1.3

Opgave 11

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. In de grafiek zijn de resultaten weergegeven van metingen op dagen met een neutrale atmosfeer.

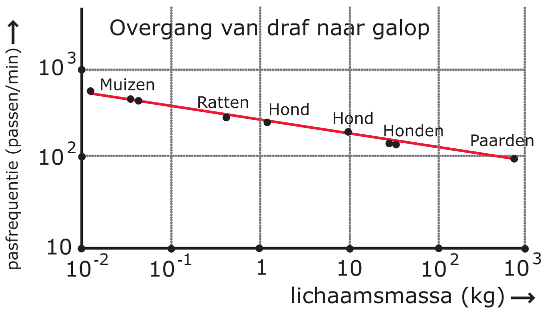
Het verband tussen de windsnelheid w en de hoogte h kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$. Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.



Figuur 1.11

Opgave 12

Bekijk de grafiek. Je ziet voorbeelden van zoogdieren die bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) overgaan van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 1.12

a Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

b Leid nu een formule af voor $\log(P)$ als functie van $\log(m)$.

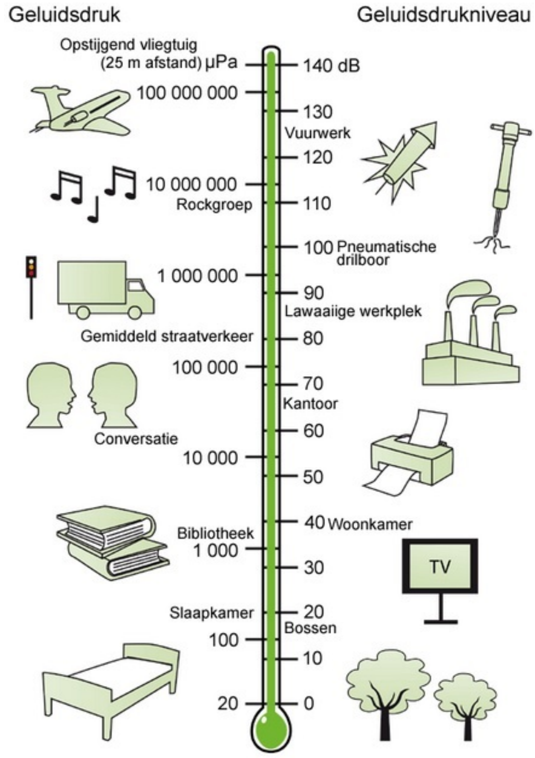
c Met behulp van de eigenschappen van logaritmen kun je nu een formule afleiden voor P als functie van m. Laat zien hoe dat gaat.

Toepassen

De effectieve geluidsdruk p (pascal, 1 Pa = 1 N/m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa = 20 µPa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel (dB).

Je ziet hier hoe die decibelschaal samenhangt met de geluidsdruk in µPa.

Er is uit deze figuur een verband tussen L en p af te leiden.



Figuur 1.13 **bron: bromtonen.nl**

Opgave 13

Bekijk hoe de decibelschaal er uitziet en hoe het geluidsdrukniveau L samenhangt met de geluidsdruk p.

a Hoe zie je aan de figuur dat de decibel schaal een logaritmische schaal is?

Als je de geluidsdruk p uitzet tegen het geluidsdrukniveau L heb je een enkellogaritmisch assenstelsel. De bijbehorende formule heeft dus de vorm $p = b \cdot g^L$.

b Stel deze formule op.

Je kunt ook het geluidsdrukniveau uitdrukken in de geluidsdruk. Je stelt dan een formule op voor $L(p)$.

c Laat zien, dat $L = 20 \cdot \log(p) - 94$.

Opgave 14

Voor het geluidsdrukniveau L (dB) afhankelijk van de effectieve geluidsdruk p (pascal, Pa) geldt $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$.

a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

c Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Testen

Opgave 15

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 1.4

a Zet de punten (0,40),(1,57),...,(6,447) uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

Opgave 16

Bekijk de tabel waarin het verband wordt weergegeven tussen het hersengewicht H (gram) en het lichaamsgewicht G (gram) van enkele kleine zoogdieren.

	wezel	muis	eekhoorn	egel	kat	haas
G	95	200	320	820	3600	4000
H	2,54	4,18	5,72	10,75	28,97	31,09

Tabel 1.5

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Is er sprake van een exponentieel verband?

b Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier. Van welk soort verband is er sprake?

c Onderzoekers hebben een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen G en H.

Deze formule is: $H = 0{,}12 \cdot G^{0{,}67}$

Leid zelf deze formule af.

d Bereken het lichaamsgewicht van een zoogdier met een hersengewicht van meer dan 150 gram?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden
- logaritmische schaal — enkel- en dubbellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen — eigenschappen van logaritmen gebruiken
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen — vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten — logaritmen herleiden naar standaard grondtal 10
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen — logaritmische functies omschrijven naar exponentiële functies
- logaritmische schalen gebruiken — werken met enkellogpapier en dubbellogpapier

Testen

Opgave 1

Een bedrijf verwacht dat de komende jaren zijn aandelen 11% per jaar in waarde gaan stijgen.

a Hoelang duurt het totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Ga uit van een jaarlijkse stijging van 11%. Bereken na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe je hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ kunt toelichten.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per centimeter 27% van het licht dat erdoorheen valt.

Bereken in millimeter nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(10)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

d Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt: $h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Plot de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar.

b Hoe hoog vliegt het vliegtuig?

c Laat zien dat p een exponentiële functie is van h.

d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat het toestel op 3 km hoogte vliegt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar.

e Hoe hoog vliegt het toestel in werkelijkheid? Rond af op meter.

Opgave 6

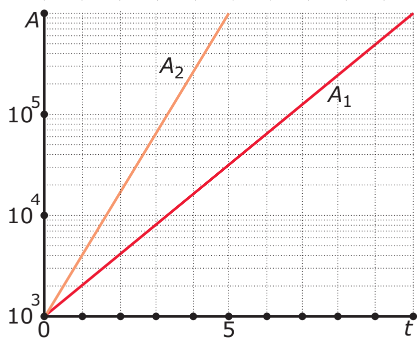
In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 g salade afhankelijk is van de temperatuur. In de figuur staan de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius.

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.

c Hoeveel keer zoveel bacteriën zijn er na tien dagen bij 4 °C vergeleken met de situatie bij 0 °C?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C?



Figuur 1.1

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo hoog, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacterie bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Opgave 7

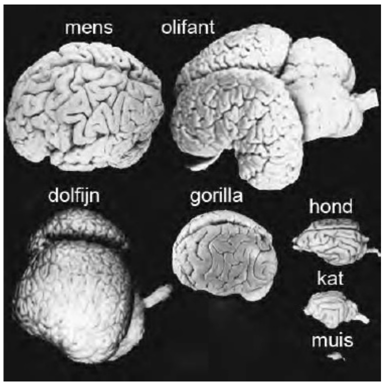
Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (mm) en het gewicht van het vlees W (gram) van mosselen. Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. In één van de jaren leiden de resultaten tot de volgende formule: $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)$.

Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

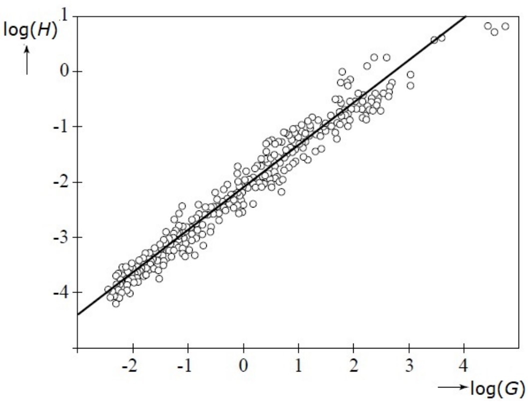
Opgave 8

Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen.

Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, is G. Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, is H. De grafiek hieronder geeft het verband weer tussen de logaritme van G en de logaritme van H. In deze grafiek zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in de grafiek getekend.



Figuur 1.2 Bron: havo B examen 2010



Figuur 1.3

Het gemiddeld lichaamsgewicht van katten is 5 kg.

a Bepaal met behulp van de rechte lijn in de figuur het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Een formule die bij de rechte lijn hoort is
$\log(H) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097$. Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

b Bereken met behulp van de gegeven formule algebraïsch dit gemiddelde lichaamsgewicht.

c De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$. Bereken de waarden van a en b. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 9: Windsnelheid

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 1.1

a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid in m/s
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.
In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

b Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

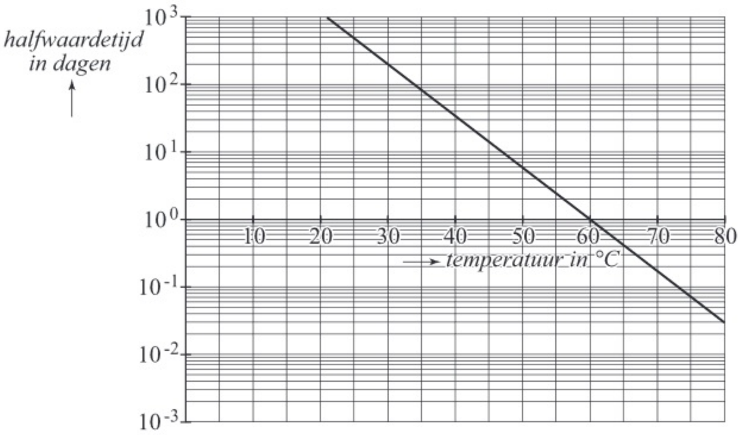
Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

c Bereken de waarde van r van dit terrein.

Opgave 10: Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 1.4

a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht. Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28. Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

b Laat met behulp van de grafiek in zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten. Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden. Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

2

Exponenten en machten

2.1 Exponentiële groei

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei/afname, met name formules opstellen bij exponentiële groei/afname;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een heel groot vel papier (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4'tje in werkelijkheid nooit lukken?

Stel dat een onbegrensd vel papier 0,15 mm dik is.

c Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 centimeter dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg 1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën (mg)	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 2.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2; dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met deze formule kun je gemakkelijk berekenen hoeveel bacteriën je na bijvoorbeeld 10 uur hebt: $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van de bacteriegroei in de **Uitleg**.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van de hoeveelheid bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Opgave 2

Bekijk de tabel.

tijd (h)	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
bacteriën	50	150	450	1350	4050	12150	36450

Tabel 2.2

a Toon aan dat er sprake is van exponentiële groei.

b Hoe groot is de groeifactor per uur?

c Hoe groot is de groeifactor per twee uur?

d Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

Opgave 3

Een hoeveelheid halveert dagelijks.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag?

b Hoeveel is de groeifactor per week? Rond af op drie decimalen.

c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per vier dagen af?

Uitleg 2

Door te denken aan bacteriegroei en de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt, trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per 3 uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Deze rekenregels gelden voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 2.1

Opgave 4

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $\left(6^3\right)^6$

Opgave 5

a Kun je $2^5 + 2^5$ als één macht schrijven?

b Kun je $7^3 + 7^5$ als één macht schrijven?

Opgave 6

a Hoeveel is 0^4?

b En hoe zit het met 0^0? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

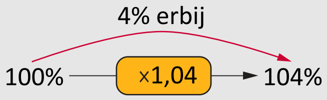
Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit, is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

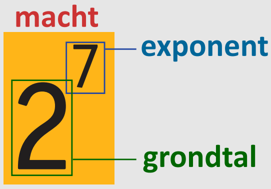
Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^n. Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is.
In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m een aantal **rekenregels voor machten**:

- $g^0 = 1$ als $g \neq 0$
- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$ als $g \neq 0$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 2.2



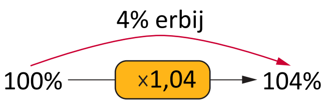
Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet is veranderd en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

Antwoord

Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04.



Figuur 2.4

Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$.

Als je deze formule invoert in een spreadsheet heb je snel een tabel.
Je kunt ook een grafische rekenmachine gebruiken.

Opgave 7

Hoeveel bedraagt de groeifactor bij de genoemde groeipercentages?

a 10% toename

b 100% toename

c 0,2% toename

d 100% afname

e 0,1% afname

f 40% afname

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel geld staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen.

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 4 jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 5 jaar.

Voorbeeld 2

Een krant ziet in een reeks van jaren het aantal abonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 2.3

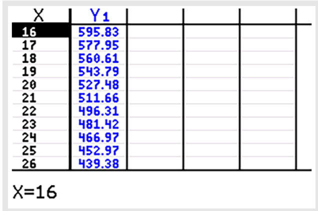
Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010 . Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

Controleer eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.

Maak een tabel van deze functie, bijvoorbeeld met een spreadsheet of een grafische rekenmachine.
Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.



Figuur 2.5

Opgave 9

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2**.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad ongeveer 0,97 is.

b Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 in de problemen raakt.

Opgave 10

Neem de tabel over en vul in.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 2.4

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten berekenen.
$256 = 2^8$, $64 = 2^6$ en $1024 = 2^{10}$.

En dus staat hier:

$$\frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024.$$

Opgave 11

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als een macht te schrijven.

a $3^{83} \cdot (3^{40})^2$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

c $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$

d $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

Oefenen

Opgave 12

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Geef de formule van de met riet begroeide oppervlakte $R(t)$ in km^2, waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.

c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 13

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de ‘groei’ van het aantal herten N als functie van de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 14

In de herfst ‘schieten’ de paddenstoelen uit de grond. Dit komt omdat de paddenstoel onder de grond groeit. Hier neemt de paddenstoel vocht op. Als het heeft geregend, schiet de paddenstoel razendsnel omhoog.
Ga uit van een paddenstoel die begint met groeien tijdens een regenbui om 23:00 uur 's avonds. Noem dit tijdstip $t = 0$. De hoogte van de paddenstoel is op dat moment 1 cm en neemt per uur met 14% toe. Deze paddenstoel kan maximaal 12 cm hoog worden.

a Hoe hoog is de paddenstoel om 02:00 uur 's nachts? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.

b Wat is de groeifactor per drie uur? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

c Met hoeveel procent is de hoogte van de paddenstoel toegenomen tussen 23:00 uur 's avonds en 6:00 uur in de ochtend? Geef je antwoord in hele procenten.

d Hoeveel hele uren kan de paddenstoel blijven groeien?

Opgave 15

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11295	11760	12250	12750	13280

Tabel 2.5

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar haalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 16

Schrijf als één macht.

a $\dfrac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$

b $\dfrac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 27^{24}}$

c $\dfrac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

d $\dfrac{(49^{8})^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}}$

Opgave 17

Op 1 januari 2010 heeft stad A 250000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 2,5% per jaar. Op 1 januari 2008 heeft stad B 300000 inwoners. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 5000 per jaar.

a Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.

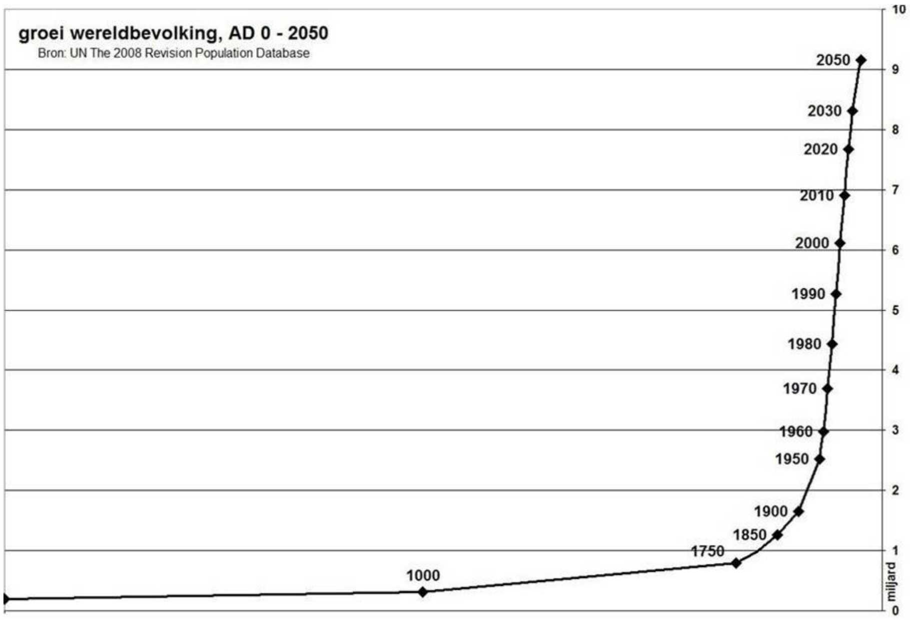
b Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.

c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2012 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.

d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking. Erg beklemmend, nietwaar?



Figuur 2.6

Op het eerste gezicht lijkt dit wel om exponentiële groei te gaan. Maar hoe constant de groeifactor is staat nog te bezien...

Opgave 18

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Laat zien dat deze groeifactor ongeveer klopt met het aantal mensen in 1980.

c Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

d B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

e Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

f Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 19

Het is ook wel boeiend om twee werelddelen, of twee regio's te vergelijken. Daarvoor is genoeg informatie voorhanden, bijvoorbeeld via **Wikipedia, wereldbevolking**.

a Vergelijk bijvoorbeeld de regio's Zuid-Azië en Europa met elkaar.

Een ander boeiend aspect is de hoeveelheid leefruimte.

b Stel je eens voor dat je zoveel mogelijk mensen op 1 m^2 grond zou kunnen proppen (maar niet stapelen), zou de wereldbevolking dan in de provincie Utrecht passen?

Testen

Opgave 20

Voor een bepaald type woning betaal je een huur van € 950,00 per maand. Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.

b Maak een tabel waarin je kunt zien hoe lang het duurt tot de huur hoger wordt dan € 1300,00 per maand.

c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar? Rond af op twee decimalen.

d Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.

e Bereken het groeipercentage per twintig jaar.

f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 21

Schrijf als één macht: $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{\left(17^{4}\right)^{16}}$.

Opgave 22

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12 procent in waarde dalen.

a Stel een formule op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je de waarde van de aandelen na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.

2.2 Rekenregels voor machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met negatieve en/of gebroken exponenten;
- alle rekenregels voor machten gebruiken.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten $t = 0$ is om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 11:00 uur?

b Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 10:00 uur?

c Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd?

d Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Uitleg 1

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt de formule: $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

tijd t (h)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën B	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 2.1

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur: $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten. Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (dus vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

Met de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je de formule kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$; enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af, dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op! Nu mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal milligram bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Opgave 2

Je ziet een deel van een tabel die een hoeveelheid bacteriën B beschrijft na tijd t (uur). De hoeveelheid wordt beschreven met de formule $B = 500 \cdot 2^t$. Vul de tabel verder in.

tijd (h)	-3	-2	-1	0	1	2	3
hoeveelheid bacteriën				500			

Tabel 2.2

Uitleg 2

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur, per kwartier, enzovoort.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Blijkbaar geldt: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op! Nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 4

Gebruik de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ uit de uitleg.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per vier uur?

c Hoeveel bedraagt de groeifactor per vijf uur?

d Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier?

f Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur.

g Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na 5 uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier.

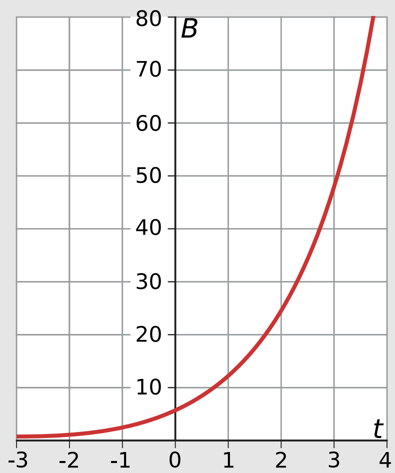
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid de hoeveelheid steeds vermenigvuldigen met de groeifactor g die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is: $g > 0$. Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden **eigenschappen van machten**.

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g, maar hier moet je voorzichtig mee zijn.



Figuur 2.1

Een macht als g^a heeft voor $g > 0$ betekenis als de exponent a een positief getal, 0, een negatief getal of een gebroken getal is. Voor a mag je zelfs elk reëel getal invullen. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw. Hij vermoedde dat de groei van de wereldbevolking exponentieel was. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 2.3

Stel een passende formule op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest zouden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoen mensen N, dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1{,}005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.
In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.
In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 5

In **Voorbeeld** zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

a Bereken het aantal mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?

b Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond af op miljoenen per jaar.

c Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2008.

d Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt: $g^{5736} = 0{,}5$.
Hieruit bereken je de groeifactor per jaar:

$g = \sqrt[5736]{0{,}5} = 0{,}5^{\frac{1}{5736}} \approx 0{,}999879$.

Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0{,}999879^t = 0{,}6$.
Deze exponentiële vergelijking los je op met een tabel of met een logaritme: $t \approx 4221$ jaar.
De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog 38% is.

Opgave 7

Bij een kernsplijting is een hoeveelheid radioactieve stof Cesium-137 vrijgekomen. De halveringstijd van deze stof is dertig jaar.

a Na hoeveel jaar is de hoeveelheid van deze stof afgenomen tot 25%?

b Bereken na hoeveel jaar de hoeveelheid nog maar 11% is.

Voorbeeld 3

Je ziet enkele herleidingen met behulp van de eigenschappen van machten.
Er geldt $g > 0$.

- $\left(\frac{1}{g}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{g^1}\right)^{-4} = \left(g^{-1}\right)^{-4} = g^4$
- $g^{\frac{2}{3}} = \left(g^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{g}\right)^2 = \sqrt[3]{g^2}$

- $g^{1,5} = g^{1+\frac{1}{2}} = g^1 \cdot g^{\frac{1}{2}} = g \cdot \sqrt{g}$
- $g^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{g^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(g^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{g^2}}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{\frac{1}{2}}$

Opgave 9

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\left(3^{-12}\right)^{\frac{1}{4}}$

b $\left(2^2\right)^{-3} \cdot \left(2^{-2}\right)^{-4}$

c $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

d $125^{\frac{1}{5}} \cdot 5^4 \cdot 5^{-10}$

Voorbeeld 4

Je kunt $3x \cdot \sqrt{x}$ schrijven in de vorm ax^b:

$3x \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$

Opgave 10

Schrijf in de vorm ax^b.

a $\frac{3}{2x}$

b $\frac{3}{4x\sqrt{x}}$

c $(4\sqrt[3]{x})^2$

d $2x\sqrt{x}$

e $\frac{2}{x^3 . \sqrt[3]{x^2}}$

f $3x^5 \cdot \left(2x^3\right)^2$

Oefenen

Opgave 11

Vereenvoudig met behulp van de rekenregels voor machten.

a $3^{-2} \cdot 3^{5} \cdot 3$

b $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{3} \cdot 4^{-4}$

c $5^{\frac{2}{3}}$

d $1000^{\frac{1}{3}}$

e $2^{-2} \cdot 4^{-1}$

f $\left(3^{2}\right)^{-1}$

Opgave 12

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^{t}$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Hoe groot is het groeipercentage per maand?

e Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 13

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven, voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Opgave 14

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

a x^{-1}

b $x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^{\frac{3}{4}}$

d $x^{1\frac{3}{4}}$

e $3x^{-1{,}5}$

f $\frac{1}{2}x^{-2{,}75}$

Opgave 15

Herleid tot de vorm ax^b.

a $\frac{2}{\sqrt{x}}$

b $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

c $\frac{1}{3\cdot\sqrt[4]{x}}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{x}$

e $\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}$

f $(3x \cdot \sqrt{x})^3$

Opgave 16

Stel je een gebied voor met daarin een vulkaan en twee steden: Árborg en Eyrarbakki. Stel de stad Árborg heeft in 2020 45000 inwoners, dit aantal neemt per jaar toe met een factor 1,03. Het inwonertal van Eyrarbakki is dan 55000 en heeft een verdubbelingstijd van dertig jaar.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van Eyrarbakki? Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de verdubbelingstijd van het inwonertal van Árborg?

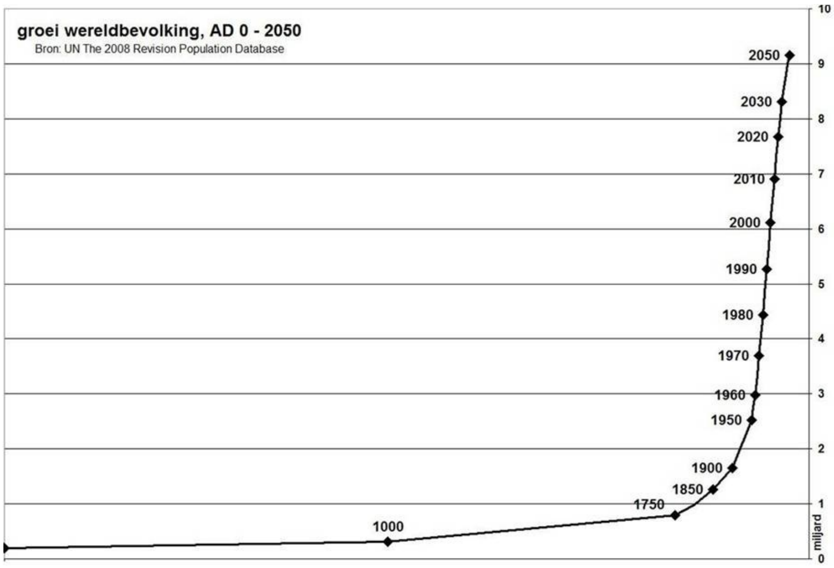
c Geef zowel van Árborg als van Eyrarbakki een formule waarmee je het bevolkingsaantal B kunt berekenen als functie van t (het aantal jaren).

d In het jaar 2020 barst de vulkaan uit. Helaas blijft dit voor Árborg niet zonder gevolgen: een kwart van de bevolking komt om het leven. Na de uitbarsting groeit de bevolking weer zoals voor de vulkaanuitbarsting. Wanneer heeft Árborg weer het oude aantal inwoners?

e Welk van deze twee steden heeft in het jaar 2150 de meeste inwoners?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking.



Figuur 2.2

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

Opgave 17

Bekijk de gegevens over de groei van de wereldbevolking.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b Vanaf het begin van de jaartelling is de bevolking al meer dan vier keer verdubbeld in aantal. In welke tijdvakken vonden deze verdubbelingen plaats?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Testen

Opgave 18

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten, zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15 procent toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen A in liter per 10 gram algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15 procent per week. Hoe hoog was de concentratie algen drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Wat was de concentratie algen twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen was de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 19

Bereken zonder rekenmachine.

a $3^{-5} \cdot 9^2$

b $2^{-10} \cdot \left(2^3\right)^5$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

d $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 20

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm ax^n.

a $3x^5 \cdot \left(2x^3\right)^2$

b $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{x^7}$

c $4x \cdot \sqrt[4]{x^2}$

2.3 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

a Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?

b Heeft de functie f extremen?

c Heeft de grafiek van f asymptoten?

d Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Met GeoGebra of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Deze functies komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Voor positieve waarden van b geldt:

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x-as is een horizontale asymptoot.
- Er zijn geen extremen.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden.

Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b.

Opgave 1

Met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kun je de grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welke formule krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welke formule krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Waarom heeft de grafiek van f nu geen asymptoot?

c Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welke formule krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

d Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

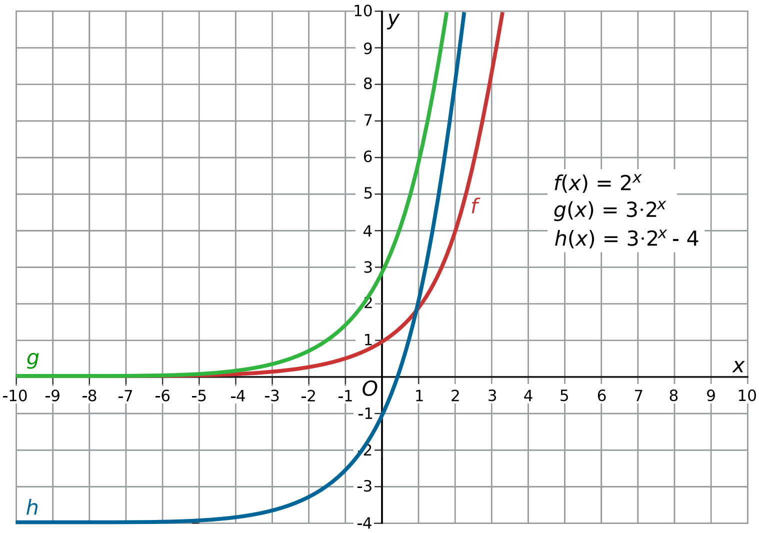
Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 2.1

Alle functies die hieruit door vermenigvuldiging ten opzichte van de assen of een translatie kunnen ontstaan, hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ in te vullen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen;
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ in te vullen.
  De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y-richting te verschuiven (een translatie van -4 in de y-richting);
- $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} + 4$ kun je herleiden tot
  $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^{2x} - 4$.
  Dat wordt $f(x) = 1{,}5 \cdot \left(2^2\right)^x - 4$ en dus $f(x) = 1{,}5 \cdot 4^x - 4$.
  De grafiek ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 4$ en $d = -4$ in te vullen. Dus ontstaat de grafiek uit die van $y = 4^x$ door in de y-richting met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie in de y-richting van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 3

Het gaat in **Uitleg 2** over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welke formule $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welke formule $f_2(x)$ krijg je? Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welke formule $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 4

Bekijk de functie met formule $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12$.

a Herleid de formule tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Bepaal het nulpunt van de grafiek van f.

d Dit nulpunt kun je ook algebraïsch vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële functies

De grafiek van de **standaard exponentiële functie** $y = g^x$ heeft een aantal karakteristieken.

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- De x-as is de horizontale asymptoot.
- Als $g > 1$, is de grafiek stijgend.
- Als $0 < g < 1$, is de grafiek dalend.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

Elke **exponentiële functie** heeft een formule van de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
Hierbij moet je soms de formule herleiden met de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ een aantal **transformaties** toe te passen:

- vermenigvuldiging in de y-richting met factor b;
- verschuiving in de y-richting met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door de **exponentiële vergelijking** $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Dat kan met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

In een stedelijk gebied liggen twee steden: stad A met 750000 inwoners en stad B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In stad A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in stad B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren heeft stad B meer inwoners dan stad A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

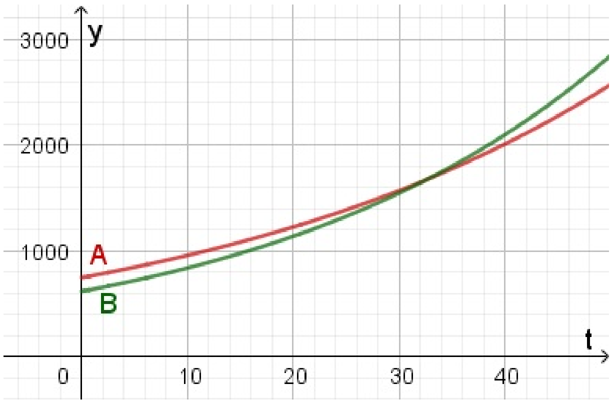
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is 1,025. Die van het aantal inwoners van B is 1,031. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van stad A voorstelt, en B dat van stad B, beide in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1{,}025^t$;
- $B(t) = 620 \cdot 1{,}031^t$.

De bijbehorende grafieken maak je met GeoGebra of een grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Neem voor het venster $[0,50] \times [0,3000]$. Ga na dat je $t \approx 32{,}6138$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 heeft stad B meer inwoners dan stad A als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 2.2

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waaraan zie je dat B harder groeit dan A?

b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

c Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B, maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. Wanneer is C even groot als A?

Opgave 6

In een meer is op een bepaald moment een schadelijke stof aanwezig met een concentratie van 40 mg/L. De concentratie vervalt exponentieel met 20% per dag.

a Leg uit waarom de groeifactor per dag 0,80 is.

b Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met formule $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door transformatie ontstaat uit een standaardfunctie van de vorm $y = g^x$ en los algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$
$g(x) = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16$

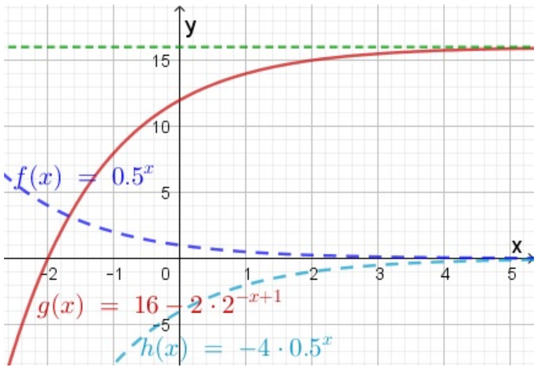
$g(x) = -4 \cdot \left(2^{-1}\right)^x + 16$, dus $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$.

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$ ontstaat door transformatie van $y = 0{,}5^x$ in twee stappen.

- vermenigvuldiging in de y-richting met -4;
- translatie in de y-richting met 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is de oorspronkelijke formule handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft: $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$. Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus: $2^4 = 2^{-x+2}$. Dit betekent dat: $4 = -x + 2$, zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$



Figuur 2.3

Opgave 7

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $y = 2^x$ laten ontstaan.

a Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.

Je kunt ook eerst de formule van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.

b Laat zien hoe deze herleiding gaat.

c Beschrijf nu hoe je door transformatie in twee stappen de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

d Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f. Geef de coördinaten van dit punt.

e Los op $f(x) > 0$ op.

Opgave 8

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. Je kunt bijvoorbeeld de rekenregels voor machten gebruiken. Bekijk dit voorbeeld van een algebraïsche oplossing.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} \\
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 8\sqrt{2} \\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 2\sqrt{2} \\
\left(2^{-1}\right)^{1-x} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
2^{x-1} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
x - 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
x &= 2\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

a Los algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$

b Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$

Opgave 9

Los op: $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 \geq 110$.

Vereenvoudig de bijbehorende vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik daarna GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 210 \cdot 2{,}5^x$.

a Bereken $f(3)$ en $f(-5)$.

b Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f.

c Los op: $f(x) = 1200$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Los op: $f(x) < 2345$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Steeds een maand later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt met ongeveer 5% per maand af te nemen.

a Stel een formule op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014.

b Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?

c Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?

d Wat is het bereik van de functie bij a vanaf 6 januari 2004?

e In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x - 60$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$?

b Bereken het nulpunt van f in één decimaal nauwkeurig.

c Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?

d Los algebraïsch op $f(x) = 20$.

Opgave 13

Los algebraïsch op.

a $2^x = 2\sqrt{2}$

b $4^x = 8^{x+2}$

c $9^{2x} = \sqrt{3}$

d $2^{2x-1} = 32$

e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een vloeibaar medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in milligram van het medicijn dat na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.

c Maak duidelijk dat $A(t)$ niet exponentieel toeneemt.

d Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen? Geef je antwoord in hele minuten.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

a Herleid beide functies tot de vorm $y = b \cdot g^t + d$.
Hoe ontstaan de grafieken van f en g door transformatie uit de grafieken van de bijpassende standaardfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan als $x \leq 4$?

e De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

f De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie

$K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$

beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C.
Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
Veel mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C.

Opgave 16

Na hoeveel seconden vinden veel mensen de koffie niet meer lekker?

Opgave 17

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20{+}60{\cdot}0{,}83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet lekker meer is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie nog te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.

b Hoe kun je aan de formule zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?

c Hoe kun je aan de formule zien dat de temperatuur van de koffie daalt?

d Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0{,}83^t$ laten ontstaan door transformatie?

e Hoelang duurt het voordat de koffie de temperatuur van 21 °C bereikt?

f Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $T(t)$?

g De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan de formule van $T(t)$ zien wat de temperatuur in de woonkamer is?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van de functie $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ te krijgen uit de functie van g.

b Hoe kun je aan de formule van f zien dat de grafiek stijgt?

c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f?

d Bepaal het bereik van f.

e Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

f Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 19

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Herleid de functie g naar de vorm $g(x) = b \cdot g^x + c$.

b Geef het bereik van de functies f en g.

c Los op $f(x) < g(x)$. Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

2.4 Machtsfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsfunctie is en de karakteristieken van machtsfuncties bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met machtsfuncties oplossen;
- werken met wortelfuncties en gebroken functies als voorbeelden van machtsfuncties.

Voorkennis

- de begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig met een macht;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De standaard machtsfuncties hebben de vorm $y = x^r$. Neem eerst voor r een geheel positief getal. Bekijk de bijbehorende grafieken met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.

a Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Welke waarde heeft dat minimum?

b Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn? Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.

Bekijk de grafiek van $y = x^r$ voor negatieve gehele r.

c Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $y = x^r$ overal dalend is?

d Waarom hebben de grafieken die je bekijkt allemaal twee asymptoten? Welke twee?

Neem gebroken getallen voor r.

e Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $r = \frac{1}{2}$ en die bij $r = \frac{1}{3}$?

f Bekijk de grafiek bij $r = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

g Als r een geen geheel getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

Met GeoGebra, Desmos of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = a \cdot (x - p)^r + q$. Deze functies heten machtsfuncties.

Voor gehele positieve waarden van r krijg je ofwel grafieken met precies één minimum of maximum (als r even is), ofwel altijd stijgende of altijd dalende grafieken (als r oneven is).

De rekenregels voor machten maken dat wortelfuncties en gebroken functies vaak als machtsfunctie kunnen worden geschreven, bijvoorbeeld:

- $y = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$
  waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{-1}$ door in de x-richting met 2 te verschuiven, dan in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y-richting met 4 te verschuiven.
- $y = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$
  waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$ door in de x-richting met 2 te verschuiven, dan in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y-richting met 4 te verschuiven.

Dit zijn beide machtsfuncties, maar hun grafieken zien er zeer verschillend uit.

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. Je zegt wel dat de inverse (omgekeerde) bewerking van een machtsfunctie een machtsfunctie is met de omgekeerde exponent.

Opgave 1

Het gaat in de **Uitleg** over machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot (x-p)^r + q$. De grafieken van deze functies ontstaan door transformatie van de grafiek van de standaard machtsfunctie $y = x^r$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 0{,}5(x-3)^2 + 1$.
Welke transformaties moet je op de standaard machtsfunctie toepassen om de grafiek van f te krijgen?
Welke uiterste waarde (maximum of minimum) heeft f?

b Bekijk de grafiek van $g(x) = 0{,}5(x-3)^3 + 1$.
Heeft de grafiek van g uiterste waarden?

Bekijk de grafieken van $y = x^r$ met $r = 0,1,2,3,4,5$.

c Voor welke waarden van r heeft de grafiek uiterste waarden?

d Hoe ziet de grafiek er uit als $r = 0$? En als $r = 1$?

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

b Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welke asymptoten heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{(x+1)^2}$.

c Schrijf de formule als machtsfunctie.

d Welke asymptoten heeft de grafiek van g?

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$.

a Welk domein heeft de grafiek van f?
En welk bereik?

b Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welk domein en bereik heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

c Schrijf de formule als machtsfunctie.

d Welke asymptoten heeft de grafiek van g? En welk domein en bereik?

Theorie en voorbeelden

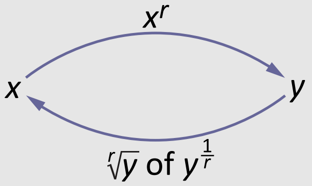
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Functies van de vorm $g(x) = a \cdot (x-p)^r + q$ heten **machtsfuncties**. Hun grafieken kunnen ontstaan uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^r$. Voor die standaard machtsfunctie geldt:

- Als r geheel, positief en even is, dan heeft de functie een minimum van 0 bij $x = 0$.
- Als r geheel, positief en oneven is, dan is de grafiek stijgend en gaat hij door (0,0).
- Als r geheel, negatief is, dan heeft de functie beide assen als asymptoten.
- Als r niet geheel is, dan zijn alleen positieve waarden van x toegestaan tenzij r een breuk met een oneven noemer is.

Veel wortelfuncties en veel gebroken functies zijn voorbeelden van machtsfuncties.



Figuur 2.1

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. De **inverse bewerking** van een machtsfunctie is een machtsfunctie met de omgekeerde exponent.

Voorbeeld 1

In een slingeruurwerk zit een gewicht dat heen en weer slingert.

De slingertijd kun je berekenen met de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is:

- T de slingertijd in s
- l de lengte van de slinger in m
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

Laat zien dat $T(l)$ een machtsfunctie is.
Bereken bij welke lengte van de slinger de slingertijd 1 s is.

Figuur 2.2

Antwoord

Herleid de formule: $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}01 \cdot l^{\frac{1}{2}}$.

Je ziet nu dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit de standaardmachtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Om te berekenen bij welke lengte de slingertijd 1 s is, moet je oplossen: $T(l) = 1$.

$2{,}01 \cdot l^{\frac{1}{2}} = 1$ geeft $l^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}50$ en dus $l \approx 0{,}50^2 \approx 0{,}25$ m.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit die van een standaard machtsfunctie.

a Welke transformatie moet je dan toepassen?

b Welk domein en bereik heeft de functie $T(l)$?

c In het voorbeeld wordt ook een vergelijking met een macht opgelost.
Laat zien dat hier een macht wordt weggewerkt door de omgekeerde macht te gebruiken.

d Bij $T = 1$ s hoort een lengte van ongeveer 0,25 m.
Wordt de slingertijd ook twee keer zo groot als de lengte twee keer zo groot wordt?

Opgave 5

De zwaartekracht is de aantrekkingskracht tussen twee massa's en is gegeven door de formule

$F = g \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Hierin is:

- F de zwaartekracht in N
- m de massa in kg
- r de afstand tussen beide massa's in m
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

Neem aan dat $m_1 = 10$ kg en $m_2 = 15$ kg.

a Laat zien dat $F(r)$ een machtsfunctie is.

b Welk domein en bereik heeft de functie $F(r)$?

c Los op in één decimaal nauwkeurig: $F(r) \geq 294$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x-4)^3 - 10$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 20$.

Beschrijf welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^3$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y_1 = x^3$. Eerst 4 verschuiven in de positieve x-richting (dus t.o.v. de y-as), dan vermenigvuldigen met 2 in de y-richting en tenslotte 10 verschuiven in de negatieve y-richting.

Om $f(x) = 20$ op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} 2(x-4)^3 - 10 &= 20 \\ 2(x-4)^3 &= 30 \\ (x-4)^3 &= 15 \\ x - 4 &= 15^{\frac{1}{3}} \\ x &= 15^{\frac{1}{3}} + 4 \end{aligned}$$

Je vindt dus $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6{,}47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x+1)^4 - 5$.

a Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^4$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.

b Los op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 3

Los op in twee decimalen nauwkeurig: $\frac{2}{(x+1)^4} > 4$.

Antwoord

Omdat $f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} = 2 \cdot (x+1)^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie.

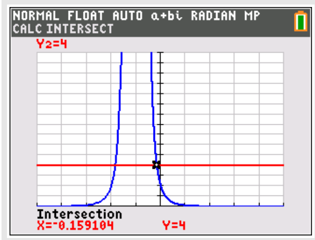
Maak eerst de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$.

Los nu op: $2 \cdot (x+1)^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = -1 + 2^{-\frac{1}{4}} \approx -0{,}159 \vee x = -1 - 2^{-\frac{1}{4}} \approx -1{,}841$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-1{,}84 < x < -1 \vee -1 < x \leq -0{,}16$.

Merk op dat je $x = -1$ uitzondert omdat voor deze waarde de functie f niet bestaat.



Figuur 2.3

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd ook rekening met het domein van de verschillende functies.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} < 27$

d $\frac{1}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?

b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

d Schrijf domein en bereik van f op.

e Los op: $f(x) < 10$.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is: $y = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

a Wat is het domein en wat is het bereik van deze machtsfunctie?

b Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Heeft de grafiek van deze functie een asymptoot?

d Los op: $2x^{\frac{1}{4}} \leq 10$

Opgave 10

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de marketingafdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro. De verkoop per dag varieert van 100 tot 1000 kg.

a Schrijf de formule zo, dat blijkt dat de verkoop per dag recht evenredig is met de macht van de prijs.

b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft? Hoe kun je dat aan de grafiek direct zien?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

a Leg uit dat de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformatie van de grafiek $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

b Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek van f te krijgen?

c Schrijf domein en bereik van f op.

d Los op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.

b Geef het domein en bereik van zowel f als g.

c Los op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien, dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf bijbehorende transformaties op.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Schrijf domein en bereik van f op.

d Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Het huidoppervlak is het buitenoppervlak van het met huid beklede lichaam. Er bestaan diverse formules voor. Eén daarvan is de formule van Dubois:

$H = 0{,}007184 \cdot M^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$

Hierin is:

- H de huidoppervlakte in m^2
- M het lichaamsgewicht in kg
- L de lichaamslengte in cm

a Bereken met deze formule de huidoppervlakte van een persoon van 1,80 m met een gewicht van 75 kg.

b Welke formule geldt voor de huidoppervlakte van iemand die 1,80 m lang is?

c Iemand van 1,80 heeft na een vreetzame winter zijn lichaamsgewicht zien toenemen van 75 kg naar 80 kg.
Met hoeveel procent is zijn huidoppervlakte toegenomen?

Het lijkt logisch dat M recht evenredig is met L^3 omdat M afhankelijk is van het lichaamsvolume.

d Laat zien dat uit dit gegeven en de gegeven formule volgt dat H recht evenredig is met L^2.

Toepassen

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kW) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:
$P = c \cdot m \cdot v^2$

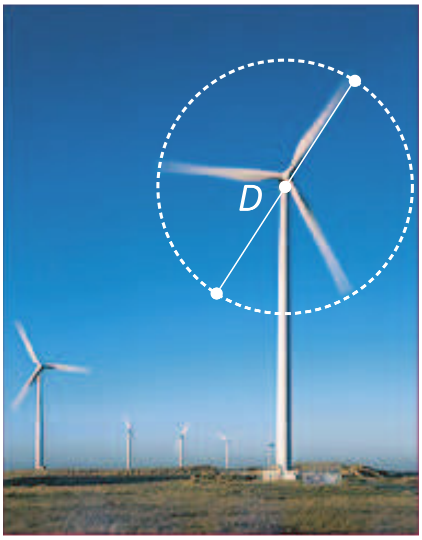
Hierin is P het vermogen in kilowatt (kW), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is in kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.



Figuur 2.4

Opgave 15

Bestudeer de gegevens van de windmolen. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Kun je een manier bedenken om dit rekenmodel voor het vermogen van een windmolen te testen?

Opgave 16

Van een bepaalde windmolen is door metingen bepaald dat $C \approx 0{,}0013$.
Deze windmolen heeft wieken met een lengte van 10 m.

a Welke formule geldt voor het vermogen dat deze windmolen genereert afhankelijk van de windsnelheid?

b Hoeveel vermogen wekt deze molen op bij een windsnelheid van 10 m/s?

c Bij welke windsnelheid bedraagt het opgewekte vermogen 300 kW?

d De windmolen is alleen in gebruik bij windsnelheden vanaf 3 tot 20 m/s.
Welke vermogens kan hij opleveren?

e Als de windsnelheid verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?

f Als de wieklengte verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?

Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties

- het domein en het bereik;
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is;
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing);
- de asymptoten (voor zover van toepassing).

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x+3)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x-4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x+1)^3 > 20$

e $5 + 2\sqrt{x-3} < 20$

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en machten** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor
- rekenregels voor machten
- exponentiële functie — transformatie
- machtsfunctie — gebroken functie — wortelfunctie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei een groeifactor bepalen en daarmee een bijpassende formule maken
- de rekenregels voor machten toepassen
- de karakteristieken van exponentiële functies uit de formule afleiden — vergelijkingen met exponentiële functies oplossen
- de karakteristieken van machtsfuncties uit de formule afleiden — gebroken functies en wortelfuncties herleiden naar machtsfuncties — vergelijkingen met machtsfuncties oplossen.

Testen

Opgave 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2010 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor g per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2010.

c Hoelang duurt het voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is als de groei zo doorgaat?

d Hoeveel passagiers waren er in 2007?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar? Rond af op drie decimalen.

f Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartaal? Rond af op drie decimalen.

Opgave 2

Geef het domein, bereik en de asymptoot van elk van deze functies.

a $f(x) = 400 + 50 \cdot 2^{x-10}$

b $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 40$

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 25$

c $300 \cdot 1{,}5^{2x-4} > 675$

Opgave 4

Een doorzichtig kunststof absorbeert een deel van het licht dat erdoorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per centimeter kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte? Rond af op een decimaal.

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen? Rond af op één decimaal.

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof? Rond af op drie decimalen.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12$.

a Schrijf de functie in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je toepassen?

c De grafiek van de exponentiële functie $h(x) = b \cdot g^x$ snijdt de grafiek van f in $A(-1, y)$ en gaat door het punt (2,5). Stel de formule op van h. Rond g af op drie decimalen en b op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6

De functies f en g zijn machtsfuncties: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6-x}}$.

a Welk domein en welk bereik heeft functie f?

b Laat zien, dat g een machtsfunctie is.
Welk domein en welk bereik heeft functie g?

c Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 7

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$ Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

Toepassen

Opgave 8: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium- 224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2010 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

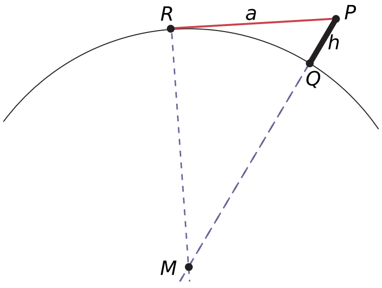
b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot er 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 9: Kijkafstand

De kijkafstand op aarde is de grootste afstand waarop je nog een punt op aarde kunt zien als je zelf op een totaal kale aarde staat.



Figuur 2.1

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).

a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

c Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

d Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl