

Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel specifiek (KS 1349)

Katern 1

Inhoud

Functies en grafieken

Formules opstellen

Context College

4Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

1 Functies en grafieken 5

- 1.1 Het begrip functie 6
- 1.2 Domein en bereik 15
- 1.3 Karakteristieken 23
- 1.4 Samengestelde functies 32
- 1.5 Transformaties 40
- 1.6 Totaalbeeld 51

2 Formules opstellen 55

- 2.1 Lineaire modellen 56
- 2.2 Kwadratische modellen 63
- 2.3 Groeimodellen 70
- 2.4 Logaritmische modellen 78
- 2.5 Totaalbeeld 86

Register 91

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Functies en grafieken

1.1	Het begrip functie	6
1.2	Domein en bereik	15
1.3	Karakteristieken	23
1.4	Samengestelde functies	32
1.5	Transformaties	40
1.6	Totaalbeeld	51

1.1 Het begrip functie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een functie en een functievoorschrift is;
- hoe je de grafiek van een functie maakt;
- grafieken van functies met de grafische rekenmachine maken;
- nulpunten berekenen van functies.

Voorkennis

- met formules werken: erin invullen en ze herschrijven;
- eenvoudige vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).

Als de wieken een lengte hebben van 10 m, dan is $P = 0,052 \cdot v^3$.

- Laat zien, hoe je aan $P = 0,052 \cdot v^3$ komt.
- Bij het tekenen van grafieken kun je gebruik maken van een grafische rekenmachine, van GeoGebra, of van Desmos. Maak de grafiek van P . Hoe ziet de grafiek van deze formule eruit?
- Voor welke waarde van v vind je $P = 100$ kW?

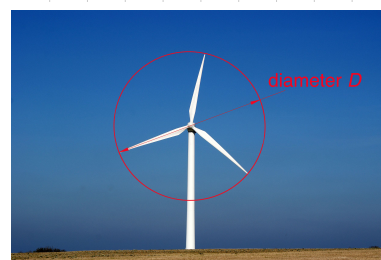
Uitleg

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m). Bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde is het vermogen $P = 0,00013 \cdot 10^3 \cdot 20^2 \approx 52$ kiloWatt.



Figuur 1.1

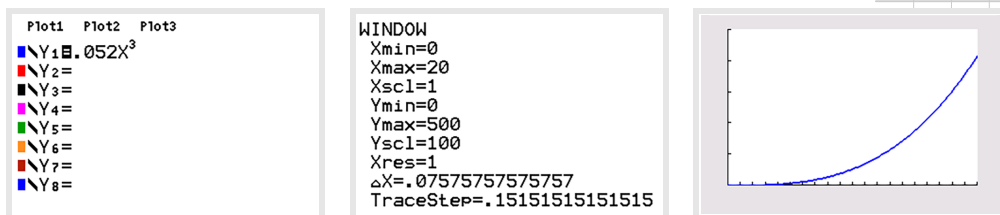


Figuur 1.2



Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt snel een tabel maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Vul dan $D = 20$ in en schrijf de formule als $P = 0,052 \cdot v^3$. Om duidelijk te maken dat P afhangt van v schrijf je $P(v) = 0,052 \cdot v^3$. Dit heet een functievoorschrift en P is een functie van v . Bij elke waarde van v hoort precies één uitkomst: bij $v = 10$ hoort $P = 52$. Dit schrijf je korter als $P(10) = 52$. En in plaats van uitkomst noem je 52 een functiewaarde.

Met een grafische rekenmachine, met GeoGebra, of met Desmos kun je bij de functie met voorschrift $P(v) = 0,052 \cdot v^3$ een tabel en een grafiek maken. Je voert de formule dan op de grafische rekenmachine in als $Y1=0.052*X^3$. Daarna stel je de afmetingen van het venster in en maak je de grafiek.



Figuur 1.3

Bestaan er ook verbanden die geen functie zijn?

Neem het verband $x^2 + y^2 = 100$. Kies je als invoerwaarde $x = 0$, dan krijg je de vergelijking $y^2 = 100$ en deze heeft als oplossing $y = 10$ of $y = -10$. Bij $x = 0$ horen dus twee y -waarden, wat bij een functie niet mag. En daarom is y nu geen functie van x .

Opgave 1

Voor de windmolen met wieken van 10 meter geldt $P(v) = 0,052v^3$. Daarin is P het vermogen in kiloWatt (kW) en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

- Bereken $P(6)$ betekent hetzelfde als:
 - Bereken de functiewaarde bij invoerwaarde $v = 6$.
 - Bereken de invoerwaarde bij functiewaarde $v = 6$.
 - Bereken de functiewaarde als $P = 6$.
 - Bereken de invoerwaarde als $P = 6$.
- Bereken $P(6)$.
- Windsnelheden van 0 tot 15 m/s komen in de kustgebieden regelmatig voor. Breng het deel van de grafiek van P dat daarbij hoort in beeld op de grafische rekenmachine. Welke waarden voor P horen daarbij?
- Voor welke waarde van v geldt: $P(v) = 300$?

Opgave 2

Bekijk de [Uitleg](#). Neem nu een windmolen met een wielengte van 20 meter.

- Welk voorschrift geldt nu voor P als functie van v ?
- Bereken $P(10)$.

- c Breng de grafiek in beeld voor windsnelheden vanaf 0 tot 20 meter per seconde. Welke vensterinstellingen heb je nodig om de complete grafiek in beeld te krijgen?
- d Bij welke windsnelheid in kilometer per uur (km/h) is het vermogen 40 kiloWatt (kW)?

Opgave 3

In de **Uitleg** zie je dat het verband $x^2 + y^2 = 100$ geen functie is. Een getallenvoorbeeld maakt dit duidelijk.

- a Geef nog een voorbeeld waaruit blijkt dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functievoorschrift is.
- b Schrijf deze formule in de vorm $y = \dots$
- c Door welke twee functievoorschriften y_1 en y_2 kun je de formule vervangen?
- d Breng de grafieken van deze twee functies in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?
- e Bereken exact $y_1(5)$ en $y_2(5)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

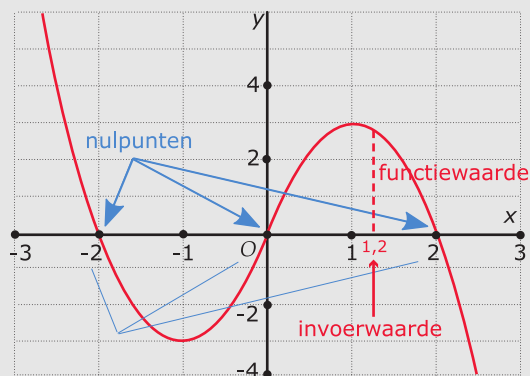
Bij een formule zoals $y = -x^3 + 4x$ vind je bij elke mogelijke waarde van x precies één waarde van y . In dat geval is y een **functie** van x met **functievoorschrift** $y(x) = -x^3 + 4x$.

Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de horizontale as, de x -as. De uitkomsten heten **functiewaarden**. De functiewaarde bij $x = 1$ is bijvoorbeeld $y(1) = -1^3 + 4 \cdot 1 = 3$. Functiewaarden komen op de y -as.

Voor $y(x)$ wordt ook wel $f(x)$ gebruikt. y is dan een functie van x die f heet. f is dus geen variabele, maar de 'naam' van een functie. In praktijksituaties gebruik je vaak letters die verwijzen naar de betekenis van de variabelen. Bijvoorbeeld t voor tijd, l voor lengte, I voor inhoud, v voor snelheid, P voor vermogen, enzovoort.

Als je grafiek wilt maken met behulp van een computerprogramma of een grafische rekenmachine, dan noem je dat het **plotten** van de grafiek. Voor de invoerwaarden wordt dan meestal een x en voor de functiewaarden een y gebruikt, bekijk het **Practicum**.

De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde (de uitkomst dus) 0 is. Een nulpunt is dus een getal. Een nulpunt wordt ook wel **nulwaarde** genoemd. Bij de gegeven functie kun je de nulpunten vinden door $y(x) = -x^3 + 4x = 0$ uit te rekenen. De nulpunten van deze functie zijn $x = 0, x = -2$ en $x = 2$.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland zijn in 2014:

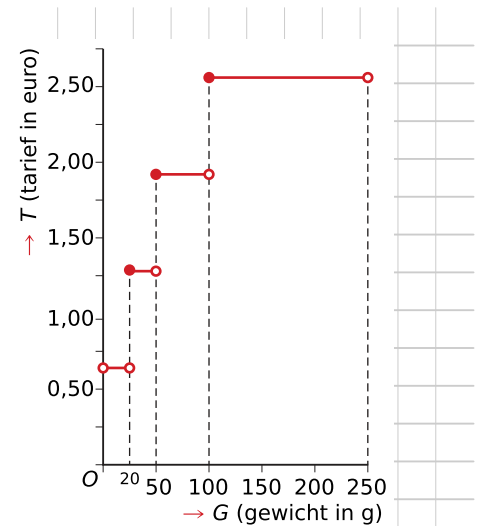
- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Is het tarief T een functie van het gewicht G ? Is het gewicht een functie van het tarief?

Antwoord

Bij elke (toegestane) waarde voor het gewicht G vind je precies één tarief T . Dus T is een functie van G . Let op dat als je een brief van 20 gram hebt je € 1,28 moet betalen en niet € 0,64. In de grafiek zie je ook een open rondje aan het einde van de lijnstukken. Dit betekent dat het einde van zo'n lijnstuk niet meedoet.

Omgekeerd is G geen functie van T . Als je het bedrag weet, kun je namelijk nog niet precies zeggen hoe zwaar het poststuk is, daar zijn meerdere mogelijkheden voor.



Figuur 1.5

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** vind je de posttarieven van 2014.

- Bepaal $T(15)$.
- Als je weet hoe zwaar een brief is, weet je voor hoeveel euro aan postzegels je erop moet plakken. Klopt dat? Licht je antwoord toe.
- Als je ziet voor hoeveel euro er aan postzegels op een brief zit, weet je hoe zwaar hij is. Klopt dat? Licht je antwoord toe.
- Welke oplossingen heeft de vergelijking: $T(G) = 1,92$?
- Is G een functie van T ? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

Welke beweringen zijn waar?

- $f(4)$ is een invoerwaarde.
- $f(10) = 60$ betekent dat het punt $(60; 10)$ op de grafiek ligt.
- $f(x) = 5$ heeft twee oplossingen.
- Bij elke waarde van x hoort precies één waarde van y .

Opgave 6

Bekijk de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

- Bereken de nulpunten van f .
- Los op: $f(x) = 5$.

Voorbeeld 2

Je ziet twee formules bij verbanden tussen x en y .

- $y = \sqrt{x}$
- $y^2 = x$

Verder zie je de grafieken bij deze verbanden gemaakt met GeoGebra.

Is y een functie van x in de formule $y = \sqrt{x}$?

Is y een functie van x in de formule $y^2 = x$?

Antwoord

Kies bijvoorbeeld: $x = 4$.

Bij formule $y = \sqrt{x}$ vind je: $y = 2$.

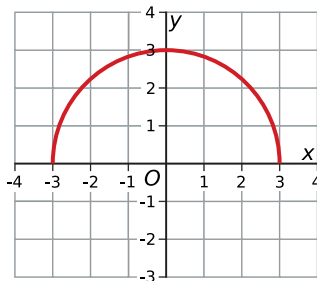
Bij formule $y^2 = x$ vind je: $y = 2$ v $y = -2$.

Bij de formule $y = \sqrt{x}$ vind je bij elke waarde voor x precies één waarde van y . Als x negatief is vind je geen waarden van y . Dus bij de formule $y = \sqrt{x}$ is y een functie van x .

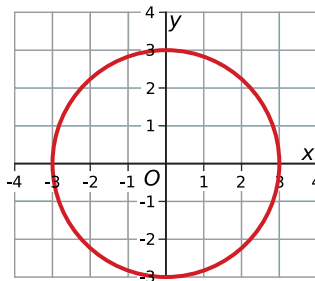
Bij de formule $y^2 = x$ vind je bij vrijwel alle x -waarden twee waarden van y . Alleen bij $x = 0$ vind je er maar één. Bij negatieve x -waarden vind je geen uitkomsten. Dus bij de formule $y^2 = x$ is y geen functie van x .

Opgave 7

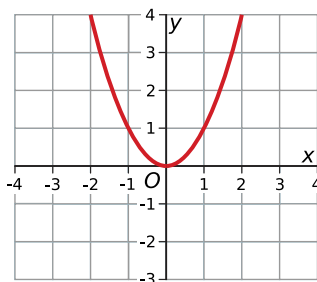
Je ziet vier grafieken. Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?



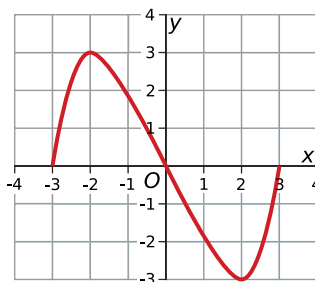
A



B

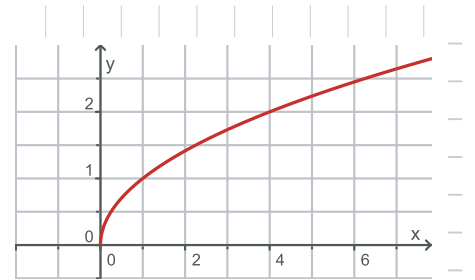


C

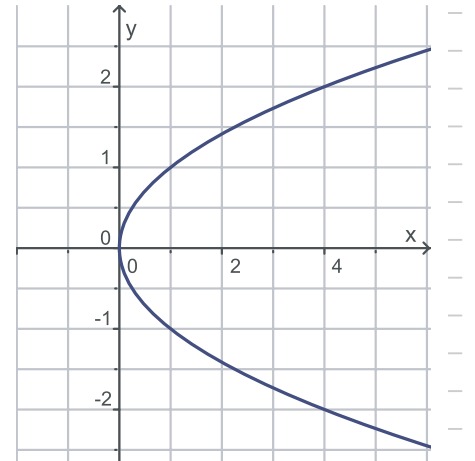


D

Figuur 1.7



$$y = \sqrt{x}$$



$$y^2 = x$$

Figuur 1.6

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - 0,1x^3$ en $g(x) = x + 10$.
Bepaal de snijpunten van de grafieken.

Antwoord

Om de snijpunten te achterhalen moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Om deze vergelijking met de grafische rekenmachine, GeoGebra, of Desmos op te lossen, moet je eerst de grafieken van beide functies in beeld brengen. Daarvoor heb je goede vensterinstellingen nodig. Je kunt gewoonweg wat proberen, maar je kunt dit ook systematisch doen.

De grafiek van g is een rechte lijn die door de punten $(-10,0)$ en $(0,10)$ gaat. Als je de nulpunten van f algebraïsch uitrekent, dan vind je:

$$10x - 0,1x^3 = 0$$

$$100x - x^3 = 0$$

$$x(100 - x^2) = 0$$

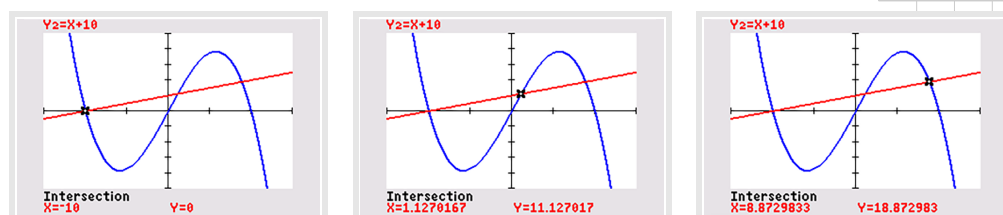
$$x(10 - x)(10 + x) = 0$$

De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Stel nu in dat x loopt van $x = -15$ tot en met $x = 15$ en bekijk de grafiek. Pas de instellingen voor y zo aan dat je alle toppen en dalen van de grafiek in beeld krijgt. Kies je als vensterinstellingen $-15 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 50$, dan krijg je beide grafieken goed in beeld (het aantal schaalstreepjes op de as kun je ook nog instellen). De drie snijpunten zijn dan ook goed in beeld. De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Je kunt nu de snijpunten laten uitrekenen. Hoe dat gaat, zie je in het [Practicum](#).

Met GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine vind je voor de x -coördinaten van de snijpunten $x = -10 \vee x \approx 1,13 \vee x \approx 8,87$.



Figuur 1.8

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 130$ en $g(x) = 3x$.

- Breng de grafieken van f en g in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Krijg je de grafieken in beeld?
- Bereken exact de nulpunten van functie f .
- De grafiek van f is een parabool. Welke top heeft deze parabool?
- Pas je vensterinstellingen zo aan, dat deze punten nog in beeld komen. Schrijf de bijbehorende instellingen op.

- e Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van f en g ?
- f Bepaal de snijpunten van beide grafieken. Bereken deze snijpunten ook algebraïsch.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $y_1 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $y_2 = -x^2 - x + 6$.

- a Bereken van beide functies de nulpunten.
- b Breng beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle snijpunten met de assen en toppen in beeld te krijgen.
- c Bepaal alle snijpunten van de grafieken van de functies. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4x + x^3$.

- a Bereken $f(3)$.
- b Bereken de x -waarden waarvoor $f(x) = 8$.
- c Bij welke vensterinstellingen krijg je de nulpunten en de toppen van de grafiek van f in beeld?
- d Hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?
- e Hoort bij elke waarde van y precies één waarde van x ? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

Opgave 11

Voor het gebruik van water betaalde je in 2013 (zonder belasting) jaarlijks € 35,00 en nog € 0,77 per verbruikte m^3 water. De jaarlijkse kosten K (in euro's) hangen af van het aantal m^3 (a) dat je verbruikt.

- a Waarom is K een functie van a ?
- b Bereken $K(100)$.
- c Stel het functievoorschrift $K(a)$ op.
- d De meeste gezinnen betalen minder dan € 500,00 per jaar voor hun waterverbruik. Hoeveel kubieke meter water gebruiken die gezinnen maximaal?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

- a Bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Breng de grafieken van f en g in beeld. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de nulpunten en toppen van beide functies goed zichtbaar zijn.
- c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.



Opgave 13

Je ziet vier functievoorschriften. Bepaal telkens eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Schrijf vervolgens de vensterinstellingen op waarmee de grafiek goed in beeld komt.

- a $f(x) = 100x - x^2$
- b $g(x) = 10x(x - 50)$
- c $h(x) = (x - 10)^2 - 1600$
- d $k(x) = 200 + 1,6x$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $y_1 = x^4 - 2x^2$ en $y_2 = -x^2 + 4x$.

- a Bereken algebraïsch van beide functies de nulpunten.
- b Breng beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle nulpunten en toppen in beeld te krijgen.
- c Bepaal alle snijpunten van de grafieken in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: De baan van een afgeschoten kogel

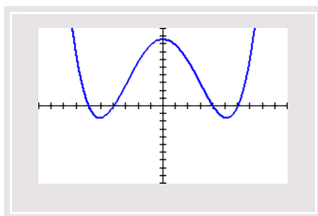
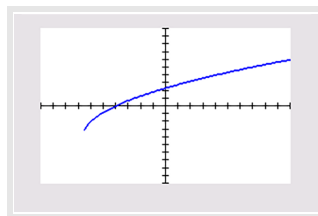
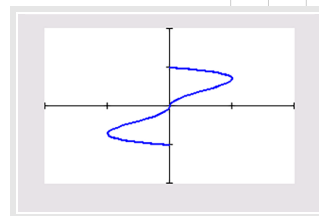
De baan van een afgeschoten kogel wordt gegeven door $h(x) = -0,01x^2 + 40x$, waarin h de hoogte in meter van de kogel boven de begane grond en x de horizontale afstand in meter tot de plaats waar de kogel is afgeschoten.

- a Bereken na hoeveel meter de kogel weer op de grond komt.
- b Breng de baan van de kogel in beeld. Schrijf de daarbij behorende vensterinstellingen op.
- c Hoe hoog komt de kogel maximaal?
- d Voor welke x -waarden is de hoogte van de kogel hoger dan 10000 meter? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Bekijk de drie grafieken.

**A****B****C****Figuur 1.9**

- a Bij welke van deze grafieken is y een functie van x ?
 - A. A
 - B. B
 - C. C



b Bij welke van deze grafieken is x een functie van y ?

- A. A
- B. B
- C. C

Opgave 17

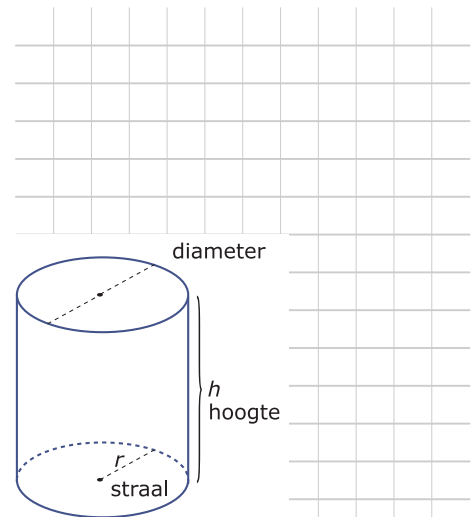
Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter. Ze passen dus precies in een kubus.

- a** Voor deze serie blikjes is V een functie van r . Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.
- b** Neem aan dat $0 < r < 20$. Breng nu de grafiek van de functie $V(r)$ in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.
- c** Bij welke afmetingen van de cilinder geldt: $V = 1000 \text{ cm}^3$?

Opgave 18

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x(x - 10)^2$ en $g(x) = 8x$.

- a** Bereken $f(5)$ en $f(-5)$.
- b** Bereken de nulpunten van f .
- c** Bepaal de snijpunten van beide grafieken.



Figuur 1.10

1.2 Domein en bereik

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip domein gebruiken voor de mogelijk invoerwaarden;
- het begrip bereik gebruiken voor de mogelijke uitkomsten.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

Verkennen

Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de ronddraaiende wieken 32 m is, dan kan het vermogen P in kW (kiloWatt) per uur berekend worden met de formule:

$$P = 0,52 \cdot v^3.$$

Hierin is v de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

- Welke waarden denk je dat v kan aannemen?
- Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.

Opgave V2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.

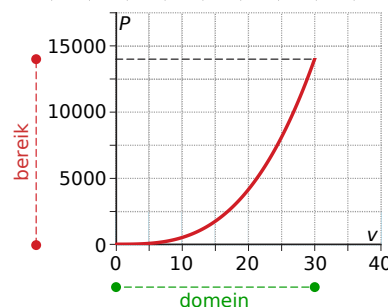
- Welke waarden kan x aannemen?
- Maak een tabel en een grafiek bij deze functie.
- Welke functiewaarden heeft deze functie?

Uitleg 1

Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kilowatt van molens met wieken van 32 meter kan worden berekend met een functievoorschrift zoals: $P(v) = 0,52v^3$.

Hierin is v de windsnelheid in m/s.

Zo'n windmolen gaat draaien vanaf windkracht 2 tot 3 en wordt stilgezet boven windkracht 10 tot 12 (afhankelijk van het type) om overbelasting te voorkomen. Dus dergelijke windmolens functioneren alleen bij windsnelheden vanaf zo'n 3 m/s tot een snelheid van maximaal zo'n 30 m/s. Dat betekent dat v alleen waarden



Figuur 1.1

vanaf 0 tot waarden kleiner of gelijk aan 30 kan aannemen. Deze waarden vormen het domein van de functie en je noteert het als interval $D_P = [0, 30]$.

Vanwege het beperkte domein van de functie $P(v)$ zullen ook de uitkomsten beperkt zijn. Het interval waarbinnen alle uitkomsten liggen heet het bereik van de functie. Ga na dat $B_P = [0, 14040]$.

Het domein heeft te maken met beperkingen van de invoervariabele en die kunnen worden ingegeven door de situatie, maar ook wel door de aard van de functie: bijvoorbeeld de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde en delen door 0 kan niet.

Opgave 1

In **Uitleg 1** vind je de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 32 meter weergeeft. Nu bekijk je een windmolen met wieken van 50 meter. Daarvoor geldt $P(v) = 1,30v^3$. Neem aan dat dit soort windmolens alle windsnelheden kleiner of gelijk aan 25 m/s aankunnen.

Geef van deze functie het domein en het bijbehorende bereik in de intervalnotatie.

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = 3 + \sqrt{x}$.

- a** Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? Licht je antwoord toe.

Het domein van deze functie wordt wel geschreven als $D_f = [0, \rightarrow)$.

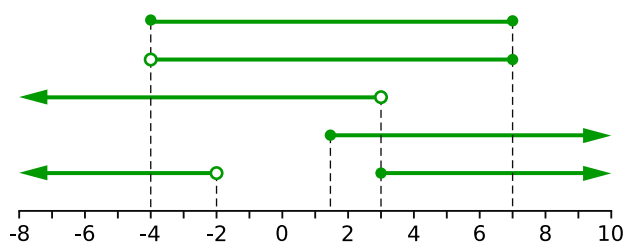
- b** Wat betekent de pijl?
- c** Waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen dan het linkerhaakje?
- d** Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?
- e** Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

Uitleg 2

Een interval is eigenlijk niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. De notatie ervan is op zich eenvoudig: je schrijft de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Er zijn alleen twee afspraken die je erbij moet onthouden.

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer - de haken $[$ en $]$ geven aan dat de grenswaarden nog bij het interval horen, de haken $($ en $)$ geven aan dat de grenswaarden niet bij het interval horen;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorend deel van de getallenlijn.



$[-4, 7]$	$-4 \leq x \leq 7$
$\langle -4, 7]$	$-4 < x \leq 7$
$\langle \leftarrow, 3 \rangle$	$x < 3$
$[1, 5; \rightarrow)$	$x \geq 1,5$
$\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup [3, \rightarrow)$	$x < -2 \vee x \geq 3$
intervalnotatie	gewone notatie

Figuur 1.2

Je ziet in de figuur het teken $\cup$. Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt.

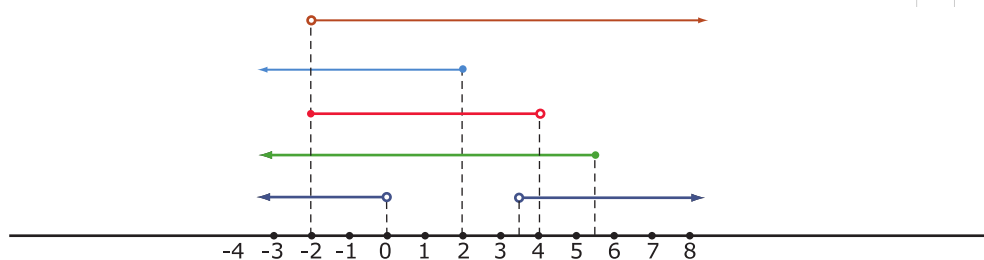
Opgave 3

Bekijk de intervallen in [Uitleg 2](#). Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2, 4]$, $[2, \rightarrow)$, $[1; 3, 5]$, $\langle \leftarrow, 0]$ en $\langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow)$.

Opgave 4

Bekijk de getekende intervallen.

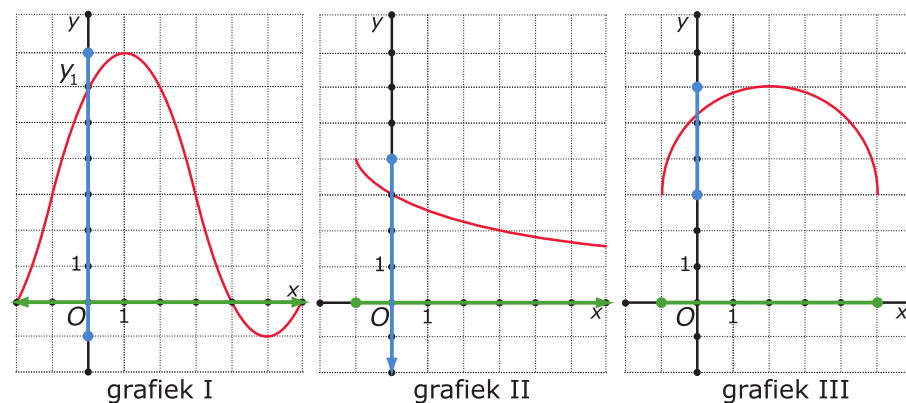


Figuur 1.3

Schrijf ze in intervalnotatie.

Opgave 5

Je ziet een aantal grafieken van functies. Het domein en het bereik van de functie is bij de grafiek aangegeven.



Figuur 1.4

Geef het domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein wordt bepaald door:

- beperkingen vanwege het functievoorschrift;
- beperkingen vanuit de situatie.

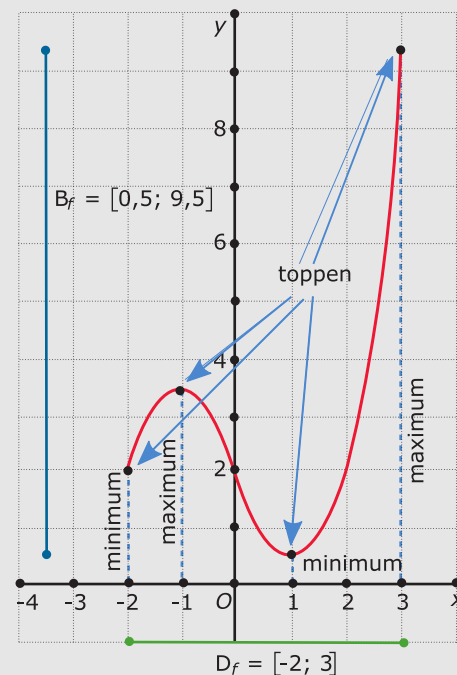
Het domein van functie f wordt aangegeven door D_f .

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie f te kunnen bepalen heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je deze toppen in beeld brengt, lees je in het **Practicum**. Het bereik van functie f wordt aangegeven door B_f .

Voor domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus.

Als je een interval opschrijft geef je vaak de beginwaarde en de eindwaarde weer tussen haken. De vorm van de haken bepaalt of de beginwaarde en de eindwaarde nog bij het interval horen. Zo wordt met het interval $[2,8)$ bedoeld: alle getallen van 2 tot 8, dus 2 behoort wel tot het interval en 8 niet. Voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje. Alle reële getallen noteer je als $\mathbb{R}$.

Bij het geven van de vensterinstelling wordt vanaf nu vaak de notatie $[-10,10] \times [-20,20]$ gebruikt als de vensterinstellingen $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$ zijn.



Figuur 1.5

Voorbeeld 1

Met de grafische rekenmachine, GeoGebra, of Desmos kun je (een deel van) de grafiek van $f(x) = \sqrt{x+2}$ goed in beeld brengen. Geef het domein en bereik van f .

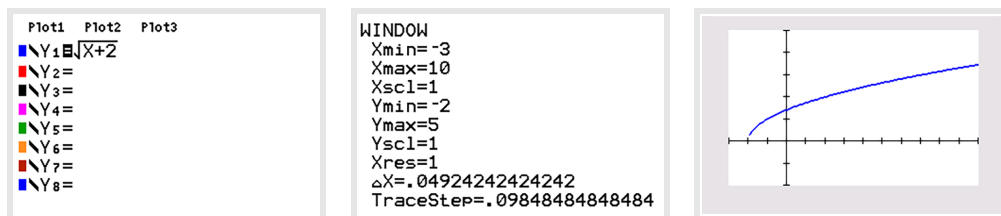
Antwoord

Je weet dat de functiewaarden groter worden naarmate je een groter getal voor x kiest. Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat $x+2 \geq 0$ en hieruit volgt dat $x \geq -2$. Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is $x = -2$. Je krijgt dan als functiewaarde: $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$.

Hier bepaalt het functievoorschrift wat domein en bereik zijn:

- de wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus: $D_f = [-2, \rightarrow)$
- de functiewaarden zijn 0 of groter, dus: $B_f = [0, \rightarrow)$

De gebruikte vensterinstellingen zijn $[-3,10] \times [-2,5]$. Hierbij geef je eerst de instellingen voor x en als tweede die voor y .



Figuur 1.6

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is nu de functie f met $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

- Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.
- Bekijk de grafiek van f . Schrijf het bereik van f op.

Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

Geef het domein en bereik van f .

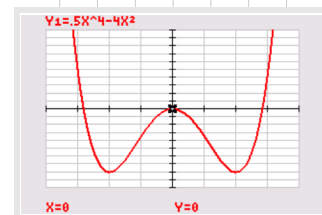
Voorbeeld 2

Je ziet (een deel van) de grafiek van $f(x) = 0,5x^4 - 4x^2$. Bepaal het domein en bereik van deze functie.

Antwoord

Bij elke waarde van x kun je x^4 en x^2 berekenen en dus ook een functiewaarde. Het domein van f is dus $D_f = \mathbb{R}$.

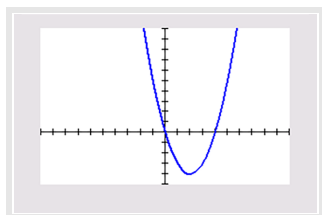
Voor het bereik moet je de grafiek goed bekijken. Er zijn drie toppen, die je gemakkelijk kunt vinden. Ga na hoe dat met de grafische rekenmachine, met GeoGebra, of Desmos gaat. Je vindt een minimum $f(-2) = -8$ en een minimum $f(2) = -8$. Verder is er een maximum $f(0) = 0$, maar dat is voor het bereik onbelangrijk. Ga na: $B_f = [-8, \rightarrow)$.



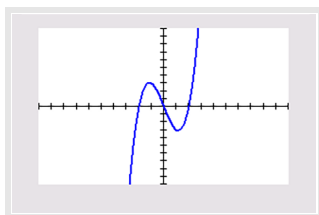
Figuur 1.7

Opgave 8

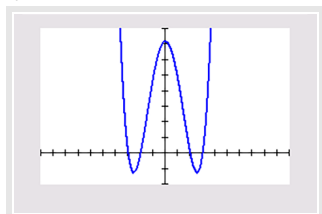
Je ziet vier grafieken van een functie. Alle toppen en nulpunten zijn in beeld.



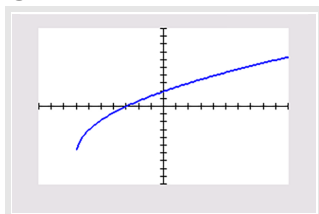
$$f(x) = x^2 - 4x$$



$$g(x) = x^3 - 4x$$



$$h(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$



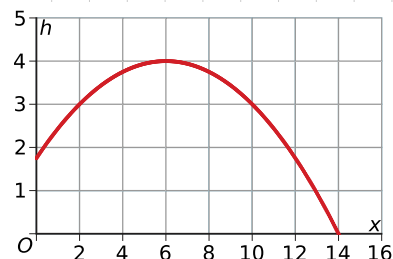
$$k(x) = 3\sqrt{x+7} - 6$$

Figuur 1.8

Schrijf het domein en bereik van deze functies op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt weggestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0,0625(x - 6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.



Figuur 1.9

- Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.
- Schrijf het domein van functie $h(x)$ op als interval.
- Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.
- Schrijf het bereik van deze functie op als interval.

Oefenen

Opgave 10

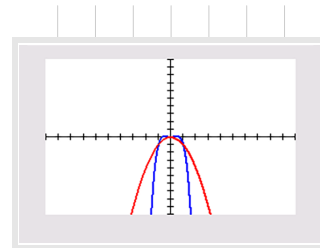
Bepaal van de volgende functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval. Geef eventuele benaderingen in twee decimalen. Gebruik waar nodig GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine.

- $f(x) = x^2 - x - 6$
- $g(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$
- $h(x) = x^3 - 6x$
- $k(x) = 1 + 2\sqrt{x}$
- $l(x) = -3 + 3\sqrt{2 + 6x}$

Opgave 11

Je ziet de grafieken van de functies f en g met $f(x) = x^2 - 2x^4$ en $g(x) = -x^2$ met de standaardinstellingen van het venster.

- a Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- b De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig als je de toppen en de nulpunten van beide functies wilt zien. Kies betere instellingen en bepaal de toppen van de grafiek van f .
- c Bepaal van beide functies het bereik.
- d Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g .

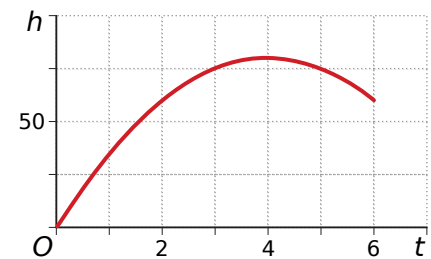


Figuur 1.10

Opgave 12

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt af van de tijd. Er geldt: $h(t) = 40t - 5t^2$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meter en t de tijd in seconden.

- a De vuurpijl spat na zes seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?
- b Geef het domein en bereik van deze functie, rekening houdend met de beschreven situatie.
- c Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?
- d Hoeveel seconden is de vuurpijl boven 40 meter hoogte?
- e Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?



Figuur 1.11

Opgave 13

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid q die hij verkoopt hangt alleen af van de prijs p die hij per exemplaar vraagt.

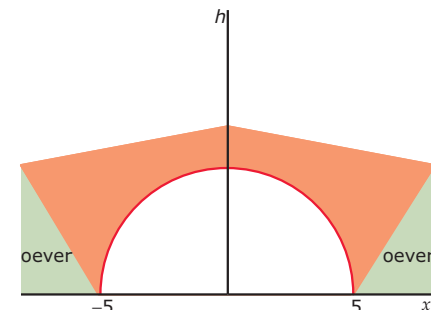
Er geldt: $q = 400 - 0,5p$.

- a Geef een formule voor de opbrengst R als functie van de prijs p .
- b Welke waarden kan p aannemen?
- c Welke waarden kan R aannemen?

Opgave 14

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (met x en h in meter). Het lijnstuk tussen beide nulpunten van deze functie stelt de rivierbodem voor.

- a In de grafiek kun je de lengte van het lijnstuk dat de rivierbodem voorstelt aflezen. Laat zien hoe je deze lengte kunt berekenen met behulp van een vergelijking.
- b Wat is het domein van deze functie?
- c Wat is het bereik van deze functie?
- d De waterhoogte van de rivier is twee meter boven de bodem. Bereken de breedte van de waterspiegel onder deze boog in centimeter nauwkeurig.



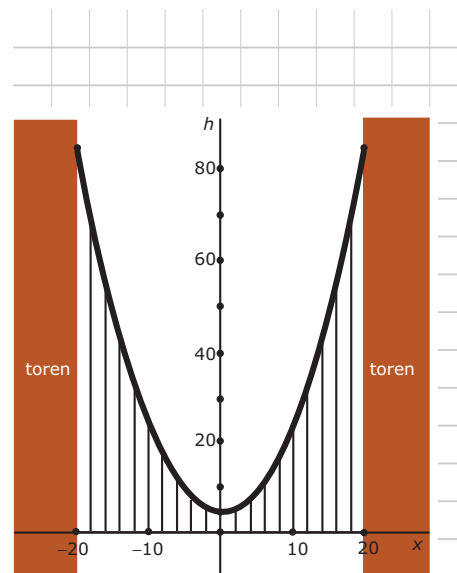
Figuur 1.12

Toepassen

Opgave 15: Hangbruggen

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens van 90 meter hoog. Er geldt: $h(x) = \frac{9}{50}x^2 + 5$.

- Laat zien dat de tuidraad bij $x = 10$ een lengte heeft van 23 meter.
- Welk domein heeft de functie h in de beschreven situatie?
- Welk bereik heeft de functie h ?
- Er zijn twee tuidraden met een lengte van 45,5 meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?



Figuur 1.13

Opgave 16: Lengte en gewicht bij vissen

Voor volwassen vissen bestaat een direct verband tussen diens gewicht G in gram en de lichaamslengte l in millimeter:

$$G = c \cdot l^3$$

Hierbij is c een constante. De waarde van deze constante hangt af van de vissoort.

Voor bijvoorbeeld de baars geldt: $G = 0,00002 \cdot l^3$

Een baars is bij de geboorte verwaarloosbaar klein en hij wordt hooguit 600 mm lang.

- Plot de grafiek die het verband tussen de lengte en het gewicht van een baars weergeeft.
- Hoe groot is lengte van een baars die 3 kg weegt?
- Welke bereik heeft deze functie?



Figuur 1.14

Testen

Opgave 17

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Geef het domein en bereik van deze functies.

- $f(x) = 4 - (x - 2)^2$
- $g(x) = 4$
- $h(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

Opgave 18

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = x^4 - 8x^2$.

- Bereken $y(3)$.
- Bereken $y(-3)$.
- Bereken algebraïsch de nulpunten van y .
- Bepaal de toppen van de grafiek van y .
- Geef het bereik van deze functie.

1.3 Karakteristieken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- op welke manier je de karakteristieken van een functie kunt bepalen;
- extremen berekenen met behulp van GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).
- Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?
- En als a dicht bij 0 komt?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

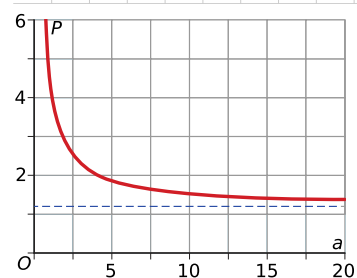
- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden km a .

Er geldt: $P = 1,20 + \frac{3,20}{a}$.

De grafiek van deze functie snijdt de horizontale as niet en heeft geen extremen. Er geldt:

- Als a (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn $P = 1,20$ komt te liggen, maar deze niet raakt. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P .
- Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter: $P(0,1) = 33,20$; $P(0,01) = 321,20$; $P(0,001) = 3201,20$; $P(0,0001) = 32001,20$; enzovoort. Het getal 0 zelf mag je echter niet voor a invullen: delen door 0 kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen, maar niet raakt. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P .



Figuur 1.1

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristieke gedrag zichtbaar wordt, net als snijpunten met de assen en toppen (als ze er zijn).

Opgave 1

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de maandelijkse kosten per kopie gegeven door: $K(a) = \frac{200}{a} + 0,075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

- Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.
- Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K ?
- Als er in een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan is 1. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

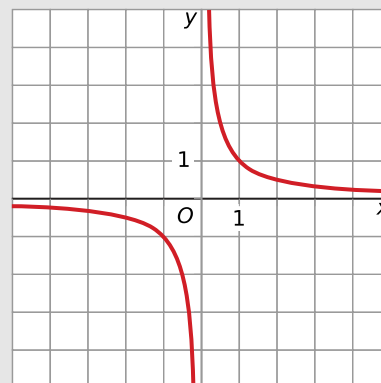
Bij grafieken komen regelmatig asymptoten voor. Dat zijn lijnen waar de grafiek steeds dichterbij komt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt. Vooral een **verticale asymptoot** kun je vaak goed in het functievoorschrift herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen veroorzaakt vaak zo'n asymptoot. Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ is de standaardfunctie van een functie met asymptoten. Deze grafiek heeft:

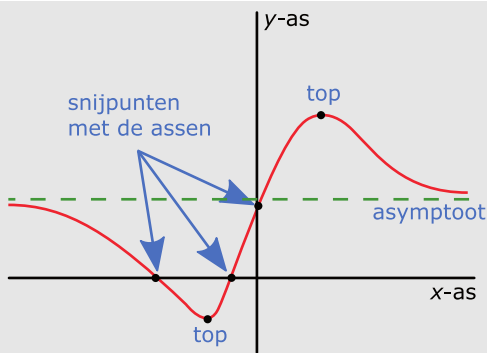
- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden naar 0;
- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

Het domein van f schrijf je als $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Het bereik van f schrijf je als $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.



Figuur 1.2



Figuur 1.3

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en bereik van f op.

Antwoord

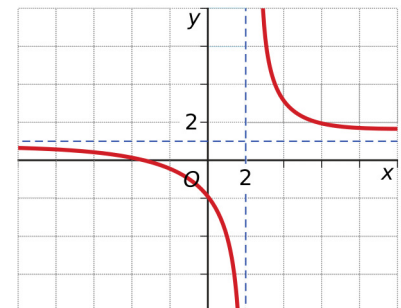
Aangezien je niet door 0 kunt delen is er iets bijzonders als $x - 2 = 0$ en dus als $x = 2$. $f(2)$ bestaat niet, maar x -waarden vlak bij 2 kun je wel invullen: $f(2,001) = 6001$ en $f(2,0001) = 60001$, enzovoort.

Verder is $f(1,999) = 5999$ en $f(1,9999) = 59999$.

De grafiek van f komt steeds dichters langs de lijn $x = 2$ te lopen. $x = 2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk. Kies x -waarden als 1000, 10000, 100000, enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden steeds dichters in de buurt van $y = 1$ liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y = 1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Het domein van f is: $\langle - , 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$. Het bereik van f is: $\langle - , 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

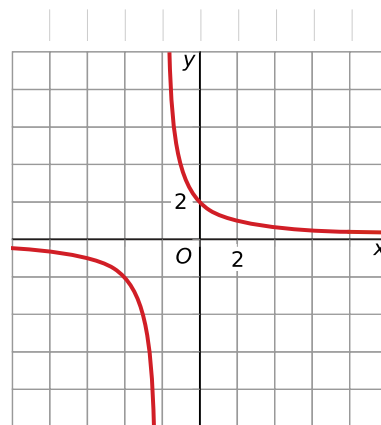


Figuur 1.4

Opgave 2

Je ziet de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{4}{x+2}$.

- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?
- Geef de vergelijking van de horizontale asymptoot.
- Geef het domein en bereik van f .



Figuur 1.5

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

- Maak de grafiek van f . Gebruik de standaardinstellingen van het venster.
- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f ?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt in de negatieve richting?
- Geef de vergelijking van de horizontale asymptoot.
- Geef het domein en bereik van f .

Voorbeeld 2

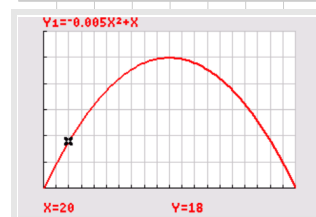
Bekijk de applet

Speelt de luchtweerstand geen rol, dan is de baan van een afgeschoten voorwerp P een zuivere parabool. Bijvoorbeeld $h(x) = -0,005x^2 + x$. Hierin is x de horizontale afstand die het voorwerp heeft afgelegd (in meter) en h de bijbehorende hoogte boven de grond (in meter). In de grafiek kun je zien hoe hoog het voorwerp maximaal komt. Bereken bij welke afstand de hoogte maximaal is en bereken hoe hoog het voorwerp maximaal komt.

Antwoord

Bepaal eerst de nulpunten door $h(x) = 0$ op te lossen. Door ontbinding in factoren vind je $x(-0,005x + 1) = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 200$.

Omdat een parabool symmetrisch is, zit het maximum bij $x = 100$. De hoogte is dus maximaal bij 100 meter. En omdat $h(100) = 50$ komt het voorwerp maximaal 50 meter hoog.



Figuur 1.6

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** gaat het over een parabolische baan met functievoorschrift $h(x) = -0,005x^2 + x$.

Je wilt zelf met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de grafiek maken.

- Je moet dan eerst goede vensterinstellingen kiezen. Waarom?
- Om het hoogste punt te kunnen bepalen, moet je de grafiek goed in beeld hebben. Waarom bereken je nu eerst de nulpunten?
- Maak vervolgens een geschikte tabel om te bekijken welke functiewaarden er allemaal voorkomen.
- Bij welke vensterinstellingen komt de hele baan in beeld?

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 100x(x - 10)(x - 20)^2$.

- Welke nulpunten heeft f ?
- Waarom heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot?
Je kunt de x -waarden van het venster instellen, de nulpunten moeten zichtbaar worden en asymptoten zijn er niet. Met de tabel bekijk je de grootte van de functiewaarden.
- Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien?
- Bepaal de extremen (maxima en minima) van deze functie in gehele getallen nauwkeurig.
- Welk bereik heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 100}$.

Hij is gemaakt met de grafische rekenmachine met het standaardvenster.

Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f .

Antwoord

Op grond van dit plaatje zou je heel verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is. En dat de grafiek een soort van afgeplatte bergparabool is. En dat is niet goed.

Eerst kijk je of er nulpunten en asymptoten zijn:

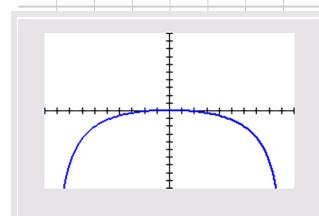
- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2 - 16}{x^2 - 100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$.

Er zijn daarom precies twee nulpunten $x = -2$ en $x = 2$.

- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$.

Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ wellicht verticale asymptoten zijn. Door getallen in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.

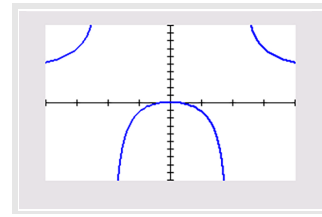
- Als je grote getallen (of grote, negatieve getallen) invult naderen de functiewaarden naar 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.



Figuur 1.7

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 10$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0,16$. (Laat je rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0,16 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.



Figuur 1.8

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{2x^2+4}{x^2-16}$.

- Plot de grafiek en geef de juiste vensterinstellingen.
- Geef de karakteristieken van f .
- Geef D_f en B_f .

Opgave 7

Gegeven is de functie g met $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

- Waarom heeft deze functie geen verticale asymptoot?
- Welk nulpunt heeft functie g ?
- Onderzoek of g een horizontale asymptoot heeft.
- Geef het domein en bereik van g .

Oefenen

Opgave 8

Geef het domein, het bereik en de asymptoten van de volgende functies.

- $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$
- $g(x) = \frac{4-x}{x}$
- $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$
- $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 9

Een voorwerp wordt vanaf de grond weggeschoten. De hoogte h van het voorwerp wordt beschreven door $h(x) = -0,1x^2 + 8x$, waarbij x de horizontale afgelegde afstand in meter van het voorwerp is.

Bereken algebraïsch de maximale hoogte van het voorwerp.



Opgave 10

De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte wordt. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f dan kun je de golflengte W (in meter) berekenen: $W = \frac{330}{f}$. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

- a Als je $[15, 30000]$ als domein kiest, welk bereik heeft W dan?
- b Vleermuizen kunnen hoogfrequente geluiden horen, soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?
- c Welke golflengte heeft dat geluid?
- d Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?
- e Welke golflengte heeft zo'n geluid?
- f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{10x}{(x-20)^2}$.

- a Bereken de nulpunt(en) van deze functie.
- b Welke asymptoten heeft deze functie?
- c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- d Bepaal het bereik van f .

Opgave 12

Voor de totale kosten (TK) bij de productie van een bepaald artikel geldt:

$TK = 100 + 0,1q^2$ waarin q het aantal exemplaren voorstelt.

- a Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks in twee decimalen nauwkeurig.
- b Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal zijn van de lijn door de punten $(0,0)$ en (q, TK) .
- c Stel een voorschrift op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GK) als functie van q .
- d Welke asymptoot heeft de functie GK ? Schrijf het domein en het bereik van GK op.

Toepassen

Opgave 13: Overlevingstijd

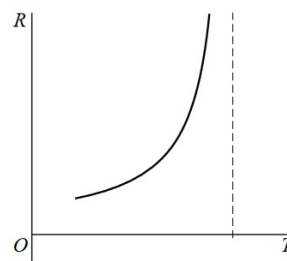
Als iemand in koud water terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C wordt de overlevingstijd genoemd.

Bij de vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. In deze situatie geldt de volgende formule:

$$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T} \text{ met } R > 0 \text{ en } T \geq 5,0$$

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in °C.

- Bij een watertemperatuur van 20 °C is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 °C. Bereken hoeveel keer zo groot.
- Bereken de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.
- Hier zie je de grafiek van T als functie van R . Bepaal de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.



Figuur 1.9

Opgave 14: Zuurstofgehalte

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule:

$$Z(t) = 200 \left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{t+10^2} \right)$$

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t . Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

- Bereken $Z(0)$.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van $Z(t)$? Welke betekenis hebben ze?
- Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?
- De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.



Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

- a Bereken $f(100)$ en $f(-100)$ in vier decimalen nauwkeurig.
- b Bereken het nulpunt van f .
- c Breng de grafiek van f in beeld.
- d Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.
- e Geef het domein en bereik van f .

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

- a Bereken het nulpunt van deze functie.
- b Welke asymptoten heeft deze functie?
- c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- d Bepaal het bereik van f . (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)

Opgave 17

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

- a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?
- b Wat is een zinvol domein voor K als functie van T ?
- c Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- d Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

1.4 Samengestelde functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- herkennen uit welke schakels (rekenstappen) het functievoorschrift van een samengestelde functie bestaat;
- het bij een functie behorende rekenschema en terugrekenschema opstellen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt luidt: Neem de snelheid in km/uur en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met $\frac{3}{4}$. Daarmee krijg je de lengte van de remweg in meter.

- a** Bereken de lengte van de remweg bij een snelheid van 60 km/h. Volg de rekenstappen van de vuistregel.
- b** Stel een formule op voor de remweg R (in m) als functie van de snelheid v in km/h.

Bij een ongeval waarbij een auto voluit moest remmen en zonder botsen tot stilstand is gekomen, meet de politie een remspoor van 90 m. Daaruit wil men kunnen berekenen hoe hoog de snelheid was waarmee de auto heeft gereden.

- c** Hoe doe je dit vanuit de gegeven vuistregel? Bereken die snelheid in km/h.
- d** Stel een formule op voor de snelheid v (in km/h) als functie van de remweg R in m.

Uitleg

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: Neem de snelheid in kilometer per uur (km/h) en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met $\frac{3}{4}$. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.



Om die remweg te berekenen werk je bij deze vuistregel met meerdere rekenstappen. Neem voor de remweg R (in meter) en voor de snelheid v (in km/h). Bekijk het rekenschema.

$$v \rightarrow \boxed{/10} \rightarrow \frac{v}{10} \rightarrow \boxed{(\dots)^2} \rightarrow \left(\frac{v}{10}\right)^2 \rightarrow \boxed{\times \frac{3}{4}} \rightarrow R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Figuur 1.1

De functie met voorschrift $R = f(v)$ is een samengestelde functie die bestaat uit drie rekenstappen, drie schakels.

Wil je omgekeerd de snelheid berekenen als je de remweg weet, dan kun je beter een functie maken van de vorm $v = \dots$

Door elke afzonderlijke schakel terug te rekenen, maak je een terugrekenschema.

$$v = 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}R} \leftarrow \boxed{\times 10} \leftarrow \sqrt{\frac{4}{3}R} \leftarrow \boxed{\sqrt{\dots}} \leftarrow \frac{4}{3}R \leftarrow \boxed{/ \frac{3}{4}} \leftarrow R$$

Figuur 1.2

Met zo'n terugrekenschema kun je de functie van de vorm $R = f(v)$ herleiden naar de vorm $v = \dots$

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt gesproken over een samengestelde functie $R = f(v) = \frac{3}{4} \left(\frac{v}{10}\right)^2$. Het gaat om het berekenen van de remweg van een auto die met een bepaalde snelheid rijdt.

- Neem voor v de waarden 0, 20, 40, ..., 140 en bereken de bijbehorende waarden van R .
- Teken de grafiek van $R = f(v)$.
- Als v alleen de waarden vanaf 0 tot kleiner of gelijk aan 140 aanneemt, welk domein en welk bereik heeft deze functie dan?

Als je vanuit een gemeten remweg de snelheid wilt berekenen, dan is een functie van de vorm $v = \dots$ handiger. Die vind je met behulp van een terugrekenschema.

- Hoe maak je zo'n terugrekenschema?
- Maak ook een grafiek van de functie $v = 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}R}$.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $y = f(x) = \sqrt{x} + 5$.

- Uit welke twee schakels bestaat f ? Geef dit weer in een rekenschema en bereken $f(4)$.
- Maak een terugrekenschema bij f en laat zien dat daar de functie $x = (y - 5)^2$ bij hoort.

Als je de grafiek van de terugrekenfunctie $x = (y - 5)^2$ wilt tekenen, komen de waarden van y , de invoerwaarden, op de horizontale x -as. Je voert hem immers in als $Y2 = (X - 5)^2$.

- Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 3

Bij delen is het terugrekenen soms lastiger.

- Laat zien, dat de functie $y = \frac{3}{x}$ als terugrekenstap $x = \frac{3}{y}$ heeft.
(De terugrekenstap is eigenlijk gelijk aan de rekenstap zelf.)
Bekijk nu de functie $P = 1,20 + \frac{3,20}{a}$ waarin a het aantal gereden km en P de prijs per km is.
- Schrijf het bijpassende rekenschema op.
- Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de bijbehorende functie van de vorm $a = \dots$ op.
- Maak de grafieken van zowel $P = \frac{3,20}{a} + 1,20$ als de bijbehorende terugrekenfunctie. Bedenk, dat zowel a als P alleen positieve getallen kunnen zijn. Zijn beide grafieken elkaars spiegelbeeld?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie die uit meerdere rekenstappen vanuit dezelfde variabele bestaat, is een **samengestelde functie**. Zo bestaat de functie $y = \sqrt{x} + 5$ uit twee rekenstappen:

$$x \longrightarrow \boxed{\sqrt{\dots}} \longrightarrow \sqrt{x} \longrightarrow \boxed{+5} \longrightarrow y = \sqrt{x} + 5$$

Figuur 1.3

Bij veel samengestelde functies kun je zo'n **rekenschema** gebruiken om terug te rekenen. Je gebruikt steeds bij elke schakel de terugrekenstap.

$$x = (y - 5)^2 \longleftarrow \boxed{(\dots)^2} \longleftarrow y - 5 \longleftarrow \boxed{-5} \longleftarrow y$$

Figuur 1.4

Zo heb je door terugrekenen $y = \sqrt{x} + 5$ herleid tot $x = (y - 5)^2$. Omdat het in de wiskunde gebruikelijk is om de invoervariabele op de horizontale as te zetten, zijn de grafieken van deze functie elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Bij het terugrekenen moet je er wel voor zorgen dat bij elke y -waarde precies één x -waarde hoort. Is dit niet het geval, dan verklein je het domein van f tot dit wel het geval is.

Bijvoorbeeld: bij de functie $f(x) = x^2$ is het terugrekenen niet eenduidig als het domein $\mathbb{R}$ is, immers als $y = 4$ dan is $x = 2 \vee x = -2$. Als je je beperkt tot het domein $[0, \rightarrow)$, dan is het terugrekenen wel eenduidig.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ met domein $[0, \rightarrow)$. Bepaal de rekenstappen van deze samengestelde functie op en herleid hem naar de vorm $x = \dots$

Antwoord

Deze functie ontstaat zo:



Figuur 1.5

Het voorschrift ervan is dus $y = \sqrt{x^2 + 9}$.

De inverse functie vind je zo:



Figuur 1.6

Het voorschrift van de inverse functie is $x = \sqrt{y^2 - 9}$.

Bij de laatste terugrekenstap moet je terugrekenen vanuit een kwadraat. En dat levert meestal twee uitkomsten op. Omdat het domein van f beperkt is tot $[0, \rightarrow)$, neem je alleen de positieve uitkomsten.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je dat functie f uit drie schakels bestaat. De volgorde waarin je de schakels zet is daarbij van belang. Bekijk de functie $g(x) = (\sqrt{x} + 9)^2$.

- Laat zien, dat g uit dezelfde schakels bestaat als f , maar in een andere volgorde.
- Herleid g naar de vorm $x = \dots$. Laat duidelijk met een terugreken-schema zien hoe je dit doet.
- Maak vervolgens beide grafieken en ga na dat ze elkaars spiegelbeeld lijken te zijn bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Opgave 5

Om functies van de vorm $y = f(x)$ te herleiden naar de vorm $x = \dots$, moet je terugrekenen. En daarvoor moet je de terugrekenstappen van allerlei basisbewerkingen kennen.

- Bij $y = \frac{1}{2}x$ wordt één basisbewerking uitgevoerd, namelijk vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Wat is dan de terugrekenbewerking?
- Hoe ziet de functie bij a er in de vorm $x = \dots$ uit?
- Welke bewerking hoort bij $y = \frac{1}{x}$?
- Welke terugrekenstap past daar bij?
- De terugrekenstap van kwadrateren is worteltrekken (en omgekeerd). Waar moet je in dit geval voor oppassen?

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3 + 4x$.

- Waarom is f geen samengestelde functie?
- Kun je deze functie herleiden naar de vorm $x = \dots$?

Voorbeeld 2

Voor een toets kun je maximaal 30 punten krijgen. Het cijfer c wordt berekend met de formule: $c = \frac{p}{30} \cdot 9 + 1$. Hierin is p het behaalde aantal punten. Je ziet dat c een lineaire functie is van p . Uit welke basisbewerkingen bestaat $c(p)$? Stel een formule op voor p als functie van c .

Antwoord

De basisbewerkingen zijn van boven naar beneden:

- delen door 30;
- vermenigvuldigen met 9;
- 1 optellen.

Om p als functie van c te kunnen schrijven, ga je terugrekenen (denk om de omgekeerde volgorde):

- 1 aftrekken;
- delen door 9;
- vermenigvuldigen met 30.

Je krijgt $p = \frac{c-1}{9} \cdot 30$.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Een andere docent hanteert voor dezelfde toets de formule $c = 1 + \frac{3p}{10}$.

- Geef bij deze formule de rekenstappen.
- Stel een bijpassende formule op voor p als functie van c .
- Laat zien dat deze formule voor c hetzelfde resultaat oplevert als die in het voorbeeld.

Als je van de functie $c(p)$ een grafiek maakt, dan moet je p vervangen door x en c vervangen door y .

- Hoe zit dat als je in dezelfde figuur de grafiek van $p(c)$ maakt?

Oefenen

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}x}$ met domein $[0, \rightarrow)$.

- Maak de grafiek van f .
- Laat zien, dat f een samengestelde functie is door een bijpassend rekenschema te geven.
- Maak een terugrekenschema en herleid daarmee de functie naar de vorm $x = \dots$



Opgave 9

Maak bij elk van de volgende functies een rekenschema (als dat mogelijk is) en een terugrekenschema. Schrijf de functies in de vorm $x = \dots$

- a $f_1(x) = \sqrt{x - 4}$
- b $f_2(x) = \sqrt{x} - 4$
- c $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ met $x \geq 0$
- d $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2$ met $x \geq -5$

Opgave 10

Voor een eenparig versnelde beweging gelden de formules

- $v(t) = v_0 + at$
- $s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Hierin is:

- t de tijd in s
 - s de afgelegde weg in m
 - v de snelheid in m/s
 - v_0 de snelheid op $t = 0$ in m/s
 - a de constante versnelling in m/s^2
- a Laat zien, dat $v(t)$ een samengestelde functie is door een rekenschema te maken.
 - b Herleid $v(t)$ naar de vorm $t = \dots$
 - c Waarom is $s(t)$ geen samengestelde functie (in deze vorm)?

Je kunt $s(t)$ schrijven in de vorm $s(t) = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2a}$.

- d Laat zien dat deze formule overeen komt met de formule $s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.
- e Herleid nu met behulp van rekenschema's $s(t)$ naar de vorm $t = \dots$

Opgave 11

Een winkelier rekent over al zijn producten 21% BTW (Belasting Toegevoegde Waarde) die hij zelf weer afdraagt aan de overheid. Dat betekent dat van elk artikel de winkelprijs w wordt berekend door de kostprijs k met 1,21 te vermenigvuldigen.

- a Stel een formule op voor w als functie van k .
- b Een klant ziet alleen de winkelprijs. De kostprijs kan hij dan berekenen met een formule van de vorm $k = c \cdot w$. Bereken de waarde van de constante c in drie decimalen nauwkeurig.
- c Hoeveel procent van de winkelprijs is de kostprijs van elk artikel?

Toepassen

Opgave 12: Omhoog werpen

Een voorwerp wordt met een beginsnelheid van 20 m/s omhoog geworpen. Met verwaarlozing van de luchtweerstand is de snelheid v in m/s een functie van de tijd t in seconde:

$$v(t) = 20 - 9,81t$$

- Bereken op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.
- Schrijf t als functie van v .
- Bereken met de formule uit b op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

Opgave 13: Slingertijd

Als je een massa aan een dunne kabel ophangt en je brengt die massa in beweging, gaat die massa heen en weer slingeren met een slingertijd van

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}$$

Hierin is t de slingertijd in seconden en l de lengte van het touw in meter (9,81 is de zwaartekrachtsconstante).

- Welke slingertijd hoort er bij een massa van 1 kilogram die slingert aan een kabel met een lengte van 2 meter? Geef je antwoord in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Iemand wil de lengte van de kabel berekenen door de slingertijd te meten. (De lengte van de kabel is de afstand van het ophangpunt tot het massamiddelpunt van het slingerende voorwerp.) Hij schrijft de formule in de vorm $l = \dots$

- Schrijf l als functie van t .
- Bereken nu met de formule uit b in twee decimalen nauwkeurig de lengte van de kabel als de slingertijd 3,2 seconden is.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x + 4)^2 + 3$.

- Maak de grafiek van f en bepaal het domein en het bereik.
- Maak een bij deze functie passend rekenschema.
- Maak een terugrekenschema en herleid daarmee de functie naar de vorm $x = \dots$
- Waarom kun je alleen terugrekenen als je het domein van f beperkt tot $[-4, \rightarrow)$?

1.5 Transformaties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van grafieken;
- grafieken van functies die door transformatie ontstaan uit een standaardfunctie afleiden uit de grafiek van die standaardfunctie.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met de belangrijkste standaardfuncties.

Verkennen

Opgave V1

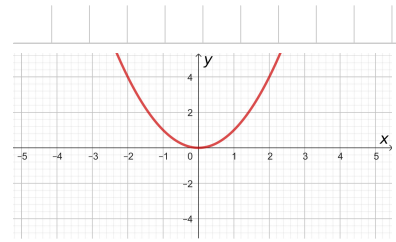
In de applet kun je de grafiek van g met de schuifbalkjes vervormen en/of verschuiven.

Bekijk de applet

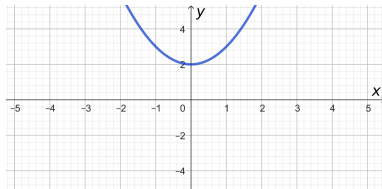
- Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_2(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_2 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_3(x) = 1,5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_3 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_4(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_4 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_5(x) = 1,5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_5 ontstaat uit die van f .

Uitleg

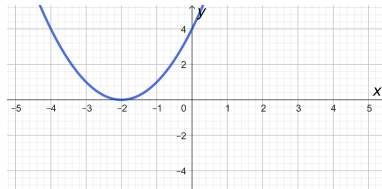
Bekijk hier de grafiek van de kwadratische functie $f(x) = x^2$ gemaakt met GeoGebra met de vensterinstellingen $[-5,5] \times [-5,5]$. Door in het functievoorschrift met een getal een vermenigvuldiging uit te voeren of een optelling te doen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Dat heet wel: de grafiek transformeren (vervormen).



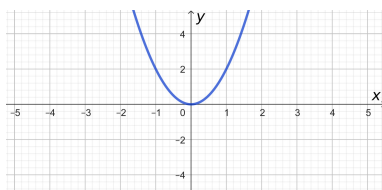
Figuur 1.1



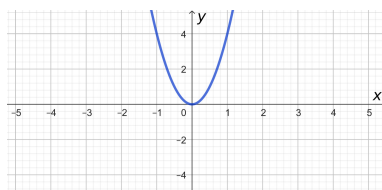
$$y = x^2 + 2$$



$$y = (x + 2)^2$$



$$y = 2 \cdot x^2$$



$$y = (2 \cdot x)^2$$

Figuur 1.2

Je moet deze vier transformaties kennen.

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door alle y -waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder omhoog van de x -as af te liggen. Dit heet 2 eenheden verschuiven ten opzichte van de x -as.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door alle x -waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links van de y -as af te liggen. Dit is hetzelfde als -2 eenheden verschuiven ten opzichte van de y -as.
- De grafiek van $y = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y -waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zo ver van de x -as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x -waarden met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zo ver van de y -as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

- a** $y_2 = 0,5 \cdot x^2$
- b** $y_3 = (x - 4)^2 + 2$



- c $y_4 = 2 - x^2$
- d $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

- a $y_2 = 3 \cdot x^3$
- b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$
- c $y_4 = 5 - 2x^3$
- d $y_5 = (0,5x)^3 + 1$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

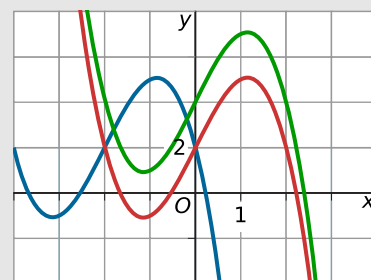
- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x -as 2 eenheden te verschuiven.
- De blauwe grafiek van $y = f(x + 2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y -as -2 eenheden te verschuiven.

Dit zijn twee **transformaties van een grafiek**. Door het optellen van een getal in het functievoorschrift verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de gegeven functie.

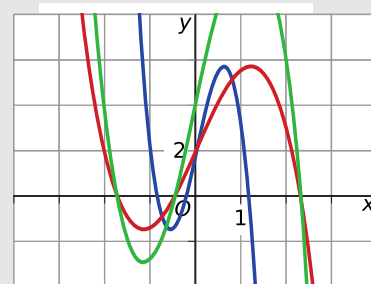
Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x -as met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Ook dit zijn twee transformaties van een grafiek. Door het vermenigvuldigen van een getal in het functievoorschrift wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging ten opzichte van een as**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.



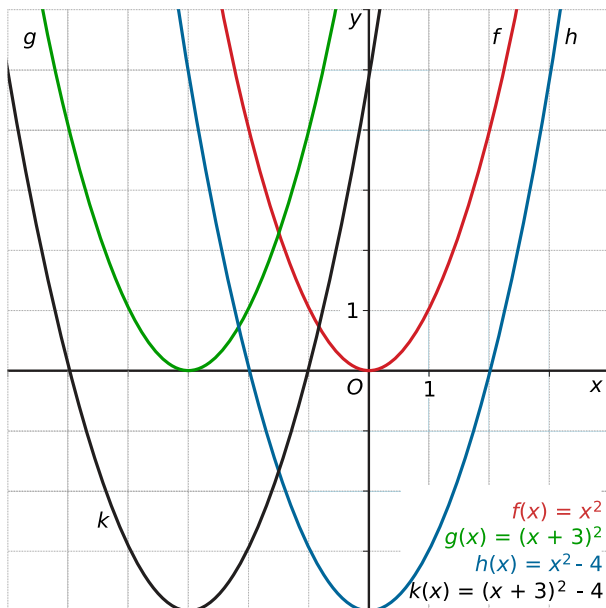
Figuur 1.3



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven



Figuur 1.5

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = f(x - 2) + 3 = (x - 2)^2 + 3$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van 2 ten opzichte van de y -as en een translatie van 3 ten opzichte van de x -as. (Je zegt ook wel 2 naar rechts en 3 omhoog verschuiven.)

De grafiek van f heeft als top $(0,0)$, de top van de grafiek van g is $(2,3)$.

In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = f(x - c) + d$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van c ten opzichte van de y -as en een translatie van d ten opzichte van de x -as.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is

$$g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2 - 2(x - 2) = (x - 2)^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 8.$$

Je vervangt dus elke x in de formule door $x - 2$. Denk daarbij om de haakjes.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

- Maak de grafiek van $g_1(x) = f(x + 2)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- Maak de grafiek van $g_2(x) = f(x) + 2$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?

Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

- Schrijf het voorschrift van g_1 op.
- Schrijf het voorschrift van g_2 op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(x+2)$ op. Plot de grafiek van g_1 . Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = f(x) - 2$ op. Plot de grafiek van g_2 . Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

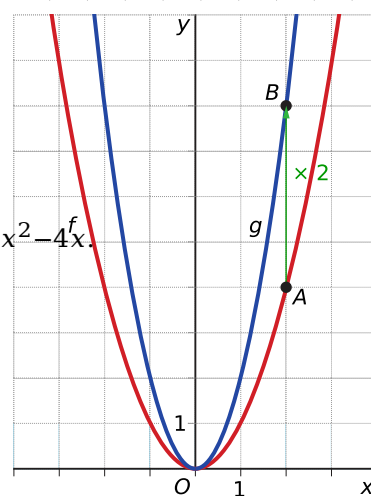
Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 2.

Je ziet in de grafiek dat de y -coördinaat van punt B gelijk is aan 8 en dat is twee keer zo groot als de y -coördinaat van punt A .

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2(x^2 - 2x) = 2x^2 - 4x$.
Je vermenigvuldigt dus de hele formule met 2.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = d \cdot f(x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met d .



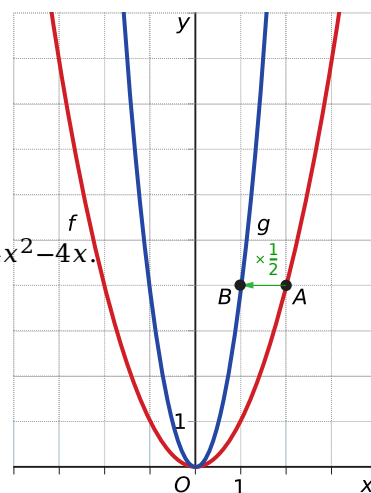
Figuur 1.6

De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x -coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x -coördinaat van punt A .

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x = 4x^2 - 4x$.
Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{c}$.



Figuur 1.7

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

- Maak de grafiek van $g_1(x) = f(2 \cdot x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- Maak de grafiek van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?



Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

- c Schrijf het voorschrift van g_1 op.
- d Geef het functievoorschrift van g_2 .
- e Oefen dit met andere functies g_1 en g_2 .

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

- a Plot de grafiek van f .
- b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(2x)$ op. Plot de grafiek van g_1 . Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van g_2 . Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Transformaties

De grafiek van $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$ ontstaat uit die van f door de vier transformaties toe te passen. Bekijk nog eens goed (met behulp van de schuifbalkjes) welke transformaties je in welke volgorde toepast.

Opgave 7

In de applet in het voorbeeld kun je alle vier de transformaties toepassen op functie f .

Geef bij elk van de functies aan welke transformaties je moet toepassen om de grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

- a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$
- b $h(x) = f(x - 4) + 2$
- c $k(x) = 2 - f(x)$
- d $l(x) = f(3x) + 2$
- e $m(x) = 2 \cdot f(3(x - 1)) + 4$

Opgave 8

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door de genoemde transformaties.

- a Ten opzichte van de x-as met -2 vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x-as toepassen.
- b Ten opzichte van de y-as met 2 vermenigvuldigen en dan een translatie van -3 ten opzichte van de x-as toepassen.
- c Ten opzichte van de y-as met 0,5 vermenigvuldigen, gevolgd door een translatie van 4 ten opzichte van de y-as.
- d Ten opzichte van de y-as een translatie van 4, dan ten opzichte van de y-as een vermenigvuldiging met 0,5 en ten slotte een translatie ten opzichte van de x-as van -2 toepassen.

Voorbeeld 4

Als je digitaal een grafiek wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen opgeven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door transformatie kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

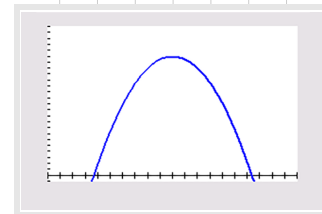
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die standaardfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y -as;
- een vermenigvuldiging van -5 ten opzichte van de x -as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x -as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30,200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met standaardvenster $[-10,10] \times [-10,10]$. Op dit venster kun je ook de beschreven transformaties toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld op $[20,40] \times [-10,250]$.



Figuur 1.8

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0,25(x - 5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door transformaties ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

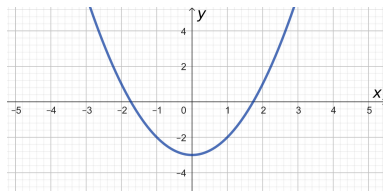
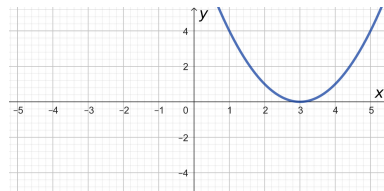
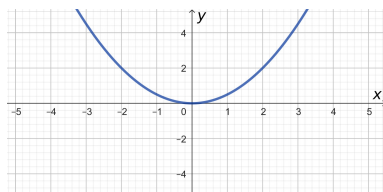
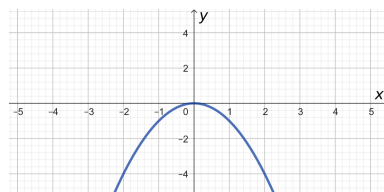
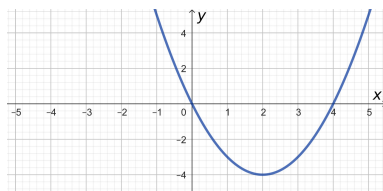
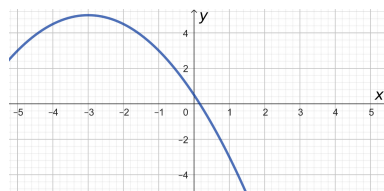
- Welke standaardfunctie is dat?
- Welke transformaties moeten er dan achtereenvolgens worden toegepast?
- Bepaal nu het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?



Opgave 10

Je ziet de grafiek van $y_1 = x^2$ met venster $[-5,5] \times [-5,5]$.

Bekijk de zes grafieken met dezelfde vensterinstellingen. Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek van y_1 . Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast. Schrijf ook het juiste functievoorschrift op.

**a****b****c****d****e****f**

Figuur 1.10

Opgave 11

De grafiek van de functie f met $f(x) = (x - 20)^2 + 200$ komt met de standaardinstellingen van het venster niet in beeld.

Leg uit hoe je door het toepassen van transformaties de vensterinstellingen in één keer zo kunt maken, dat die grafiek wel goed in beeld komt.

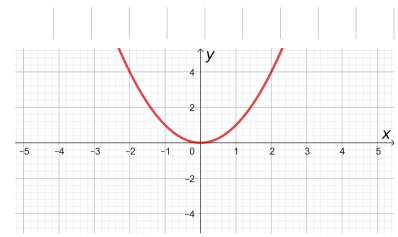
Oefenen

Opgave 12

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. De grafieken van de functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn en geef de bijbehorende formules.

a $y_2 = 0,5 \cdot f(x)$

b $y_3 = f(x - 4) + 2$



Figuur 1.9

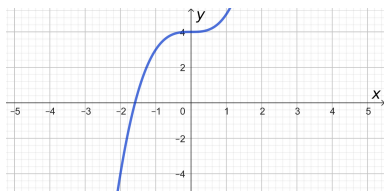
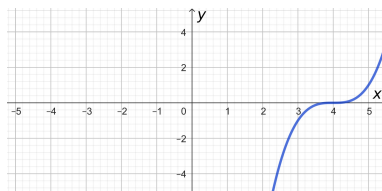
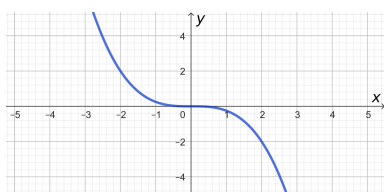
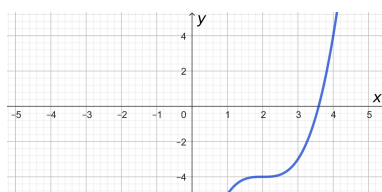


- c $y_4 = 2 - f(x)$
 d $y_5 = f(3x) - 4$

Opgave 13

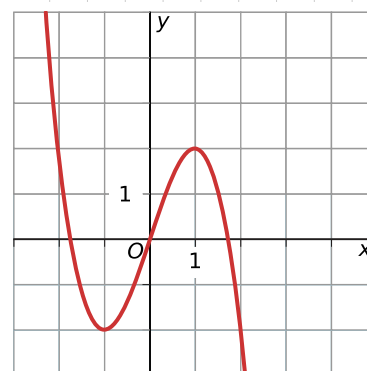
Je ziet vijf keer een grafiek met de vensterinstellingen $[-5,5] \times [-5,5]$. De standaardfunctie is $y_1 = x^3$.

De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan. Geef bij elke functie het juiste voorschrift.

**a****b****c****d****Figuur 1.12****Opgave 14**

Je ziet de grafiek van $y_1 = f(x)$. Neem de grafiek over op een roosterblad. Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke transformaties je toepast.

- a $y_2 = f(x - 2)$
 b $y_3 = -2 \cdot f(x)$
 c $y_4 = f(x) - 2$
 d $y_5 = f(2x) - 1$

**Figuur 1.13****Opgave 15**

De grafiek van $g(x) = x^2 + bx + c$ heeft als top de coördinaten $(-1,6)$. Geef aan door welke translaties de grafiek van g uit een standaardgrafiek ontstaat en bereken b en c .

Opgave 16

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.

- a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een translatie van -2 ten opzichte van de y -as en een translatie van 5 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_1 .
 b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x -as, vervolgens de translatie van 3 ten opzichte van de y -as toe te passen en tot slot nog



de translatie van -4 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_2 en het domein en bereik daarvan.

- c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as, vervolgens de translatie van 2 ten opzichte van de y -as toe te passen en tot slot nog de translatie van 4 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_3 en het domein en bereik daarvan.

Opgave 17

- a De grafiek van functie $g(x) = x^2 + 2x - 3$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties zijn dat?
- b De functie $h(x) = 2x^2 - 4x + 7$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties?

Toepassen

Opgave 18: Weggeslingerde kogel

Een weggeslingerde kogel beschrijft ten opzichte van een Oxy -assenstelsel de volgende baan: $y = -0,02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

- a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.
- b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.
- c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 19: Grafiek verschuiven

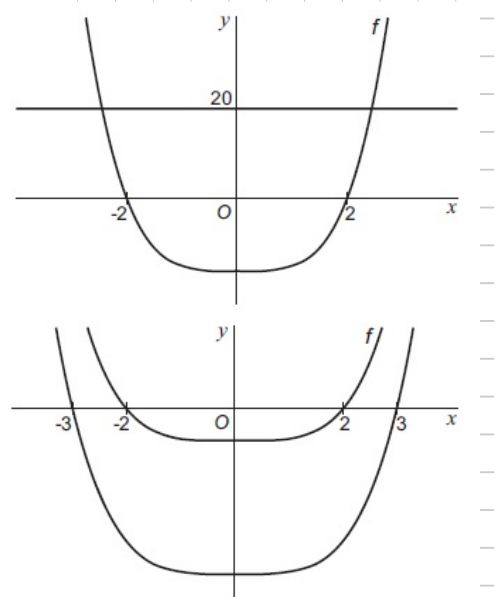
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(-2,0)$ en $(2,0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

- a Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x -as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven, veranderen de snijpunten met de x -as in de punten $(-3,0)$ en $(3,0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

- b Bereken hoeveel de grafiek van f omlaag is geschoven.

(bron: examen havo wiskunde B in 2006, tweede tijdvak)



Figuur 1.14



Testen

Opgave 20

Gegeven is een functie $y_1 = f(x)$. Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

- a $y_2 = f(x - 3)$
- b $y_3 = 0,5 \cdot f(x) + 1$
- c $y_4 = f(3x)$

Opgave 21

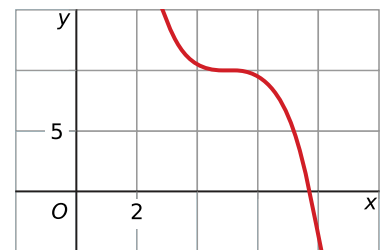
Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen, moet je weten hoe deze ontstaat door transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

- a Welke standaardfunctie is dat?
- b Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?
- c Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek van f goed in beeld komt.

Opgave 22

Je ziet de grafiek van een functie g die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = x^3$. De grafiek van g gaat door het punt $(7,6)$.

Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.



Figuur 1.15

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- asymptoten — karakteristieken (nulpunten, toppen, asymptoten)
- samengestelde functie — rekenschema — inverse functie
- transformaties — verschuiven (translatie) — lijnvermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- asymptoten bepalen — karakteristieken van een functie bepalen
- bij een functie de inverse functie bepalen
- transformaties herkennen en uitvoeren

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x + 20)$ en $g(x) = 50x^2$.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Plot de grafieken van f en g , zodat alle karakteristieken goed te zien zijn.

Schrijf op welke vensterinstellingen je hebt gebruikt.

- Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g .

Opgave 2

Bereken algebraïsch bij de functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en bereik van de functies.

- $f(x) = x^2(x^2 - 400)$
- $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

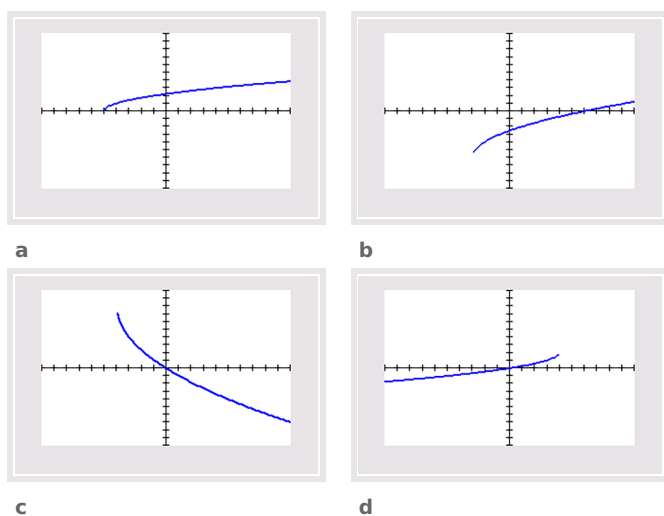
Opgave 3

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

- Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- Geef het domein en bereik van f .
- Los algebraïsch op: $y = 2$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Je ziet vier grafieken die zijn ontstaan door op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ één of meer transformaties toe te passen. Steeds zijn de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine gebruikt.



Figuur 1.1

Schrijf bij elke grafiek het juiste functievoorschrift op.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,25(x - 10)^2 - 16$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?
- Bepaal de top en de nulpunten van de grafiek van f .

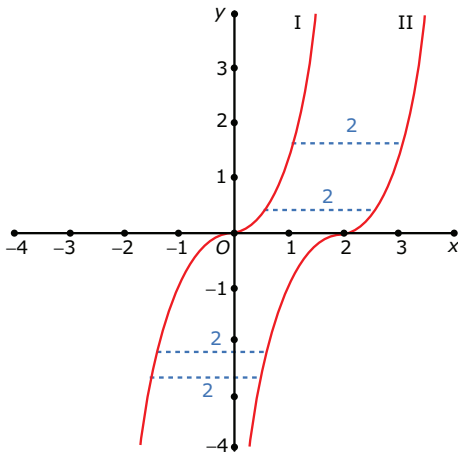
Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x + 4$ en $g(x) = -2x - 2$.

- Geef het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.
- Geef het voorschrift van f^{inv} .

Opgave 7

In de figuur zie je de grafieken I en II. I is de grafiek van $y = x^3$. Grafiek II ligt rechts van I, zodanig dat alle horizontale verbindingslijnstukken van I en II de lengte 2 hebben.



Figuur 1.2

- Geef een bij grafiek II passend functievoorschrift.
- De verticale verbindingslijnstukken van I en II variëren in lengte. Bereken de waarden van x waarvoor die lengte 26 is.
- Bereken de kortste lengte van zo'n verticaal verbindingslijnstuk.

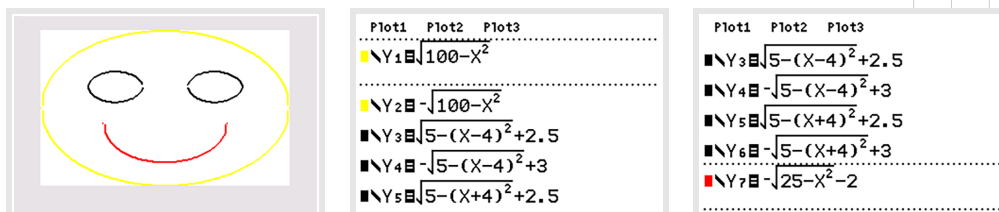
Toepassen

Opgave 8: Smiley

Door gebruik te maken van de juiste functies (en transformaties) kun je smiley's maken met grafieken. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook...

De smiley hieronder bestaat uit een groot aantal halve cirkels. Omdat voor elk punt (x, y) op een cirkel om de oorsprong $O(0, 0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om dit te kunnen invoeren zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$. Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door de straal kleiner te maken en transformaties toe te passen. Tenslotte zet je het assenstelsel even uit.

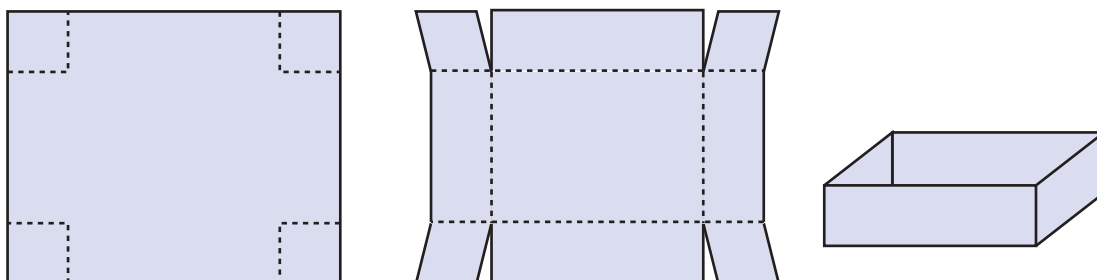
Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt. Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 1.3

Opgave 9: Kartonnen bakje

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Je knipt dan de vier hoeken even ver in, zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 1.4

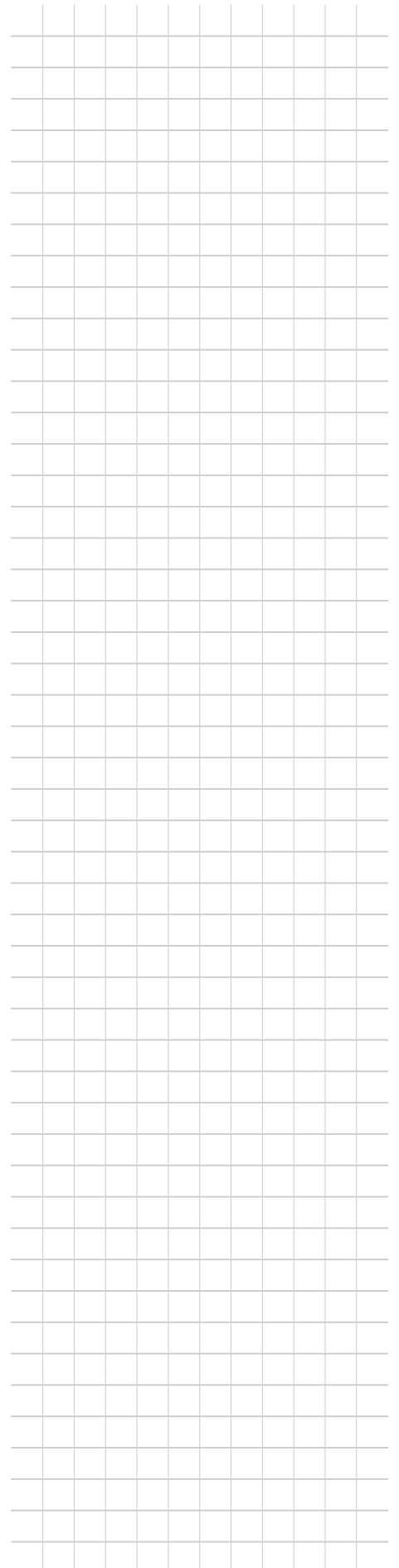
Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het bakje.

- Noem de lengte en de breedte van het ingeknipte stukje x . Stel een formule op voor $I(x)$.
- Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$.
- Hoe ver moet je het karton inknippen om een maximale inhoud te krijgen?

2

Formules opstellen

2.1	Lineaire modellen	56
2.2	Kwadratische modellen	63
2.3	Groeimodellen	70
2.4	Logaritmische modellen	78
2.5	Totaalbeeld	86



2.1 Lineaire modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- het begrip regressielijn en een formule opstellen van een regressielijn.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

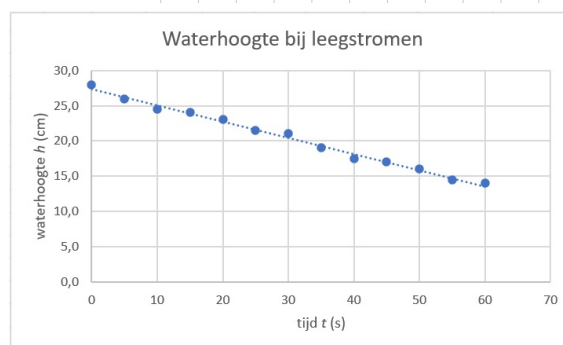
Bij het leegstromen van een bak water is de waterhoogte gemeten.

Hierin is t de tijd in seconden na het openen van de kraan onderin de bak en h de hoogte van de waterspiegel, gemeten in halve cm nauwkeurig.

- a De punten lijken op een rechte lijn te liggen. Hoe komt het dat ze er niet precies op liggen?

De rechte lijn die in de figuur is getekend, gaat door (45; 17,0) en (0; 27,5).

- b Stel een bij deze lijn passende formule op.



Figuur 2.1

Uitleg

Bij het leegstromen van een bak water is de waterhoogte gemeten.

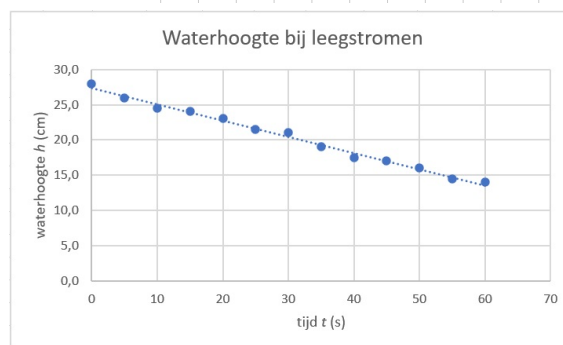
Hierin is t de tijd in seconden na het openen van de kraan onderin de bak en h de hoogte van de waterspiegel, gemeten in halve cm nauwkeurig.

Het leegstromen lijkt regelmatig te verlopen, steeds per seconde neemt de waterhoogte ongeveer met een vast bedrag af. Vanwege meetonnauwkeurigheden liggen de meetpunten niet precies op de getekende rechte lijn. Die lijn heet de 'trendlijn' of 'regressielijn' en wordt door bepaalde computerprogramma's automatisch berekend. Je kunt die lijn goed gebruiken als 'lineair model' voor het leegstromen van de bak water.

Om zelf een formule op te stellen lees je twee punten af waar de lijn doorheen gaat: (45; 17,0) en (0; 27,5).

De lineaire functie die hierbij hoort heeft de vorm $h = a \cdot t + b$.

Daarin is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{17,0 - 27,5}{45 - 0} = -0,2333...$



Figuur 2.2



Het invullen van $(0; 27,5)$ geeft $b = 27,5$.

Bij het lineaire model hoort de lineaire functie $h \approx -0,23t + 27,5$.

Hiermee kun je uitrekenen wanneer de bak leeg zal zijn.

Opgave 1

Bekijk het leegstromen van een bak water in de [Uitleg](#).

- Reken het functievoorschrift van h zelf na.
- Bereken het tijdstip waarop de bak leeg is in seconden nauwkeurig.

Opgave 2

Bekijk weer het leegstromen van een bak water in de [Uitleg](#).

Iemand anders vindt dat de rechte lijn moet gaan door $(0; 28,0)$ en $(50; 16,0)$.

- Reken het functievoorschrift van h dat zij dan krijgt.
- Bereken het tijdstip waarop de bak leeg is in seconden nauwkeurig.
- Is dit lineaire model beter dan dat in de uitleg? Of juist niet?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

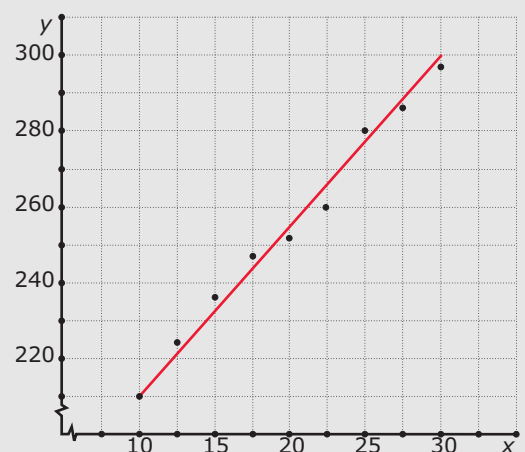
Bekijk de applet

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. Die lijn heet de **trendlijn**, of ook wel **regressielijn**. Daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten $(10, 210)$ en $(30, 300)$, dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- de richtingscoëfficiënt van de lijn is $a = \frac{300-210}{30-10} = 4,5$;
- de gevraagde formule is $y = 4,5x + b$;
- $(10, 210)$ moet op de lijn liggen, dus $210 = 4,5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4,5x + 165$.



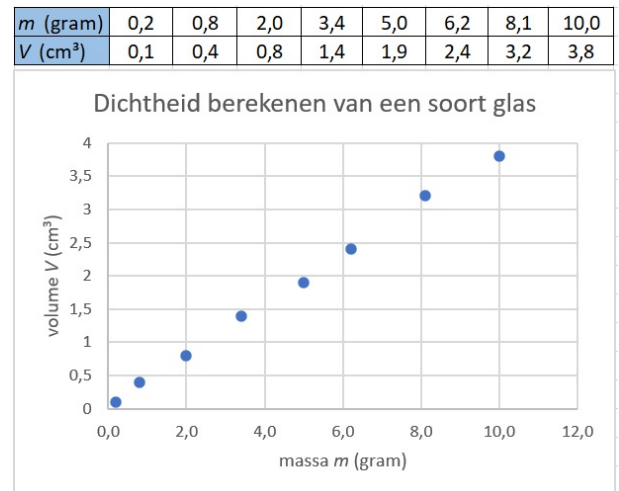
Figuur 2.3



Voorbeeld 1

Om de dichtheid van het glas van een bepaalde soort te meten, zijn er van 8 stukken van die glassoort zowel de massa m (in gram) als het volume V in cm^3 gemeten. Je ziet hier de meetgegevens.

Bereken de dichtheid ρ in gram/cm^3 .



Figuur 2.4

Antwoord

Teken een zo goed mogelijk passende regressielijn en stel daarbij een lineair model op in de vorm van een lineaire functie. De richtingscoëfficiënt van die rechte lijn bepaalt de gevraagde dichtheid.

De lijn zou natuurlijk door $(0,0)$ moeten gaan. Verder lijkt $(10,0; 3,8)$ een geschikt tweede punt.

De formule krijgt de vorm $V = a \cdot m + b$, met:

- de richtingscoëfficiënt van de lijn is $a = \frac{3,8-0}{10-0} = 0,38$;
- de gevraagde formule is $V = 0,38m + b$;
- $(0,0)$ moet op de lijn liggen, dus $b = 0$.

De formule is $V = 0,38m$.

De gevraagde dichtheid is $\rho = \frac{1}{0,38} \approx 2,63 \text{ gram}/\text{cm}^3$.

Opgave 3

Bekijk het berekenen van de dichtheid van een soort glas in **Voorbeeld 1**.

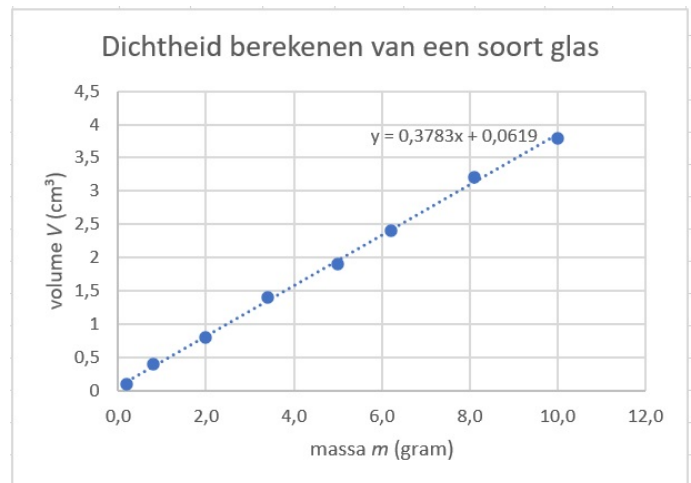
- Licht toe, dat de dichtheid van dit glas niet 0,38, maar juist $\frac{1}{0,38}$ gram/cm^3 is.
- Hoe kun je de gegevens weergeven zo, dat de richtingscoëfficiënt wel meteen ρ is?
- Laat door een berekening zien, hoe je dan ρ berekent.



Opgave 4

Bij het berekenen van de dichtheid van een soort glas in **Voorbeeld 1**, kun je ook de computer de regressielijn laten opstellen, zie figuur. Die lijn past beter bij de meetpunten.

- a Leg uit, waarom deze trendlijn toch niet correct is.
Wel zou de trendlijn door (0,0) en (6,2; 2,4) kunnen gaan.
- b Maakt dit veel verschil voor de waarde van ρ ?
- c Op hoeveel decimalen nauwkeurig kun je zo de waarde van ρ vaststellen



Figuur 2.5

Oefenen

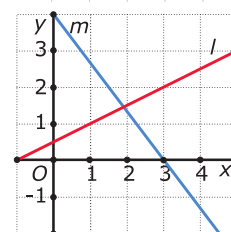
Opgave 5

Bij een verzameling meetgegevens (x, y) past een regressielijn die door de punten (120,31) en (200,23) gaat.

- a Stel een formule op die past bij deze regressielijn.
- b Bereken het nulpunt van de bijbehorende functie.

Opgave 6

Bereken het exacte snijpunt van deze twee lijnen.



Figuur 2.6

Opgave 7

Je kunt met een elektrische auto vanuit stilstand snel optrekken. Neem aan dat je de versnelling ongeveer constant kunt houden en elke seconde de snelheid v in km/h op de km-teller kunt aflezen. Je krijgt deze gegevens:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
v (km/h)	0	10	24	38	50	63	75

Tabel 2.1

- a Stel een formule op die past bij deze tabel.
- b Bereken voor welke waarde van t geldt $v = 100$ km/h.

Opgave 8

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8	4,3

Tabel 2.2

Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

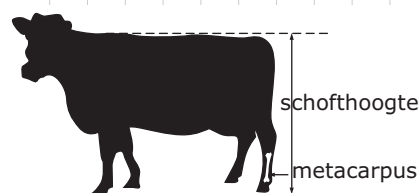
Opgave 9

Voor gassen geldt de wet van Gay-Lussac. Het volume V (in m^3) van een bepaalde hoeveelheid gas bij een bepaalde druk hangt af van de temperatuur T (in $^{\circ}\text{C}$). Er geldt: $\frac{V(T)}{T+273} = \frac{V(0)}{273}$ waarin -273°C het absolute nulpunt is en $V(0)$ het volume bij 0°C is.

- Herleid deze formule tot $V(T) = V(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{273}T\right)$.
- Leg uit dat er sprake is van een lineair model. Welke aanname moet je doen, wil dat model geldig zijn? Welk domein moet je kiezen?
- Neem $V(0) = 1 \text{ m}^3$ en breng de bijbehorende grafiek in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.
- Welk volume heeft dit gas bij kamertemperatuur (20°C)?
- Bij welke temperatuur is het volume 1,5 keer zo groot geworden ten opzichte van $V(0) = 1$?

Toepassen

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras.

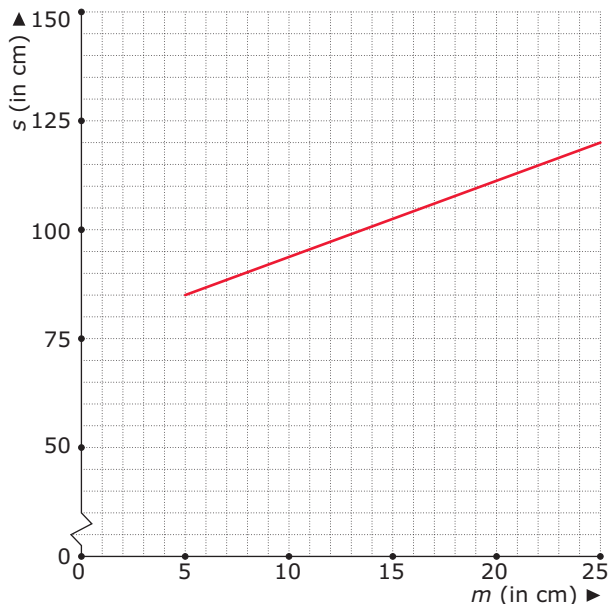


Figuur 2.7

Opgave 10

Lees het verhaal over de schofthoogte van runderen in [Toepassen](#).

Onderstaande grafiek (zie [werkblad](#)) geeft het verband tussen de schofthoogte (s) en de lengte van de metacarpus (m) voor ras A.



Figuur 2.8

- a Stel een formule op, die bij deze grafiek past.
Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$ ($5 \leq m \leq 25$).
- b Teken in de figuur de grafiek bij deze formule.
- c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.
In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.
- d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.



Opgave 11

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in onderstaande tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 2.3

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

Bereken voor beide mogelijkheden het levend gewicht.

Testen

Opgave 12

Er bestaat een verband tussen het aantal ademhalingen A dat een mens per minuut maakt, en de polsslag P in slagen per minuut. Een arts onderzoekt een groepje van vijftien mensen en krijgt de volgende meetwaarden:

A	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	30	34	36	41	44
P	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	91	94	105	116	120

Tabel 2.4

- Zet de gegevens uit de tabel in een grafiek. Zet A op de horizontale as.
- Bestaat er een lineair verband tussen A en P ? Licht je antwoord toe.
- Trek een rechte lijn door de punten $(16,57)$ en $(44,120)$. Geef deze lijn een zo goed mogelijke weergave van het verband? Licht je antwoord toe.
- Stel een formule op bij de getekende lijn.
- Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen bij 20, 24 en 28 ademhalingen per minuut. Wijken deze waarden veel af van de gemeten waarden?
- Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen van iemand met 32 ademhalingen per minuut.

2.2 Kwadratische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij een parabool door twee gegeven punten waarvan er één de top is;
- een formule opstellen bij een parabool door drie gegeven punten;
- de begrippen domein en bereik.

Voorkennis

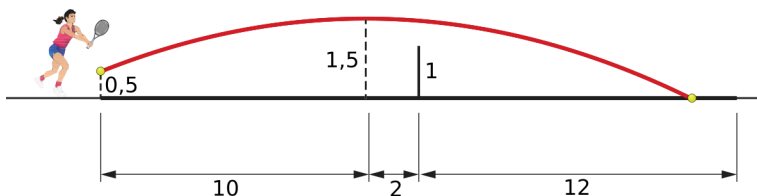
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



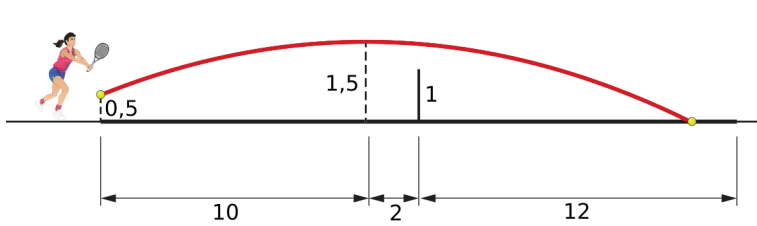
Figuur 2.1

Toon door berekening aan dat de bal in is.

Uitleg

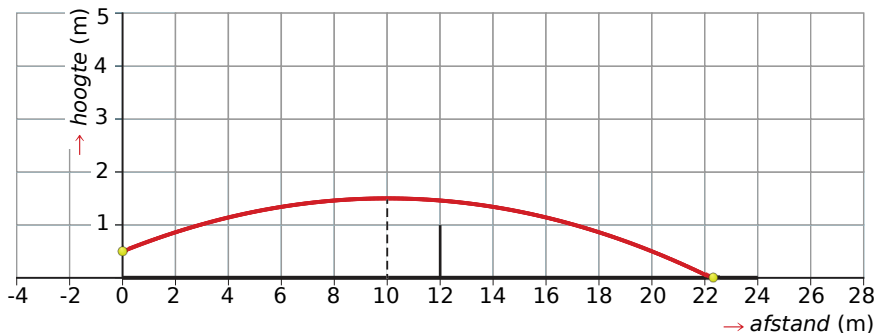
Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



Figuur 2.2

Je brengt een geschikt assenstelsel aan, zie figuur. De top van de parabool is dan $(10; 1,5)$ en de parabool moet ook door het punt $(0; 0,5)$ gaan.



Figuur 2.3

Bij deze parabool hoort een formule van de vorm

$$h = a(x - 10)^2 + 1,5.$$

Het punt $(0; 0,5)$ invullen geeft $a = -0,01$. De baan van de bal wordt (ongeveer) beschreven door de formule

$$h = -0,01(x - 10)^2 + 1,5.$$

De bal komt op de grond als $h = 0$. Ga na, dat dan $x = 10 + \sqrt{150}$. Omdat dat minder dan 24 m is, is de bal in.

In dit geval is de gevonden formule niet voor elke waarde van x geldig, maar alleen voor de waarden van x vanaf 0 tot en met $x = 10 + \sqrt{150}$. Deze waarden vormen het domein van de functie.

Het domein van f schrijf je als $[0, 10 + \sqrt{150}]$.

Alle mogelijke waarden van h vormen het bereik van de functie. Dit zijn de getallen in $[0; 1,5]$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de baan van een tennisbal beschreven met een kwadratische functie.

- De baan is alleen ongeveer parabolisch.
Waarom is hij zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?
- Laat zien dat $a = -0,01$.
- Bereken de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.



Opgave 2

Nu wordt de tennisbal geslagen vanaf 10 m voor het net op een hoogte van 0,5 m boven de grond.

De bal wordt met een hoge boog gespeeld en weer in de lengterichting.

Het hoogste punt van de baan zit boven het net op 3,50 m hoogte.

Je brengt weer een geschikt assenstelsel aan met de verticale als bij 0 m en de zwarte lijn als horizontale as.

- Stel een formule op voor de parabolische baan van de bal.
- Is de bal ook nu in?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij elke **parabool** hoort een formule van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ of $y = ax^2 + bx + c$.

Dit stelt je in staat om bij voldoende gegevens de formule van de parabool op te stellen:

- Als de top (p, q) bekend is of kan worden afgelezen gebruik je de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.
- Als er drie willekeurige punten van de parabool bekend zijn, gebruik je meestal de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- Als de twee nulpunten $(m, 0)$ en $(n, 0)$ van de parabool en één ander punt bekend zijn, kun je ook de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ gebruiken.

Je vult de gegevens in de formule in en er ontstaan één of meer vergelijkingen met tot soms wel drie variabelen.

Deze vergelijking of dit stelsel vergelijkingen los je dan op om de **parameters** a , b en c , of a , p en q , te vinden.

Voorbeeld 1

De snijpunten met de x -as van de grafiek van de kwadratische functie f zijn $(2, 0)$ en $(4, 0)$. Het snijpunt met de y -as is $(0, 6)$.

Welk functievoorschrift heeft deze functie?

Antwoord

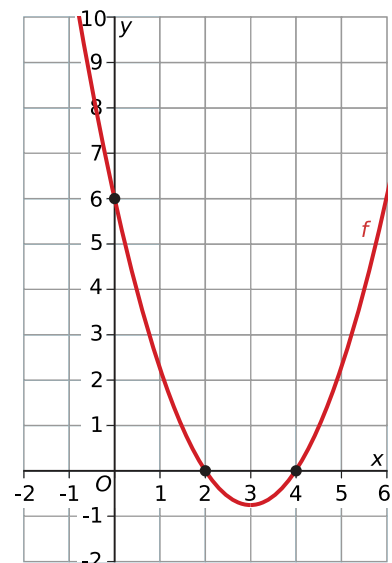
De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn midden tussen de nulpunten is, dus door het punt $(3, 0)$. Dus is $f(x) = a(x - 3)^2 + q$.

De grafiek gaat door $(0, 6)$, dus $f(0) = 6$, dit geeft $9a + q = 6$.

De grafiek gaat ook door $(2, 0)$, dus $f(2) = 0$, dit geeft $a + q = 0$.

Uit de onderste vergelijking volgt: $q = -a$. Vul dit in de bovenste vergelijking in. Je vindt dan: $9a - a = 6$. En dus: $a = 0,75$. Omdat $q = -a$ is, geldt $q = -0,75$.

Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 0,75(x - 3)^2 - 0,75$.



Figuur 2.4



Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** het functievoorschrift van een parabool door drie gegeven punten is opgesteld.

- a Deze berekening kun je ook uitvoeren door uit te gaan van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en de drie punten in te vullen. Laat dat zien.
- b Deze berekening kun je ook uitvoeren door uit te gaan van de vorm $f(x) = a(x - m)(x - n)$ en de drie punten in te vullen. Laat dat zien.

Opgave 4

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Opgave 5

Stel een formule op bij de parabool door de punten $(4,3)$, $(0,2)$ en $(6,3)$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Een parabool gaat door de punten $(1,2)$, $(4,6)$ en $(7,0)$.

Welk functievoorschrift hoort er bij deze parabool? Bepaal het bereik van de bijbehorende functie als het domein $[0,7]$ is.

Antwoord

In het algemeen heeft een parabool een bijpassend functievoorschrift van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, of van de vorm $y = ax^2 + bx + c$. Als de top bekend is, is de eerste vorm het handigst. Nu kun je ook de tweede vorm gebruiken.

Je vult elk van de drie gegeven punt in $y = ax^2 + bx + c$ in:

- punt $(1,2)$ geeft: $2 = a + b + c$
- punt $(4,6)$ geeft: $6 = 16a + 4b + c$
- punt $(7,0)$ geeft: $0 = 49a + 7b + c$

Je krijgt drie vergelijkingen met drie onbekenden. Maar door eerst de bovenste twee van elkaar af te trekken en vervolgens de onderste twee, kun je de c elimineren:

- $15a + 3b = 4$
- $33a + 3b = -6$

En dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je oplossen.

Je vindt: $a = -\frac{5}{9}$ en $b = \frac{37}{9}$.

En hiermee kun je dan ook weer c berekenen: $c = -\frac{14}{9}$.

In twee decimalen nauwkeurig krijg je het functievoorschrift $f(x) \approx -0,56x^2 + 4,11x - 1,56$.

Om het bereik te bepalen bij een domein van $[0,7]$ moet je de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ berekenen, maar ook de (in dit geval) maximale functiewaarde. Je vindt als bereik $\left[-1\frac{5}{9}; 6,05\right]$.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

- Stel zelf de drie vergelijkingen met drie onbekenden op die uit de gegevens volgen.
- Los dit stelsel vergelijkingen op.
- Welk probleem ontstaat er door het geven van een antwoord in twee decimalen nauwkeurig?
Hoe zou je dit kunnen oplossen?
- Welk probleem ontstaat als je de algemene vorm $y = a(x - p)^2 + q$ gebruikt om de formule bij de parabool te vinden?
- Bereken de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ en bereken het maximum van f . Bepaal het bereik bij het domein $[0,7]$.

Opgave 7

Je kunt in de applet de punten verplaatsen en zo oefenen met het opstellen van een formule bij een parabool door drie gegeven punten.

Doe dit, bijvoorbeeld samen met een medestudent.

Opgave 8

Neem nu de punten $(0,1)$, $(10,3)$ en $(25,0)$.

- Stel een formule op bij de parabool door die drie punten.
- Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

Oefenen

Opgave 9

Van een kwadratische functie f is de grafiek een parabool met top $(2, -5)$ en snijpunt met de y -as $(0, -3)$.

- Schrijf het functievoorschrift van f op.
- Bereken de nulpunten van f in twee decimalen nauwkeurig.
- Bepaal het bereik van f als het domein $[0, \rightarrow)$ is.

Opgave 10

De grafiek van de kwadratische functie f gaat door de punten $A(-2,5)$, $B(6,5)$ en $C(0, -1)$.

Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 11

De grafiek van een kwadratische functie f gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(-1,0)$ en $R(4,0)$.

- Stel een functievoorschrift van f op.
- Bepaal het maximum van f .

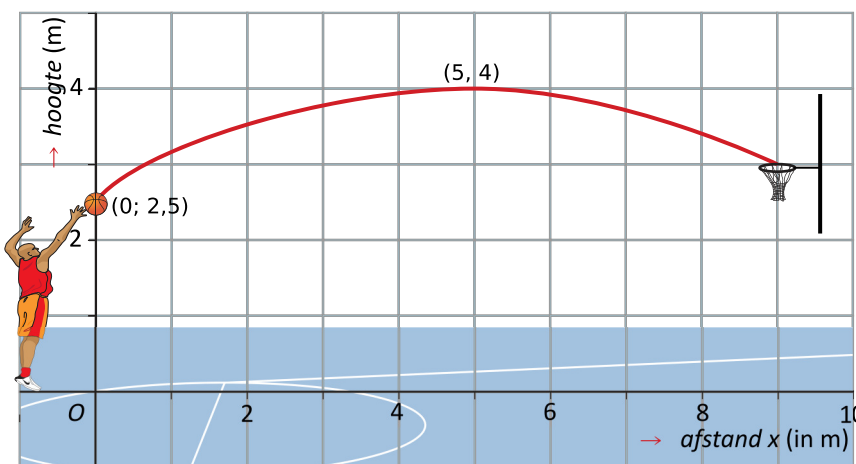
Opgave 12

De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten (1,9) en (5,5) en heeft als symmetrieas de lijn $x = 2$.

- Is de grafiek van deze kwadratische functie een berg- of een dal-parabool?
- Stel het functievoorschrift op bij de grafiek.

Opgave 13

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool. Het hoogste punt van de baan is gegeven in de figuur. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.



Figuur 2.5

- Stel een formule op voor de functie h die de baan van de bal beschrijft.
- De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.
- Schrijf het domein en het bereik op van de functie h .

Opgave 14

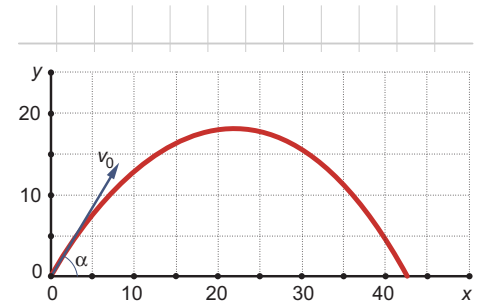
De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(2,7)$ en $R(4,12)$.

- Ga uit van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Van welke parameter (a , b , of c) weet je nu direct de waarde?
- Gebruik de andere twee punten om het functievoorschrift op te stellen.
- De lijn $y = p$ snijdt de kwadratische functie in één punt. Bereken de waarde van p .

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 2.6

Opgave 15

Bekijk de kogelbaan in de figuur en neem aan dat hij door (0,0), (30,15) en (40,5) gaat.

- Welk functievoorschrift kun je er dan bij opstellen?
- In welk punt komt deze kogel weer op de grond?
- Welk domein en welk bereik heeft deze functie?

Opgave 16

Voor de kogelbaan geldt de formule:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is:

- α de hoek waaronder de kogel wordt afgeschoten in graden
 - v_0 de beginsnelheid van de afgeschoten kogel in m/s
 - $g \approx 9,81$ de gravitatieconstante in m/s^2
- Waarom zie je dat er wordt aangenomen dat de kogel op de grond wordt afgeschoten?
 - Een kogel wordt afgeschoten met een snelheid van 300 m/s op een hoogte van 1,5 m en onder een hoek van $\alpha = 2^\circ$. Na hoeveel m komt hij op de grond terecht?

Testen

Opgave 17

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $x = 10$ en $x = 20$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt (0,30). Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 18

Een parabool gaat in een xy -assenstelsel door de punten $A(0,4)$, $B(4,6)$ en $C(8,0)$.

- Welke formule past bij deze parabool?
- Bepaal het maximum van de bijbehorende functie g .
- Bereken de snijpunten van de grafiek met de x -as.
- Het domein van g is $D_g = [0,8]$. Bepaal het bijbehorende bereik.

2.3 Groeimodellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij exponentiële groei bij twee gegeven punten;
- een formule opstellen bij groei volgens een machtsfunctie bij twee gegeven punten.

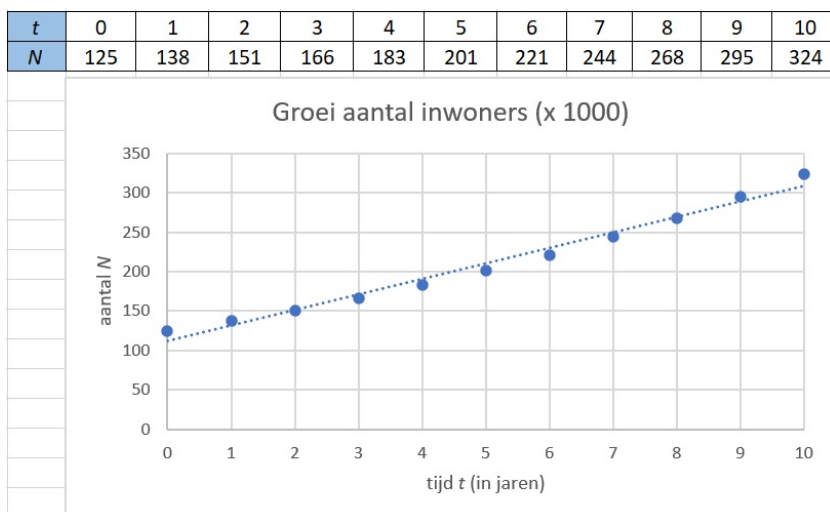
Voorkennis

- werken met exponentiële functies en hun eigenschappen;
- werken met machtsfuncties en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafiek zie je de groei van het aantal inwoners van een middelgrote stad.



Figuur 2.1

Hierin is t de tijd in jaren na 2010 en N het aantal inwoners in duizendtallen.

- a De punten lijken ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoe komt het dat ze er niet precies op liggen? Geef twee redenen.

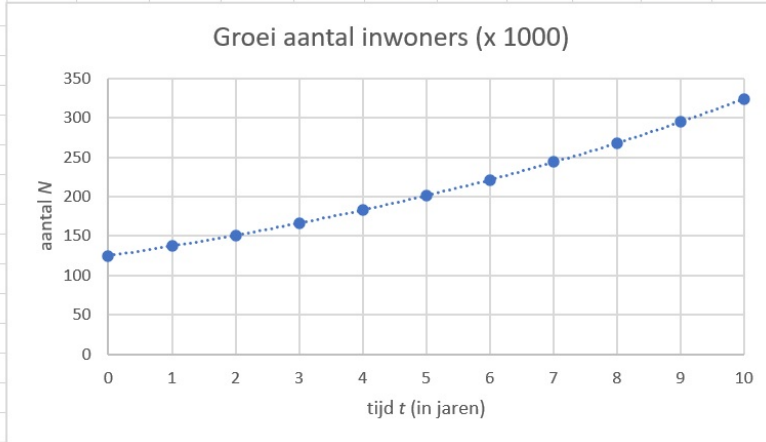
In de figuur is er door Excel een rechte lijn getrokken die de groei zo goed mogelijk beschrijft. Maar in Excel kun je ook andere trendlijnen kiezen. Bijvoorbeeld kun je kiezen voor exponentiële groei, of groei volgens een machtsfunctie.

- b Hoe zou je het aantal inwoners voor de komende jaren kunnen voorspellen?

Uitleg

In deze grafiek zie je de groei van het aantal inwoners van een middelgrote stad.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	125	138	151	166	183	201	221	244	268	295	324



Figuur 2.2

Hierin is t de tijd in jaren na 2010 en N het aantal inwoners in duizendtallen.

Om te kunnen voorspellen hoe dit aantal de komende jaren waarschijnlijk zal verlopen, is er naar een zo goed mogelijk passend groeimodel gezocht. Een groeimodel waarbij het aantal inwoners steeds sneller lijkt toe te nemen, lijkt het best te passen bij de resultaten van de afgelopen 10 jaar.

Er is gekozen voor een exponentieel groeimodel.

Daarbij hoort een formule van de vorm $N(t) = a \cdot g^t$.

Daarin is g de groeifactor per jaar en a de waarde bij $t = 0$.

Dit betekent dat $a = 125$.

Om g te berekenen, vul je één van de meetpunten in.

Kies daarvoor een punt niet te dicht bij $t = 0$, dus bijvoorbeeld (10,324).

Dan is $324 = 125 \cdot g^{10}$, zodat $g = \left(\frac{324}{125}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,10$.

En zo krijg je als exponentieel groeimodel: $N(t) \approx 125 \cdot 1,10^t$.

Maar wellicht is er nog een ander groeimodel denkbaar...

Opgave 1

Bekijk het groeien van het aantal inwoners van een middelgrote stad in de [Uitleg](#).

Er wordt een exponentieel groeimodel gebruikt.

- Laat zien, dat in dat geval inderdaad $a = N(0)$.
- Stel zelf de formule op voor $N(t)$.
- Op hoeveel inwoners moet deze stad rekenen in 2025?



Opgave 2

Bekijk het groeien van het aantal inwoners van een middelgrote stad in de **Uitleg** nog eens.

Stel je wilt een groeimodel van de vorm van de machtsfunctie $N(t) = a \cdot t^b$ proberen.

- a Laat zien, dat dit nooit kan kloppen.

Je bedenkt dat een groeimodel als $N(t) = a + b \cdot t^c$ wellicht zou kunnen.

- b Welke waarde moet a dan hebben?

- c Gebruik twee andere meetpunten om de waarden voor b en c te berekenen.

- d Laat zien, dat dit groeimodel toch minder goed past bij de gegevens.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten niet op een rechte lijn, maar is er duidelijk sprake van een toenemende of afnemende stijging, dan kun je hierbij verschillende **groeimodellen** opstellen. Bekende groeimodellen zijn:

- het **exponentiële groeimodel** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot g^t$, waarin t de tijd is.
- het **groeimodel met een machtsfunctie** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot t^b$ of $y(t) = y(0) + a \cdot t^b$, waarin t de tijd is.

De waarden voor $y(0)$, g , a en b bepaal je door meetpunten in te vullen die redelijk lijken te liggen op de grafiek die past bij de soort groei waarvan je aanneemt dat die de situatie het best beschrijft.

Uiteraard bestaan er ook nog andere groeimodellen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.

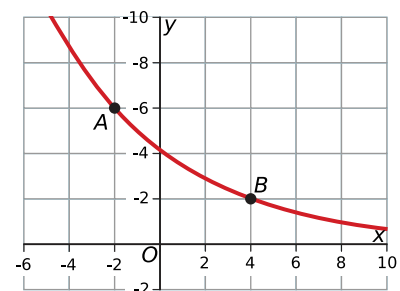
Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methodes om dit te doen:

Methode 1:

Eerst de groeifactor g bepalen.



Figuur 2.3



Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0,83$.

Nu kun je b berekenen.

$$f(4) = 2$$

$$b \cdot 0,83^4 = 2$$

$$b \cdot 0,4746 = 2$$

$$b = \frac{2}{0,4746} \approx 4,21$$

Conclusie: $f(x) \approx 4,21 \cdot 0,83^x$

Methode 2:

Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$

De laatste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$

Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $(10,200)$ en $(14,350)$.

Stel het functievoorschrift van f op. Rond g af op twee decimalen en b op een geheel getal.

Voorbeeld 2

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Stel een formule op voor Z afhankelijk van m .

Antwoord

Deze machtsfunctie heeft de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin c en p nog te berekenen zijn.

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- Paard: $Z = 85,4$ en $m = 605,0$ geeft: $85,4 = c \cdot 605,0^p$.
- Muis: $Z = 0,19$ en $m = 0,20$ geeft: $0,19 = c \cdot 0,20^p$.

Uit de eerste formule volgt: $c = \frac{85,4}{605,0^p}$.

Vul dit in de tweede formule in: $0,19 = \frac{85,4}{605,0^p} \cdot 0,20^p$ en dus

$$\frac{0,19}{85,4} = \frac{605,0^p}{0,20^p} = \left(\frac{605,0}{0,20}\right)^p$$

Daaruit volgt $449,47 = 3025^p$.

Zo'n exponentiële vergelijking los je met de GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine, of met logaritmen op. Je vindt: $p \approx 0,76$.

soort	$m(\text{kg})$	$Z(\text{L})$
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2.1

En nu vind je door invullen ook $c \approx 0,66$. Het resultaat komt dicht bij de door Kleiber gevonden formule $Z = 0,7 \cdot m^{0,75}$.

Opmerking:

Je kunt dit sneller doen door bij de twee vergelijkingen meteen beide zijden op elkaar te delen:

$$\frac{85,4}{0,19} = \frac{c \cdot 605,0^P}{c \cdot 0,20^P} \text{ geeft } 449,47 = \left(\frac{605,0}{0,20}\right)^P = 3025^P.$$

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2** over de formule van Kleiber. Er wordt een formule opgesteld voor het verband tussen het zuurstofverbruik Z in L en de massa m in kg bij zoogdieren. Het verband is recht evenredig. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de gegevens van de muis en het paard.

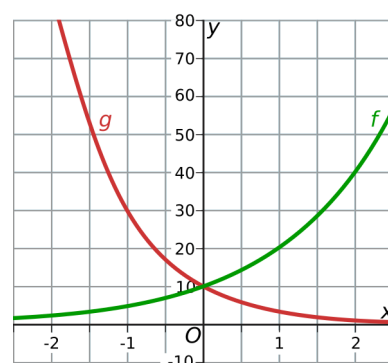
- Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?
- Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Oefenen

Opgave 5

Bekijk de grafieken van deze twee exponentiële functies. Beide grafieken gaan door $(0,10)$.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 2.4

Opgave 6

Van een exponentieel groeimodel gaat de grafiek door de punten $(5,68)$ en $(10,136)$.

De bijbehorende functie is $H(t)$, waarin H de hoeveelheid en t de tijd in minuten is.

Geef van deze functie het functievoorschrift.

Opgave 7

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. In de tabel zie je metingen steeds op hetzelfde moment 1 dag later.

Concentratie vervuiling water							
dag	0	1	2	3	4	5	6
C (mg/L)	40	32	26	21	16	13	10

Figuur 2.5

Omdat de concentratie steeds iets minder snel afneemt, wordt een exponentieel model veronderstelt.

Hierbij is C de concentratie verontreinigende stof in mg/L en t de tijd in dagen.

- Stel een bijpassend exponentieel vervalmodel op.
- Hoe groot was de concentratie 10 dagen na de eerste meting?
- Als de concentratie onder de 1 mg/L komt, mag je zeggen dat de stof verdwenen is. Wanneer is dat het geval?

Opgave 8

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud, zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Hij gebruikte H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier en ging uit van een machtsverband van de vorm $H = c \cdot G^p$. In de biologie wordt de evenredigheidsconstante c de Meeh-coëfficiënt genoemd.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 2.2

- Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse hooglander en stel de bij deze dieren passende formule op.
- Bereken met de formule de huidoppervlakte van een Schotse hooglander van 1000 kg.

Opgave 9

De politie wil vanuit een opgemeten remweg (in m) kunnen berekenen hoe hard er is gereden. Op een proeflocatie wordt er getest. Als een auto een bepaalde snelheid heeft wordt er zo hard mogelijk geremd. De remweg R wordt dan gemeten, afgerond op gehele meters. De snelheid v is in km/h. In de tabel vind je enkele gegevens. Daaruit is een formule af te leiden van de vorm $v(R) = a \cdot R^b$.

v (km/h)	R (m)
20	3
40	12
60	27
80	48
100	75
120	108

Tabel 2.3

- Laat zien hoe je deze formule kunt vinden.
Vaak wordt voor het verband tussen remweg R in m en snelheid v in km/h de formule $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.
- Laat zien, dat dit verband overeen komt met de formule die je bij a hebt gevonden.
- Na een ongeluk binnen de bebouwde kom waarbij een fietser door een auto werd aangereden, is de snelheid van de auto bepaald door de lengte van de remweg op te meten. Die remweg bleek 32 m te zijn. Bereken de snelheid waarmee deze auto reed.

Toepassen

Opgave 10: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

- Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?
- Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?
- Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014. Rond de groeifactor af op drie decimalen.
- Wat is het bereik van de functie bij c vanaf 6 januari 2014?
- In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?



Opgave 11: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden.

Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P .

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2.4

- a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G .
- b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.
- c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 12

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.

De grafiek van $H(t)$ gaat door de punten (5,12) en (9,34).

Stel een formule $H(t) = \dots$ op als

- a Er sprake is van een exponentieel groeimodel.
- b Er sprake is van een groeimodel met een machtsfunctie.

2.4 Logaritmische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij het modelleren logaritmen gebruiken;
- bij twee gegeven (meet)punten een logaritmische functie als model opstellen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies en hun eigenschappen;
- werken met machtsfuncties en hun eigenschappen;
- werken met logaritmische functies en hun eigenschappen;

Verkennen

Opgave V1

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven zeeniveau. Er geldt onder bepaalde omstandigheden:

$$p = 1013 \cdot 0,886^h$$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Deze formule betekent dat je bijvoorbeeld in een luchtballon de hoogte kunt bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. Daarvoor bestaan apps op je telefoon. Die maken gebruik van deze formule, maar in de vorm waarin h is uitgedrukt in p .

- a** Schrijf de gegeven formule zo, dat h is uitgedrukt in p .
- b** Laat zien, dat je de formule kunt schrijven in de vorm $h = a \log(p) + b$.

Benader a en b in één decimaal nauwkeurig.

Je hebt nu een logaritmisch model gevonden waarmee je de hoogte kunt berekenen door het meten van de luchtdruk.

Onder andere omstandigheden is gemeten dat op $h = 0$ geldt $p = 1030$ hPa en op $h = 0,1$ geldt $p = 980$ hPa.

- c** Hoe kun je in dit geval een formule opstellen van de vorm $h = a \log(p) + b$?

Uitleg

De luchtdruk p (in hectopascal) hangt af van de hoogte h (in km) boven zeeniveau. Er geldt onder bepaalde omstandigheden:

$$p = 1013 \cdot 0,886^h$$

In een luchtballon kun je hiermee de hoogte berekenen door de luchtdruk te meten.

Je schrijft dan de formule liever zo: $h = 0,886 \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

En dit kun je herleiden tot: $h \approx -19,0 \log(p) + 57,2$.

Dit is een 'logaritmisch model' voor de hoogte h afhankelijk van de luchtdruk p .

Een model van de vorm $h = a \log(p) + b$ kun je ook opstellen vanuit twee metingen, zoals:

- op $h = 0$ km geldt $p = 1013$ hPa;
- op $h = 0,5$ km geldt $p = 953,5$ hPa.

Door deze twee gegevens in de vullen, kun je de waarden van a en b berekenen.

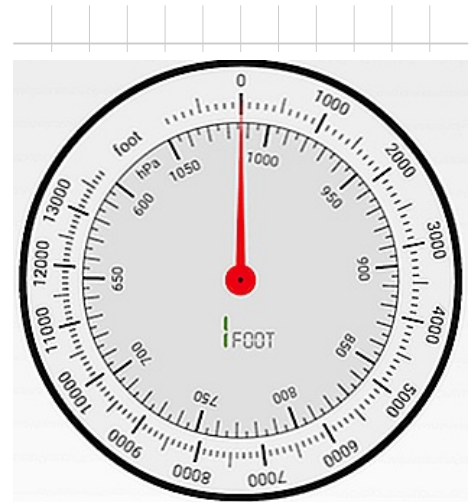
Opgave 1

Bekijk het logaritmisch model voor de hoogte afhankelijk van de luchtdruk in de **Uitleg**.

- Laat zien, dat hoe je de gegeven formule kunt herleiden tot $h \approx -19,0 \log(p) + 57,2$ als je dat bij **Verkennen V1** nog niet hebt gedaan.
- Bereken de hoogte in een luchtballon als je een luchtdruk van 800 hPa meet.
- In de uitleg zie je een plaatje van een app die de hoogte geeft afhankelijk van de luchtdruk. Leg uit dat de positie van de wijzer overeen komt met dit groeimodel.
- In die figuur is de hoogte gegeven in 'foot' en $1 \text{ ft} = 30,48 \text{ cm}$. Pas de formule daarop aan.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt ook beschreven hoe je een logaritmisch model van de vorm $h = a \log(p) + b$ kunt opstellen bij gegeven metingen. Laat zien, hoe dat doet.



Figuur 2.1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In sommige rekenmodellen komen logaritmen voor. Dat is het geval als:

- de bijbehorende functie de vorm $y = a \cdot g^{\log(bx + c)} + d$ heeft. Vaak is dan het grondtal $g = 10$ en meestal zijn er minder parameters dan a, b, c, d .
- op de verticale as $\log(y)$ in plaats van y wordt uitgezet, of op de horizontale as $\log(x)$ in plaats van x wordt uitgezet, of beide tegelijk het geval is.

Je hebt daarbij de **rekenregels voor logaritmen** nodig. Die rekenregels zijn:

Rekenregels voor logaritmen	
$x = g^{\log(y)}$ is gelijkwaardig met $g^x = y$ met $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$	$g^{\log(a)} + g^{\log(b)} = g^{\log(a \cdot b)}$
$g^{\log(g^x)} = x$ en $g^{g^{\log(y)}} = y$	$g^{\log(a)} - g^{\log(b)} = g^{\log\left(\frac{a}{b}\right)}$
$g^{\log(a)} = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ (overgaan naar grondtal 10)	$p \cdot g^{\log(a)} = g^{\log(a^p)}$

Tabel 2.1

Voorbeeld 1

De filmgevoeligheid van een filmrol, fotorolletje of digitale camera wordt uitgedrukt in een getal, waarvoor een aantal normen worden gebruikt. De gevoeligheidsnormen ISO/ASA (International Organization for Standardization / American Standard Association) en DIN (Deutsches Institut für Normung) berusten op de hoeveelheid licht die nodig is om de zwakste impressie van licht op de fotografische film te doen ontstaan. Een verdubbeling van de ISO/ASA waarde betekent dat de film half zoveel licht nodig heeft om een vergelijkbaar bruikbaar beeld te geven. Tegenwoordig (2011) in de handel verkrijgbare filmsoorten hebben meestal een gevoeligheid van 200 ASA (24 DIN) of 400 ASA (27 DIN).

Voor het omrekenen van ASA naar DIN wordt een formule gebruikt van de vorm $y = a \log(x) + b$, waarin x de gevoeligheid in ASA en y die in DIN voorstelt. Stel deze formule op met a en b in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 2.2

Antwoord

Uit de gegevens blijkt:

- Bij $x = 200$ hoort $y = 24$, zodat $24 = a \log(200) + b$.
- Bij $x = 400$ hoort $y = 27$, zodat $27 = a \log(400) + b$.

Hieruit volgt:

$$3 = a \log(400) - a \log(200) = a(\log(400) - \log(200)) = a \log(2).$$

$$\text{Dus } a = \frac{3}{\log(2)} \approx 9,97.$$

$$\text{En verder is } b = 27 - a \log(400) \approx 1,07.$$

$$\text{De formule wordt } y \approx 10,0 \log(x) + 1,1.$$

Opgave 3

Bekijk het omrekenen van ASA naar DIN in [Voorbeeld 1](#).

- Leid zelf de formule af zonder de uitwerking in het voorbeeld te bekijken.
- Een film heeft een lichtgevoeligheid van 100 ASA. Hoeveel DIN is dat?
- Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

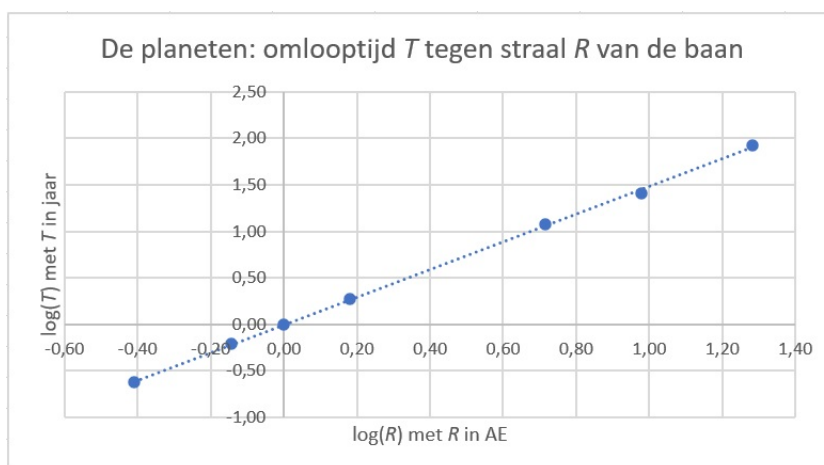
Opgave 4

Bekijk het omrekenen van ASA naar DIN in [Voorbeeld 1](#).

- Herleid de gevonden formule naar de vorm $x = a \cdot g^y$.
- Laat ook met deze formule zien dat bij 24 DIN ongeveer 200 ASA hoort.

Voorbeeld 2

De onderstaande grafiek geeft voor de planeten van ons zonnestelsel een verband weer tussen de tijd T in jaren die nodig zijn voor het afleggen van één volledige baan om de zon en de (gemiddelde) straal R in AE (Astronomische Eenheid) van die baan. In de grafiek is $\log(T)$ uitgezet tegen $\log(R)$ en tussen beide lijkt een lineair verband te bestaan.



Figuur 2.3

Stel een formule op voor dit verband.

Antwoord

De grafiek is bij benadering een rechte lijn door $(0,0)$ en $(1; 1,5)$.

De formule krijgt de vorm $\log(T) = a \cdot \log(R) + b$.

- Bij $\log(R) = 0$ hoort $\log(T) = 0$, zodat $0 = a \cdot 0 + b$.
- Bij $\log(R) = 1$ hoort (ongeveer) $\log(T) = 1,5$, zodat $1,5 = a \cdot 1 + b$.

Hieruit volgt: $a \approx 1,5$ en $b = 0$.

De formule wordt $\log(T) \approx 1,5 \log(R)$.

Opgave 5

Bekijk het verband tussen de omlooptijd T en de straal van de baan R van de planeten in ons zonnestelsel in **Voorbeeld 2**.

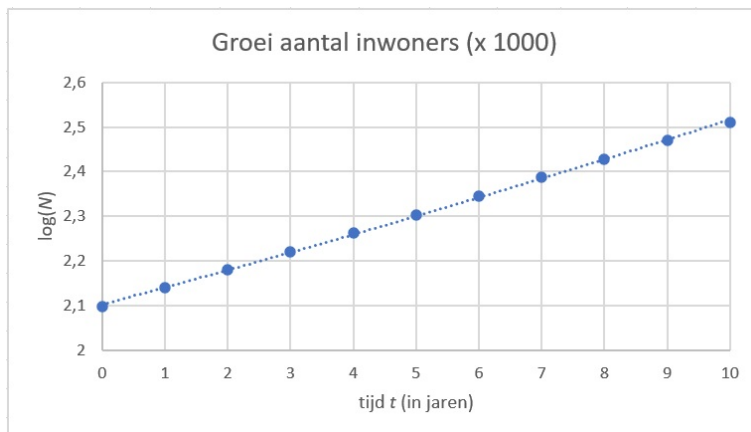
- Hoe kun je aan de grafiek zien, dat de eenheid AE gelijk is aan de straal van de baan van de aarde?
- Voor Mercurius geldt $R \approx 0,39$ AE. Bereken de omlooptijd van Mercurius in twee decimalen nauwkeurig.
- Stel een formule op voor T afhankelijk van R en laat zien, dat je met deze formule hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

Opgave 6

Hier wordt de toename van het aantal inwoners in een middelgrote stad in beeld gebracht.

Nu is $\log(N)$ waarbij N het aantal inwoners in duizendtallen is, uitgezet tegen de tijd t in jaren na 2010.

Je ziet, dat de grafiek (ongeveer) een rechte lijn is door $(0; 2,1)$ en $(5; 2,3)$.



Figuur 2.4

- Stel een bij deze grafiek passende formule op.
- Voorspel met deze formule het aantal inwoners in 2025.
- Stel een formule op voor N afhankelijk van t en laat zien, dat je met deze formule hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

Oefenen

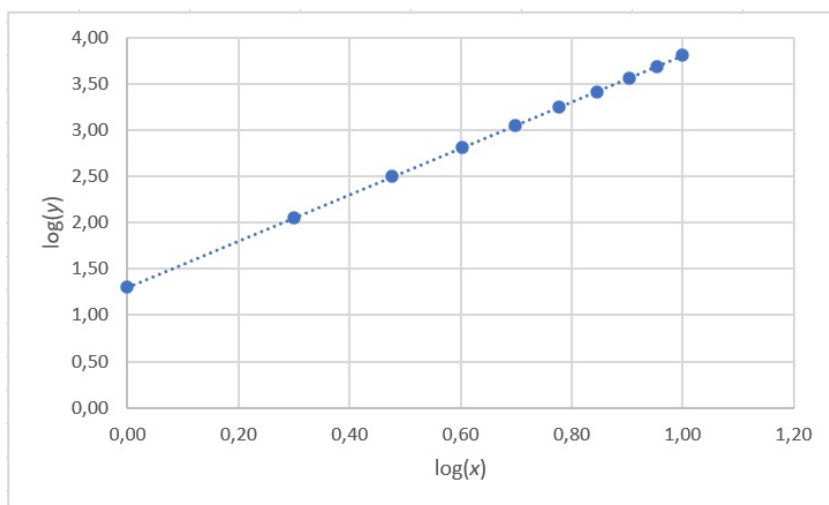
Opgave 7

Van een functie van de vorm $H(t) = a \log(t) + b$ zijn twee punten van de grafiek gegeven: (2,20) en (12,200).

Stel het functievoorschrift op van $H(t)$. Geef a en b in gehelen nauwkeurig.

Opgave 8

Je ziet hier een grafiek waarin $\log(y)$ is uitgezet tegen $\log(x)$. De punten liggen netjes op een rechte lijn.



Figuur 2.5

- Stel een formule op die past bij de getekende rechte lijn.
- Bereken hiermee de waarde van y voor $x = 12$.
- Herleid de formule die je hebt gevonden tot $y = f(x)$ en ga daarmee na dat je (ongeveer) dezelfde waarde voor y vindt als $x = 12$.

Opgave 9

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. Metingen op dagen met een neutrale atmosfeer geven deze waarden:

h (m)	1	10	100
w (m/s)	2	5	8

Tabel 2.2

Het verband tussen de windsnelheid w in m/s en de hoogte h in m kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$.

- Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.
- Bereken hiermee de windsnelheid op een hoogte van 500 m in één decimaal nauwkeurig.
- Laat zien, dat h een exponentiële functie is van w .

Opgave 10

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten.

Hij bepaalde de huidoppervlakte H (dm²) en het gewicht G (kg) van dieren van een bepaalde soort.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

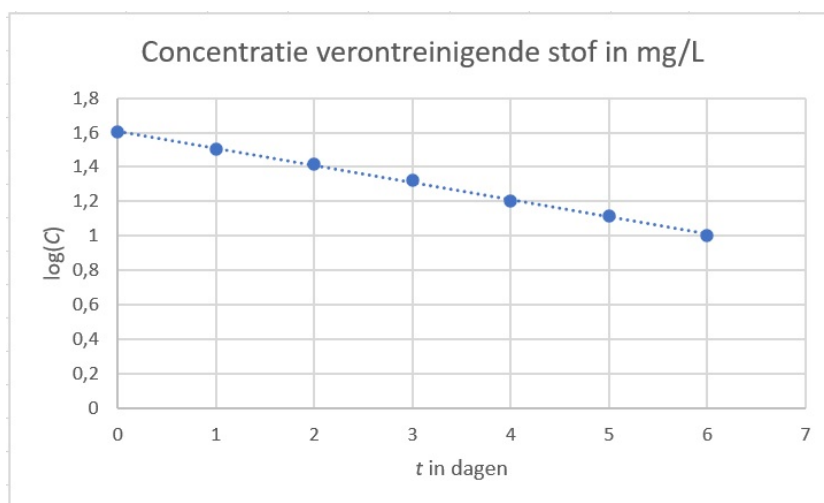
Tabel 2.3

Als je in een grafiek $\log(H)$ uitzet tegen $\log(G)$, blijkt er een lineair verband tussen beide te bestaan.

- Teken deze grafiek.
- Stel een bij deze grafiek passende formule op.
- Laat zien, dat H een machtsfunctie is van G .
- Controleer dat de gevonden machtsfunctie ongeveer bij de tabel past.

Opgave 11

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. In een tabel worden metingen steeds op hetzelfde moment 1 dag later bijgehouden. Hierbij is C de concentratie verontreinigende stof in mg/L en t de tijd in dagen. In de grafiek is $\log(C)$ uitgezet tegen t .



Figuur 2.6

- Stel een bijpassende functie op.
- Hoe groot was de concentratie 10 dagen na de eerste meting?



- c Laat zien, dat $C(t)$ een exponentiële functie is en geef de bijpassende formule.

Toepassen

Opgave 12: Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt. In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L . De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N . Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$$20 \cdot \log(N) = 202 - \frac{4}{3}L$$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

- a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.
- b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:

$$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$$

De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

- c Bereken welke waarde L in 2001 had.
- d Laat zien dat de formule voor de nieuwe situatie is te herleiden tot: $N \approx 2,512 \cdot 10^{12} \cdot 0,794^L$.

Testen

Opgave 13

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.

De grafiek van H uitgezet tegen $\log(t)$ is een rechte lijn door de punten (5,12) en (9,34).

- a Stel een bijpassende formule op.
- b Bereken H als $t = 1000$.

Opgave 14

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.

De grafiek van $\log(H)$ uitgezet tegen $\log(t)$ is een rechte lijn door de punten (5,12) en (9,34).

- a Stel een bijpassende formule op.
- b Bereken H als $t = 1000$.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Formules opstellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lineaire functie — lineair model — trendlijn, regressielijn;
- kwadratische functie — parabool — parameters;
- groei-model — exponentiële functie — machtsfunctie;
- logaritmische functie.

Activiteitenlijst

- bij een (trend)lijn door twee gegeven (meet)punten een lineaire functie opstellen;
- bij drie gegeven (meet)punten een kwadratische functie opstellen;
- bij twee gegeven (meet)punten een exponentieel model of een model met een machtsfunctie opstellen;
- logaritmen gebruiken bij modelleren.

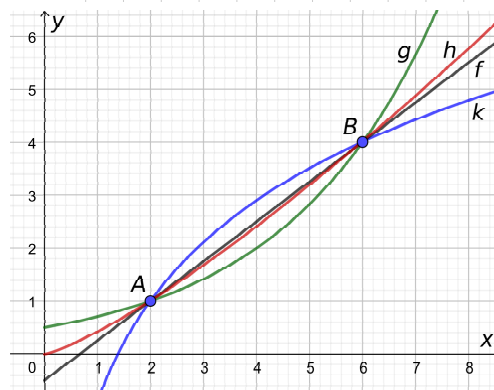
Testen

Opgave 1

Je ziet in deze figuur vier verschillende grafieken door dezelfde twee punten (2,1) en (6,4).

Je gaat er formules voor opstellen. Geef waar nodig de constanten in twee decimalen nauwkeurig.

- f is een lineaire functie. Stel een bijpassende formule op.
- g is een exponentiële functie. Stel een bijpassende formule op.
- h is een machtsfunctie. Stel een bijpassende formule op.
- k is een logaritmische functie van de vorm $k(x) = a \cdot \log(x) + b$. Stel een bijpassende formule op.



Figuur 2.1

Opgave 2

Een parabolische baan gaat ten opzichte van een xy -assenstelsel door de punten: $A(0,10)$, $B(2,13)$ en $C(5,10)$. Een voorwerp doorloopt deze baan vanaf punt A tot het weer op de grond komt ($y = 0$).

- Stel een formule op bij deze baan.
- Waar komt het voorwerp dat deze baan doorloopt op de grond?
- Welk domein en welk bereik heeft de functie f die deze baan beschrijft?

Opgave 3

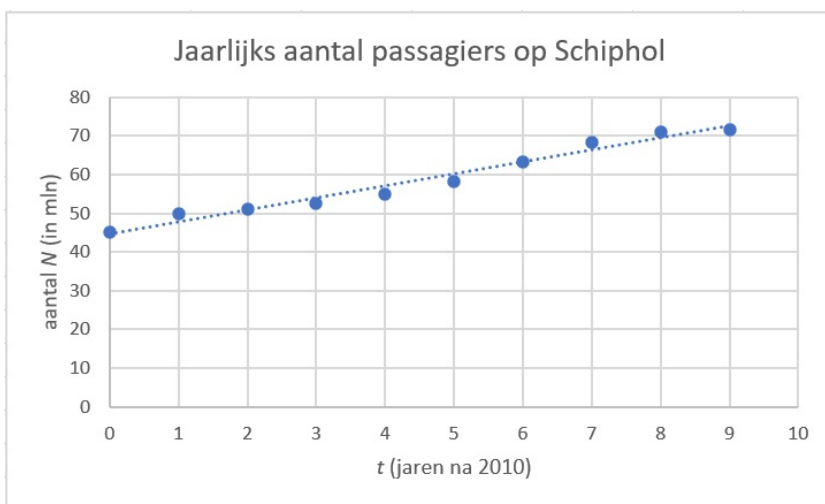
Het aantal passagiers N in miljoenen dat jaarlijks gebruikmaakt van Schiphol, groeide tot 2020 snel. Daarna stortte dit aantal (mede vanwege de coronapandemie) behoorlijk in, maar het nam een jaar later toch weer toe.

Passagiersaantallen Schiphol					
jaar	2010	2015	2019	2020	2021
aantal (in mln)	45,2	58,2	71,7	20,9	25,5

Figuur 2.2

- a Ga na, of de groei tussen 2010 ($t = 0$) en 2019 ($t = 9$) exponentieel groeide met de tijd t in jaren.

Op grond van meer gegevens voor de jaren 2010 - 2019 heeft iemand deze grafiek gemaakt.



Figuur 2.3

Zij trekt een trendlijn door de meetpunten en vermoedt dat de bijbehorende functie de groei van het jaarlijks aantal passagiers N beter wordt beschreven door de formule bij deze trendlijn.

- b Stel de bijpassende formule op.

De situatie vanaf 2020 past totaal niet in de voorgaande groeimodellen. Maar het aantal passagiers lijkt toch weer toe te nemen.

- c Hoelang duurt het voordat het aantal passagiers weer op het niveau zit van 2019 als er vanaf 2020 van exponentiële groei sprake zou zijn?

Opgave 4

Mensen die een kind krijgen, moeten dit melden bij de Sociale Verzekeringsbank (SVB) om kinderbijslag te ontvangen. De SVB beschikt hierdoor over de voornamen van vrijwel alle kinderen die in een bepaald jaar zijn geboren. In Nederland zijn in 1996 en 1997 in totaal ongeveer 200000 jongens geboren. Sommige namen worden heel vaak gegeven terwijl andere namen zelden voorkomen. In alle aanmeldingen bij de SVB over de jaren 1996 en 1997 kwamen 15788 verschillende voornamen van jongens voor. Het gaat dan alleen om de eerste naam van de jongens en niet om

eventuele extra namen. In de tabel is een overzicht gegeven van het aantal jongens per voornaam (a) en het bijbehorende aantal voornamen (n) in deze periode.

Voornamen	Monk, Archimeds, Cassius, ...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	Thomas
Aantal jongens per voornaam (a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	2346
Aantal voornamen (n)	9726	2067	855	487	323	226	188	165	125	91	...	1

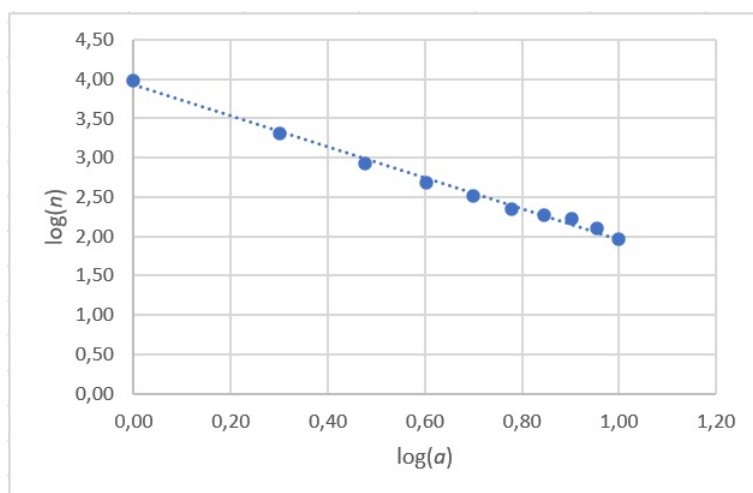
Figuur 2.4

Thomas is de voornaam die in de jaren 1996 en 1997 het meest voorkwam. Uit de tabel blijkt dat deze naam in totaal aan 2346 jongens werd gegeven. Er zijn ook namen die in deze periode aan slechts één jongen zijn gegeven, bijvoorbeeld Monk, Archimedes en Cassius. In de tabel zie je dat er in deze twee jaren in totaal 9726 namen waren die elk één keer aan een jongen zijn gegeven.

- a** Van alle jongens geboren in 1996 en 1997 zijn er 19988 die minder dan vijf naamgenoten hebben die ook in deze periode geboren zijn.

In de figuur is $\log(n)$ uitgezet tegen $\log(a)$ voor $a = 1$ tot en met $a = 10$.

Deze punten liggen bij benadering op de rechte lijn door de punten met $a = 1$ en $a = 10$.



Figuur 2.5

- b** Stel de bijpassende formule op voor $\log(n)$ afhankelijk van $\log(a)$. Geef de constanten in twee decimalen nauwkeurig.

Het punt dat hoort bij $a = 4$ ligt iets onder de lijn. Dit betekent dat het werkelijke aantal voornamen dat 4 keer is gegeven kleiner is dan het aantal dat hiervoor met behulp van de formule bij **b** gevonden wordt.

- c** Bereken hoeveel procent kleiner.



Door herschrijven van de formule die hoort bij de grafiek in de figuur blijkt dat het verband tussen a en n kan worden benaderd met een machtsfunctie.

- d Stel een formule op voor n afhankelijk van a .
- e Laat zien, dat bij de naam Thomas ook volgens de formule $a = 2346$ oplevert $n = 1$.

Toepassen

Opgave 5: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af. Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Het midden van elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de tabel zie je de ligging van de middens van de stenen na één uur, na twee uur en na drie uur.

De afstand A (in dm) die de stenen na één, na twee en na drie uur hebben afgelegd hangen af van de nummers van de stenen. Als je die nummers x noemt, kun je grafieken maken van $A(x)$. Die grafieken worden (bij goede benadering) parabolen.

Lavastroom							
nummer = x -waarde							
tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
1	19,4	19,9	20,2	20,3	20,2	19,9	19,4
2	38,8	39,8	40,4	40,6	40,4	39,8	38,8
3	58,2	59,7	60,6	60,9	60,6	59,7	58,2

Figuur 2.6

- a Stel een formule op voor $A(x)$ na 1 uur.
- b Hoe kun je aan de tabel zien dat alle stenen met een constante snelheid bewegen?
- c Hoe ziet de grafiek van $V(x)$ er uit als V de snelheid van de stenen in dm/uur voorstelt?



Opgave 6: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 2.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2.100.000 nadert. Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2,1 - 1,9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

- Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.
- Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.
- Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.
- Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

- a**
 - asymptoot 25
- b**
 - bereik 18
- d**
 - domein 18
- e**
 - exponentieel groeimodel 72
- f**
 - functie 8
 - functievoorschrift 8
 - functiewaarde 8
- g**
 - groeimodel 72
 - groeimodel met een macht 72
- h**
 - horizontale asymptoot 24
- i**
 - interval 18
 - invoerwaarde 8
- k**
 - karakteristieken 25
- l**
 - lineair model 57
 - lineaire functie 57
- m**
 - maximum 18
 - minimum 18
- n**
 - nulpunt 8
 - nulwaarde 8
- p**
 - parabool 65
 - parameter 65
 - plotten 8
- r**
 - regressielijn 57
 - rekenen met logaritmen 80
 - rekenschema 34
- s**
 - samengestelde functie 34
 - snijpunt met de assen 25
 - standaardfunctie 42
- t**
 - top 25
 - transformatie van een grafiek 42
 - translatie 42
 - trendlijn 57
- v**
 - vermenigvuldiging ten opzichte van een as 42
 - verschuiving 42
 - verticale asymptoot 24

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

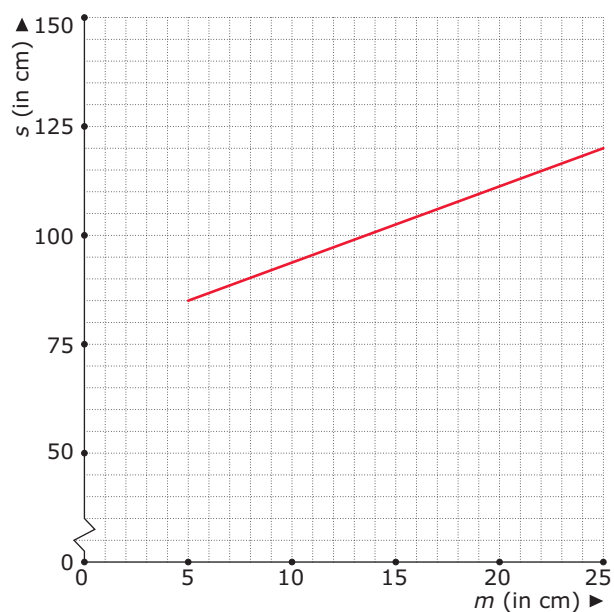


www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

Werkblad bij Opgave 10



- a** Stel een formule op, die bij deze grafiek past.
- b** Teken in de figuur de grafiek bij deze formule.
- c** Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.
- d** Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

