Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel specifiek (KS 1349)

Katern 2

Inhoud

Periodieke functies
Differentiëren

Context College

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Periodieke functies

1.1 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken;
- werken met exacte waarden van sinus en cosinus.

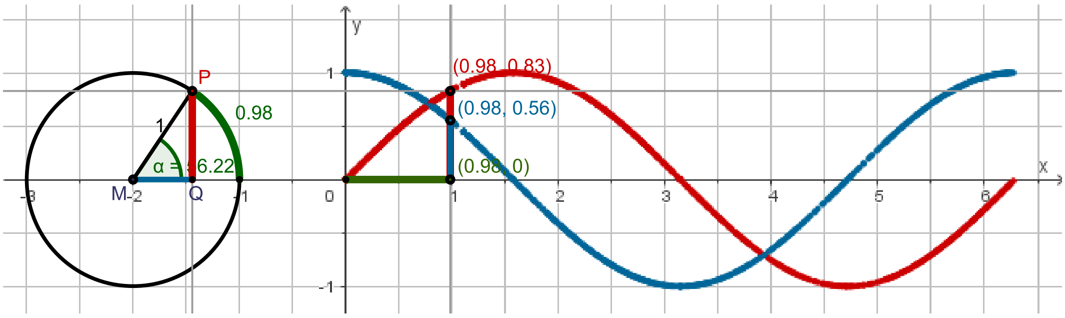
Voorkennis

- werken met graden en radialen;
- een grafiek tekenen op de grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 1.1

Je ziet hier twee grafieken, die ontstaan door punt P te laten draaien om M op een cirkel met straal $MP = 1$.

De rode grafiek laat zien hoe hoog punt P zit ten opzichte van de horizontale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

De blauwe grafiek laat zien waar punt P zit ten opzichte van de verticale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

a Bij de grafieken is op de x-as de draaihoek α uitgezet, maar niet in graden, maar in radialen. Wat wordt daarmee bedoeld?

b Hoe reken je graden om in radialen?
Laat zien dat bij $\alpha = 53{,}03°$ hoort $\alpha \approx 0{,}93$ radialen.

c Hoe bereken je de waarde van de rode grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

d Hoe bereken je de waarde van de blauwe grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

Opgave V2

Ga uit van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 dm.

a Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek in graden?
En in radialen?

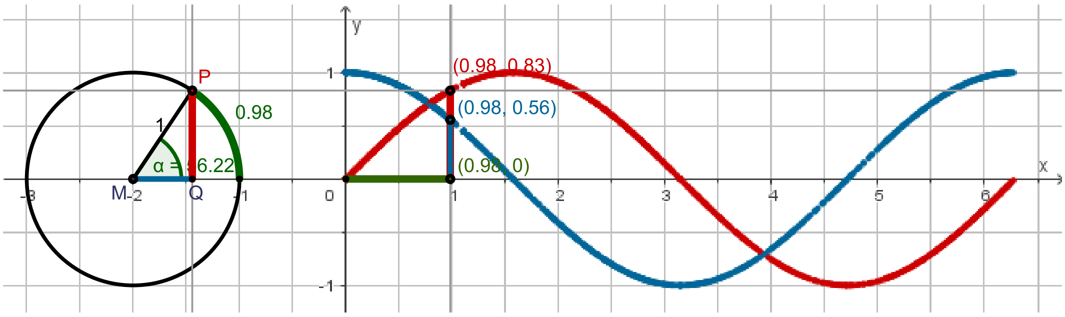
b Laat door berekening zien dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c Hoe groot is $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ precies?

d En hoe groot is $\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 1.2

De belangrijkste periodieke functies zijn $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ met x altijd in radialen. Je ziet hier hun grafieken. Ze ontstaan door een punt P over een eenheidscirkel te bewegen. De draaihoek $x = \alpha$ is in radialen (de bijbehorende booglengte in de eenheidscirkel) op de x-as uitgezet. De (rode) sinusgrafiek ontstaat uit de lengtes van QP en de (blauwe) cosinusgrafiek uit de lengtes van MQ. Beide grafieken lopen oneindig ver door als je ook draaihoeken buiten $[0,2\pi]$ toelaat.

Beide grafieken herhalen zich met een periode van 2π hetgeen overeen komt met het draaien van P van 0° tot 360°.

Voor het omrekenen van graden naar radialen geldt $360° = 2\pi$ radialen, dus $1° = \frac{\pi}{180}$ rad.

Het domein van beide functies is $\mathbb{R}$, alle x-waarden zijn toegestaan.

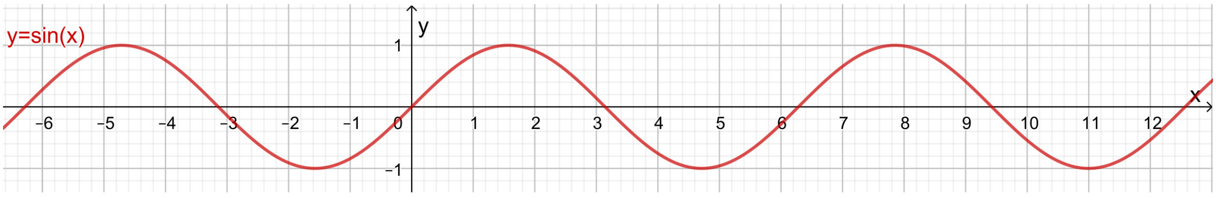
Het bereik van beide functies is $[-1,1]$.

De nulpunten van de sinusfunctie zijn
$x = \alpha = ..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, ...$ of kortweg $x = k \cdot \pi$ met k een geheel getal.

De nulpunten van de cosinusfunctie zijn
$x = \alpha = ..., -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, ...$ of kortweg $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Opgave 1

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \sin(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 1.3

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

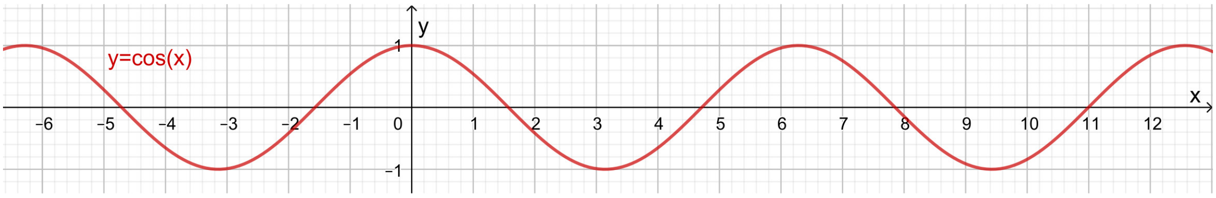
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\sin(1) = 0{,}84147...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\sin(30°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Opgave 2

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 1.4

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

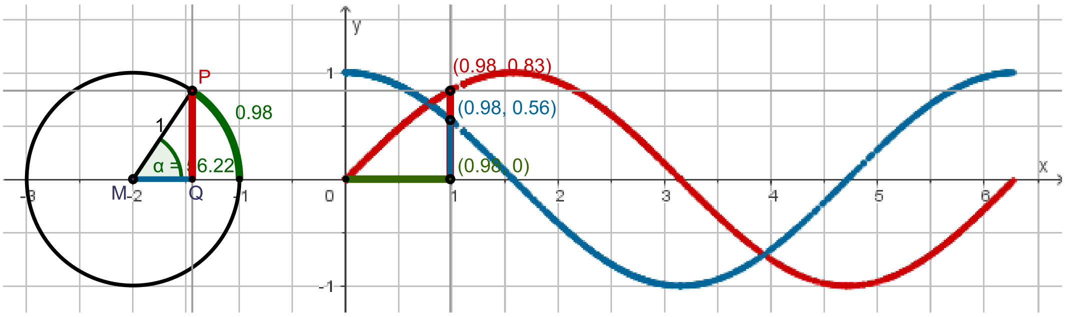
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\cos(1) = 0{,}54030...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\cos(60°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Uitleg 2

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 1.5

Je ziet weer de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$.

Kies je $\alpha = 45° = \frac{1}{4}\pi$, dan zijn MQ en PQ gelijk.

Met behulp van de stelling van Pythagoras vind je dan $\sin(45°) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Aan de grafieken (en ook in de eenheidscirkel) zie je dat er nog veel meer x-waarden zijn met dezelfde exacte uitkomst, namelijk $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En ook is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En er zijn meer x-waarden waarvan de sinus en de cosinus exact te berekenen zijn.

In de tabel staan enkele exacte waarden van de sinus en cosinus waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven.

hoek (graden)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
hoek (radialen)	0 rad	$\frac{1}{6}\pi$ rad	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\frac{1}{3}\pi$ rad	$\frac{1}{2}\pi$ rad
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 1.1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$ bepalen. Er geldt bijvoorbeeld dat:

$\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

a Leid dit zelf af door in ΔMQP de stelling van Pythagoras toe te passen.

b Ga nu zowel in de eenheidscirkel als in de grafiek na, dat $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

c Schrijf alle waarden van x op waarvoor $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d Leg uit waarom $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Opgave 4

In **Uitleg 2** zie je een tabel met exacte uitkomsten voor sinus en cosinus bij enkele hoeken. Al deze waarden kun je zelf afleiden.

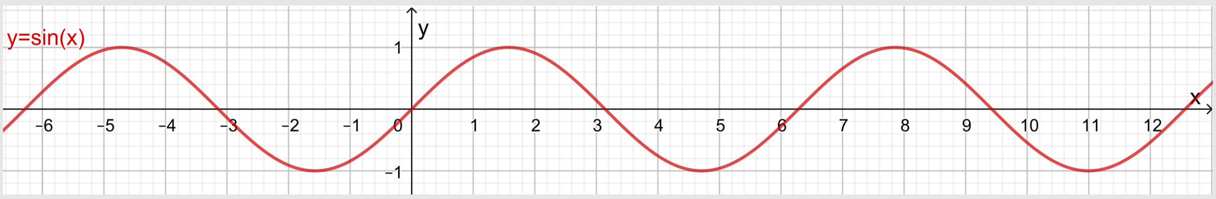
a Kies $x = \frac{1}{6}\pi$. ΔMQP is nu de helft van een gelijkzijdige driehoek waarvan MQ de symmetrieas is.

Leg uit dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b Hoe leid je af dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?

Theorie en voorbeelden

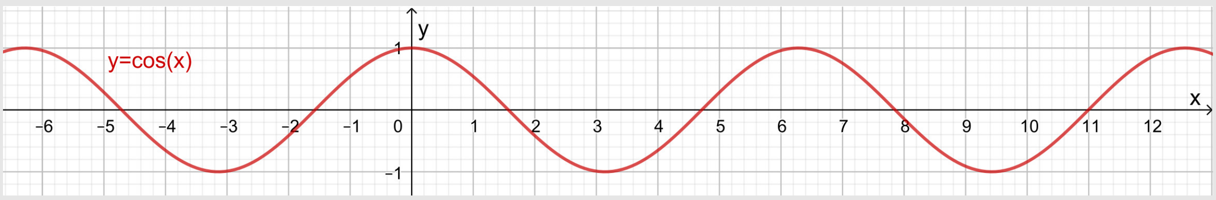
Om te onthouden



Figuur 1.6

De **standaard sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 1.7

De **standaard cosinusfunctie** $f(x) = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x - b) + c$ en $h(x) = a \cdot \cos(x - b) + c$ kun je door transformaties uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan, maar dus ook uit die van $y = \cos(x)$.

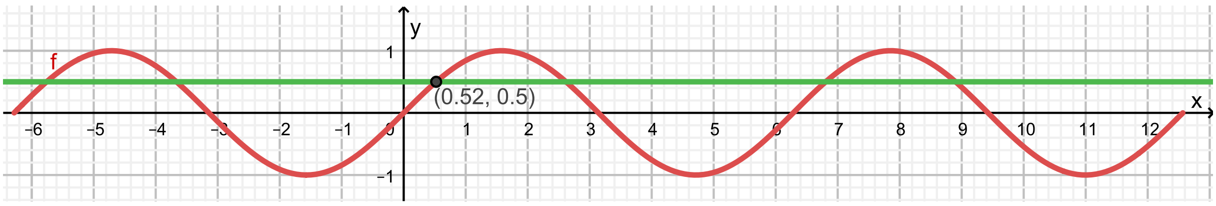
Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 1.8

Je ziet dat de grafiek symmetrisch is met symmetrieas $x = \frac{1}{2}\pi$.

Dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ voor:

$x = -1\frac{5}{6}\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Voor welke waarden van x geldt $\sin(x) = -\frac{1}{2}$?

b Los op: $\sin(x) < -\frac{1}{2}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6{,}5\pi]$.

a Maak de grafiek van f. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

b Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

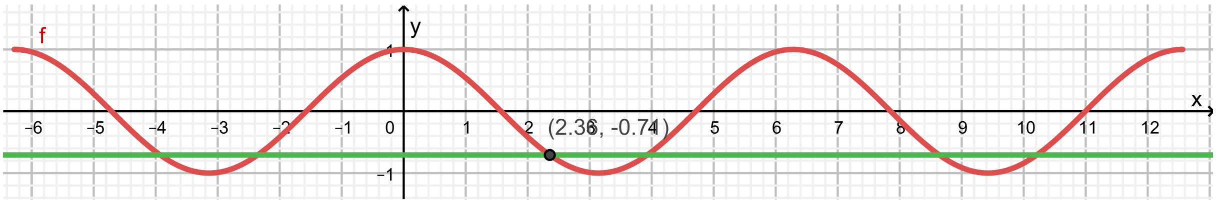
Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

Antwoord



Figuur 1.9

Je ziet dat $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ voor:

$x = -1\frac{1}{4}\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 2\frac{3}{4}\pi \vee x = 3\frac{1}{4}\pi$.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

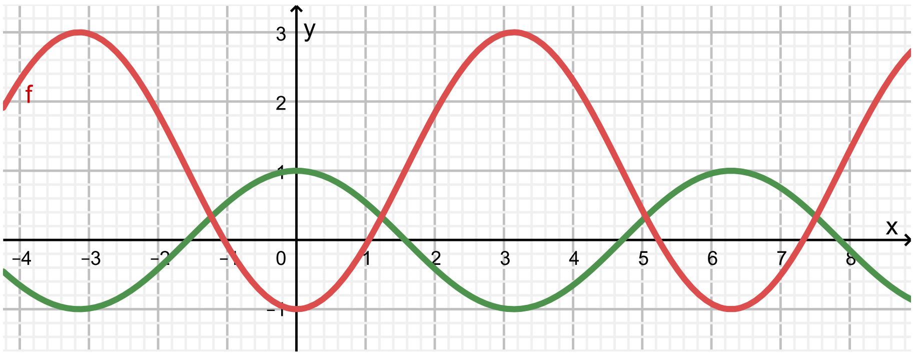
Voor welke waarden uit het gegeven domein geldt:

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord



Figuur 1.10

Maak eerst de grafiek van f en zet die van $y = \cos(x)$ erbij.

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Verschuiving in de x-richting met π.
- Vermenigvuldiging in de y-richting met 2.
- Verschuiving in de y-richting met 1.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = -2\sin(x - 1) + 4$

a Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

b Hoe groot is het maximum van f?

c Wat is het minimum van f?

Opgave 9

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je zien als een translatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = 3\sin(x) - 4$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie f door $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\sin(0{,}25) = 0{,}247...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\sin(x) = 0{,}247...$?

Opgave 11

Gegeven is de functie f door $f(x) = \cos(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\cos(0{,}25) = 0{,}968...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\cos(x) = 0{,}968...$?

Opgave 12

Geef alle exacte waarden van x waarvoor geldt:

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\cos(x) = -0{,}5$

c $\sin(x) = -1$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\sin(x - 3) + 2$ met domein $[0, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

c Bepaal de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5\cos(x + \pi) + 4$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \cos(x)$?

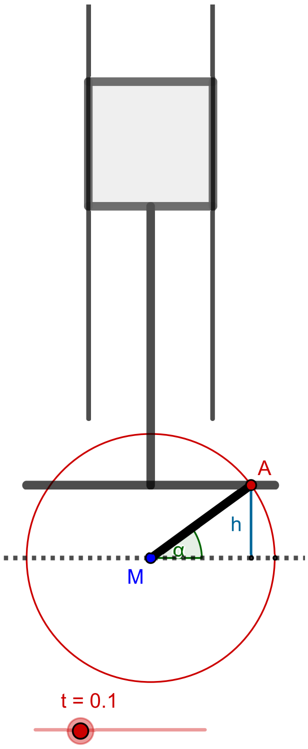
c Geef de coördinaten van de toppen.

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 1.11

Opgave 15

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 16

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $h(t) = 10\sin(t - 2) + 5$.

a De grafiek van deze functie kan ontstaan uit de grafiek van $h = \sin(t)$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Bepaal het bereik van de gegeven functie.

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de vergelijking $\sin(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- de vergelijking $\cos(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- vergelijkingen met getransformeerde sinus- en cosinusfuncties oplossen.

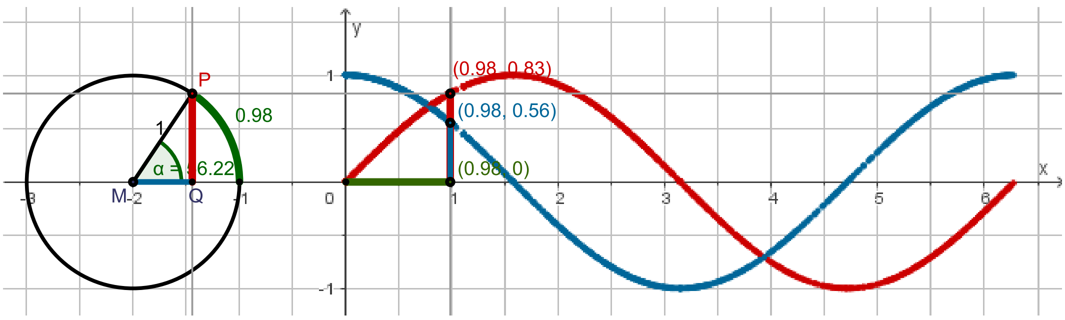
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 1.1

Je ziet hier de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ ontstaan door punt P over de eenheidscirkel met middelpunt M te bewegen.

a Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de sinus gelijk aan 0,5?
Welk verband is er tussen die twee waarden?

b Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de cosinus gelijk aan 0,5?
Welk verband is er tussen die twee waarden?

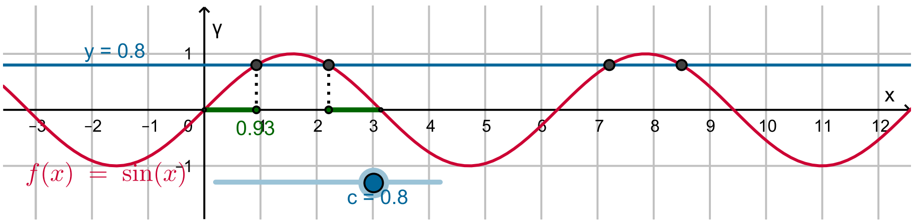
Opgave V2

Ga even na of je de exacte waarden van x weet bij $\sin(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

En hetzelfde voor de exacte waarden bij $\cos(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 1.2

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet de arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.
  Op de rekenmachine vind je arcsinus meestal als $\sin^{-1}$.
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8)$.
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van deze vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = -1$ geeft: $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = 0$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$ voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$ de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1 zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}2$

b $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

Los exact op.

a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

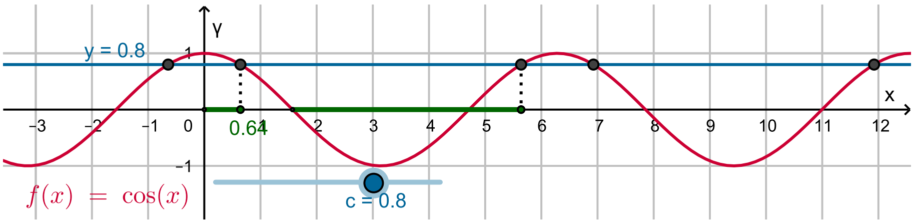
Opgave 3

Waarom heeft $\sin(x) = 1{,}2$ geen oplossingen?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.



Figuur 1.3

Je wilt $\cos(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}64$
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = -0{,}64 \vee x = 2\pi - 0{,}64$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = 0{,}64 + k \cdot 2\pi \vee x = -0{,}64 + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:
$\cos(x) = 1$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = -1$ geeft: $x = \pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = 0$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Als in $\cos(x) = c$ de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 4

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}2$

b $\cos(x) = -0{,}2$

Opgave 5

Los exact op.

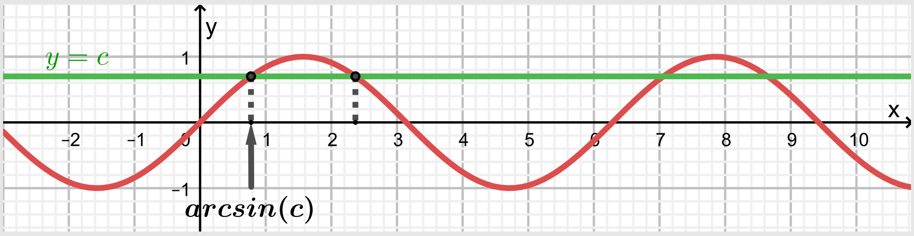
a $\cos(x) = -1$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 1.4

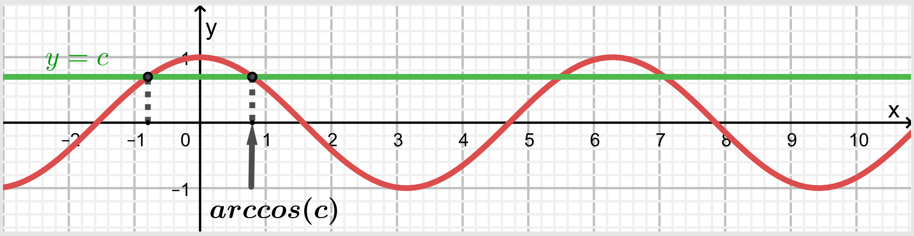
Om $\sin(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ ligt.

Die oplossing heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$:
$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 1.5

Om $\cos(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $[0, \pi]$.
Die oplossing heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$:
$x = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Gebruik de waarden uit de tabel als er gevraagd wordt naar exacte uitkomsten.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 1.1

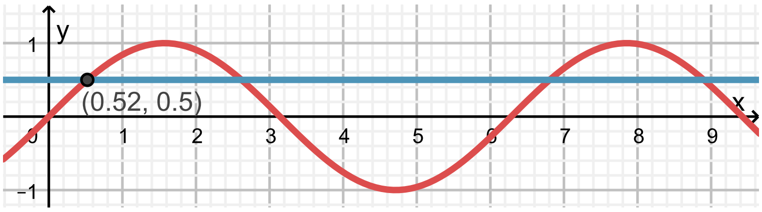
Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0{,}3\pi]$.

Bepaal eerst een oplossing in drie decimalen met behulp van een rekenmachine.
Bepaal daarna een exacte oplossing. Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Maak de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval. Je ziet dat er vier oplossingen zijn.



Figuur 1.6

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.

De andere oplossingen zijn: $x \approx 0{,}524 + k \cdot 2\pi \vee x \approx \pi - 0{,}524 + k \cdot 2\pi$.

Op $[0{,}3\pi]$: $x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$.

De eerste exacte oplossing is: $x = \frac{1}{6}\pi$.

In het algemeen is de oplossing: $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Op $[0{,}3\pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 6

Los op: $\sin(x) = -0{,}5$

a Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0{,}4\pi]$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0{,}2\pi]$.

a Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi{,}4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi{,}4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $f(x) = 4\sin(2x) + 3$.

Los op: $f(x) = 0$.

Antwoord

Deze functie ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
In ieder geval is er sprake van:

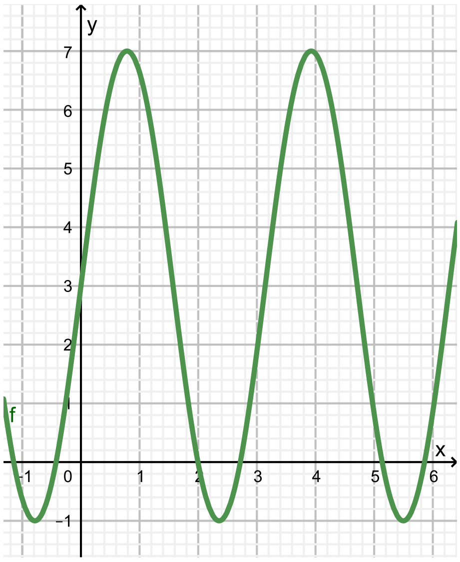
- vermenigvuldiging met 4 in de y-richting;
- verschuiving met 3 in de y-richting.

Maar als je de grafiek maakt, zie je ook dat de periode wordt gehalveerd.
Bij het berekenen van de nulpunten zie je dat ook gebeuren.

Je moet $f(x) = 0$ oplossen. Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}
4\sin(2x) + 3 &= 0 && \text{beide zijden } -3 \\
4\sin(2x) &= -3 && \text{beide zijden } /4 \\
\sin(2x) &= -0{,}75 && \text{arcsin gebruiken} \\
2x \approx -0{,}85 + k \cdot 2\pi \ &\vee\ 2x \approx \pi - -0{,}85 + k \cdot 2\pi && \text{beide zijden } /2 \\
x \approx -0{,}42 + k \cdot \pi \ &\vee\ x \approx 1{,}99 + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

Na het delen door 2 bij de laatste stap is de periode waarin de nulpunten optreden gehalveerd.



Figuur 1.7

Opgave 8

Bekijk de functie f in **Voorbeeld 2**.

a Hoe zie je aan de grafiek dat de periode is gehalveerd?

b Waarom vind je bij $f(x) = 0$ geen exacte oplossingen?

c Los exact op $f(x) = 1$.

Opgave 9

Los exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(0{,}5x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c Los exact op: $3\cos(x) + 1 = 2\frac{1}{2}$

Oefenen

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\sin(x) = \sin(0{,}5)$

c $\sin(0{,}5) = x$

d $\sin(x) = \cos(0{,}5)$

Opgave 13

Los exact op.

a $3\cos(x) + 1 = 2{,}5$

b $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

c $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 14

Gegeven is de functie g met $g(x) = 3\cos(2x)$ op $[0{,}4\pi]$.

a Bereken exact de nulpunten van g.

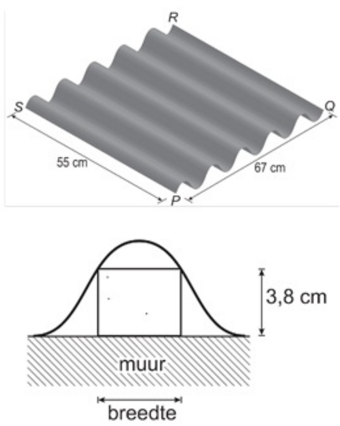
b Los exact op: $g(x) = 1\frac{1}{2}$

Toepassen

Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

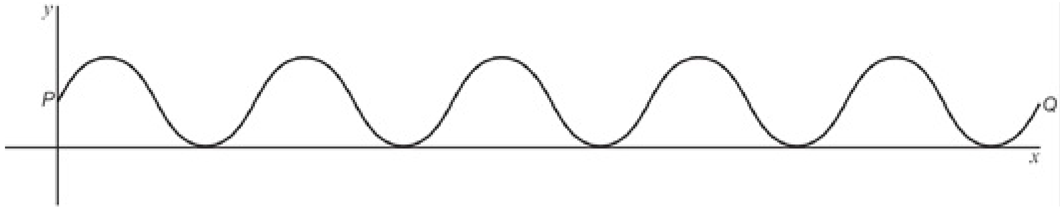
$y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte.



Figuur 1.8

In de figuur is dit geschetst.



Figuur 1.9

Opgave 15

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat.

Controleer dat de breedte van de golfplaat inderdaad ongeveer 67 cm is.

Opgave 16

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat. In die doorsnede zie je ook de voorkant van één van de rechthoekige blokjes waarmee de openingen gedicht worden.

Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 17

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$. Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4\cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen.

b Los op $f(x) < 0$.

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ en $y = a \cdot \cos(b(x+c)) + d$ tekenen en daarbij de begrippen periode, amplitude, evenwichtsstand gebruiken;
- de vergelijkingen $a \cdot \sin(b(x+c)) + d = p$ en $a \cdot \cos(b(x+c)) + d = q$ systematisch oplossen.

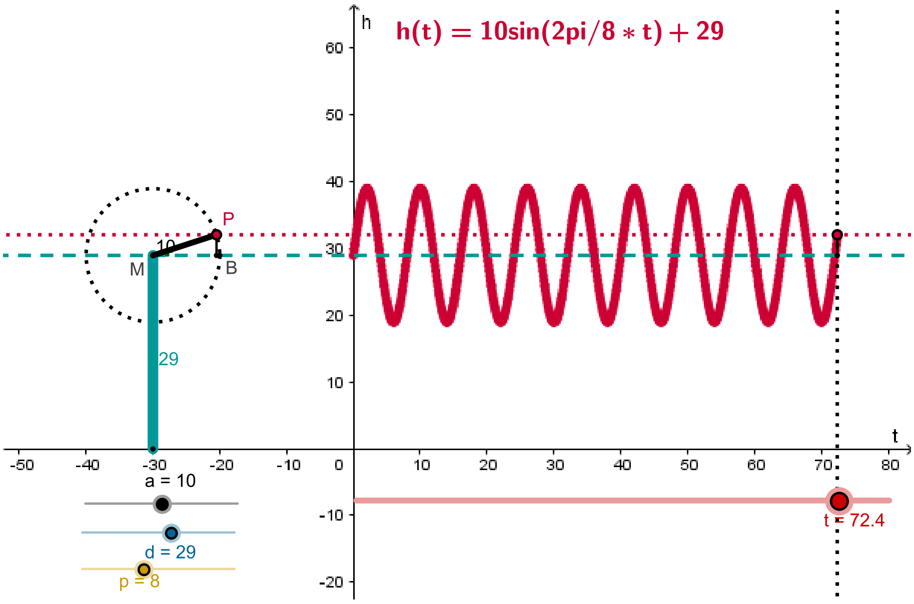
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Windmolen



Figuur 1.1

Je ziet hier de grafiek van de hoogte van een tip (punt P) van een wiek van een windmolen boven de begane grond. Er geldt:

$h = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot t\right) + 28$

waarin h de hoogte van punt P in meter en t de tijd in seconden is.

a Wat stellen de getallen 10 en 28 in deze formule voor?

b En wat is de betekenis van het getal 8?

Waarom staat er in de formule $\frac{2\pi}{8}$?

c Bij dit soort periodieke verschijnselen worden vaak de termen evenwichtsstand, amplitude (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) en periode gebruikt.
Welk getal in deze formule stelt de evenwichtsstand voor? En de amplitude?

Uitleg

Bekijk de applet.

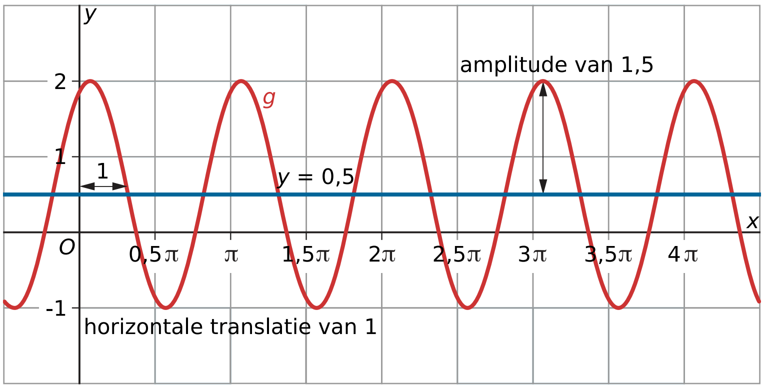
Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten sinusoïden.

Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten ook sinusoïden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand, de amplitude is a.
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$.
  Dit betekent voor de sinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat en voor de cosinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Bekijk de grafiek van de sinusoïde $g(x) = -1{,}5 \cdot \sin(2(x - 1)) + 0{,}5$.



Figuur 1.2

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtsstand is $y = 0{,}5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale verschuiving is 1

Het bereik van g is: $B_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1{,}2]$

De toppen van g vind je door te bedenken dat de maxima 2 en de minima -1 zijn.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ op $[0{,}2\pi]$ in de **Uitleg**.

Maak de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ met de applet in de **Uitleg**.

a Waarom is het nuttig om eerst de periode, de amplitude en de evenwichtsstand af te lezen uit de formule als je zelf de grafiek moet maken?

b Het punt $(0{,}0)$ ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat uit $(0{,}0)$ door de transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$?

c Welke toppen heeft de grafiek van g?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = -10 \sin(\pi(x-3)) + 6$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $f(x) = 11$.

Opgave 3

Gegeven is de functie g met $g(x) = 2 \cdot \cos(0{,}5(x-2)) - 1$ op $[0{,}8\pi]$.

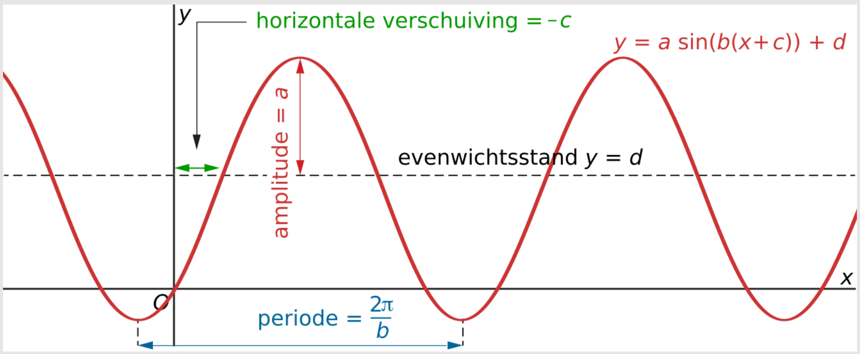
a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $g(x) = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïden



Figuur 1.3

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ maken.

De grafieken van deze functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van g geldt:

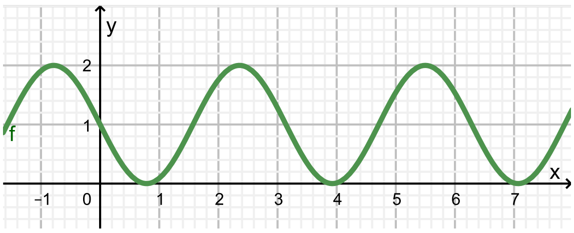
- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is -c, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur met daarin een deel van de grafiek van: $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$.

Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.
Bereken de toppen van de grafiek.

Los op: $\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 = 1\frac{1}{2}$.



Figuur 1.4

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

Bij de standaardsinus zitten de maxima bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de maxima geldt dus:

$$\begin{aligned} 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x - \tfrac{1}{2}\pi &= \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \\ x &= \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Voor de minima geldt:

$$\begin{aligned} 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1\tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

De toppen zijn $\left(\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi, 2\right)$ en $\left(\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi, 0\right)$.

Los op:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)+1 &= 1\tfrac{1}{2}\\
\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) &= \tfrac{1}{2}\\
2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) &= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\pi-\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi\\
2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\tfrac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\\
x &= \tfrac{7}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x=\tfrac{11}{12}\pi+k\cdot\pi
\end{aligned}
$$

In drie decimalen is de oplossing $x \approx 1{,}833 + k\cdot\pi \vee x \approx 2{,}880 + k\cdot\pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = 3\sin(\pi(x-1)) + 10$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de coördinaten van alle toppen.

c Los exact op: $f(x) = 11{,}5$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}(x+2)\right) + 8$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de toppen van de grafiek van f.

c Los op: $f(x) = 11$.
Rond af op drie decimalen.

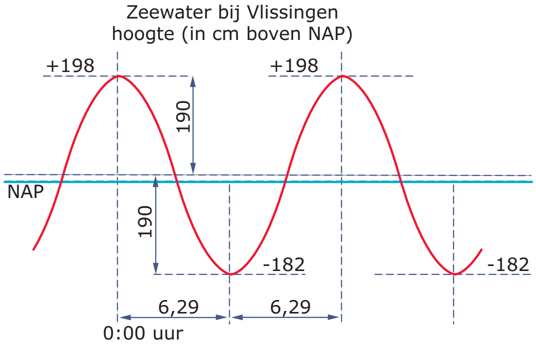
Voorbeeld 2

De grafiek in de figuur geeft globaal de getijdebeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de formule:

$h = 8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25}\cdot t\right)$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en h in cm ten opzichte van het NAP.



Figuur 1.5

Laat zien, dat de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van deze sinusoïde overeen komen met de grafiek.
Bereken hoeveel uur per periode de waterstand hoger is dan 180 cm.

Antwoord

Volgens de formule is de periode 12,25 uur, de amplitude 190 cm en de evenwichtsstand $h = 8$ cm. Dat komt overeen met wat je in de grafiek afleest.

$h = 180$ geeft $\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25t}\right) \approx 0{,}905$

Omdat $\arccos(0{,}905) \approx 0{,}439$ krijg je:

$\frac{2\pi}{12{,}25}t \approx 0{,}439 \vee \frac{2\pi}{12{,}25}t \approx -0{,}439$.

en daaruit volgt $t \approx 0{,}856 + k \cdot 12{,}25 \vee t \approx -0{,}856 + k \cdot 12{,}25$.

De waterstand is boven 180 cm van $t \approx -0{,}856$ tot $t \approx 0{,}856$.
Dat is ongeveer 1,71 uur.

Opgave 6

Bekijk de waterstanden bij Vlissingen in **Voorbeeld 2**.

a Ga zelf ook na, dat de grafiek klopt met de gegeven formule.

b Los zelf op: $8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right) = 180$.

Opgave 7

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:

$h(t) = 40 + 10 \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi \cdot t\right)$

Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

a Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke instellingen van de assen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?

b Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.

Oefenen

Opgave 8

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode en de amplitude en maak de grafiek zodat je twee periodes ziet.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h(t) = 50\sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

d $P(x) = -20\sin(2x)$

Opgave 9

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $5\cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

b $10\sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2)\right) = 5$

c $50\cos(4x) = 25\sqrt{3}$

d $50 - 30\sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0,16]$.

a Bepaal algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact alle nulpunten van deze functie.

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h(t) = 11 + 10\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Maak de grafiek van $h(t)$.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke betekenis?

c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoelang een bakje van een reuzenrad zich hoger dan 18 meter boven de grond bevindt.

Toepassen

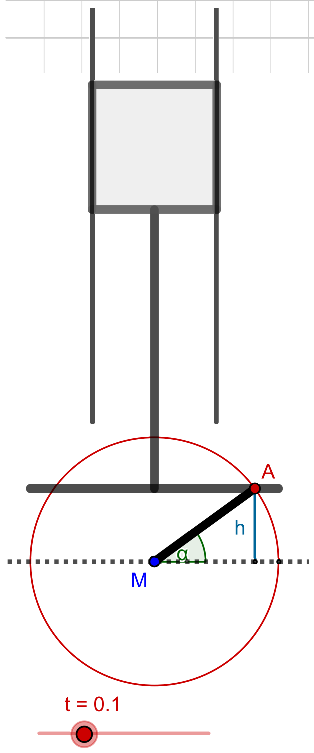
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 1.6

Opgave 12

Bekijk de formule voor de hoogte $h(t)$ van punt A boven de horizontale stippellijn.

a Waarom is de evenwichtsstand hier 0?

b Hoeveel seconden is per omwenteling $h(t) \geq 5$?

Opgave 13

De formule voor h in cm als functie van de tijd t in seconden is $h = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$.
Je kunt echter in plaats van h ten opzichte van een horizontale lijn door het draaipunt te nemen, de hoogte van A ook meten ten opzichte van de bovenkant van de cilinder. Neem daartoe aan dat de bovenkant van de cilinder 50 cm boven M zit.

a Welke formule kun je opstellen voor h als functie van t?

b Maak de grafiek bij de formule die je bij a hebt gevonden.
Hoe kun je die uit de standaardsinus afleiden?

c Op welke tijdstippen geldt $h = -42$ cm? Geef je antwoorden in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Bepaal van de functies de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}5\sin(0{,}5\pi(x-3))$ op $[0,10]$.

a Bereken algebraïsch alle nulpunten van de grafiek van f.

b Los op $f(x) > 0{,}25$.

1.4 Periodieke modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van de hoogte van het zeewater bij Harlingen op een zekere dag.

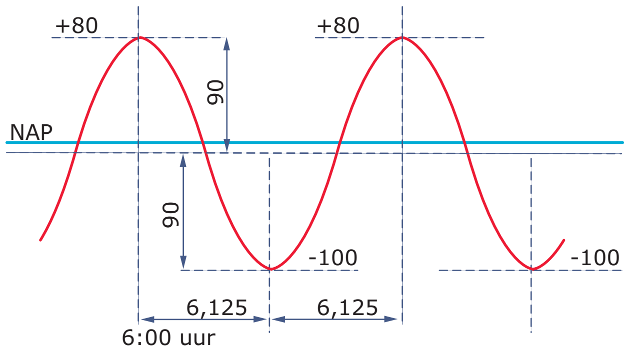
Noem h de hoogte van het water in centimeter en t de tijd in uren.

Je kunt deze periodieke grafiek bij benadering opvatten als een sinusoïde.

a Hoe groot zijn de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van deze sinusoïde dan ongeveer?

b Welke formule kun je opstellen voor deze sinusoïde?

c Voorspel met je formule de waterstand om 6:00 uur de volgende dag.



Figuur 1.1

Uitleg

Bekijk de applet.

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.

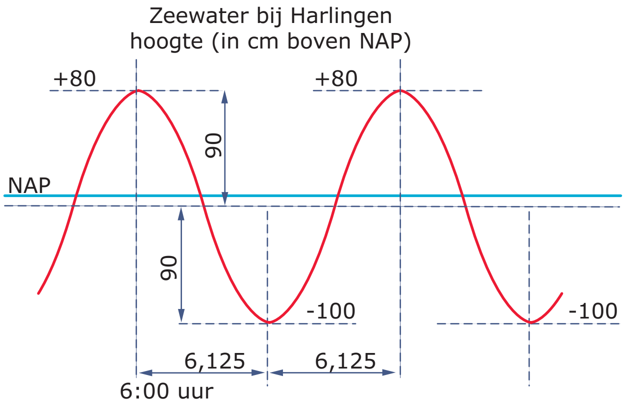
De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t+c)) + d$

Uit de gegevens volgt:

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12{,}25} \approx 0{,}52$
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en -1,0 m. De amplitude is $a = 0{,}9$ m.
- De evenwichtsstand is 0,9 m onder hoogwater: $d = -0{,}1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtslijn zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3{,}0625 \approx 2{,}94$. Dit betekent dat $c \approx -2{,}94$.

De bijpassende sinusoïde wordt:

$h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$



Figuur 1.2

Opgave 1

Gegeven is de opgestelde sinusoïde als model voor de waterstand bij Harlingen in de uitleg.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn worden gevonden.

b Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.

c De grafiek van de formule $h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$ van de uitleg moet hetzelfde zijn als de grafiek van de formule die je bij b hebt gevonden (door de afronding zullen de grafieken iets afwijken). Controleer dit op de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Geef het voorschrift van de periodieke functies die ontstaan bij de volgende wijzigingen.

a De amplitude wordt 4.

b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

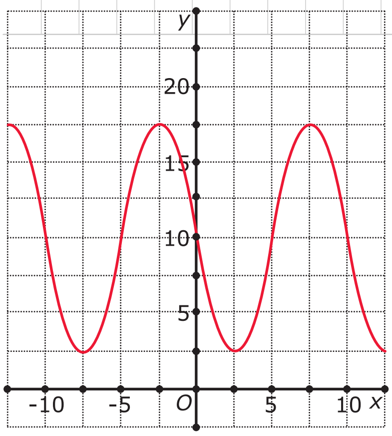
d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Opgave 3

Bekijk de sinusoïde.

a Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \sin(x)$.

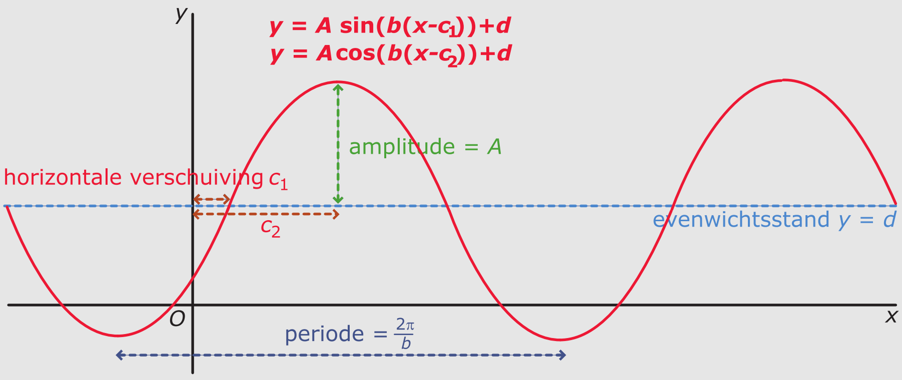
b Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \cos(x)$.



Figuur 1.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 1.4

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.

Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

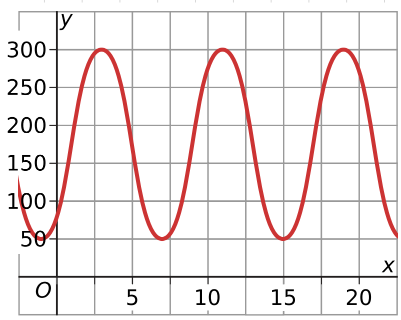
- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a, b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus 'begint' altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?
En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaardcosinus?



Figuur 1.5

Antwoord

Het maximum van de functie is 300 en het minimum 50. Dit betekent dat:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.
De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek op de evenwichtslijn op het moment dat de grafiek daar stijgt.
Hier is dat $x = 1$.

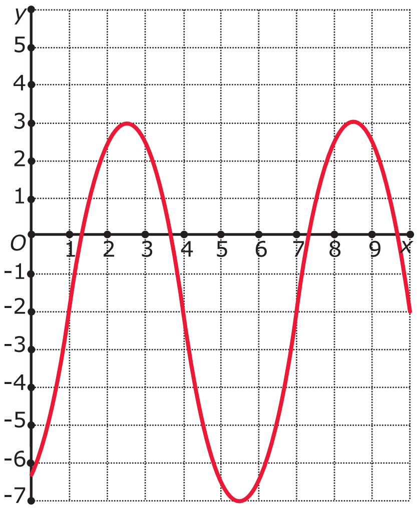
Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 125 \sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-1)\right) + 175$

Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.
Het functievoorschrift wordt:

$f(x) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{8}(x-3)\right) + 175$

Opgave 4

Bekijk de sinusoïde.



Figuur 1.6

Maak er een functievoorschrift bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.

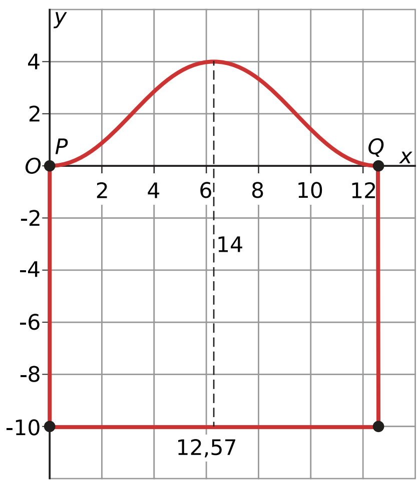
Opgave 5

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave een functievoorschrift uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Als je een cilinder met een diameter van 4 cm over het cirkeloppervlak dwars door het midden snijdt en vervolgens openknipt en plat neerlegt, krijg je de afgebeelde figuur. Er is bovendien een assenstelsel gekozen. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten (0,0) heeft.



Figuur 1.7

Antwoord

De assen zie je in de figuur. Er geldt:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π.
De formule wordt: $y = 2\cos(0{,}5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0; 4\pi]$.

Opgave 6

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 2**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

Opgave 7

De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit **Voorbeeld 2** in de punten C en D.
Bereken exact de lengte van lijnstuk CD.

Opgave 8

Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand van de figuur in **Voorbeeld 2** in A en B. Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Oefenen

Opgave 9

Op 24 november 2015 werd verwacht dat op 15 december 2016 het waterpeil bij Hoek van Holland de hoogste stand van 1,30 m boven NAP zou hebben om 3:05 uur en om 15:23 uur. De laagste stand was ongeveer -0,50 m. Er werd een model opgesteld van het getij, hierbij werd een sinusoïde $h(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$ gebruikt voor de hoogte van de waterstand in cm met t in uren.

Stel zelf dit model op.

Opgave 10

Gegeven zijn karakteristieken van sinusoïden. Stel een passend functievoorschrift op met een sinus.

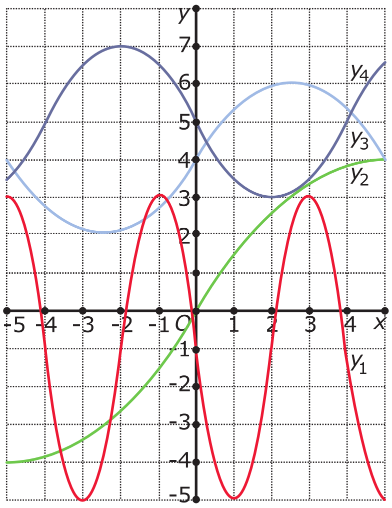
a De amplitude is 3, de periode is π, de evenwichtslijn is -1 en het maximum bevindt zich op $x = \frac{\pi}{2}$.

b De amplitude is 5, de periode is 2, de evenwichtslijn is 2 en het maximum bevindt zich op $x = 1{,}5$.

c De amplitude is 2, de periode is 6, de evenwichtslijn is 0 en het maximum bevindt zich op $x = 3$.

Opgave 11

Stel bij de vier sinusoïden in de afbeelding een passend functievoorschrift op met een sinus.



Figuur 1.8

Opgave 12

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$ en de amplitude is 2. De periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

a Stel een formule op voor $f(x)$.

b Bereken exact met die formule $f(0)$.

c Los op: $f(x) \leq 0$

Opgave 13

De menselijke ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toenemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

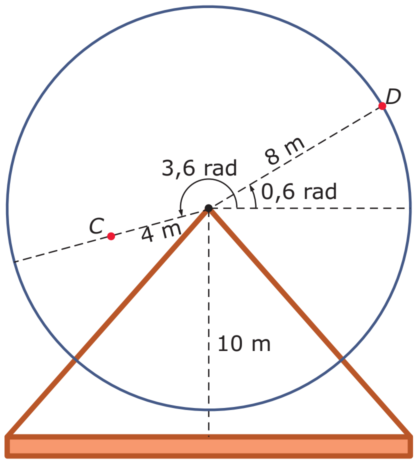
a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Bepaal de evenwichtslijn, de periode en de amplitude van deze sinusoïde.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

Toepassen

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in de rondte, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ heeft stoeltje D een kwartcirkel vanaf de grond gedraaid. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 1.9

Opgave 14

Bekijk de beschrijving van de stoeltjes in een draaiend reuzenrad.

a Bekijk de figuur. Bereken bij deze stand de hoogte van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D en ook van stoeltje C.

Opgave 15

Bekijk nog eens goed de gegevens van stoeltje C.

a Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413{,}25$? Geef je antwoord in meter. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Hoeveel seconden zit je in stoeltje C elk rondje boven de 12 meter?

Testen

Opgave 16

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt (20,300) en een eerstvolgend maximum in het punt (32,400).

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot 60.

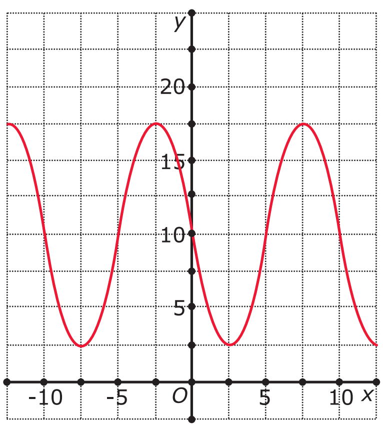
b Stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los exact op: $f(x) = 325$.

Opgave 17

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op.



Figuur 1.10

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- radialen — standaard sinusfunctie — standaard cosinusfunctie;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving;
- periodiek model.

Activiteitenlijst

- de standaard sinusgrafiek en de standaard cosinusgrafiek tekenen en werken met hun periodiciteit — werken met exacte waarden;
- vergelijkingen bij de standaardsinus en standaardcosinus oplossen, exact (met arcsin, arccos) en met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Bepaal het bereik van f en maak de grafiek van f.

b Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

Los algebraïsch op. Geef waar mogelijk exacte antwoorden, rond anders af op twee decimalen.

a $2\sin(x) = \sqrt{2}$

b $\cos(x) = \cos(2)$

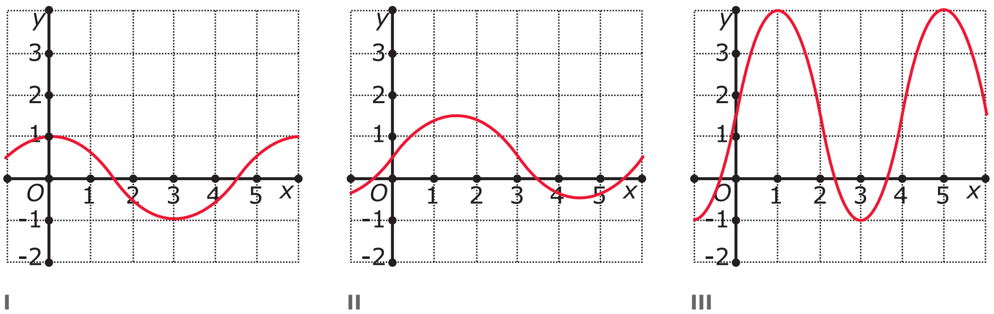
c $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

d $2\cos(x) + 4 = 5$

e $25 + 10\cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

Bekijk de sinusoïden. Geef een bijpassend functievoorschrift.



Figuur 1.1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$$y = 0{,}4 + 1{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP. Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten minimaal zijn? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$$P = 50 + 50\sin(0{,}212769t - 1{,}042563)$$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

a Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de schijngestalte van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

Figuur 1.2

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

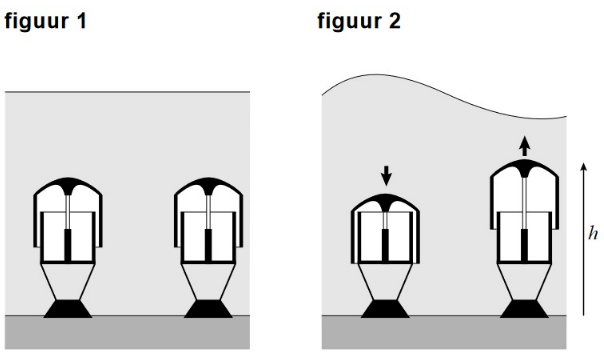
b Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

c Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Opgave 6

De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In figuur 1 zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In figuur 2 zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen. Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.



Figuur 1.3

De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

Neem aan dat de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter.

a Stel voor de hoogte h van de bovenkant van de drijver een formule op van de vorm $h = a + b \cdot \sin(ct)$, waarin t de tijd in seconde en h de hoogte ten opzichte van de zeebodem in m is.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door:

$d = -4{,}0 + 3{,}5\sin(0{,}5t)$

met d de hoogte in meter en t de tijd in seconde.

De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule:

$w = -A\cos(0{,}5t)$

Hierin is w de waterhoogte in meter, A de amplitude van de golven ($A \geq 0{,}5$) in meter en t de tijd in seconde.

Afhankelijk van de waarde van A kan de drijver soms boven water uitsteken.

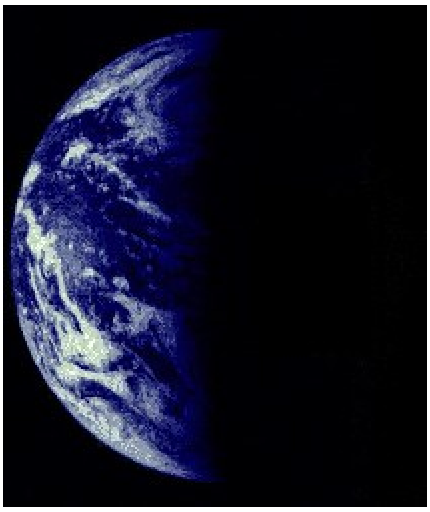
b Onderzoek met behulp van grafieken bij welke waarden van A dit het geval is. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

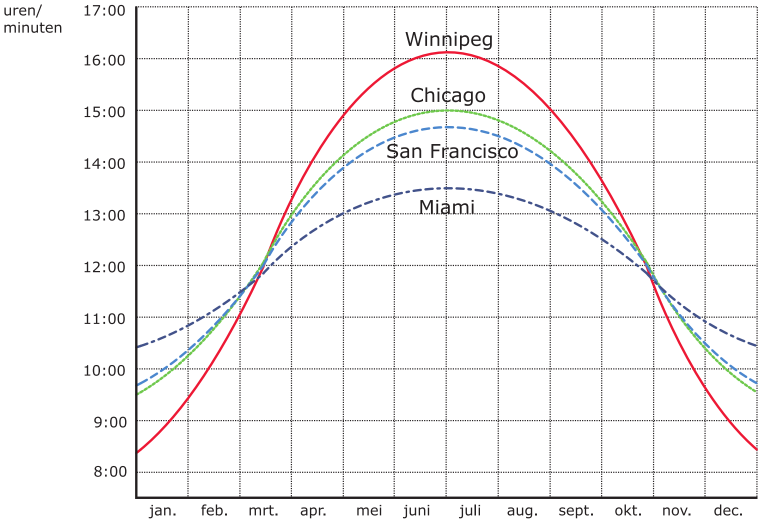
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.

Via internet kun je een **actuele tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt** vinden. Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken. Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de lengte dag en de kortste dag berekenen...



Figuur 1.4

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op Aarde. Dat komt omdat de Aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de Aardbaan om de Zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 1.5

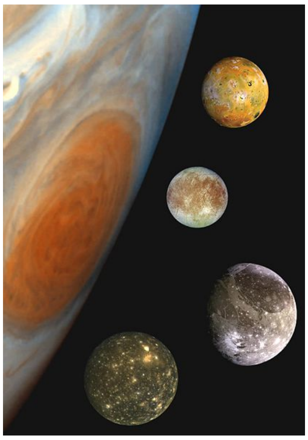
a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008. Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.



Figuur 1.6

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{29.5}(t-17)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 sep 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen. En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

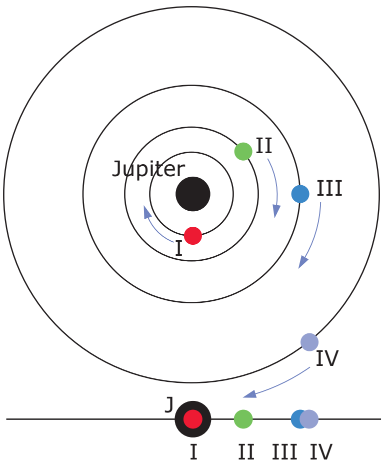
In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen. Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26\sin(0{,}365(t-24))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.



Figuur 1.7

Opgave 9: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoïden.

a Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

b Waarom is dat zo?

c Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.


Figuur 1.8

2

Differentiëren

2.1 Verandering

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de verandering van een functie herkennen in een grafiek en benoemen;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- grafieken maken bij functies en grafieken aflezen;
- toenemende, afnemende of constante stijging en daling, maximum en minimum in grafieken herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 2.1

Figuur 2.1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

b Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

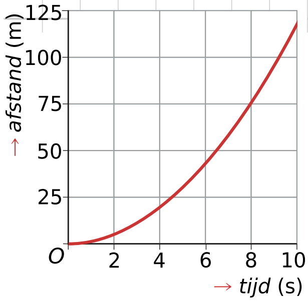
c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode vanaf de 12^e tot de 18^e km.

d Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Opgave V2

Een auto trekt op. De snelheid neemt dus toe. Stel dat je om de 2 seconden de afgelegde afstand opneemt. Je kunt dan een grafiek maken.

Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s (in meter) de formule $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden. Dat de snelheid van de auto toeneemt, kun je aan de grafiek zien.



Figuur 2.2

a Waaraan zie je dat?

b Hoe bereken je gemiddelde snelheid in de eerste seconde? En in de tweede seconde? En de derde seconde?

c Hoe geef je die gemiddelde snelheden in de grafiek aan?

d Hoe bepaal je nauwkeurig de snelheid op het moment dat de auto 5 seconden onderweg is?

Uitleg 1

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.
De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

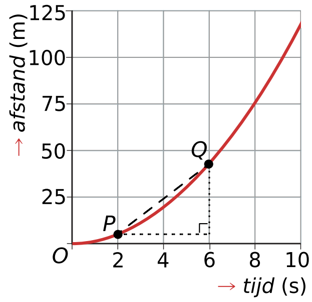
Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval [2,6] verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt (‘differentie’ is ‘verschil’ en een quotiënt is de uitkomst van een deling).
De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.
Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.



Figuur 2.3

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in **Uitleg 1** geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

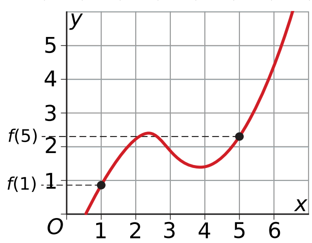
a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval [0,6].

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval [6,10].

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval [1,5].



Figuur 2.4

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,4].

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

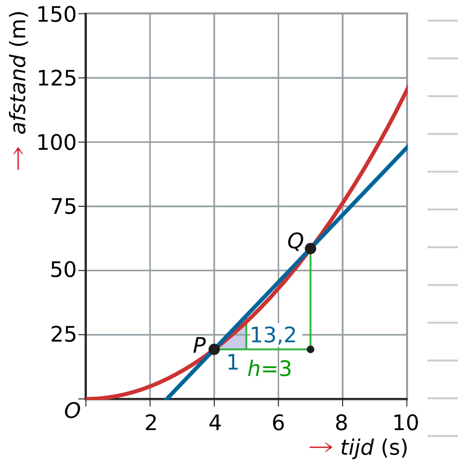
d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.

Uitleg 2

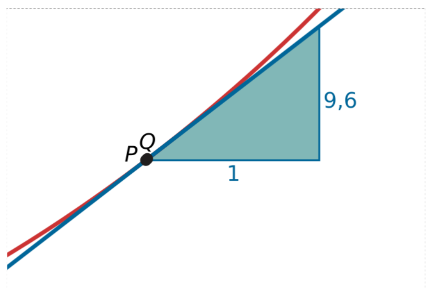
Bekijk de applet

Dit is de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde. De wagen gaat steeds sneller rijden.

De snelheid op $t = 4$ bereken je met het differentiequotiënt op het interval $[4, 4+h]$ waarbij h steeds dichter bij 0 wordt gekozen: $h \rightarrow 0$.



Figuur 2.5



Figuur 2.6

Het differentiequotiënt op dat interval is:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{4+h-4}$

Dat is de gemiddelde snelheid in m/s op het interval $[4, 4+h]$. De formule is te herleiden tot:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (4+h)^2 - 1{,}2 \cdot 4^2}{h} = \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$

Als $h \rightarrow 0$, dan $1{,}2h \rightarrow 0$.

$9{,}6 + 1{,}2h$ nadert dan de waarde 9,6 m/s.

Je noemt deze waarde het differentiaalquotiënt op $t = 4$.

En het is de plaatsverandering, de snelheid op $t = 4$: $v(4) = 9{,}6$ m/s.

Dit differentiaalquotiënt is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie in dat punt. En het is de momentane verandering van de functie.

Opgave 3

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[5, 5+h]$, waarin $h \rightarrow 0$.

c Hoe wordt de snelheid $t = 5$ zichtbaar in de grafiek?

Opgave 4

Een functie f is gegeven door $f(x) = 5x^2$.

a Bereken de gemiddelde verandering van deze functie op het interval $[2, 5]$.

b Bereken de momentane verandering van deze functie als $x = 2$.

c Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.

Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan:

- de helling van lijn AB;
- de richtingscoëfficiënt van lijn AB;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a,b]$.

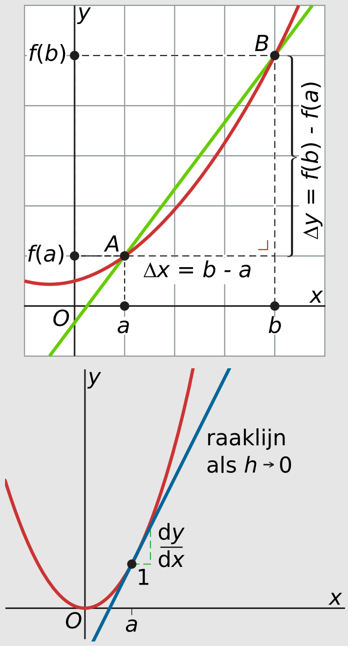
De **momentane verandering** of de **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door het differentiequotiënt op $[a,a+h]$ te berekenen:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Na herleiden en $h \to 0$ krijg je dan het **differentiaalquotiënt** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn in het punt van de grafiek met $x = a$.



Figuur 2.7

Voorbeeld 1

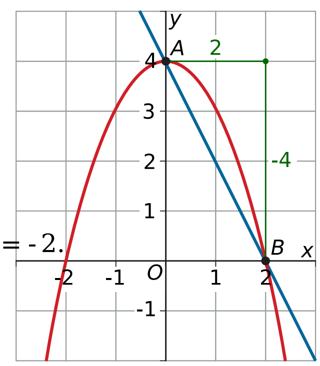
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Het differentiequotiënt is het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0,2]$.
Het geeft de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 2.8

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [-2,1].

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval [-1,1].

Opgave 6

Een fietser houdt onderweg zijn tussentijden bij.

tijd t (min)	0	10	15	21
afstand s (km)	0	3,5	5,5	8,0

Tabel 2.2

Gedurende de eerste tien minuten fietst hij 3,5 km. Gedurende de volgende vijf minuten fietst hij 2 km.

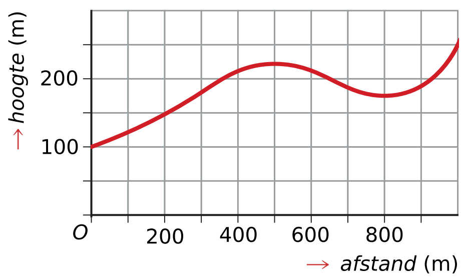
a Op welk van deze twee tijdsintervallen fietste hij het snelst?

b Wat is de gemiddelde snelheid in kilometer per uur van deze fietser over de eerste 3 kilometer?

c Als deze fietser de hele 8 kilometer met een constante snelheid fietst, wie van de twee is dan het snelst?

Opgave 7

Bij het begin van een berg staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft die berg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.



Figuur 2.9

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele berg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval [400,500] ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze berg.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Bereken het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$.
Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[3,3+h]$ is

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h}$

$= \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$ (mits $h \neq 0$).

Als $h \to 0$, dan $6 + h \to 6$.

Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ is dus $f'(3) = 6$.

Het getal 6 is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.

Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door het (raak)punt (3,9). Dus $9 = 6 \cdot 3 + b$ en $b = -9$.

De vergelijking van de gevraagde raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe bij $f(x) = x^2$ het differentiaalquotiënt wordt berekend voor $x = 3$.

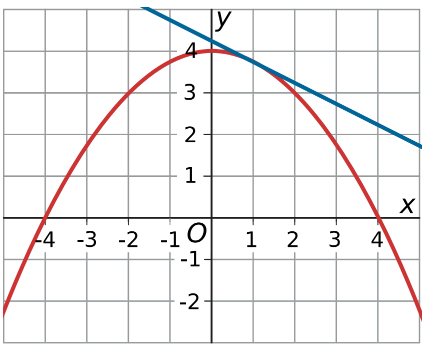
a Leg uit dat dit differentiaalquotiënt de momentane verandering van f voorstelt.

b Bereken de momentane verandering op $x = 4$ van functie f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

Opgave 9

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ op het domein [-5,5].



Figuur 2.10

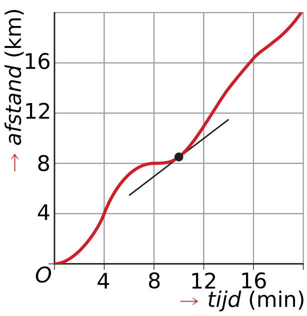
a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[1,1+h]$.

b Welk hellingsgetal heeft de raaklijn aan grafiek van f voor $x = 1$?

c Dit hellingsgetal is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$.
Stel een vergelijking van die raaklijn op.

Voorbeeld 3

Je ziet de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t. Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na vier minuten maximaal is. De grafiek gaat daar van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Daarna neemt de snelheid weer af. Na acht minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies tien minuten.



Figuur 2.11

Antwoord

De snelheid na precies tien minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je weet dat $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=10}$ de helling is van deze raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door (10; 8,5) ook (bij benadering) door het punt (12; 10) gaat. De helling van de raaklijn is daarom ongeveer:

$\frac{10{,}0-8{,}5}{12-10} = 0{,}75$.

De auto had na precies tien minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je een tijd afstand-grafiek van een auto.

a Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?

b Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$ ongeveer?

c Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?

Oefenen

Opgave 11

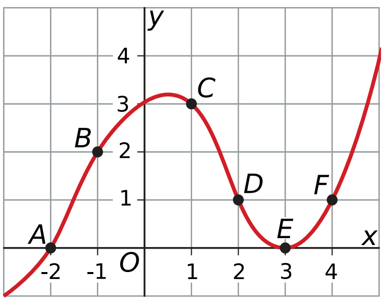
Je ziet een aantal punten op een grafiek.

a Bereken de helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de helling van de lijn door C en F.

c Bij welke getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0? (Er zijn twee mogelijkheden.)

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C.
Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval [1,4] zien?



Figuur 2.12

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 7x + 12$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,6].

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-4,9].

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Opgave 13

Bij een wielrenner in een vlakke tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 2.3

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval [0,10] en geef de betekenis hiervan.

b Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in km. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval [44,60] en geef de betekenis hiervan.

c Bereken voor het tijdsinterval [18,44] de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

d Heeft de wielrenner zijn krachten goed verdeeld? Licht je antwoord toe.

Opgave 14

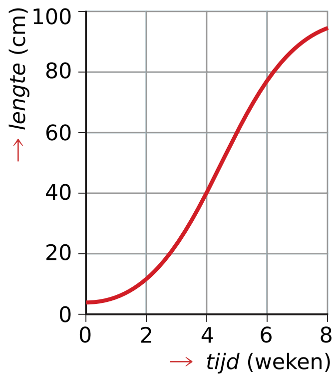
Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 15

Hier zie je een grafiek van de lengtegroei van een dahliaplantje in de loop van enkele weken.



Figuur 2.13

a Hoeveel cm per week groeit deze dahlia gemiddeld, gerekend over de eerste vier weken? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel bedraagt de groeisnelheid na drie weken? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Wanneer is de dahlia het hardst gegroeid?

d Hoe zie je dat in de grafiek? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 16

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg s (in meter) geldt de formule $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Opgave 17

Het Empire State Building in New York is ongeveer 380 m hoog. Het verhaal gaat dat een muntje dat je van die hoogte laat vallen een mens kan doden.

Met welke snelheid komt zo'n muntje op de grond?

Testen

Opgave 18

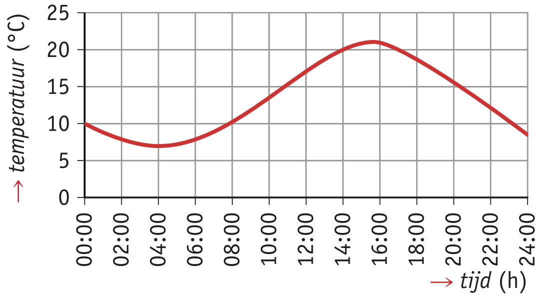
Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^4$. Bereken het differentiequotiënt op het interval [1,3].

Opgave 19

Bekijk het verloop van de temperatuur op een mooie dag in mei.

a Bepaal de gemiddelde temperatuurverandering per uur op de intervallen [2,6], [6,17] en [17,20]. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Schat de momentane temperatuurverandering om 8:00 uur.



Figuur 2.14

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 + 1$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek in het punt $(2; 3{,}4)$.

c Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij b. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

d In welk punt van de grafiek is de helling 0?

2.2 Het begrip afgeleide

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingswaarden berekenen;
- de grafiek van de afgeleide functie bepalen met behulp van GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen, stijgen en dalen van grafieken;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in m de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 2.1

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg 1

Voor de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde.
De wagen gaat steeds sneller rijden.

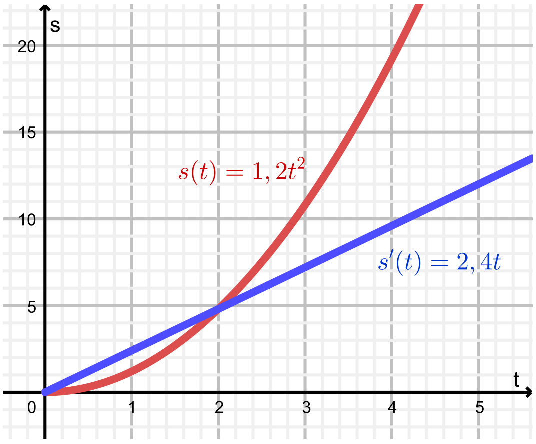
De snelheid op $t = 4$ kun je uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[4,4+h]$ als je na herleiden $h \rightarrow 0$ kiest. Je vindt dan $v(4) = 9{,}6$ m/s.
Dit differentiaalquotiënt noem je ook wel de afgeleide waarde van s voor $t = 4$ en je noteert $s'(4) = 9{,}6$.

Op dezelfde manier kun je bij elke willekeurige t-waarde de snelheid uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t,t+h]$.

Je vindt dan $v(t) = s'(t) = 2{,}4t$.

$v(t)$ is de veranderingsfunctie van $s(t)$ en geeft voor elke waarde van t de momentane verandering van s. Omdat het hier over afstand en tijd gaat, is deze functie ook de snelheidsfunctie.

Je noteert zo'n veranderingsfunctie als $s'(t)$ en hij heet de afgeleide functie. Hij beschrijft ook de helling van de grafiek voor elke waarde van t.
GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kunnen bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide functie maken. Dat noem je de hellingsgrafiek van de functie. Je ziet hier de hellingsgrafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$.



Figuur 2.2

Opgave 1

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op $[5{,}5 + h]$, waarin $h \to 0$.

c Stel zelf de formule voor $v(t) = s'(t)$ op met behulp van het differentiequotiënt op $[t{,}t + h]$.

d Maak de grafiek van de afgeleide van $s(t) = 1{,}2t^2$ met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Ga na, dat deze grafiek hetzelfde is als de grafiek van de formule bij b.

e Welke betekenis heeft $v(5) = s'(5)$?

f Hoe groot is $v(5)$?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

a Bereken $f'(5)$ met behulp van een differentiequotiënt.

b Stel de formule op voor de afgeleide functie $f'(x)$.
Maak ook de hellingsgrafiek van f en laat zien dat die past bij de afgeleide.

c Controleer je antwoord bij a door 5 in de afgeleide functie in te vullen.

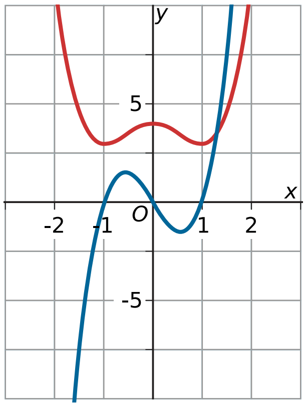
Uitleg 2

Bekijk de applet

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat dus over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide geeft de helling van de grafiek van de functie weer. Dus de grafiek van de afgeleide gaat daar ook over van positief naar negatief. Dat kun je gebruiken om de waarde van bijvoorbeeld het maximum te vinden. Hier zie je hoe dat kan.

Je ziet hier de grafiek (in het rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek is de hellingsgrafiek van f, dus de grafiek van de afgeleide f'. Als je goed kijkt, zie je dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (dit is het geval voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (dit is het geval voor $x = 0$).



Figuur 2.3

Je zoekt dus naar de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dat moet dus bij een nulpunt van de afgeleide zijn.

Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

Extremen berekenen doe je dus zo:

- Bereken voor welke x-waarden de afgeleide 0 is.
- Controleer of de afgeleide daar van positief naar negatief of andersom gaat.
- Bereken de extreme waarde door de gevonden waarden voor x in te vullen in de functie zelf.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** wat $f'(x)$ zegt over het verloop van $f(x)$.

a Wat weet je van $f'(x)$ als de grafiek van f stijgend is?

b Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x) = 0$?

c Wat gebeurt er met $f'(x)$ als de grafiek van f een minimum heeft?

d Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x)$ een maximum heeft?

Opgave 4

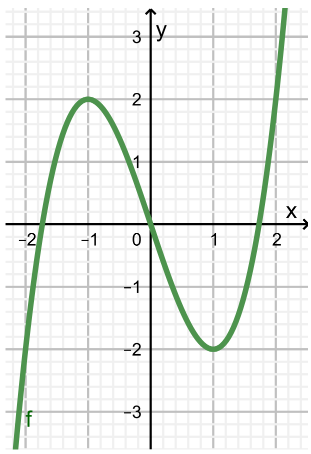
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Maak de grafiek van de afgeleide van f.

b Lees de nulpunten van de afgeleide uit de figuur af. Bekijk of er bij deze nulpunten van $f'(x)$ extreme waarden optreden (minima of maxima) voor f.

c Bereken de extremen van f.

d Ga na dat ook f' een minimum heeft.
Welke betekenis heeft dit minimum voor de grafiek van f?



Figuur 2.4

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ en die van zijn afgeleide.

a Bepaal de waarden van x waarin $f'(x) = 0$.

b Heeft de functie een extreme waarde?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het hellingsgetal van een grafiek voor een bepaalde waarde van x, zeg a, van een functie f bereken je met het differentiequotiënt op $[a,a+h]$. Je herleid dit differentiequotiënt en neemt $h \to 0$ (h mag ook negatief zijn). Als dit differentiequotiënt dan een bepaalde waarde nadert dan is die waarde

- het **hellingsgetal** of
- de **afgeleide waarde** of
- het **differentiaalquotiënt**

van $f(x)$ voor $x = a$.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je zo: $f'(a)$. Uitspraak: ‘f accent a’.

Of zo: $\left[\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right]_{x=a}$. Uitspraak: ‘dy dx als x is a’.

De afgeleide voor alle mogelijke waarden van x is $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$
Deze functie van x heet de **afgeleide (functie)** of **hellingsfunctie**.

Bekijk de applet

De afgeleide geeft bij iedere waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x. Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x. Met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kun je bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide laten maken.

Veel functies hebben **extremen**. Dat zijn waarden waarbij de functie maximaal is of juist minimaal is. Je kunt die waarden niet altijd goed uit de grafiek van een functie aflezen, bijvoorbeeld omdat die grafiek niet gemakkelijk in beeld is te krijgen. Je bepaalt ze dan zo:

- Bepaal $f'(x)$ en maak er een grafiek van.
- Bepaal de nulpunten van $f'(x)$.
- Als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat in zo'n nulpunt heeft f een maximum.
- Als $f'(x)$ van negatief naar positief gaat in zo'n nulpunt heeft f een minimum.

Als de afgeleide niet van teken wisselt in een nulpunt, is er daar geen extreme waarde. In de grafiek van f is dan vaak een buigpunt met een horizontale raaklijn te zien.

Optimaliseren is het berekenen van extremen in praktijksituaties: minimale hoeveelheid materiaal bij een gegeven inhoud, het berekenen van een maximale oppervlakte van een stuk land bij een vaste lengte van de omheining, enzovoort.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 4$.
Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie. Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f voor willekeurige x op het interval $[x, x+h]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+h)^2+4-(3x^2+4)}{h} = \frac{6xh+3h^2}{h} = 6x + 3h$$

Als $h \to 0$ krijg je de afgeleide: $f'(x) = 6x$.

Wil je nu de vergelijking opstellen van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ dan heb je het hellingsgetal nodig voor die waarde van x. De afgeleide is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x, dus het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 3$ is: $f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$

De vergelijking van de raaklijn wordt daarmee: $y = 18x + b$

$f(3) = 31$, dus $31 = 18 \cdot 3 + b$ en hieruit volgt $b = -23$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 18x - 23$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$.

a Met behulp van het differentiequotiënt op $[x, x+h]$ kun je de afgeleide van de functie $f(x)$ bepalen. Stel de formule van de afgeleide functie op. Laat duidelijk zien hoe je eraan komt.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ lijkt de grafiek te raken. Laat zien dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 7

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

Voorbeeld 2

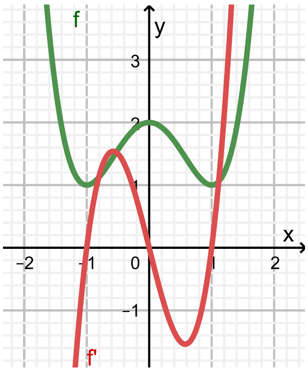
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.
Bepaal de extremen van f met behulp van een grafiek van de afgeleide.

Antwoord
Hier zie je hoe dit is gedaan met behulp van GeoGebra. Maar je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.

Je kunt aflezen dat $f'(x) = 0$ als $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$.

Of er sprake is van een maximum of een minimum of geen van beide kun je aan de grafiek van de afgeleide zien:

- Als $x = -1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: min. $f(-1) = 1$.
- Als $x = 0$ gaat f' over van positief naar negatief.
  Dat betekent dat f daar een maximum heeft: max. $f(0) = 2$.
- Als $x = 1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: min. $f(1) = 1$.



Figuur 2.5

Omdat je hier de extremen ook gemakkelijk direct uit de grafiek van de functie zelf kunt halen, lijkt het werken met zo'n afgeleide overbodig. Maar dat wordt heel anders als je straks met functies te maken krijgt waarvan de grafiek niet zo gemakkelijk in beeld komt.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de extremen van een functie kunnen worden bepaald vanuit de grafiek van de afgeleide.
Gegeven is nu de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 200$.

a Waarom krijg je nu de grafiek van f niet automatisch met de standaardinstellingen in beeld?

b Waarom krijg je de hellingsgrafiek wel gemakkelijk in beeld?

c Welke extremen heeft deze functie?

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1000 - 3x^2 + x^3$.

a Maak een grafiek van de hellingsfunctie (de afgeleide) van f.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide.

c Welke extremen heeft deze functie?

Voorbeeld 3

De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

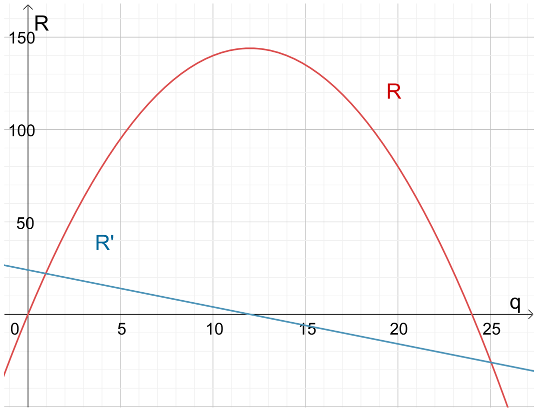
Teken de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Geef aan bij welk aantal verkochte producten de opbrengst maximaal is en leg uit hoe je dat aan de hellingsgrafiek kunt zien.

Antwoord

Omdat de afgeleide functie voor elke waarde van q de helling van de grafiek van R geeft, is de grafiek van $R'(q)$ de hellingsgrafiek van R. Maak beide grafieken in één figuur.

Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek: waar hij de horizontale as snijdt, heeft de grafiek van R een maximum. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.



Figuur 2.6

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** wordt bij een opbrengstfunctie R de grafiek van de hellingsfunctie getekend.

a Laat zien, hoe je een formule voor R' kunt afleiden

b Wat betekent het voor de grafiek van R als $R' > 0$? en als $R' < 0$?

c Laat zien dat uit $R'(q) = 0$ inderdaad volgt $q = 12$.

Opgave 11

De kosten $K(q)$ (euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Maak de hellingsgrafiek van K.

b Hoe kun je aan de hellingsgrafiek zien dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Oefenen

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken $f'(2)$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Bepaal de afgeleide functie (of hellingsfunctie) door het differentiequotiënt van f op het interval $[x, x + h]$ uit te werken en dan h naar 0 te laten naderen.

c Controleer nu je antwoord bij a door $x = 2$ in te vullen in de afgeleide functie die je bij b hebt gevonden.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

a Maak de grafiek van f'.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide en daarmee de extremen van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 14

Voor een vallend voorwerp geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden van de val.

b De snelheid na tien seconden is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 15

De winst van een bedrijf is te beschrijven met een winstformule: $W(q) = -3q^2 + 200q - 300$, waarbij q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt en W de winst in honderden euro.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze winstfunctie.

b Welke betekenis heeft $W'(50)$ voor de opbrengstfunctie?

c De fabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale winst te bereiken. Bereken deze productieomvang en de maximale winst met behulp van de afgeleide.

Opgave 16

De helling van een raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = -5x^2 + 4$ is 7.

Bereken voor welke x dit het geval is.

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 17

Bekijk de algemene formule van de afgelegde weg van een (van niet al te grote hoogte) vallend voorwerp.

a Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden. Gebruik het differentiequotiënt op $[t,t+h]$.

b Stel een formule op voor de snelheid waarmee de steen valt.

c Controleer je antwoord bij a met de formule bij b.

Opgave 18

Voor een voorwerp dat je van 500 m hoogte laat vallen geldt $h(t) = 500 - 4{,}9t^2$, waarin h de hoogte (in m) boven de grond en t de tijd in seconden is.

Met welke snelheid komt zo'n voorwerp op de grond?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval [-2,4].

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken de veranderingssnelheid van $f(x)$ voor $x = 2$.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 20

Voor een bepaalde autofabrikant geldt voor de totale opbrengst TO van de verkoop : $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro's en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uit gegaan dat alle geproduceerde auto’s ook worden verkocht.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(5)$ voor de opbrengstfunctie?

c De autofabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale opbrengst te krijgen. Bereken deze productieomvang met behulp van de afgeleide functie die je bij a heb gevonden.

2.3 Differentiëren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je door differentiëren afgeleide functies kunt bepalen;
- regels toepassen bij het differentiëren;
- raaklijnen en extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Voorkennis

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingswaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat bij functie f een afgeleide functie is te maken door

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

te herleiden, dan $h \to 0$ te nemen en te bekijken of daar iets uitkomt dat allen van h afhangt.

a Laat zien, dat $f(x) = x^2$ dan $f'(x) = 2x$ als afgeleide heeft.

b Welke betekenis heeft deze afgeleide functie?

c Laat zien, dat bij $f(x) = x^3$ hoort $f'(x) = 3x^2$.

d Welke afgeleide zal $f(x) = x^4$ hebben? Ontdek je regelmaat?

Uitleg 1

Je kunt met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de afgeleide functie gemakkelijk in beeld brengen. Alleen zijn daarvan niet altijd de nulpunten goed af te lezen. Je wilt een formule voor de afgeleide.

Je kunt van elke functie de afgeleide bepalen door het differentiequotiënt op het interval $[x, x+h]$ te berekenen en dan $h \to 0$ te nemen.

Voor $f(x) = x^2$ gaat dit zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt $f'(x) = 2x$.

Voor $f(x) = x^3$ gaat het zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} =$
$3x^2 + 3xh + h^2$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt: $f'(x) = 3x^2$

Zo vind je bij $f(x) = x^4$ de afgeleide $f'(x) = 4x^3$

Nu zie je wellicht de regelmaat al.

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Er zijn meer regels:

- Van de constante functie $f(x) = c$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.
- Als $f(x) = c \cdot x^n$ dan is $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$
- Als een functie bestaat uit een optelling/aftrekking van meerdere functies is de afgeleide de optelling/aftrekking van de afgeleiden.

De afgeleide van $f(x) = 3x^2 - 25x + 10$ bepaal je dus zo: $f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 25x^{1-1} + 0 = 6x - 25$.

Dit noem je differentiëren.

Opgave 1

Bepaal de afgeleide functie van de volgende functies.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 12x^2 + 4x - 2$

b $g(x) = -4x^3 + 5x$

c $h(x) = 5x^{10} + 2x^5 - 3x^3$

Uitleg 2

Je hebt gezien, dat:

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Deze differentieerregel blijkt ook op te gaan voor gebroken en/of negatieve exponenten.
Wiskundigen hebben bewezen dat deze regel geldt voor alle mogelijke exponenten:

Als $f(x) = x^r$ dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Dit heet de algemene machtsregel voor differentiëren.

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Door de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{-1}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je hoe de algemene machtsregel kan worden toegepast bij het differentiëren.

a Bepaal zelf de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

b Bepaal de afgeleide van $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

c Bepaal de afgeleide van $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a Bepaal de afgeleide $f'(x)$.

b Bereken de extreme waarden van f met behulp van de afgeleide.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Met het differentiaalquotiënt is de afgeleide van elke functie te bepalen (als die bestaat). Dat kan wel heel bewerkelijk zijn. Door voor bepaalde soorten functies de afgeleide te bepalen ontstaan de **differentieerregels**. Het gebruik van deze regels heet **differentiëren**.

Hier zie je enkele differentieerregels:

- **machtsregel**:
  als $f(x) = c \cdot x^r$ is $f'(x) = c \cdot r x^{r-1}$ voor elke waarde van c en voor elke waarde van r
- **constante-regel**:
  als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **somregel**
  als $f(x) = u(x) + v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
  als $f(x) = u(x) - v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

De afgeleide functie van $y = f(x)$ kun je schrijven als: $f'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $y'(x)$.

Je kunt met behulp van differentiëren bij functies een afgeleide bepalen.
Daarmee kun je bij een gegeven waarde van x de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie berekenen.
Ook kun je er extreme waarden van de functie mee berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met de afgeleide.

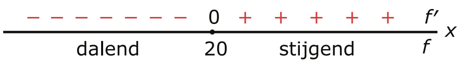
$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Kies zowel links als rechts van $x = 20$ een getal en vul dit in de afgeleide in om te kijken of de afgeleide van teken wisselt. Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en dus negatief en $f'(25) = 762500$ en dus positief.

In schema:



Figuur 2.1

f' gaat voor $x = 20$ over van negatief naar positief.

En dus geldt dat f een minimum heeft voor $x = 20$.
Omdat $f(20) = -12012345$ schrijf je: min. $f(20) = -12012345$.

Opgave 5

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 10x^3 - 60x + 100$

b $g(x) = 15 + 2x - 5x^2 - 10x^4$

c $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$

d $A(d) = \frac{1}{2}\pi d^2 + 10\pi d$

e $k(x) = x^2(x - 4)$

f $P(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van de afgeleide van f. Geef er de plaats van de extremen in aan en bereken die extremen.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

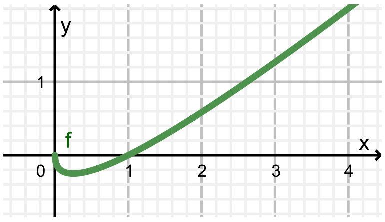
b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Voor welke waarden van x hebben beide functies dezelfde helling?

Voorbeeld 2

Je ziet hier de grafiek van de functie $f(x) = x - \sqrt{x}$.

Bereken het exacte minimum van f.



Figuur 2.2

Antwoord

Deze functie heeft een minimum. Je kunt dit niet nauwkeurig aflezen uit de grafiek. Je werkt daarom met de afgeleide.

Eerst schrijf je $f(x) = x - \sqrt{x} = x - x^{\frac{1}{2}}$.

Differentiëren: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ en dus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.

Dit geeft $2\sqrt{x} = 1$ en $x = 0{,}25$.

Dus: min. $f(0{,}25) = -0{,}25$.

Opgave 8

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2x$

b $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

d $K(p) = \frac{300+5p}{p}$

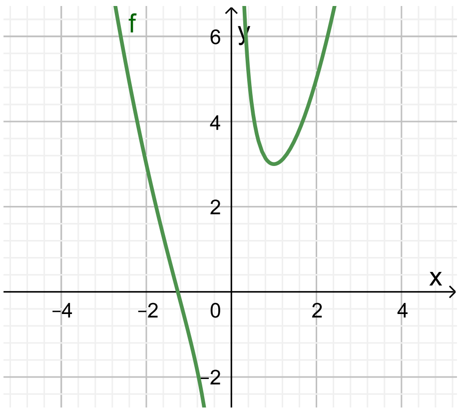
Opgave 9

Je ziet hier een deel van de grafiek van $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

De functie lijkt alleen één minimum te hebben en geen maximum.

a Laat met behulp van de afgeleide zien dat f inderdaad precies één extreme waarde heeft.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 2.3

Voorbeeld 3

Een timmerman maakt voor een klant een houten kist met deksel. Voor die kist gebruikt hij 192 dm^2 hout. De lengte van de kist moet twee keer zo groot zijn als de breedte. Bij welke afmetingen heeft de doos een maximale inhoud?

Antwoord

Neem aan dat de kist de vorm van een balk heeft.

De inhoud van een balk met afmetingen $l \times b \times h$ is: $I = l \cdot b \cdot h$.

Neem je $b = x$ dan is $l = 2x$, dus $I = 2x^2h$.

Voor de oppervlakte van de kist geldt $A = 4x^2 + 6xh = 192$.

Je wilt de inhoud maximaliseren. Dus maak je daarvan een functie door beide formules te combineren.

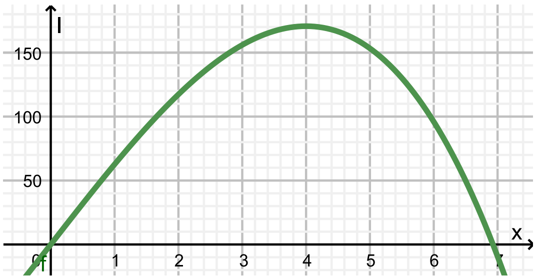
Uit $4x^2 + 6xh = 192$ volgt $h = \frac{192-4x^2}{6x}$

De inhoud (in dm^3) is dan: $I = 2x^2h = 2x^2 \cdot \frac{192-4x^2}{6x} = 64x - 1\frac{1}{3}x^3$.

Bekijk de grafiek van $I(x)$.

Omdat $x > 0$ heeft de grafiek van I alleen een maximum, dat je met behulp van differentiëren kunt bepalen.
$I'(x) = 64 - 4x^2 = 0$ geeft $x^2 = 16$ en dus $x = 4$.

Dus als $x = 4$ is de inhoud maximaal. Dit betekent dat als de kist 8 dm lang, 4 dm breed en $5\frac{1}{3}$ dm hoog is, de inhoud maximaal is.



Figuur 2.4

Opgave 10

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben precies de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm. De fabrikant vraagt zich nu af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat er dus om de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet hij kiezen?

a Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

b Noem de zijde van het vierkante grondvlak x. Druk de hoogte h uit in x.

c Druk de inhoud I uit in x.

d Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

e Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud. Geef je antwoord in centimeters afgerond op één cijfer achter de komma.

Oefenen

Opgave 11

Bepaal eerst de afgeleide van de gegeven functie door differentiëren. Bepaal vervolgens ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(1, y)$.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

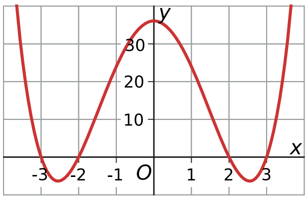
d $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

e $TK(p) = 8{,}5 + \frac{200}{p^2}$

f $h(x) = 2\sqrt{x} - 4x$

Opgave 12

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.



Figuur 2.5

a Bereken de nulpunten van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los exact op: $f'(x) = 0$.

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Opgave 13

Als een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek, dan is zijn baan parabolisch wanneer je de luchtweerstand verwaarloost. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

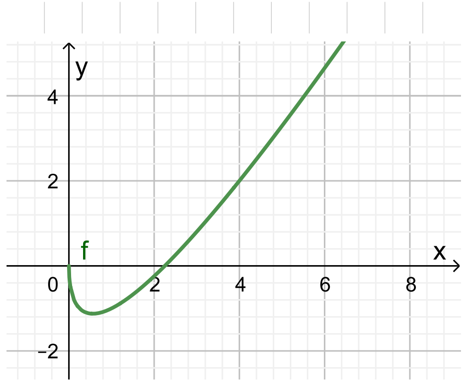
d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 14

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.



Figuur 2.6

Opgave 15

Van een balkvormige kartonnen doos is de lengte gelijk aan de breedte. In verband met de beschikbare hoeveelheid karton moet de oppervlakte van elke doos 120 dm^2 zijn.

Bereken bij welke afmetingen de doos een maximale inhoud heeft.

Toepassen

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van waarden waarbij iets zo goed mogelijk functioneert, zo groot of zo klein mogelijk is, zo efficiënt mogelijk werkt, en dergelijke.

Je kunt dan bijvoorbeeld denken aan het omheinen van een zo groot mogelijk stuk land met een bepaalde beschikbare hoeveelheid materiaal om die omheining tot stand te brengen. Je optimaliseert dan de oppervlakte.

Opgave 16: Sportveld binnen atletiekbaan

Om een rechthoekig sportveld ligt een atletiekbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de atletiekbaan is 400 meter. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken exact de afmetingen van dit sportveld.

Figuur 2.7

Opgave 17: Een weiland tegen de stal

Een boer omheint een rechthoekig weiland met een hek van 200 meter lengte. De stal grenst aan het weiland en heeft een lengte van 12 meter. Waar de stal staat, hoeft geen omheining te komen.

Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van het omheinde weiland.

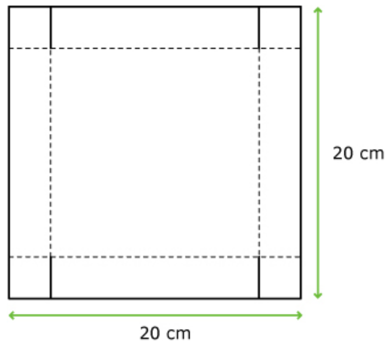
Opgave 18: Maximaal bakje

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat de zijde van het ingeknipte vierkantje x wordt genoemd. Welke formule kun je dan opstellen voor de inhoud I van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van dit bakje met behulp van differentiëren. Rond af op hele cm^3.

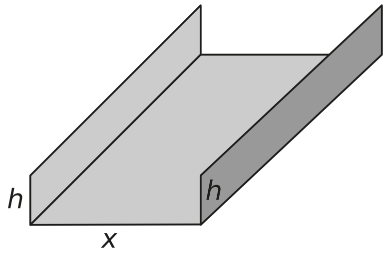


Figuur 2.8

Opgave 19: Goten in ontwikkelingslanden

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.

Hoeveel water kan zo'n goot maximaal bevatten?



Figuur 2.9

Testen

Opgave 20

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $g(x) = 3x^4 - \frac{1}{5}x^2$

c $h(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $k(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$

Opgave 21

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

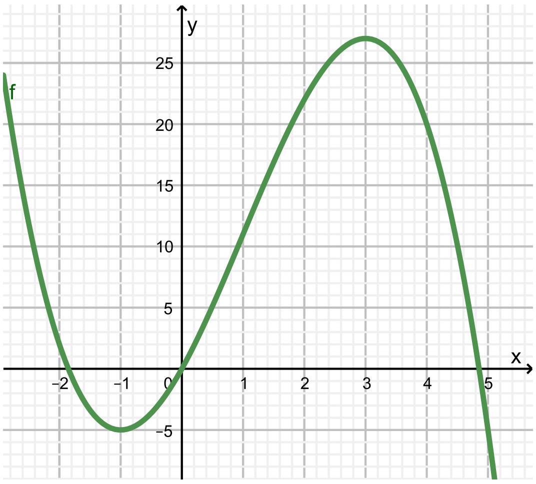
Opgave 22

Dit is (een deel van) de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt (0,0) met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (0,0).

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?



Figuur 2.10

2.4 De kettingregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de uitgebreide machtsregel en de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren;
- met behulp van de afgeleide functie hellingswaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).

Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Soms bestaat een functievoorschrift uit een serie geschakelde functies.

Bijvoorbeeld: $S(x) = (3x+1)^2$.
Een functiewaarde $S(x)$ bereken je in twee stappen met functies g en f:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(g(x)) = (g(x))^2$

De functie $S(x) = (3x+1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x))$ heet een samengestelde functie of kettingfunctie:

$$x \xrightarrow{g(x)} 3x+1 \xrightarrow{f(g(x))} (3x+1)^2$$

Deze kettingfunctie kun je niet zo maar differentiëren met de machtsregel:

$S'(x) \neq 2(3x+1)^1 = 6x + 2$

Dat zie je door bij de functie S eerst de haakjes weg te werken en dan pas te differentiëren.
$S(x) = 9x^2 + 6x + 1$ en $S'(x) = 18x + 6$

Er is ook een andere manier.

Schrijf $g(x) = 3x + 1 = u$ en $f(u) = u^2$. Dan is $S(x) = f(g(x))$.

Het differentiëren van S gaat als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $f(u)$: $f'(u) = 2u$.
- Bepaal de afgeleide van $g(x)$: $g'(x) = 3$.
- De afgeleide van S is het product van bovenstaande twee afgeleides:

  $S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 2u^1 \cdot 3 = 2 \cdot (3x+1)^1 \cdot 3 = 6(3x+1) = 18x + 6$

In het algemeen geldt dat als $S(x) = f(g(x))$ dan is $S'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit is de kettingregel voor differentiëren.

Opgave 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \left(3x^2 + 1\right)^2$

a Waarom is f een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?

b De functie $f(x)$ kan geschreven worden als $f(u) = f(g(x))$. Geef $g(x) = u$ en $f(u)$.

c Bepaal $g'(x)$ en $f'(u)$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x)$ met de kettingregel.

Opgave 2

Gegeven is functie: $g(x) = \left(3x^2 + 2x\right)^4$

a Deze functie kun je zien als een samenstelling van twee functies. Welke twee functies?

b Bepaal met behulp van de kettingregel de afgeleide van g.

Uitleg 2

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Het domein van functie f is $[0, \rightarrow\rangle$. Maar bij de afgeleide is $x = 0$ geen toegelaten waarde. De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale raaklijn. Zo'n raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ kun je herleiden naar $f(x) = \left(2x^2 + 1\right)^{0,5}$.
Je kunt hier geen haakjes wegwerken. Wel kun je de functie als kettingfunctie beschouwen en met de kettingregel differentiëren.

Schrijf $g(x) = 2x^2 + 1 = u$ en $f(u) = \sqrt{u}$, dan is

- $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
- $g'(x) = 4x$

Dus $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Noem $g(x) = x^2 - 4 = u$, dan is $f(u) = \sqrt{u}$.

a Schrijf functie f als een machtsfunctie en differentieer de functie.

b Functie $f(x)$ is een kettingfunctie. Differentieer de functie.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

a Neem $g(x) = x^2+3 = u$, schrijf het functievoorschrift op van $f(u)$ en differentieer deze functie.

b Differentieer $f(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat:

$x \xrightarrow{g(x)} \ldots \xrightarrow{f(\ldots)} f(g(x))$

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als f de vorm $f(g(x))$ heeft, dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (1 - 2x)^4$.

Antwoord

Dit is een samengestelde functie $f(x) = f(g(x))$.

Schrijf $g(x) = 1 - 2x = u$ en $f(u) = u^4$.

- $f'(u) = 4u^3$
- $g'(x) = \text{-}2$

$f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4u^3 \cdot \text{-}2 = \text{-}8(1 - 2x)^3$

Dus $f'(x) = \text{-}8(1 - 2x)^3$.

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = (3x-1)^8$

a Neem $g(x) = 3x - 1 = u$. Functie f heeft de vorm $f(u)$. Schrijf de voorschriften van f en g op.

b Laat zien dat $f'(x) = 24(3x-1)^7$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(u) = \sqrt{u}$ en $u = g(x) = x^2 + x$

a Schrijf het functievoorschrift op van $f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van $f(x)$.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$.

Antwoord

Neem $u = g(x) = 1 - x$ en $f(u) = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$. Dan is

- $f'(u) = -2u^{-3}$
- $g'(x) = -1$

En dus is $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = -2u^{-3} \cdot -1 = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

c Toon aan dat f een maximum heeft voor $x = 0$ en bereken dit maximum.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$. Bepaal ook het bereik van functie f.

Antwoord

Schrijf de wortelvorm als een macht:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$$

Differentieer f met de kettingregel:

$f'(x) = \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$

$-x \cdot (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

De gevraagde richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) is:

$f(x) = \sqrt{x}$ $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

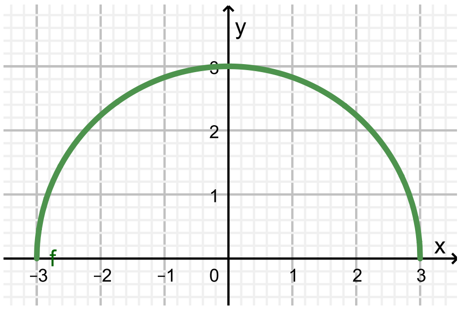
Eigenlijk zie je aan de grafiek wel meteen wat het bereik van f is.

Maar voor de zekerheid bereken je het domein en het maximum van f.

Het domein is $[-3,3]$.

Het maximum vind je uit $f'(x) = 0$ en dit geeft $x = 0$.

Omdat $f(0) = 3$ wordt het bereik $B_f = [0,3]$.



Figuur 2.1

Opgave 8

Bekijk de functie in **Voorbeeld 3**.

a Hoe bepaal je het domein van f uit het functievoorschrift?

b Waarom levert $f'(x) = 0$ de waarde $x = 0$ op?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van de afgeleide het maximum van f.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Oefenen

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = (x^2 - 100)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

c $h(x) = 25(2 - 4x)^3$

d $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(5 + 2r)^2$

Opgave 11

Gegeven is $f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x}$. Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ en stel de vergelijking van de bijbehorende raaklijn op.

Opgave 12

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \sqrt{3x}$

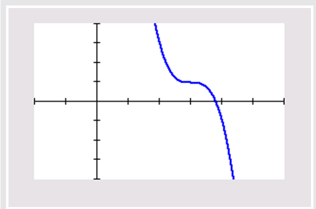
b $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $h(x) = (1 - \sqrt{x})^2$

d $j(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$ die is gemaakt met een grafische rekenmachine.



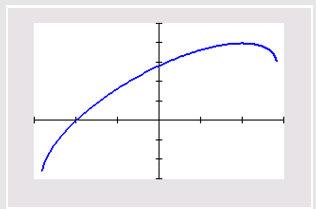
Figuur 2.2

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve voor $x = 3$. Toon aan dat dit zo is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de y-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$ zoals die met een grafische rekenmachine is gemaakt.



Figuur 2.3

a Bepaal het domein van f.

b Bereken het bereik van f.

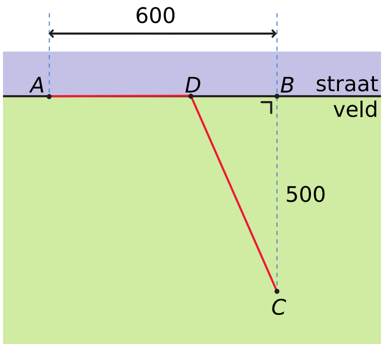
c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

Toepassen

Opgave 15: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt B. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C;
- direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar punt C;
- of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 2.4

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

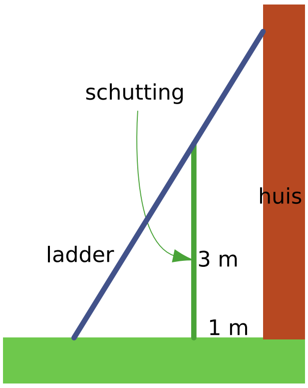
c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Opgave 16: Ladder over een schutting

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 2.5

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6(1+2x)^3$

b $y(x) = (1-4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10+4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Bepaal het bereik van deze functie f.

e Bereken de hellingswaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

2.5 De product- en de quotiëntregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de productregel en de quotiëntregel voor het differentiëren;
- alle differentieerregels door elkaar gebruiken.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren, ook met de kettingregel en de uitgebreide machtsregel;
- met behulp van de afgeleide functie hellingswaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven de functies $u(x) = x^3$ en $v(x) = x^4$.

Bekijk eerst de functie $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

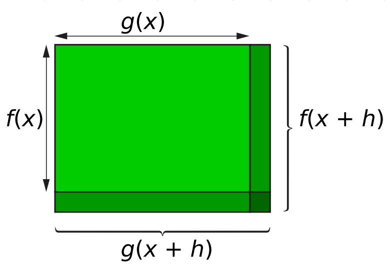
a Laat zien dat $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$.

Bekijk nu $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

b Laat zien dat je niet de afgeleide van deze functie kunt bepalen door de afgeleide van de teller te delen door de afgeleide van de noemer.

c Wat betekent dit voor het differentiëren van functies die bestaan uit het product of het quotiënt van twee functies?

Uitleg 1



Figuur 2.1

Als de lengte en de breedte van een rechthoek functies van x zijn, dan is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$
Verander de oppervlakte van deze rechthoek door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte is:
$A(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$

De toename van $A(x)$ bestaat uit drie rechthoekjes:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x + h) - g(x))$
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x + h) - f(x))$
- een klein vierkantje met een oppervlakte die 0 wordt als $h \to 0$

Deel je die toename door h, dan geldt als $h \to 0$:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + 0$$

En voor $h \to 0$ is dit:
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
Dit is de productregel, een differentieerregel om de afgeleide van een productfunctie te bepalen.

Opgave 1

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^5$

a Schrijf de productfunctie $P(x)$ van deze twee functies zo kort mogelijk.

b Bepaal $P'(x)$.

c Ga na dat $P'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

De functie $A(x) = 6x^2(x^3 - 5x)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g.

d Bepaal de afgeleide van A met behulp van de productregel.
Is de productregel hier noodzakelijk?

Opgave 2

Gegeven is de functie: $h(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{x}$

a Je kunt functie h zien als het product van twee functies. Welke twee?

b Bepaal $h'(x)$ met behulp van de productregel.

Uitleg 2

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen:

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$. Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$.
- $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ is een deling van $t(x) = 2x$ en $n(x) = x - 1$ die niet te herleiden is tot een machtsfunctie. Er blijft altijd een gebroken functie over.

Een functie die bestaat uit een deling (quotiënt) van twee functies heet een quotiëntfunctie.
Functie f kun je na de vereenvoudiging differentiëren.
Bij functie g ligt dat anders. Maar je kunt de afgeleide bepalen met de productregel:

- Schrijf de functie als: $g(x) = 2x \cdot (x-1)^{-1}$
- Pas de productregel toe:

  $g'(x) = 2 \cdot (x-1)^{-1} + 2x \cdot -1(x-1)^{-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2}$

Je kunt een gebroken functie differentiëren. Je krijgt een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen:

$g'(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Het kan sneller met de volgende regel:

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Dit is de quotiëntregel. Je kunt die regel zelf vinden door $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ te schrijven en daarop de productregel toe te passen. Een mooie puzzel...

Opgave 3

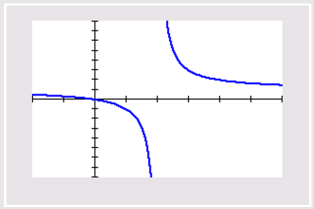
Bekijk de functie g in **Uitleg 2**.

a Bepaal de afgeleide van de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ afzonderlijk.

b Ga na dat je $g'(x)$ kunt berekenen met de quotiëntregel.

Opgave 4

Met een grafische rekenmachine is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$ gemaakt. Dit is een quotiëntfunctie.


Figuur 2.2

a Bepaal de afgeleide van deze functie met behulp van de quotiëntregel.

b Hoe kun je aan de afgeleide zien, dat deze functie altijd dalend is (behalve voor $x = 2$)?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

De productregel gebruik je vaak in combinatie met de voorgaande differentieerregels. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

De functie f is de teller van de breuk, de functie g is de noemer van de breuk.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
De quotiëntregel komt vaak in combinatie met andere differentieerregels voor. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $u(x) = 2x + 1$ waarvoor geldt: $u'(x) = 2$
- $v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ waarvoor geldt: $v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

De afgeleide van f vind je door de productregel toe te passen:

$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$

Je kunt ook eerst de haakjes van functie f wegwerken en zonder productregel differentiëren.

Opgave 5

Bekijk de functie die in **Voorbeeld 1** is gegeven.

a Probeer eerst zelf de afgeleide te vinden met behulp van de productregel.

b Bepaal de afgeleide van f ook door eerst de haakjes weg te werken.
Laat zien, dat je hetzelfde krijgt als bij a en in het voorbeeld.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 6

Bepaal met de productregel de afgeleide van:

a $f(x) = \left(x^2+1\right) \cdot \sqrt{x}$

b $K(p) = \frac{1+3p}{p^2}$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1+2x}$
Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek in het punt (0,0).

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel en de kettingregel:

$f(x) = x \cdot (1+2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot (1+2x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden niet nodig: $f'(0) = 1$.

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in (0,0) is: $y = x$.

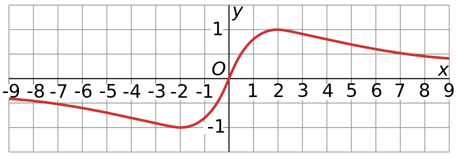
Opgave 7

Gegeven is functie $f(x) = 2x\sqrt{3x+4}$. Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt (0,0) op.

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 2.3

Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Een breuk kan alleen op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).

Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
De oplossing van deze vergelijking is: $x = -2 \vee x = 2$ (de noemer wordt bij die waarden niet 0).

De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Oefenen

Opgave 9

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \left(x^3 + 6\right)\left(4x^2 - 5x\right)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

c $h(x) = 3x(x+5)^4$

d $j(x) = x \cdot \sqrt{5+2x}$

e $k(x) = x - \sqrt{5+2x}$

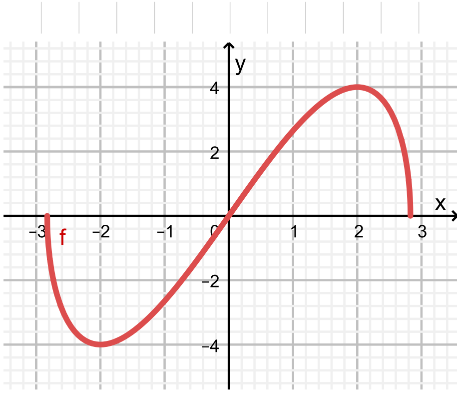
Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (0,0).



Figuur 2.4

Opgave 11

Differentieer.

a $f(x) = \frac{x}{x-3}$

b $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $h(x) = \frac{2x^3-10x^2+60x+120}{x}$

d $j(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

e $k(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

f $l(x) = 200x + 400 + \frac{2000}{x}$

Opgave 12

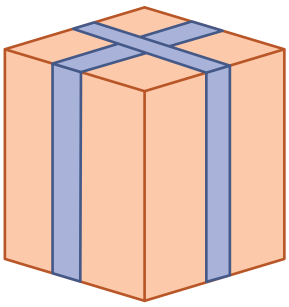
Gegeven is functie: $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$

a Bereken exact de extremen van f.

b Stel exact de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 13

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 2.5

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

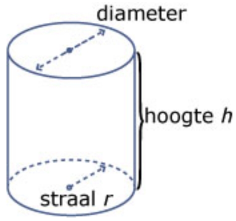
b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 14: Literblik

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Voor het volume V van zo'n blik geldt $V = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte aan blik geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.



Figuur 2.6

a Neem alle afmetingen in cm en laat zien, dat $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

b Stel een formule op voor de blikoppervlakte A als functie van r

c Bereken voor welke waarde van r de blikoppervlakte minimaal is.

Opgave 15: Poster

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.

c Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x dm. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x.

d Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.

e Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

Testen

Opgave 16

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x(1+2x)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1-t^2}$

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

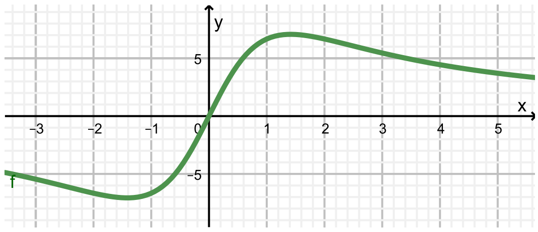
b $H(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Opgave 18

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de grootste waarde die de richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt van de grafiek van f kan hebben.



Figuur 2.7

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Differentiëren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- gemiddelde verandering en differentiequotiënt — momentane verandering en differentiaalquotiënt
- differentiaalquotiënt en afgeleide waarde — afgeleide functie
- differentiëren — somregel, constante-regel en machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie en productregel — gebroken functie en quotiëntregel

Activiteitenlijst

- gemiddelde verandering over een interval berekenen met een differentiequotiënt — momentane verandering berekenen met een differentiaalquotiënt
- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van een differentiaalquotiënt — de vergelijking van een raaklijn aan een grafiek opstellen
- differentiëren met de basisregels — de extreme waarden van een functie berekenen met behulp van de afgeleide
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel en met de quotiëntregel

Testen

Opgave 1

Differentieer.

a $f(x) = 2(3x - 6)^8$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 4x\sqrt{2x + 1}$

d $j(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$

e $k(x) = \frac{x^2 + 1}{4x}$

f $l(x) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4x}$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f. Rond af op twee decimalen.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ snijdt de y-as in punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$

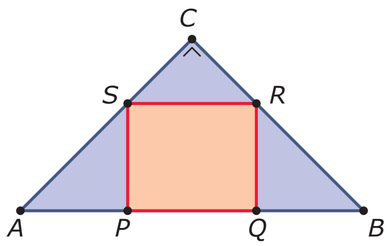
a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b In welke punt(en) is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn $y = \frac{5}{24}x - 5$?

Opgave 4

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; $AB = 16$ cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



Figuur 2.1

Opgave 5

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm?

Toepassen

Opgave 6: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

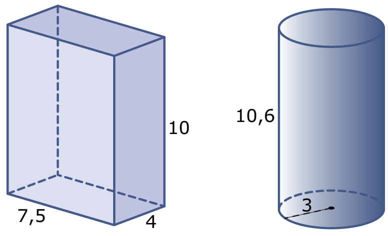
Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 7: Warmtebalans



Figuur 2.2

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking. Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.

Er geldt: $F = \frac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.
We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. In de figuur zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.
Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank. De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

a Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).
De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \frac{8000}{\pi r^2}$. Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

b Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
'De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.'
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \frac{2}{r} + \frac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

c Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website `www.math4all.nl`.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl www.math4mbo.nl