Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel specifiek (KS 1349)

Katern 3

Inhoud

Werken met e
Goniometrische functies

Context College

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Werken met e

1.1 Het getal e

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het getal e kennen;
- het getal e gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële functies;
- werken met logaritmen met grondtal e.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In GeoGebra, of Desmos, of met een grafische rekenmachine kun je van een functie $f(x)$ de afgeleide $f'(x)$ in beeld brengen zonder die afgeleide te berekenen.

Breng van $f(x) = 2^x$ de afgeleide in beeld, noem hem $g(x)$.

Maak ook de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Wat valt op als je de grafiek van f vergelijkt met die van g?

b Hoe kun je nu de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ verklaren?

c Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?

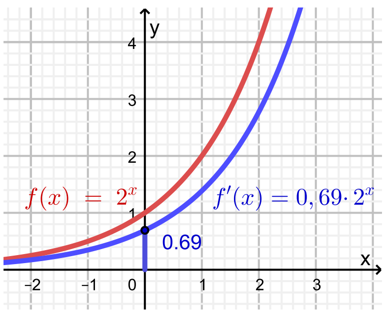
d Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

Uitleg

Bekijk de applet.

Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = 1$, dan hebben deze functies de vorm $f(x) = g^x$. In de figuur zie je zo'n functie f met de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek. De helling van de grafiek hangt af van de grootte van g. Neem je $x = 0$, dan wordt $f'(0)$ groter als g groter wordt.
De helling is voor elke x recht evenredig is met $f(x)$, dus $f'(x) = c \cdot g^x$.
En $c = f'(0)$.

- Voor $g = 2$ geldt: $c = f'(0) \approx 0{,}69$.
  Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c = f'(0) \approx 1{,}10$.
  Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$.



Figuur 1.1

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2{,}7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π. Dit getal heeft de letter e gekregen: $\mathrm{e} \approx 2{,}71828...$
Als $g = \mathrm{e}$ dan vallen de functie en de afgeleide samen, ze zijn dan gelijk.

Dus als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies.
Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

Lees eerst de **Uitleg** goed door.
In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en zijn afgeleide met behulp van GeoGebra, of Desmos.
Laat zien dat $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1{,}10$.

b Bekijk de grafiek van $f(x) = 2{,}5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c.

c Doe ditzelfde ook voor $f(x) = 2{,}7^x$ en $f(x) = 2{,}8^x$.

d Er is een grondtal g waarvoor $c = 1$. Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Als het grondtal van de functie $f(x) = g^x$ gelijk is aan $\mathrm{e} \approx 2{,}7182...$ dan is de afgeleide gelijk aan de functie zelf. Dus:

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$ dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

a Maak de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.

b Hoe groot is de helling van deze grafiek in (0,1)?

c Waar in de grafiek vind je het getal e?

d Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ in het punt $(1, \mathrm{e})$? Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a Welke asymptoot heeft die grafiek?

b Los met behulp van de grafiek op $\mathrm{e}^x = 10$.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $\mathrm{e}^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^{\mathrm{e}}\log(10)$.

In plaats van $x = {}^{\mathrm{e}}\log(...)$ wordt in de wiskunde $\ln(...)$ gebruikt.
Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(...)$.

c Laat zien dat $\ln(10)$ dezelfde waarde voor x oplevert als bij b.

d Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $\mathrm{e}^x = 20$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen.
Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

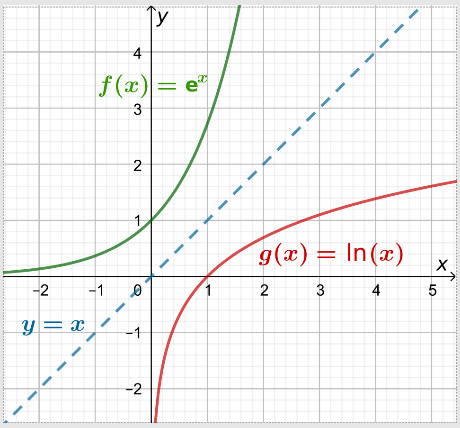
Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.
Een benadering voor e is: e ≈ 2,71828...

Als $f(x) = \text{e}^x$, dan is $f'(x) = \text{e}^x$.

Met $f(x) = \text{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij.

Ook nu is $\text{e}^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^{\text{e}}\log(a)$.
In plaats van ${}^{\text{e}}\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.
De functies $y = \text{e}^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.



Figuur 1.2

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $f(x) = \text{e}^x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.
Los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord

Deze grafiek is met GeoGebra gemaakt, je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.

Voor de raaklijn:

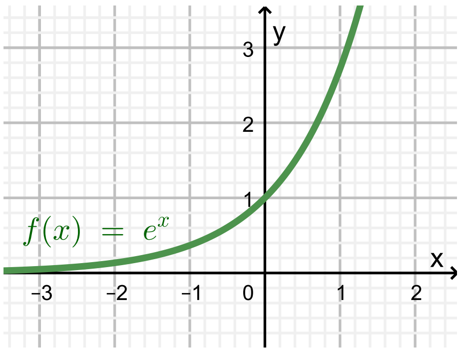
- $f'(x) = \text{e}^x$, dus $f'(2) = \text{e}^2$.
  De raaklijn wordt $y = \text{e}^2 \cdot x + b$.
- $f(2) = \text{e}^2$ en dit vul je in de vergelijking in: $\text{e}^2 = \text{e}^2 \cdot 2 + b$.
  Dit geeft $b = -\text{e}^2$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = \text{e}^2\, x - \text{e}^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarde van x bepalen waarvoor $\text{e}^x = 3$

Dit geeft: $x = \ln(3)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $x \leq \ln(3)$.



Figuur 1.3

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.

b Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.

c Los op: $f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $2^x = \frac{1}{8}$

b $e^x = \frac{1}{e^3}$

c $5\,e^x = 125$

d $e^x = e\sqrt{e}$

Voorbeeld 2

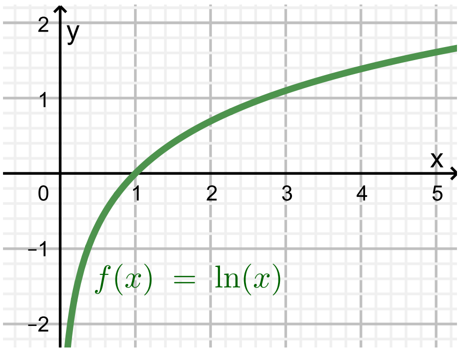
Bekijk de grafiek van $f(x) = \ln(x)$.
Los in twee decimalen nauwkeurig op: $f(x) \leq 1{,}5$.

Antwoord

Omdat $\ln(x) = {}^{e}\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.
De verticale asymptoot is $x = 0$.

$\ln(x) = {}^{e}\log(x) = 1{,}5$ geeft $x = e^{1{,}5}$.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $0 < x \leq e^{1{,}5}$.
In twee decimalen nauwkeurig $0 < x \leq 4{,}48$.



Figuur 1.4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?

b Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.

c Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Voor de groei van een hoeveelheid bacteriën heeft een onderzoeker deze formule opgesteld:

$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{0,69t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

Wat is de betekenis van $N(0)$?
Laat zien dat het aantal bacteriën volgens deze formule elk uur ongeveer verdubbelt.
De groeisnelheid van deze bacteriën verandert steeds. Hoe groot is die groeisnelheid op $t = 0$ als $N(0) = 60$?

Antwoord

$N(0)$ is het aantal bacteriën op $t = 0$.
Immers op $t = 0$ is het aantal bacteriën: $N(0) \cdot \mathrm{e}^0 = N(0)$.

Je kunt de groeifactor g per uur bepalen door de formule in de vorm $N(t) = N(0) \cdot g^t$ te schrijven:

$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{0,69t} = N(0) \cdot \left(\mathrm{e}^{0,69}\right)^t \approx N(0) \cdot 1,99^t$

Je ziet dat de groeifactor per uur ongeveer 2 is.

Voor de groeisnelheid heb je de afgeleide nodig. Denk daarbij om de kettingregel.

$N(t) = 60 \cdot \mathrm{e}^{0,69t}$ geeft $N'(t) = 60 \cdot \mathrm{e}^{0,69t} \cdot 0,69 = 41,4 \cdot \mathrm{e}^{0,69t}$

De groeisnelheid op $t = 0$ is dus $N'(0) = 41,4$ bacteriën per uur.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.
Voor een andere soort bacteriën geldt de formule $N(t) = 50 \cdot \mathrm{e}^{1,10t}$.

De betekenis van N en t is hetzelfde als in het voorbeeld.

a Hoeveel bedraagt nu de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën voor $t = 2$.

Opgave 8

Het verloop van de populatie bijen in West-Europa kan volgens wetenschappers worden beschreven door de formule:

$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-0,01t}$

Hierin is:

- N het aantal bijen in een bepaald gebied
- t de tijd in jaren

$N(0) = 12 \cdot 10^3$ is het aantal bijen in een bepaald gebied op $t = 0$.

a Bereken de groeifactor per jaar van de bijenpopulatie in dit gebied.
Hoe kun je aan de formule zien dat er van verval sprake is?

b Bereken na hoeveel jaar de bijenpopulatie in dit gebied volgens de gegeven formule zou zijn gehalveerd.

c Bereken ook de groeisnelheid van de bijenpopulatie in dit gebied op $t = 0$.
Hoe kun je aan die groeisnelheid zien dat er van verval van de populatie sprake is?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{x}$.

a Maak de grafiek van f en lees daaruit de oplossing van $f(x) = 12$ af.

b Los $f(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

a Maak de grafiek van g en lees daaruit de oplossing van $g(x) = 12$ af.

b Los $g(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$.

Opgave 11

India had in 2007 naar schatting 1,129 miljard inwoners.
In de voorgaande periode bedroeg de bevolkingsgroei gemiddeld 1,9% per jaar.

Hierbij kun je een groeimodel opstellen zoals dit:

$N(t) = 1{,}129 \cdot 10^{9} \cdot \mathrm{e}^{0{,}019t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid inwoners van India
- t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2007

a Laat zien dat deze formule overeen komt met het gegeven groeipercentage.

b Hoeveel inwoners zal India in 2027 hebben als de groei zo door gaat?

c In welk jaar zal India volgens dit groeimodel de 2 miljard inwoners overstijgen?

d Hoeveel bedraagt de groeisnelheid van de bevolking van India in 2020 volgens de gegeven formule?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $e^x = 3$

b $e \cdot x = 3$

c $\ln(x) = 3$

d $2 \cdot e^{0,1x} = 40$

Opgave 13

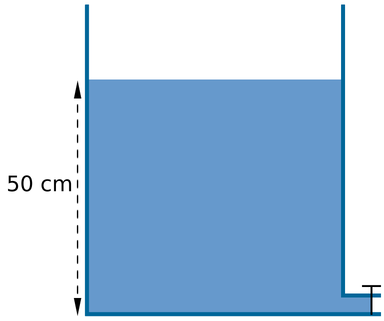
Een rechthoekige open bak is tot op een hoogte van 0,5 m gevuld met water. In de bodem van de bak is een kraan gemonteerd die op $t = 0$ wordt open gezet. Het water loopt uit het vat. De waterhoogte h neemt steeds langzamer af. Er geldt:

$h(t) = 0,5 \cdot e^{k \cdot t}$

Hierin is:

- h de waterhoogte in m
- t de tijd in minuten

Om k te berekenen wordt een meting verricht: op $t = 5$ is de waterhoogte $h = 0,25$ m.



Figuur 1.5

a Bereken hiermee de waarde van k tot op twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken hoeveel minuten na het openen van de kraan de waterhoogte lager dan 0,1 m is.

c Als je de uitstroomopening groter maakt, wordt k dan een groter getal of juist een kleiner getal?

Toepassen

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan, koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

Als een fles melk uit de koelkast wordt gehaald en een tijdje in een warmere kamer staat, warmt de melk langzaam op. Maar ze wordt nooit warmer dan de kamertemperatuur. Hoe verloopt die opwarming precies?

Figuur 1.6

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Opgave 14

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80 °C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$T(t) = 20 + 60 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}22t}$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

a Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80 °C heeft.

b Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Opgave 15

Een glas melk heeft een temperatuur van 6 °C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$T(t) = 20 - 14 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

a Ga na dat de melk volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 6 °C heeft.

b Na hoeveel minuten is de melk opgewarmd tot 15 °C?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er van opwarming sprake is?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{x}$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen de oplossing van $f(x) = 8$.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

d Los op: $f(x) \geq 6$.

Opgave 17

Voor een bepaalde soort bacteriën geldt de groeifunctie:

$N(t) = 120 \cdot \mathrm{e}^{0{,}95t}$.

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën op $t = 0$.

1.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op exponentiële functies;
- bij exponentiële functies het grondtal wisselen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- werken met het getal e en de afgeleide van $f(x) = e^x$.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.

a Maak de grafiek van f en die van zijn afgeleide.

b Maak ook de grafiek van $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
Hoe ziet deze grafiek er uit en wat betekent dat?

c Maak ook de grafiek van $y = \ln(2) \cdot 2^x$. Wat valt je nu op?

d Laat zien dat $g'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$ de afgeleide van $g(x) = 3^x$ is.

Uitleg

Bekijk de applet.

Hier zie je de grafiek van $f(x) = 2^x$ en de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek, de grafiek van de afgeleide.
Die afgeleide is een veelvoud van de functie zelf: $f'(x) = c \cdot 2^x$.
Je kunt de waarde van c aflezen bij $x = 0$ want $f'(0) = c \cdot 2^0 = c$.
Je ziet $f'(0) \approx 0{,}69$.

Maar je kunt de waarde van c ook zelf berekenen: $c = \ln(2)$.

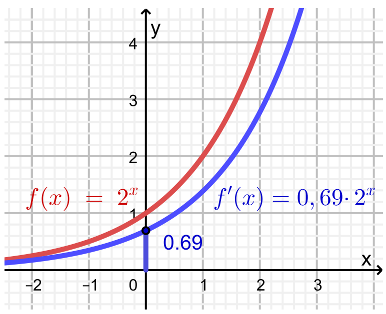
De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$.

Je kunt dit vinden door de functie f van grondtal te veranderen:

$f(x) = e^{c \cdot x}$ met $f'(x) = e^{c \cdot x} \cdot c$ (kettingregel!).

En omdat $e^{c \cdot x} = 2^x$ moet $e^c = 2$, dus $c = \ln(2)$.

Zo'n redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen.
Dus de afgeleide van $f(x) = g^x$ is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.



Figuur 1.1

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.

a Bepaal de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

b Bepaal de afgeleide van $h(x) = 0{,}5^x$.

c Bepaal de afgeleide van $f(x) = 200 \cdot 1{,}5^x$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x) = 20 \cdot 1{,}2^x + 140$.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt de functie $f(x) = 2^x$ omgeschreven naar de vorm $f(x) = \mathrm{e}^{c \cdot x}$ omdat de afgeleide van een e-macht gemakkelijk is te bepalen.

a Laat zelf zien, dat $2^x \approx \mathrm{e}^{0{,}69x}$.
Leg ook uit dat die 0,69 eigenlijk $\ln(2)$ is.

b Bepaal de afgeleide van $f(x) = \mathrm{e}^{0{,}69x}$ met behulp van de kettingregel en laat zien dat deze afgeleide is te schrijven als $f'(x) = 0{,}69 \cdot 2^x$.

c Schrijf de functie $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ in de vorm $N(t) = 200 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$.

d Bepaal de afgeleide van $N(t)$ op twee manieren, eerst vanuit de vorm $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ en daarna vanuit de vorm met grondtal e. Laat zien dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

Opgave 3

Je hebt in de **Uitleg** gezien hoe je van een exponentiële functie met grondtal 2 een exponentiële functie met grondtal e maakt.

Een bacterie groeit onder bepaalde omstandigheden volgens de groeiformule:

$N(t) = 50 \cdot 8^t$

Hierin is:

- N het aantal bacteriën per kolonie
- t de tijd in uren

a Laat zien, dat je deze formule ook kunt schrijven als $N(t) = 50 \cdot \mathrm{e}^{2{,}1t}$.

b Bereken de groeisnelheid van deze bacteriën op $t = 0$.
Gebruik eerst de gegeven formule en daarna de formule bij a. Laat zien dat beide uitkomsten gelijk zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Je kunt elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven door **veranderen van grondtal**. Als je op $t = 0$ start met een hoeveelheid $N(0)$ dan kun je $N(t)$ schrijven als:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}$ waarin $\mathrm{e}^k = g$ dus $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $10^k = g$ dus $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot \mathrm{e}^{1{,}61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$ geeft $f'(x) = 100 \cdot \ln(5) \cdot 5^x \approx 161 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot \mathrm{e}^{1{,}61x}$ geeft $f'(x) = 100 \cdot \mathrm{e}^{1{,}61x} \cdot 1{,}61 \approx 161 \cdot \mathrm{e}^{1{,}61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$ geeft
  $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0{,}5t} \cdot \ln(10) \cdot -0{,}5 = 1000 \ln(10) \cdot 10^{-0{,}5t}$

Opgave 4

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 5

Bepaal de afgeleide van:

a $f(x) = 1{,}3^x$

b $f(x) = 50 \cdot 2^x + 10$

c $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0{,}1x}$

d $f(x) = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 200$

Voorbeeld 2

Een radiatorplaat warmt op volgens de formule:

$T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

Laat zien hoe je deze formule kunt schrijven met grondtal e en bereken de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$.

Antwoord

De formule moet de vorm $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$ krijgen.

Omdat $0{,}9 = \mathrm{e}^k$ wordt $k = \ln(0{,}9) \approx -0{,}11$ en geldt $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

De opwarmsnelheid is: $T'(t) = -40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t} \cdot -0{,}11 \approx 4{,}21 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

Op $t = 0$ bedraagt de opwarmsnelheid $T'(0) \approx 4{,}21$ °C/min.

Opgave 6

Bekijk het temperatuurverloop van de opwarmende radiator in **Voorbeeld 2**.

a Welke temperatuur heeft de radiator aan het begin van het opwarmingsproces?

b Je kunt de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$ ook rechtstreeks vanuit $T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$ afleiden. Laat zien, dat je dan dezelfde opwarmsnelheid krijgt.

Opgave 7

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van 3,5 atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. Er geldt:

$p(t) = 3{,}5 - 2{,}1 \cdot 0{,}97^t$

Hierin is:

- p de luchtdruk in de band in atmosfeer
- t de tijd in seconden

a Maak een passende grafiek bij dit verband.

De luchtdruk in de band begint met 1,4 atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot 2,0 atmosfeer.

b Laat zien dat dit uit de gegeven formule volgt.

c Je stopt de pomp als de druk in de band 2,6 atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?

d Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

e Schrijf de gegeven formule in de vorm met grondtal e en bereken daarmee opnieuw de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Oefenen

Opgave 8

Differentieer.

a $f(x) = 1{,}2^x$

b $g(x) = 30 \cdot 1{,}2^x$

c $N(t) = 20 - 15 \cdot 0{,}8^t$

Opgave 9

Schrijf de volgende functies met grondtal e en bereken daarmee het hellingsgetal op $t = 0$.

a $P(t) = 2400 \cdot 2{,}5^t$

b $N(t) = 40 + 20 \cdot 0{,}85^t$

Opgave 10

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven het zeeniveau. Op een zekere plek geldt bij bepaalde weersomstandigheden

$p(h) = 1013 \cdot 10^{-0{,}53h}$

Hierin is:

- h de hoogte boven zeeniveau in km
- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)

a Bereken snelheid waarmee de luchtdruk verandert op een hoogte van 5 km in gehelen nauwkeurig.

b Je kunt deze veranderingssnelheid van de luchtdruk op 5 km hoogte ook berekenen door eerst de formule in de vorm $p(h) = 1013 \cdot g^h$ te schrijven. Laat dat zien.

Opgave 11

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Er geldt:

$T(t) = 20 - 14\,\mathrm{e}^{-0{,}16t}$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

a Maak een grafiek van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.

b Laat zien, dat voor deze formule inderdaad de warmtewet van Newton geldt.

c Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Opgave 12

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$m = m_0 \cdot e^{-kt}$

Hierin is:

- t de tijd in dagen
- m_0 de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$

a Bereken k, dat is de zogenaamde desintegratieconstante.

b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?

c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke radioactieve stof is de radiumisotoop $^{226}_{88}\text{Ra}$. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α-deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}\text{Rn}$. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N. Je kunt het verval van radium dan op drie manieren met een formule beschrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0{,}9996^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $e^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot e^{-0{,}00043t}$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0{,}00019t}$

Opgave 13

Bekijk **Toepassen**.

a Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.

b Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.

c Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?

d In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 14

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.
Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

a Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.

b Van de Dode-Zeerollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?

c Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?

d Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?

Testen

Opgave 15

Differentieer de volgende functies en bepaal het hellingsgetal voor $t = 1$.
Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $H(t) = 3 \cdot 0{,}5^{t} - 4$

b $N(t) = 50 - 30 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}50t}$

Opgave 16

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.
De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als

lood. Als die stralingsintensiteit in procenten wordt voorgesteld door I, dan geldt:

$I(d) = 100 \cdot e^{-\alpha \cdot d}$

Hierin is:

- d de dikte van de loden plaat in cm
- α een constante die afhangt van het materiaal

a Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α.

b Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

1.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = {}^{g}\log(x)$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op logaritmische functies.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van exponentiële functies berekenen.

Verkennen

Opgave V1

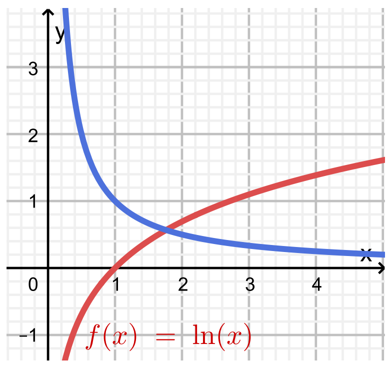
Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide, gemaakt in GeoGebra.

a Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?

b De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?

c Maak zelf de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide met GeoGebra, Desmos of met een grafische rekenmachine.

d Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?



Figuur 1.1

Uitleg

Bekijk de applet.

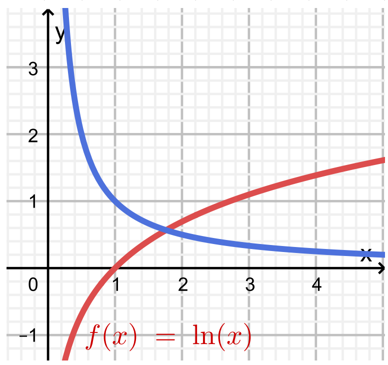
Je ziet in de figuur dat de afgeleide (blauwe grafiek) van een logaritmische functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$ erg lijkt op een gebroken functie van de vorm $y = \frac{c}{x}$ waarin c een constante is die van het grondtal g afhangt.

Kies je voor het grondtal het getal e dan is precies $c = 1$:

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kent, kun je die van bijvoorbeeld $f(x) = {}^{2}\log(x)$ ook bepalen.
Je wisselt dan van grondtal 2 naar grondtal e met behulp van een rekenregel: $f(x) = {}^{2}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.

En dus is $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} \approx 1{,}44 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1{,}44}{x}$.



Figuur 1.2

Met andere grondtallen gaat dit net zo:

- De afgeleide van $f(x) = {}^g\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Nu kun je alle logaritmische functies differentiëren.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(x)$

b $f(x) = 3\ln(x) + 1$

c $f(x) = \ln(2x)$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide van $f(x) = {}^3\log(x)$ en daarmee het hellingsgetal van deze functie voor $x = 2$ in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de g-logaritme** $f(x) = {}^g\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$.

Je vindt:

Als $f(x) = {}^g\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^g\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = \ln(2x)$
- $f(x) = {}^5\log(x)$
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$

Antwoord

- $f(x) = \ln(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = {}^5\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{x} \approx 0{,}62 \cdot \frac{1}{x} = \frac{0{,}62}{x}$.
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$ geeft $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$.
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$ geeft
  $N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{t} \approx -869 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-869}{t}$.

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(4x)$

b $f(x) = {}^{0,5}\log(x)$

c $f(x) = 5\log(x)$

d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p hangt af van de hoogte k in km boven zeeniveau. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$h = -6{,}5\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)
- h de hoogte boven zeeniveau in km

p_0 is de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa. Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Figuur 1.3

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6{,}5\ln(0{,}001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0{,}235$ km.
Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$h'(p) = -6{,}5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0{,}001p} \cdot 0{,}001 = -\frac{2{,}823}{p}$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0{,}003$.
Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

a Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.

b Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.

c Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Oefenen

Opgave 6

Bepaal $f'(x)$ en bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

a $f(x) = \ln(0{,}5x)$

b $f(x) = 4 \cdot {}^{2}\log(x) + 10$

c $f(x) = 200 \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - \ln(2x)$.

a Maak de grafiek van f.
Welke asymptoot heeft deze grafiek?

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

c Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van -1?

Opgave 8

Gegeven de functies $y_1 = \ln(6 - x)$ en $y_2 = -\ln(x)$ met domein $[0{,}6]$.

a Bekijk de grafieken van deze functies.

Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x-waarde k. Neem aan dat $1 < k < 4$.

b Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2 \cdot \ln(3)$ is.

Opgave 9

Voor het geluidsdrukniveau L geldt de formule:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierin is L de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootheid L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

a Bij de gehoorgrens ($L = 0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2. Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2. Bereken het geluidsdrukniveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluidsdrukniveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluidsdrukniveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

b Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluidsdrukniveau.

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10\log(2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L

het geluidsdrukniveau in dB is. L_0 is het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg.

c Als op 20 m een geluidsdrukniveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan L_0?

d Hoe groot is het geluidsdrukniveau van die weg op 100 m afstand?

e Op welke afstand van die weg is het geluidsdrukniveau 60 dB?

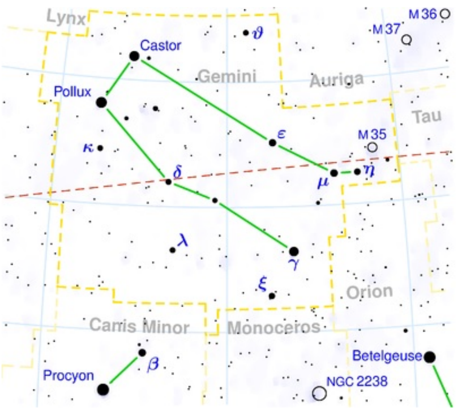
Toepassen

De helderheid van sterren wordt vanouds aangegeven door de grootteklasse of magnitude m. Heldere sterren zijn van de eerste grootte: $m = 1$. Sterren die met het blote oog nog net zichtbaar zijn, hebben magnitude 6. Die magnitude wordt echter nog fijner onderverdeeld. De ster **Castor** in het sterrenbeeld ‘Tweelingen’ heeft een magnitude van 1,58.

Volgens de wet van Fechner is de magnitude afhankelijk van de lichtsterkte l volgens de formule:

$m = a \ln(l) + b$

Daarin is de lichtsterkte van een ster met magnitude 6 gelijk aan 1: dus voor $l = 1$ geldt $m = 6$. Een ster van de eerste grootte is echter 100 keer zo lichtsterk: dus voor $l = 100$ geldt $m = 1$.



Figuur 1.4

Opgave 10

Bekijk **Toepassen**.

a Bereken met behulp van de gegevens a en b.

b Voor de ster ‘Regulus’ geldt dat $l = 73$. Bereken de magnitude van Regulus.

c De helderste ster is ‘Sirius’ met een magnitude van $m = -1{,}6$. Bereken de bijbehorende lichtsterkte.

d Schrijf l als functie van m. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

De lichtsterktes van twee sterren die samen een dubbelster vormen kun je optellen, hun magnitudes echter niet. De ster ε in het sterrenbeeld ‘Lier’ is zo’n dubbelster. De magnitudes van de afzonderlijke sterren zijn 4,5 en 4,7.

Bereken de magnitude van de dubbelster.

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en bereken $f'(10)$ in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = {}^{3}\log(x)$

b $f(x) = 2 \ln(11 - x)$

c $f(x) = 30 \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Opgave 13

Een gezonde volwassene is ’s morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$S(t) = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Hierin is:

- t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan
- S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm. Ga er van uit dat hij elke dag 16 uur actief is en verder slaapt.

a Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Laat met behulp van de afgeleide van $S(t)$ zien, dat deze functie dalend is.

1.4 Groeimodellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier;
- groeimodellen opstellen en de eigenschappen ervan kennen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

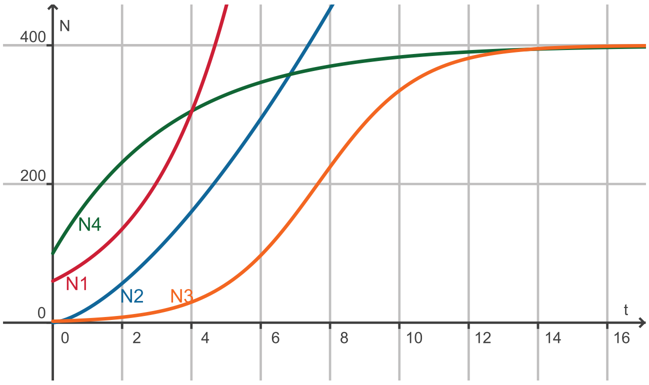
Verkennen

Opgave V1

Hier zie je in één figuur vier grafieken. De bijbehorende functies zijn:

- $N_1(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$
- $N_2(t) = 20 \cdot t^{1{,}5}$
- $N_3(t) = \frac{400}{1+200 \cdot 0{,}5^t}$
- $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$

Elk van deze functies is te gebruiken als groeimodel.



Figuur 1.1

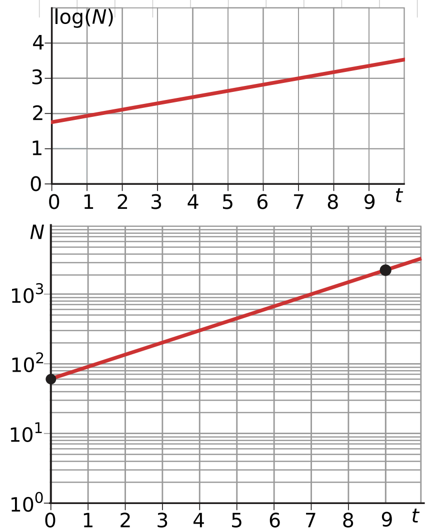
a Beschrijf bij elk van deze functies de wijze waarop de groei verloopt.

b Beschrijf ook telkens het verloop van de groeisnelheid.

Uitleg 1

Een functie zoals $N(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$ beschrijft **exponentiële groei**. Je kunt deze functie opvatten als een exponentieel groeimodel. De groei is dan nogal explosief, bij betrekkelijk kleine waarden van t heb je al met hele grote uitkomsten te maken.
Dat is lastig als je een geschikte grafiek wilt maken.
Neem je daarentegen aan beide zijden de logaritme dan krijg je:
$\log(N) = \log\left(60 \cdot 1{,}5^t\right)$.
Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit:
$\log(N) = \log(60) + t \cdot \log(1{,}5)$.
Omdat zowel $\log(60)$ als $\log(1{,}5)$ getallen zijn, staat hier dat tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat. En daarom wordt een exponentiële functie een rechte lijn als je op de verticale as een **logaritmische schaal** gebruikt.

Er bestaat speciaal grafiekenpapier waar de verticale as zo is aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een exponentiële functie. Dat heet **enkellogaritmisch papier**. De onderste grafiek is die van $N(t)$ op dergelijk papier.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Daarin gaat het over het tekenen van de grafiek van een exponentiële functie.

a Ga na dat de bovenste grafiek juist is.

b Ga na dat de onderste grafiek ook juist is.

Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot 0{,}8^t$.

c Laat met de rekenregels van logaritmen zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van t is.

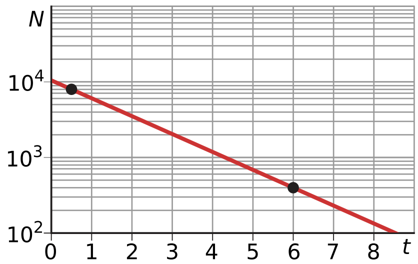
d Teken de grafiek van $\log(K)$ als functie van t.

De grafiek van K kun je ook op enkellogaritmisch grafiekenpapier tekenen. Je hoeft dan niet eerst de formule te herleiden.

e Neem een blad van dit grafiekenpapier en teken daarop de grafiek van deze functie.

Opgave 2

Je ziet hier de grafiek van een nieuwe functie $N(t)$ op enkellogaritmisch grafiekenpapier.



Figuur 1.3

a Leg uit dat de grafiek door $(0{,}5; 8000)$ en $(6{,}400)$ gaat en stel het functievoorschrift op.

b Lees uit de figuur af hoe groot $N(1)$ en $N(4{,}5)$ (bij benadering) zijn. Controleer je antwoorden met behulp van het functievoorschrift.

c Heeft $N(t) = 0$ oplossingen? Kan er op de verticale as een 0 voorkomen?

Opgave 3

Bekijk de functie $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$.

a Teken de grafiek van N_4 op enkellogaritmisch grafiekenpapier.

b Kun je verklaren waarom de grafiek geen rechte lijn wordt?

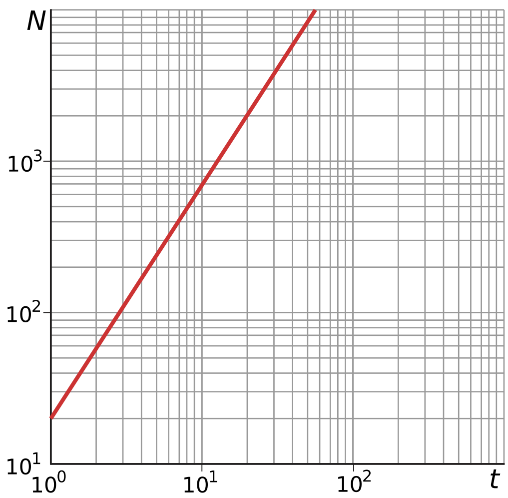
Uitleg 2

Een functie zoals $N(t) = 20 \cdot t^{1{,}5}$ is een **machtsfunctie**. Ook daarvan is de grafiek lastig te tekenen, want in de buurt van $t = 0$ heb je uitkomsten vlak bij 0, maar bij grotere waarden van t al snel uitkomsten die behoorlijk groot zijn.
Weer kun je het voorschrift herleiden met de rekenregels voor logaritmen:

$\log(N) = \log\left(20 \cdot t^{1{,}5}\right)$ levert op: $\log(N) = \log(20) + 1{,}5 \cdot \log(t)$.

Er bestaat dus een lineair verband tussen $\log(N)$ en $\log(t)$.
Nu gebruik je op beide assen een logaritmische schaal.

Ook hiervoor bestaat speciaal grafiekenpapier waar de beide assen zo zijn aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een machtsfunctie. Dat heet **dubbellogaritmisch papier**. Hier zie je de grafiek van $N(t)$ op dergelijk papier.



Figuur 1.4

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2** over het tekenen van een machtsfunctie.

a Maak bij de functie N met $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ een tabel van $\log(N)$ afhankelijk van $\log(t)$. Teken de grafiek van $\log(N)$ uitgezet tegen $\log(t)$.

b Neem een blad dubbellogaritmisch papier. Teken daarop zelf de grafiek van $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$.
Waarom gaat de grafiek niet door (0,0)?

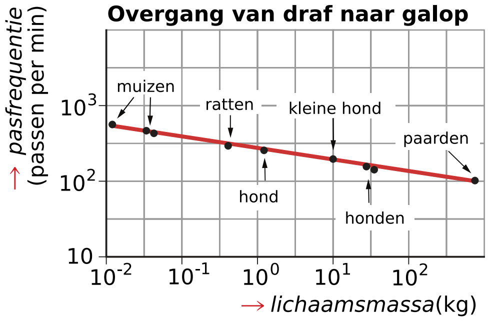
Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot t^{0,8}$.

c Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van $\log(t)$ is.

d Teken de grafiek van $K(t)$ op dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Opgave 5

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa (in kg).



Figuur 1.5

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Noem de lichaamsmassa m (in kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden. Leg uit dat het punt dat hoort bij paarden ongeveer de coördinaten $\left(10^{2,9}, 10^{2,0}\right)$ heeft. Bepaal zelf de coördinaten van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af voor P als functie van m.

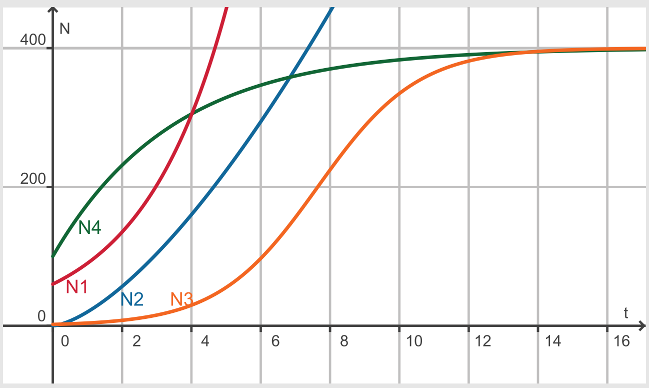
d Bereken bij welke pasfrequentie een pony van 120 kg van draf naar galop overgaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort een functie van de vorm $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$.
(In de figuur is $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Teken je dergelijke functies op **enkellogaritmisch papier** dan wordt de grafiek een rechte lijn.

Bij een **machtsfunctie** als model hoort een voorschrift van de vorm $N_2(t) = b \cdot t^p$.
(In de figuur is $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Van dergelijke functies is de grafiek op **dubbellogaritmisch papier** een rechte lijn.



Figuur 1.6

Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort een functie als $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.

Kenmerkend voor dit groeimodel is, dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt, maar op zeker moment (voedselgebrek, te weinig ruimte) afremt. De groeisnelheid die eerst toeneemt, gaat vanaf dat moment afnemen. In dit groeimodel is $N = G$

de horizontale asymptoot en vind je de grootste groeisnelheid bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (In de figuur is $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Er zijn tenslotte nog situaties waarin het verschil met een constante waarde exponentieel afneemt. Daarbij hoort een groeimodel van de vorm $N_4(t) = G + b \cdot g^t$. Kenmerkend voor dit groeimodel is dat de groeisnelheid vanaf het begin afneemt. (In de figuur is $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0{,}75$.)

Voorbeeld 1

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156

Tabel 1.1

Figuur 1.7

De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden. Teken de grafiek van $\log(N)$ als functie van t en/of teken de grafiek van $N(t)$ op **enkellogaritmisch papier** en stel een passende formule voor $N(t)$ op.

Antwoord

Zie de figuur hiernaast. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.

Een passende formule heeft bijvoorbeeld de vorm $N(t) = b\,\mathrm{e}^{kt}$.

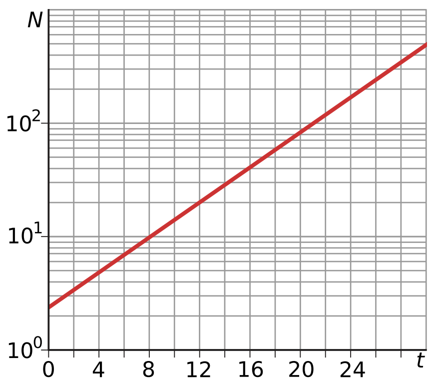
De getekende grafiek gaat ongeveer door (4,5) en (12,20). Invullen geeft:

- $b \cdot \mathrm{e}^{4k} = 5$
- $b \cdot \mathrm{e}^{12k} = 20$

Beide zijden op elkaar delen: $\mathrm{e}^{8k} = 4$ en dus $k = \frac{\ln(4)}{8} \approx 0{,}17$.

En daarmee bereken je b. Je vindt uit $b \cdot \mathrm{e}^{0{,}17 \cdot 4} = 5$, dat $b = 2{,}5$.

Dus $N(t) = 2{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}17t}$ is een passende formule.



Figuur 1.8

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Teken een lijn die zo goed mogelijk past bij de getekende punten. Deze lijn stelt de grafiek van $N(t)$ voor op enkellogaritmisch papier.

b Stel zelf een formule op voor $N(t)$. Ga er vanuit dat de grafiek door (8,10) en door (21,100) gaat.

c Controleer of de punten uit de tabel passen bij de gevonden formule.
Waarom zal geen enkele formule precies de gegeven tabel opleveren?

d Na hoeveel dagen zouden er volgens jouw formule meer dan 1000 fruitvliegjes zijn?

Opgave 7

In deze tabel zie je hoe de groei van het aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster') verder gaat.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 1.2

a Waaraan zie je dat er op den duur toch geen sprake is van exponentiële groei?

Voor het aantal fruitvliegjes is deze formule opgesteld: $N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^t}$.

b Maak een grafiek voor $N(t)$ en bepaal het maximale aantal fruitvliegjes volgens dit rekenmodel.
Met welke soort groei heb je hier te maken?

c Bepaal de waarde van t waarin de groeisnelheid van N zo groot mogelijk is.

Voorbeeld 2

Johannes Kepler (1571 — 1630) beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (in jaren) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R. Voor de Aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen. In de tabel vind je de gegevens van de andere planeten in ons zonnestelsel.

planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (in AE)	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07
T (in jaren)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	25,5	84,0	164,8

Tabel 1.3

Het verloop van $T(R)$ doet een machtsfunctie vermoeden.
Teken de grafiek van $T(R)$ op **dubbellogaritmisch papier** en stel een passende formule op.

Antwoord

Zie de figuur. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.

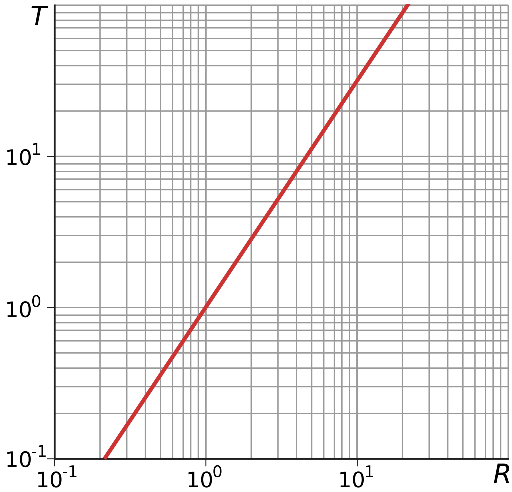
Bij deze machtsfunctie hoort een formule van de vorm $T = b \cdot R^p$.

De grafiek gaat door de punten (1,1) en (ongeveer) (20,90). Invullen:

- $1 = b \cdot 1^p$ zodat $b = 1$
- $90 = b \cdot 20^p$ met $b = 1$ geeft $20^p = 90$

$20^p = 90$ geeft $p = {}^{20}\log(90) \approx 1{,}50$.

Je ziet, dat $T = 1 \cdot R^{1{,}50}$ een redelijk passende formule is.



Figuur 1.9

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf de grafiek van $T(R)$ op dubbellogaritmisch papier.

b Door welk punt moet je grafiek in ieder geval gaan? En waarom?

c Stel zelf een formule op voor $T(R)$ als je aanneemt dat de grafiek door (30,165) gaat.

In 1930 ontdekte astronoom **Clyde Tombaugh** een nieuw hemellichaam dat om de zon draaide op een (gemiddelde) afstand van 38,4851 AE. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en is lang als planeet geclassificeerd.

d Welke omlooptijd heeft Pluto?

Voorbeeld 3

Een kop vers gezette koffie heeft een temperatuur van 80 °C. Als je die koffie rustig laat afkoelen in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt (warmtewet van Newton) het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

t (min.)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T (°C)	80,0	58,4	44,6	35,7	30,1	26,4	24,1	22,6	21,7	21,1	20,7	20,4	20,3

Tabel 1.4

Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule voor $T(t)$ op.
Bereken de snelheid van afkoelen na 5 minuten.

Antwoord

Je gaat uit van: $T(t) = 20 + b \cdot g^t$.
Dit is geen zuiver exponentiële functie, dus logaritmisch papier is niet bruikbaar.
De grafiek van $T(t)$ gaat door (0,80) en dit geeft: $b = 60$.
De grafiek gaat ook (ongeveer) door $(24; 20{,}3)$ en dit geeft: $60 \cdot g^{24} = 0{,}3$ en dus $g \approx 0{,}80$.
Een passende formule is: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}80^t$.

De afkoelsnelheid na vijf minuten is
$T'(5) = 60 \cdot \ln(0{,}80) \cdot 0{,}80^5 \approx 4{,}39$ °C/minuut.

Opgave 9

Bekijk het afkoelingsproces van een kop koffie in **Voorbeeld 3**.

a Ga uit van het beschreven groeimodel en stel zelf een bijpassende formule op als je aanneemt dat de grafiek door de punten (0,80) en (20; 20,7) gaat.

b Bereken de snelheid van afkoelen na 10 minuten.

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Bepaal op welk tijdstip t de afkoelsnelheid 10 °C/minuut is. Geef je antwoord in seconden.

b Wordt de afkoelsnelheid ooit 0 °C/minuut.

Oefenen

Opgave 11

Je ziet hier een tabel van de afname van een bepaalde hoeveelheid H met de tijd t in weken.

t (weken)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H (gram)	200	188	177	166	156	147	138	130	122

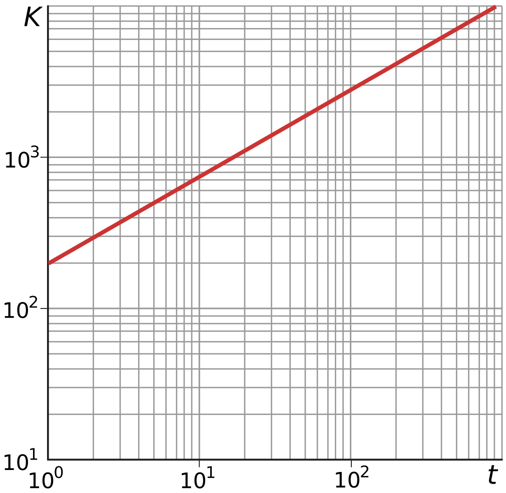
Tabel 1.5

Onderzoek met behulp van enkellogaritmisch papier of $H(t)$ exponentieel vervalt en stel - als dit zo is - een bijpassende formule op.

Opgave 12

Je ziet hier een grafiek van de functie $K(t)$.

Stel een formule voor $K(t)$ op.



Figuur 1.10

Opgave 13

De tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van de zonnebloemen op een bepaalde akker op verschillende tijdstippen na het ontkiemen. De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken is 256 cm.

- t is de tijd in weken na het ontkiemen
- $H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op tijdstip t

Figuur 1.11

aantal weken	2	4	6	8	10	12
hoogte in cm	36	98	170	228	251	255

Tabel 1.6

a Als je hierbij een grafiek tekent, lijkt er van geremde exponentiële groei sprake te zijn.

Een bijpassende formule is $H(t) = \frac{256}{1+b \cdot g^t}$.

Bereken de bij de tabel passende waarden van b en g.

b Welke hoogte zullen deze zonnebloemen uiteindelijk gaan bereiken volgens dit groeimodel?

c Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 1$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tweede week groter?

d Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 10$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tiende week kleiner?

e Op welke dag na het ontkiemen van de zonnebloemen groeien ze het snelst? Hoe snel groeien de zonnebloemen dan?

Opgave 14

In de tabel zie je de meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van het dier en de energie E die het nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	$1{,}7 \cdot 10^3$
hond (klein)	$2{,}6 \cdot 10^3$	$4{,}4 \cdot 10^3$
hond (groot)	$1{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$
schaap	$3{,}9 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^4$
paard	$5{,}8 \cdot 10^5$	$5{,}8 \cdot 10^5$

Tabel 1.7

a Teken deze gegevens op dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Zet m uit op de horizontale as en E op de verticale as.

b Waarom kun je bij benadering aannemen, dat er tussen m en E een verband van de vorm $E = a \cdot m^b$ bestaat?

c Bereken passende waarden van a en b.

d Bereken het energieverbruik per km van een kat met een massa van 3,2 kg.

Opgave 15

De volgende alinea's zijn vrij naar een artikel dat in 1991 in een krant stond.

FAO luidt noodklok

Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980. Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties, in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

1. In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.
2. Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.
3. De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen waar de ontbossing een halt is toegeroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.

Tabel 1.8

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren. Zij noemt de oppervlakte aan tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) dat op tijdstip t nog aanwezig is $y(t)$. Zij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en t in jaren.

a Leg uit waarom zowel een formule van de vorm $y(t) = a \cdot t + b$ als een formule van de vorm $y(t) = a \cdot g^t$ niet in overeenstemming is met de gegevens uit het krantenartikel.

De lezer kiest voor een formule van de vorm $y(t) = b - a \cdot g^t$. Uit de in de alinea's 1, 2 en 3 verstrekte gegevens leidt zij deze waarden af: $b = 3311$, $a = 274$ en $g = 1{,}0414$.

b Laat zien dat de formule met die waarden in overeenstemming is met de in de alinea's 1, 2 en 3 gegeven informatie.

Wanneer de ontbossing op dezelfde wijze blijft voortduren, zal op een gegeven moment minder dan 1000 miljoen hectare tropisch oerwoud overblijven.

c Bereken in welk jaar dat volgens de door de lezer gevonden formule zal gebeuren.

Het oorspronkelijke krantenartikel begon met de zin: ‘De tropische oerwouden verdwijnen anderhalf keer zo snel als 10 jaar geleden.’

d Onderzoek met behulp van differentiëren of de door de lezer gevonden formule ook hiermee in overeenstemming is.

Toepassen

Bij het oogsten van koren wordt vaak gewerkt met een combine, of maaidorser. In zo'n maaidorser wordt in twee etappes gedorst: eerst in de dorstrommel en daarna op de zogenaamde ‘schudder’, waar het graan (de graankorrels) tijdens het doorlopen van een traject uit het stro wordt geschud. De snelheid waarmee de hoeveelheid graan G (in kg) in het stro door het schudden afneemt, is recht evenredig met die hoeveelheid zelf:

$G'(x) = -k \cdot G(x)$

waarin x de afstand tot het begin van de schudder in meters is.

Figuur 1.12

Opgave 16

Bekijk **Toepassen**.

a Verklaar de formule in de tekst, met name ook het minteken.

Neem $k = 0{,}2$. Dan moet gelden $G'(x) = -0{,}2 \cdot G(x)$.

b Toon aan dat de functie $G(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$ hieraan voldoet.

c Ga uit van een schudder met een totale lengte van 6 m. Hoeveel procent van de hoeveelheid graan aan het begin van de schudder is aan het einde nog niet uit het stro geschud?

Opgave 17

k heet de scheidingsfactor van het proces van schudden zoals beschreven in **Toepassen**. De scheidingsfactor hangt af van de snelheid v (in m/s) van de maaidorser. Er geldt $k = \frac{1}{v}$.

a Verklaar de naam ‘scheidingsfactor’. Hoeveel procent van het graan wordt niet uit het stro geschud als de maaidorser rijdt met een snelheid van 2 m/s?

b Is er een snelheid mogelijk waarbij alle graan uit het stro wordt geschud?

Testen

Opgave 18

Bij een slingerproef is de slingerperiode T voor een aantal verschillende slingerlengten l gemeten.

a Laat zien met behulp van logaritmisch papier, dat de meetresultaten in overeenstemming zijn met de veronderstelling, dat T een machtsfunctie is van l: $T = A \cdot l^a$.

b Bereken A en a.

l (cm)	T (s)
63,5	1,65
87,5	1,87
140,5	2,38
225,0	3,00
320,0	3,55

Tabel 1.9

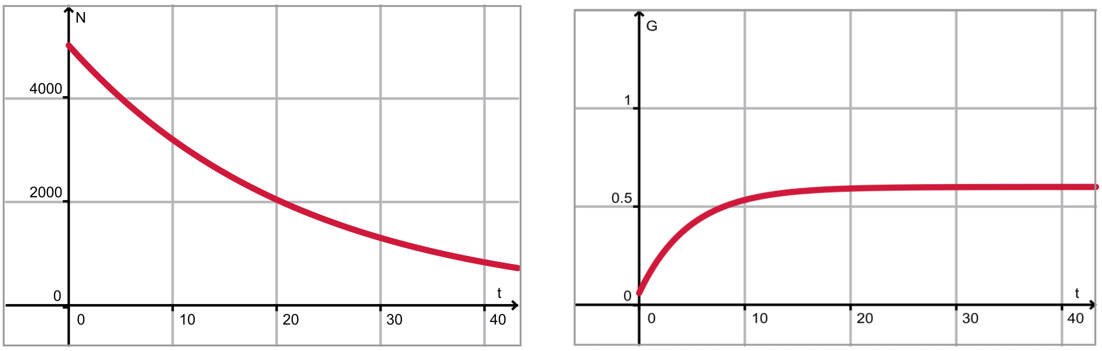
Opgave 19

Een forellenkweker zet in elk van zijn kweekvijvers steeds 5000 jonge forellen uit. Die forellen nemen vanaf dat moment ($t = 0$) in gewicht toe, maar er sterven ook forellen. Hij heeft al een aantal jaren maandelijks de stand van de forellen bijgehouden. Op grond daarvan kan hij formules opstellen voor de groei van zo'n populatie forellen. Als t de tijd in maanden is, dan geldt:

- $N(t) = 5000 \cdot e^{a \cdot t}$ waarin N het aantal forellen is.
- $G(t) = G_{\text{eind}} - b \cdot e^{c \cdot t}$ waarin G het gewicht per forel in kg is.

G_{eind} stelt het gewicht voor dat een gemiddelde forel steeds meer zal benaderen naarmate hij ouder wordt.

Figuur 1.13



Figuur 1.14

a De uitgezette forellen wegen gemiddeld 65 gram. Stel nu met behulp van de grafieken de juiste formules op voor $N(t)$ en $G(t)$.

b Stel een formule op voor het totale gewicht aan forellen in deze vijver.

c Als de forellenkweker zijn kweekvijver wil leegvissen als het totale gewicht aan forellen maximaal is, hoeveel maanden na het uitzetten moet hij dat dan doen?

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Het getal e** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het getal e — de natuurlijke logaritme — afgeleide van $f(x) = \text{e}^x$
- afgeleide van een exponentiële functie
- afgeleide van een logaritmische functie
- groeimodellen, o.a. exponentiële groei, machtsverband, etc. — enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- werken met het getal e en de natuurlijke logaritme
- exponentiële functies differentiëren
- logaritmische functies differentiëren
- verschillende groeimodellen herkennen — werken met enkel- en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Testen

Opgave 1

Het aantal inwoners van een bepaalde stad B groeide vanaf 1990 met 1,5% per jaar. Op 01-01-2018 heeft deze stad 600000 inwoners.

Er wordt verondersteld dat de groei de komende jaren zo door gaat. Op het stadhuis is de volgende formule opgesteld:

$N(t) = 6 \cdot 10^5 \cdot \text{e}^{0,015t}$

Hierin is:

- t de tijd in jaren na 2018
- N het aantal inwoners van B

a Laat zien dat deze formule inderdaad een bevolkingsgroei van 1,5% laat zien.

b Hoeveel inwoners had B volgens dit groeimodel in 2000?

c Hoeveel bedraagt de groeisnelheid 2018? En in 2028?

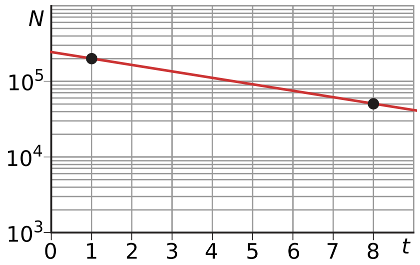
d In welk jaar overstijgt het aantal inwoners van B volgens dit groeimodel de 1 mln?

Opgave 2

Je ziet hier hoe een hoeveelheid N afneemt met de tijd t in dagen.

a Stel een bij deze grafiek passende formule op.

b Voor welke waarde van t (in één decimaal nauwkeurig) is $N(t) \leq 10000$?



Figuur 1.1

Opgave 3

Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule

$N(t) = 1200\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}31t}\right)$

Hierin is t in uren en is $t = 0$ om 09:00 uur.

a Op grond van deze formule kun je concluderen dat het aantal leerlingen dat van een belangrijk feit op de hoogte is uiteindelijk ongeveer constant wordt? Leg uit waarom.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $N(t)$.

c Bereken algebraïsch op welk tijdstip er 550 leerlingen van het feit gehoord hebben. Rond in het antwoord af op minuten.

d Voor de snelheid v waarmee het nieuws zich verspreidt geldt: $v(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. Hoe ziet de formule voor de snelheid van de nieuwsverspreiding er uit? Kun je op grond van deze formule dezelfde conclusies als bij a trekken?

e Toon algebraïsch aan dat de grafiek van N stijgend is.

f Met welke snelheid verspreidt het nieuws zich om kwart voor 11? Geef het antwoord in gehelen per minuut.

g Op welk tijdstip is de snelheid van de nieuwsverspreiding de helft van die om 09:00 uur? Geef dit tijdstip in minuten nauwkeurig.

Opgave 4

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand. De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0{,}06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

a Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

In de onderstaande tabel staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.

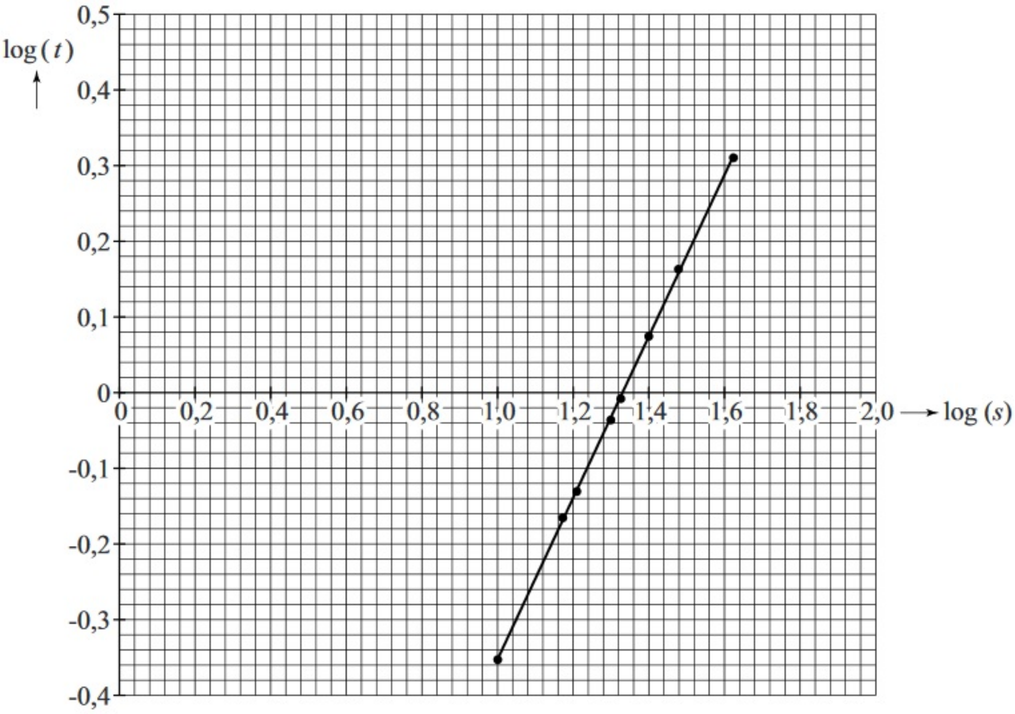
		Wereldtijd in 2015		
Wedstrijd	**Afstand (m)**	**Uren**	**Minuten**	**Seconden**
10 km	10000		26	44
15 km	15000		41	13
10 mijl	16093		44	23
20 km	20000		55	21
halve marathon	21097		58	23
25 km	25000	1	11	18
30 km	30000	1	27	37
marathon	42195	2	02	57

Tabel 1.1

In de hardloopsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het looptempo genoemd.

b Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in de figuur is getekend.



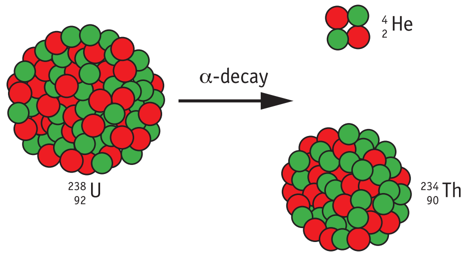
Figuur 1.2

c Bepaal met behulp van de lijn in de figuur het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

Opgave 5

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.

Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd is voor elke radioactieve stof een bepaald constant getal. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.



Figuur 1.3

a Omdat de halfwaardetijd voor een radioactieve stof een constant getal is, is de hoeveelheid H van die stof als functie van de tijd t te beschrijven met een formule van de vorm $H(t) = H(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}$. Leg uit waarom dat zo is.

b Op $t = 0$ heb je 1 kg U-238. Stel nu een formule op voor $H(t)$.

Neem t in miljarden jaren. k heet de desintegratieconstante.

c Waarom is de desintegratieconstante niet afhankelijk van de hoeveelheid U-238 waarmee je begint?

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is radioactief en daardoor kunnen deeltjes ervan in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

d Bereken de desintegratieconstante van jodium-131.

e Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

f Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

g Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

h Als een meetnauwkeurigheid in mg van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Opgave 6: Vissen in de Grevelingen

De Grevelingen (thans het Grevelingenmeer) is een voormalige zeearm van de Noordzee, gelegen tussen de eilanden Goeree-Overflakkee en Schouwen-Duiveland, op de grens van de provincies Zuid-Holland en Zeeland. In het kader van de Deltawerken werd de Grevelingen door de Grevelingendam (1965) en de Brouwersdam (1971) van zee afgesloten. Het Grevelingenmeer is het grootste zoutwatermeer van West-Europa, en is vooral van belang voor de watersport en recreatie. Het zoutgehalte van het Grevelingenmeer wordt op peil gehouden door de Brouwerssluis, een doorlaatsluis in de Brouwersdam, waarmee zeewater ingelaten wordt. Een gebied met een oppervlakte van 13.872 ha is aangemerkt als beschermd Natura 2000-gebied.

In 1985 werd voor enkele vissoorten het verloop van hun populatiegrootte in modellen beschreven. Omdat enkele vissoorten zoals de schol zich in het afgesloten Grevelingenmeer niet meer konden voortplanten moest de mens een handje helpen. De larven van de schol zwemmen recht op na hun geboorte en zien er dan ook uit als andere vissen. Na ongeveer 6 weken ondergaan ze een gedaanteverwisseling, waarbij een van hun ogen naar de andere kant groeit en ze zich tot platvis ontwikkelen en een jonge schol worden. Voor de schol werden er twee modellen ontworpen:

Figuur 1.4

- Model A: Er worden jaarlijks 5 miljoen larven en 200.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.
- Model B: Er worden jaarlijks 2 miljoen larven en 100.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.

Voor beide modellen geldt dat de sterfte onder jonge schollen (jonger dan 1 jaar) 90% per jaar is en onder schollen ouder dan 1 jaar 33% per jaar. Alle larven worden jonge schollen. Neem aan dat er in 1985 nog 300.000 schollen ouder dan 1 jaar in het Grevelingenmeer zaten.

a Maak op grond van model A een tabel van het aantal schollen ouder dan 1 jaar gedurende de eerste 10 jaren na 1985.

b Teken een grafiek van het aantal schollen S ouder dan 1 jaar in de loop van de jaren.

c Voor S geldt een groeimodel van de vorm $S(t) = G - a \cdot e^{bt}$. Welke waarde voor G schat je op grond van de grafiek bij b? Bereken nu ook de waarden van a en b.

d Er is in dit model nog geen rekening gehouden met bevissing. De visserijmortaliteit is 23% per jaar. Wat betekent dit?

e Pas je model A aan en onderzoek wat dit betekent voor het aantal schollen op den duur.

Opgave 7: Verouderende populaties

Van een zekere populatie neemt met een toenemende leeftijd x van het individu het aantal individuen van die leeftijd meestal af. Die afname wordt door demografen uitgedrukt in het sterftecijfer m (van 'mortality'), dat is het deel van het aantal individuen van een bepaalde leeftijd dat er jaarlijks sterft. Bij een constant sterftecijfer neemt het aantal individuen van een bepaalde leeftijd $S(x)$ (van 'survivors') exponentieel af.

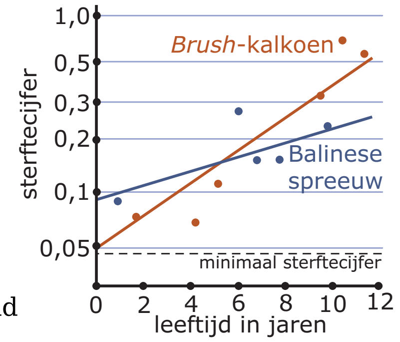
a Verklaar waarom dat zo is.

Bij verouderende populaties blijft het sterftecijfer niet constant, maar wordt het bij hogere leeftijden steeds groter. In dat geval geldt de zogenaamde Gompertzvergelijking:

$m(x) = M \cdot \mathrm{e}^{G \cdot x}$

Hierin is:

- M het sterftecijfer van volgroeide individuen
- x de leeftijd van een individu
- G de Gompertz-constante, een maat voor de verouderingssnelheid



Figuur 1.5

Hier zie je de grafieken van $m(x)$ voor de Australische Brush-kalkoen en de Balinese spreeuw. Van Australische Brush-kalkoenen is $M = 0{,}05$ en $G = 0{,}21$.

b Ga na hoe deze getallen zijn terug te vinden in de grafieken van het sterftecijfer.

c Stel voor deze soort een Gompertz-vergelijking voor het sterftecijfer op en ga na of hij past bij de getekende grafiek.

d Als een populatie Brush-kalkoenen 100 volgroeide 0-jarige individuen kent, hoeveel 10-jarige individuen zou die populatie dan moeten hebben?

e Schat nu zelf met behulp van de grafiek de waarden van M en G die gelden voor de Balinese spreeuw. Stel ook voor deze soort de Gompertz-vergelijking op.

Een andere maat voor de veroudering van een populatie is de verdubbelingstijd van het sterftecijfer, de $SCVT$.

f Toon aan dat $SCVT = \frac{\ln(2)}{G}$.

g Bereken de $SCVT$ voor zowel de Brush-kalkoen als de Balinese spreeuw.

h $S(x)$ stelt het aantal volwassen individuen van een populatie met de leeftijd x voor. Teken grafieken van $S(x)$ voor een populatie Australische Brush-kalkoenen en voor een populatie Balinese spreeuwen. Ga bij beide populaties uit van 100 volgroeide 0-jarige individuen. Vergelijk beide grafieken en de verouderingsprocessen van beide populaties.

2

Goniometrische functies

2.1 Goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip goniometrische functie en eigenschappen van dergelijke functies onderzoeken;
- de functie $f(x) = \tan(x)$ en zijn eigenschappen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt leren werken met periodieke functies, met name met sinusoïden. Een voorbeeld is de functie

$h_P(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$

Hierin is:

- t de tijd in seconden
- h de hoogte van een punt P boven de grond in m

a Lees uit het gegeven functievoorschrift de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van h af.
Maak vervolgens die grafiek. (Denk om het gebruik van radialen.)

b Hoe ziet de baan die punt P beschrijft er uit?

c Hoe lang doet P over deze baan?

Voor een ander punt Q geldt $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-1)\right)$.

d Wat is het verschil tussen de banen van P en Q?

Voor het hoogteverschil van beide punten geldt $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$.

e Is h ook een sinusoïde?

f Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-3)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

g Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi(t-1)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

Uitleg 1

Je kent de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen al. Omdat in deze functies de goniometrische verhoudingen sinus en cosinus voorkomen zijn het voorbeelden van goniometrische functies. De belangrijkste eigenschap is wel hun periodiciteit. Maar wat als je $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$ gaat gebruiken om ingewikkelder functievoorschriften te maken? Bekijk eerst maar eens een paar grafieken:

- $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$
- $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- $y_5 = \sin\left(x^2\right)$
- $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$
- $y_7 = \sin(2x) - \sin(x)$
- $y_8 = x + \sin(x)$

Je weet dat y_3 een zuivere sinusoïde is, dus daarbij is sprake van een periode (4π), een amplitude (2), een evenwichtsstand ($y = 1$) en een horizontale verschuiving (2 in de positieve x-richting). Ga dit na, eigenlijk moet je dit vooraf meteen kunnen zien.
Verder lijken ook y_4 en y_6 zuivere sinusoïden. Dat is ook inderdaad het geval, al kun je nu nog niet aantonen dat dit zo is. Je kunt wel periode, amplitude, evenwichtsstand en horizontale verschuiving uit de grafiek aflezen.
Van de overige functies is alleen y_7 periodiek, de andere twee niet.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.
Gegeven is onder andere de goniometrische functie $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$.
Je weet dat dit een zuivere sinusoïde is.

a Maak de grafiek van deze functie. Waarom is het hierbij handig om vooraf te bedenken dat het een sinusoïde betreft en de periode, de amplitude en de evenwichtsstand te bepalen?

b Welke horizontale verschuiving moet je op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Bereken de toppen van de grafiek van f op het interval $[0{,}4\pi]$.

d Los op: $y_3 \leq 2$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Ga van elk van de volgende functies na of de grafiek op een sinusoïde lijkt of niet.

a $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x – 1)$

b $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$

c $y_5 = \sin\left(x^2\right)$

d $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

e $y_9 = \sin(9x) – \sin(11x)$

Uitleg 2

Bekijk de applet: Tangens

In een eenheidscirkel kun je zo de **tangens** definiëren:

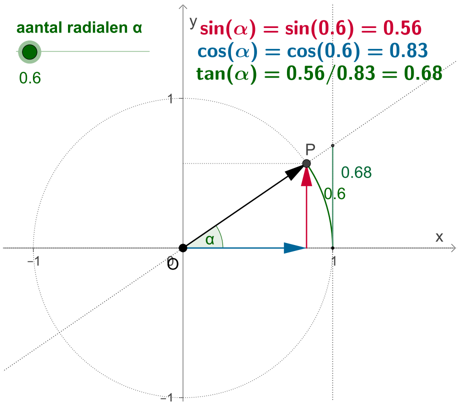
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En daarom geldt voor de **tangensfunctie**:

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π.
Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Terugrekenen vanuit deze functie doe je met behulp van arctan, op veel apparatuur genoteerd als $\tan^{-1}$.
Bijvoorbeeld is de oplossing van $\tan(x) = 0{,}5$ gelijk aan $x = \arctan(0{,}5) + k \cdot \pi \approx 0{,}464 + k \cdot \pi$.



Figuur 2.1

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Bekijk de grafiek van $y = \tan(x)$.

a Breng die grafiek zo in beeld, dat je precies twee periodes ziet.

b Waar zitten de verticale asymptoten van deze functie? Leg ook uit hoe je dat kunt afleiden uit de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

c Voor welke waarden van x is $\tan(x) = 1$?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.
Ook bij de tangensfunctie komen exacte waarden voor bij $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{3}\pi$.

a Bereken de exacte waarden van $\tan(x)$ voor deze x-waarden.

b Schrijf alle oplossingen op van $\tan(x) = \sqrt{3}$.

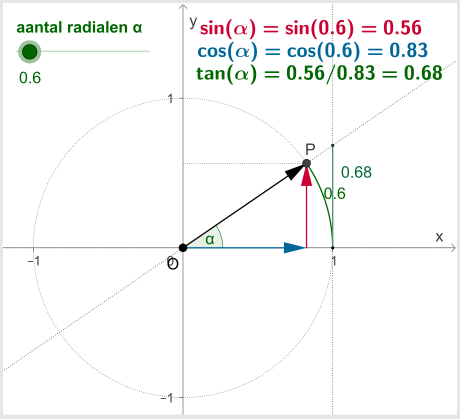
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Tangensfunctie

Onder **goniometrische functies** versta je functies waarin sin, cos (en tan) voorkomen.
De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al. De tangensfunctie is nieuw.
In deze eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens gedefinieerd als:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$



Figuur 2.2

En dus geldt voor de **tangensfunctie**: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De bekende sinusoïden zijn goniometrische functies die zuiver periodiek zijn en een amplitude en een evenwichtsstand hebben. Maar dat geldt niet voor alle goniometrische functies.

Bekijk de applet.

$f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Voorbeeld 1

Los op $[-\pi, \pi]$ op: $\tan(x) \leq 1$.

Antwoord

Maak eerst de grafiek van $y = \tan(x)$, minstens op $[-\pi, \pi]$.

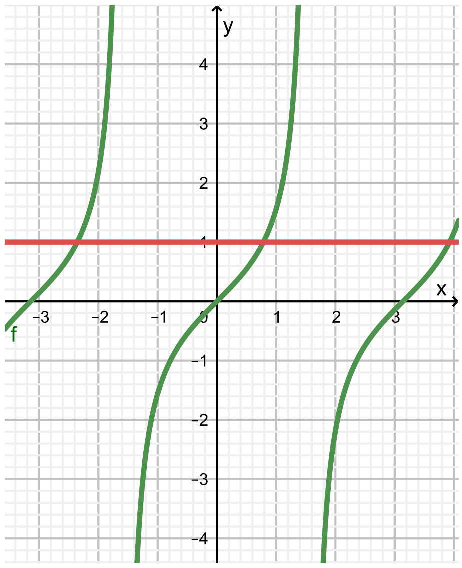
De verticale asymptoten vallen meteen op. Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vind je ze bij x-waarden waarvoor $\cos(x) = 0$. Dus: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Los nu op: $\tan(x) = 1$.

Omdat $\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$ en de tangensfunctie een periode van π heeft, wordt dit: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uit de grafiek lees je de oplossing af, rekening houdend met de verticale asymptoten:

$-\pi \leq x < -\frac{3}{4}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$.



Figuur 2.3

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Los zelf op $[0, 2\pi]$ op: $f(x) > \sqrt{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 10\sin(0{,}1\pi(x - 5)) + 15$ op het interval $[0, 50]$.

a Lees periode, amplitude, evenwichtsstand en de horizontale verschuiving t.o.v. de y-as uit het functievoorschrift af.

b Maak de grafiek van f.

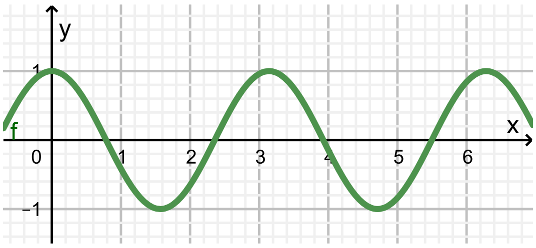
c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) = 12$.

Voorbeeld 2

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
(Met $\cos^2(x)$ wordt $(\cos(x))^2$ bedoeld.)
Onderzoek of deze goniometrische functie periodiek is en bepaal dan de bijbehorende periode.

Antwoord

De standaard cosinusgrafiek heeft een periode van 2π. Het ligt dus voor de hand om de grafiek van f in beeld te brengen op bijvoorbeeld $[0,2\pi]$. Die grafiek lijkt op een zuivere sinusoïde met periode π, amplitude 1 en evenwichtsstand $y = 0$. Als je er een formule met cos bij wilt maken is de horizontale verschuiving 0. Kortom: de grafiek lijkt op die van $y = \cos(2x)$.



Figuur 2.4

Of dit echt het geval is, kun je (nog) niet aantonen. Wel kun je de nulpunten berekenen en kijken of die hetzelfde zijn als die van $y = \cos(2x)$.

$f(x) = 0$ als $2\cos^2(x) - 1 = 0$, dus als

$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dit levert dezelfde waarden op als $\cos(2x) = 0$ oplossen.
Ga dat zelf na.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Maak zelf de grafiek van f en bepaal twee opeenvolgende toppen met een maximum.

b Welke periode kun je hieruit afleiden voor de sinusoïde die lijkt te ontstaan?

c Welke andere formule zou je bij deze sinusoïde kunnen opstellen?

d Waarom weet je nog niet helemaal zeker dat de grafiek van f ook echt een sinusoïde is?

Opgave 8

Gegeven de functie f met $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Zo ja, welke formule past er dan bij die sinusoïde?

c Los op: $f(x) = 0{,}5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

d Gebruik nu de formule van de sinusoïde die je bij b hebt gemaakt en los exact op: $y = 0{,}5$. Komen deze antwoorden overeen met die bij c?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2x\sin(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Waarom kan hier geen sprake zijn van een sinusoïde?

b Is dit een periodieke functie?

c Beschrijf de regelmaat van de grafiek van f.

Oefenen

Opgave 10

Als je de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(x)$ optelt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a Maak de grafiek van f. Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Waarom mag je op grond hiervan nog niet aannemen dat het er ook werkelijk één is?

De grafiek van f is een sinusoïde.

b Geef de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y_1 = \sin(x)$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor deze sinusoïde.

d Bereken met behulp van je formule bij b de toppen en de nulpunten van de grafiek van f.

e Los op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > 1$.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $[0,\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld.

b Bij welke waarden van x krijgt de grafiek een verticale asymptoot?

c Welke periode heeft deze grafiek?

d Los op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 12

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

a Deze grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?

b Is de grafiek van g een sinusoïde?

c Bepaal de nulpunten en de toppen van de functie g. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Opgave 13

De grafiek van de functie $y_2 = \sin^2(x)$ is een zuivere sinusoïde.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van de grafiek van $y = \cos(x)$.

b Geef een passende formule voor deze sinusoïde.

c Los op: $y_2 = 1$ door gebruik te maken van het oorspronkelijke functievoorschrift.

d Doe hetzelfde nog eens door gebruik te maken van de gevonden formule voor de sinusoïde.

Opgave 14

Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.

b Neem aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

c Los nu algebraïsch op: $f(x) < 0{,}5$.

Toepassen

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaats vindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld

$u(t) = a \cdot \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$

De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a. Neem voor het gemak $a = 1$.

Bij een grondtoon klinken meestal boventonen mee.
De eerste boventoon heeft een frequentie die de helft is van die van de grondtoon.
De tweede boventoon heeft een frequentie die éénderde is van die van de grondtoon. Enzovoorts.

De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld) $u_1(t) = 0{,}8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$.
En bij de tweede boventoon past (bijvoorbeeld):
$u_1(t) = 0{,}6 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$.
Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

Opgave 15

Bekijk de formules voor een grondtoon en twee boventonen die je in **Toepassen** aantreft.

a Maak eerst de grafiek van de grondtoon A. Zorg dat je precies drie periodes in beeld krijgt, bepaal dus eerst de periode.

b Zet de twee boventonen er bij en tel deze functies op. Maak de bijbehorende grafiek.

c Is de resulterende snaartrilling een zuivere sinusoïde?

Opgave 16

De stamtoon E heeft een frequentie van 330 Hz.

a Welke formule past bij deze toon als je weer uitgaat van een amplitude van 1 en een evenwichtsstand van $u = 0$?

b De eerste boventoon hoor je maar voor 50% van de geluidssterkte van de grondtoon E.
Welke formule past daar bij?

c Waarom levert het samen horen van de grondtoon E met zijn eerste boventoon wel een periodieke trilling op, maar geen sinusoïde?

Testen

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Geef een formule voor deze sinusoïde met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 18

De grafiek van $y = \cos^2(x)$ is een sinusoïde. Schrijf de formule in de vorm $y = a\cos(b(x + c)) + d$.

2.2 Goniometrische formules

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- goniometrische formules (symmetrieformules, somformules, verdubbelingsformules, enz.) kennen;
- goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van functievoorschriften en het oplossen van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies met de grafische rekenmachine onderzoeken;
- werken met de functie $y = \tan(x)$.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$

$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

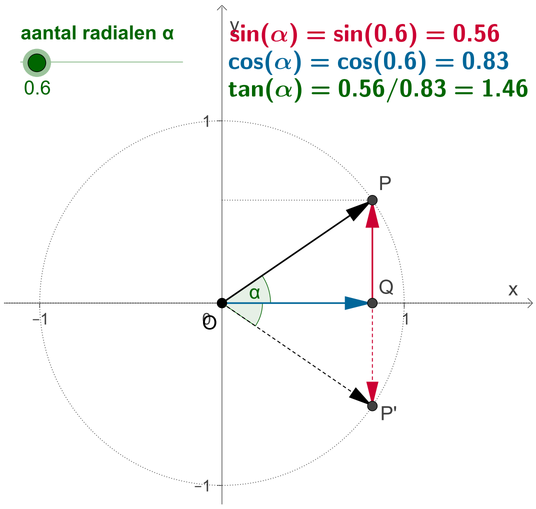
Hier zie je α en $-\alpha$ in één figuur.

a Leg uit waarom $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

b Welk verband is er tussen $\sin(\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$?

c Kun je nog meer van dit soort symmetrieformules afleiden?

d Denk ook eens aan de stelling van Pythagoras. Kun je iets zeggen over $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$?



Figuur 2.1

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$

$\cos(\alpha) = x_P$

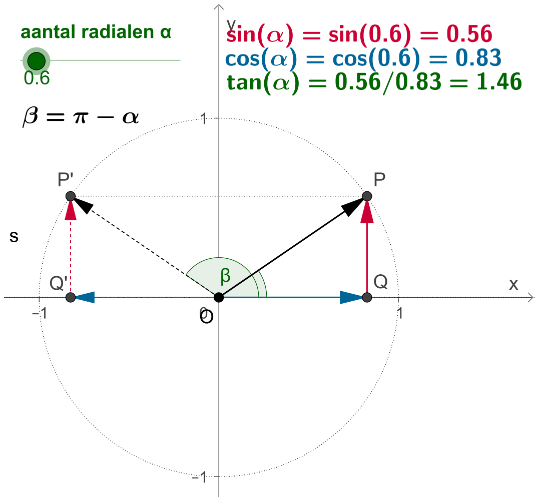
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

In deze figuur zie je de hoeken α en $\beta = \pi - \alpha$.

Omdat ΔOQP en $\Delta OQ'P'$ congruent zijn vanwege de symmetrie van de figuur geldt:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Kijk je alleen naar ΔOQP dan zie je met de stelling van Pythagoras: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.



Figuur 2.2

Op deze wijze kun je allerlei formules voor sin, cos en tan afleiden. Bijvoorbeeld: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Of: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

Of: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 1

Bekijk de symmetrieformules die in **Uitleg 1** worden afgeleid.

a Laat zelf zien, dat: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

b Laat zien, dat: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

c Laat ook zien dat: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 2

Breng de grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ in beeld.

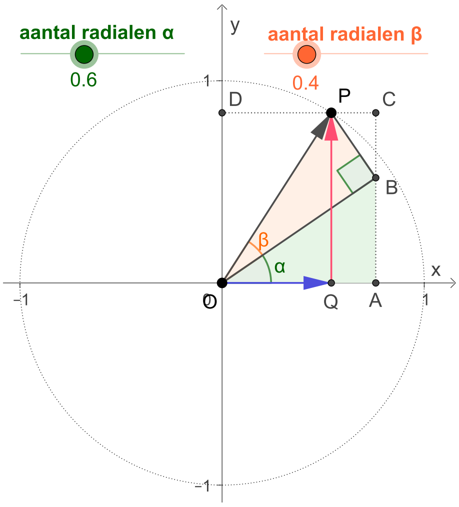
a Welke formule heb je nu zichtbaar gemaakt? En hoe wordt die formule in **Uitleg 1** afgeleid?

b Maakt het daarbij verschil of je in graden of radialen werkt?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Met behulp van de figuur hiernaast kun je de zogenaamde somformules afleiden. Je ziet hoe hier de hoeken α en β 'op elkaar gestapeld' zijn. Het is de bedoeling om $\sin(\alpha+\beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ en $\cos(\beta)$ met behulp van rechthoek $OACD$ en de rechthoekige driehoeken OBP en BCP. Dit gaat alleen zolang $\alpha+\beta$ tussen 0 en $0{,}5\pi$ blijft. Alle andere situaties moet je met behulp van de symmetrieformules en de eenheidscirkel tot deze herleiden!



Figuur 2.3

Ga na, dat $\sin(\alpha+\beta)=\frac{QP}{OP}=\frac{AC}{OP}$.

Ga ook na, dat $\angle PBC=\alpha$ en daarmee

$\sin(\alpha)=\frac{AB}{OB}$, $\cos(\alpha)=\frac{OA}{OB}=\frac{BC}{BP}$, $\sin(\beta)=\frac{BP}{OP}$ en $\cos(\beta)=\frac{OB}{OP}$.

Dan is:

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)=\frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP}+\frac{BC}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}=$

$\frac{AB}{OP}+\frac{BC}{OP}=\frac{AC}{OP}=\sin(\alpha+\beta)$.

Hiermee heb je afgeleid: $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.

Met behulp van de symmetrieformules kun je hier dan weer varianten op maken.
En bovendien geldt als je $\alpha=\beta=x$ neemt: $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.

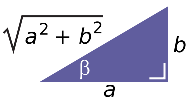
Dit is een voorbeeld van een verdubbelingsformule.

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de formule
$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ afgeleid.

a Laat zien dat hieruit volgt $\sin\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin(x)+\frac{1}{2}\cdot\cos(x)$.

Voor β geldt $\tan(\beta)=\frac{b}{a}$, zie figuur.



Figuur 2.4

b Laat zien, dat $\sin(x+\beta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos(x)$.

c Laat zien, dat $a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$ waarin $\tan(\beta)=\frac{b}{a}$.

Je hebt nu ontdekt dat elke formule van de vorm
$y=a\sin(x)+b\cos(x)$ een sinusoïde is.

d Laat zien, dat $3\sin(x)+4\cos(x)\approx 5\sin(x+0{,}93)$.

e Laat zien, dat $\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$.

Opgave 4

In **Uitleg 2** worden verdubbelingsformules afgeleid.

a Laat zien dat $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Je hebt al eerder gezien, dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

b Laat zien dat je hierbij uit de formule bij a kunt afleiden $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Dit is een overzicht van de belangrijkste **goniometrische formules**. Je kunt ze gebruiken om goniometrische functies te herleiden en/of bijbehorende vergelijkingen op te lossen.

Symmetrieformules

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Verbanden tussen sin en cos

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Somformules

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Verdubbelingsformules

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

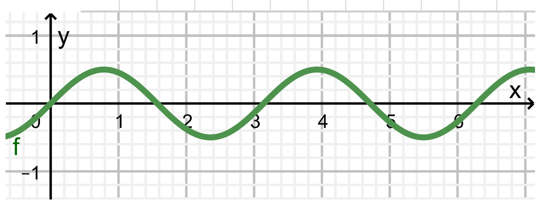
Formule voor a sin(x) plus b cos(x)

$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Tabel 2.1

Voorbeeld 1

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.
De grafiek lijkt op een sinusoïde. Toon aan dat dit ook echt zo is.



Figuur 2.5

Antwoord

Het functievoorschrift $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ past bij de verdubbelingsformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Die verdubbelingsformule kun je schrijven als $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Het functievoorschrift kun je hiermee herleiden:
$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

En $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ is een sinusoïde met amplitude $\frac{1}{2}$, periode π en evenwichtsstand $y = 0$. En dat klopt ook netjes met de grafiek.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = \cos^2(x)$. De grafiek van f lijkt een zuivere sinusoïde te zijn.

a Ga dat na.

b Toon aan dat f een sinusoïde is.
Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van die sinusoïde.

c Los algebraïsch op $f(x) = 1$.

Opgave 6

Waarom is $f(x) = 2\sin(x) + \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ een sinusoïde?

Voorbeeld 2

Laat zien, dat $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ een sinusoïde is.
Stel een bijpassende formule op in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Eerst gebruik je de somformule
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Dat geeft $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en dus:

$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)$.

Vervolgens gebruik je $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Dat geeft $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de functie
$f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ als sinusoïde geschreven.

a Laat zelf zien, dat $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

De vergelijking $\sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$ kun je in deze vorm niet algebraïsch oplossen.
Maar door het schrijven van het functievoorschrift als sinusoïde kan dit wel.

b Los deze vergelijking op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oefenen

Opgave 8

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

a Bereken de nulpunten van deze functie.

b Laat zien dat je het voorschrift van deze functie kunt herschrijven tot $f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$.

c Bereken de nulpunten opnieuw vanuit de formule die je bij b hebt gevonden.

d Los algebraïsch op: $f(x) > \frac{1}{2}$.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $S(x) = f(x) + g(x)$.

a Onderzoek of de functie S een sinusoïde zou kunnen zijn.

b Toon met behulp van de somformules voor sinus aan dat S een sinusoïde is.

c Los algebraïsch op: $S(x) \geq 1$.

Opgave 10

Los algebraïsch op $\sin(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

Opgave 11

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 0{,}5\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

b Breng de grafiek in beeld en bepaal de asymptoten.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 12

Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Toon aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Los nu algebraïsch op: $f(x) < 1$.

Toepassen

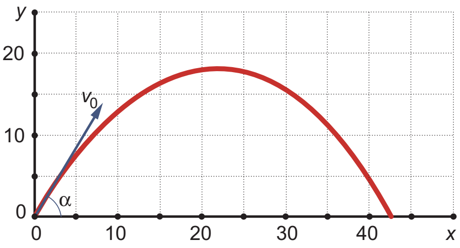
De baan die een afgeschoten voorwerp onder invloed van de zwaartekracht aflegt noem je de kogelbaan. De vorm van deze baan is een parabool. Dat kun je zelf afleiden uit een paar natuurkundige formules.

Als je een voorwerp afschiet met een beginsnelheid v_0 (in m/s) onder een bepaalde hoek α dan ondervindt het zwaartekracht en luchtweerstand. Stel je voor dat die luchtweerstand kan worden verwaarloosd. Je wilt de baan tekenen in een gewoon rechthoekig Oxy-assenstelsel.

- In de x-richting geldt dan: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$.
- In de y-richting geldt dan: $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0{,}5gt^2$.

Hierin is $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de zwaartekrachtversnelling en t de tijd in seconden.

Wellicht herken je de formules voor de eenparige beweging in de x-richting en die voor de eenparig versnelde beweging in de y-richting wel uit de natuurkunde. En natuurlijk wil je weten bij welke hoek de kogel het verst verwijderd op de grond komt.



Figuur 2.6

Opgave 13

Bekijk de formules voor de kogelbaan in **Toepassen**.

a Licht toe hoe je aan deze formules komt.

Voor de kogelbaan in de figuur geldt $\alpha = 60°$ en $v_0 = 96$ m/s.

b De kogel komt op de grond als $y = 0$. Bij welke waarden van t is dat?

c Bereken de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt.

d Laat zien dat in het algemeen voor het punt waar de kogel na het afschieten weer op de grond terecht komt geldt: $t = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

e Laat zien dat voor de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt geldt: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$.

Opgave 14

De afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt is: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$.

Bij een bepaalde beginsnelheid hangt deze afstand alleen van α af.

a Bij welke hoek α is x maximaal?

b Hoeveel m na het afschieten met een beginsnelheid van 300 m/s komt de kogel weer op de grond als je deze beste hoek kiest?

c Laat zien, dat de baan parabolisch is.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(2x) - \sin^2(x)$ op $[-\pi, \pi]$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Toon dat aan.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \tan(x - \pi) + 1$ op $[0, 2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze grafiek.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Los op: $f(x) \leq 2$.

2.3 Differentiëren van goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een sinusoïde bepalen;
- de differentieerregels toepassen op functies waarin sinus, cosinus of tangens voorkomen.

Voorkennis

- werken met goniometrische functies en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- werken met de functie $y = \tan(x)$;
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

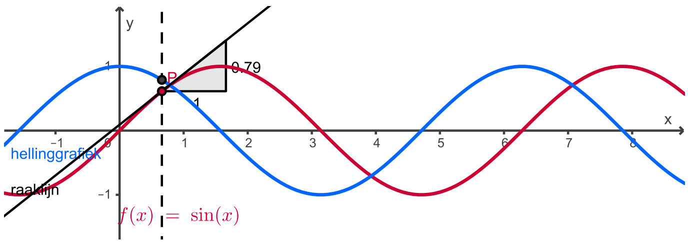
Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en een bijpassende hellingsgrafiek.

a Ga na dat die blauwe grafiek inderdaad de hellingsgrafiek van f is.

b Welke afgeleide heeft $f(x) = \sin(x)$, denk je?

c Welke afgeleide heeft $f(x) = \cos(x)$, denk je?



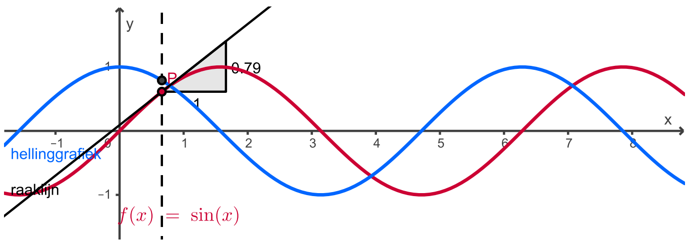
Figuur 2.1

Uitleg

Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Het differentiëren van functies waarin sinus en/of cosinus voorkomen is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.



Figuur 2.2

In de applet wordt dit voor $f(x) = \sin(x)$ aannemelijk gemaakt. Je ziet hierin dat de hellingsgrafiek van f gelijk is aan de grafiek van $f'(x) = \cos(x)$.

Op dezelfde manier zie je dat afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ gelijk is aan $f(x) = -\sin(x)$.

Opgave 1

Bekijk de afgeleiden van sinus en cosinus in de **Uitleg**. In de figuur kun je zien dat de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ gelijk is aan $f'(x) = \cos(x)$.

Maak de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ en de bijbehorende hellingsgrafiek.

Opgave 2

Je kent nu de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$.

a Bereken daarmee de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Bewijs 1

Om de afgeleide van $y = \sin(x)$ te bepalen kijk je naar het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ als $h \rightarrow 0$

Gebruik de goniometrische formule
$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

Omdat $\cos(h) \rightarrow 1$ als $h \rightarrow 0$ kun je dit schrijven als

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} = \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

En omdat voor $h \rightarrow 0$ geldt dat $\sin(h) \rightarrow h$, staat hier

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \rightarrow \cos(x) \text{ als } h \rightarrow 0$$

Precies wat je wilde aantonen...

De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ kun je op dezelfde wijze afleiden.

De afgeleide van $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ leid je met behulp van de quotiëntregel af.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel en met de constante-regels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$
- $h(t) = 3\sin^2(t)$

Antwoord

Gebruik - behalve de afgeleiden van sinus en cosinus - ook de differentieerregels.

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$ geeft $f'(x) = 5\cos(x)$.
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$ geeft $p'(t) = 4 \cdot \text{-}\sin(0{,}15t) \cdot 0{,}15 = \text{-}0{,}6\sin(0{,}15t)$ (kettingregel!).
- $h(t) = 3\sin^2(t) = 3 \cdot (\sin(t))^2$ geeft $h'(t) = 3 \cdot 2(\sin(t))^1 \cdot \cos(t) = 6\sin(t)\cos(t)$.

Opgave 3

Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2\sin(x)$

b $f(x) = \sin(2x)$

c $f(x) = \sin^2(x)$

d $h(t) = 12\sin(0{,}5\pi t) + 1$

e $I(t) = 30\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$

f $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Opgave 4

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ kun je vinden door de quotiëntregel voor differentiëren en de afgeleiden van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ te gebruiken. Laat dat zien.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = \text{-}10 + 20\sin(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$ met domein [-10,10].
Stel m.b.v. differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

$f'(x) = 20\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi) \cdot 0{,}1\pi = 2\pi\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$.

Daaruit volgt: $f'(0) = 2\pi\cos(-0{,}2\pi) \approx 5{,}08$.
Verder is: $f(0) = -10 + 20\sin(-0{,}2\pi) \approx 21{,}76$.

De vergelijking van de raaklijn wordt bij benadering: $y = 5{,}08x - 21{,}76$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

Stel zelf de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ op.

Opgave 6

Bekijk het **Voorbeeld 2**. Je ziet daar hoe de vergelijking van de raaklijn aan een sinusoïde wordt opgesteld. Differentieer nu de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 0$.

a $f(x) = 20\sin(440\pi x)$

b $f(x) = \tan(x)$

Voorbeeld 3

Bij in- en uitademen varieert het longvolume V (in liters) periodiek met de tijd t (in seconden). Stel je voor dat iemand's longvolume varieert tussen 3,05 en 3,15 L en dat deze persoon 40 keer per minuut in- en uitademt. Neem verder aan dat $V(t)$ een zuivere sinusoïde is.
Op $t = 0$ is zijn longvolume maximaal. Bereken de grootste snelheid van uitademen.

Antwoord

Dit is een passende formule: $V(t) = 3{,}10 + 0{,}05\cos\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right)$.

Hierin is t in seconden (er gaan 40 ademhalingen in 60 seconden, dus de periode is 1,5 s).

De grootste snelheid van uitademen vindt plaats als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum. Bijvoorbeeld op $t = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$.

Die snelheid is dan gelijk aan de afgeleide van $V(t)$ op dat tijdstip.

Nu is: $V'(t) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5}$.

En daarom is: $V'(0{,}375) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot 0{,}375\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5} \approx -0{,}209$.

De maximale snelheid van uitademen in ongeveer 0,2 L/s.

Opgave 7

Voorbeeld 3 gaat over iemand's longvolume en de snelheid van in- en uitademen.

a Laat zien hoe je de formule voor $V(t)$ uit de tekst kunt afleiden.

b Leg uit waarom de grootste snelheid van uitademen plaats vindt als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.

c Voer nu zelf de berekening van die maximale snelheid van uitademen uit.

d En bij welke waarden van t krijg je de grootste snelheid van inademen? Hoe groot is die snelheid?

Oefenen

Opgave 8

Differentieer deze goniometrische functies.

a $f_1(x) = 4\cos(x)$

b $f_2(x) = 4\sin(2x - 0{,}25\pi) + 10$

c $f_3(x) = 50\cos^2(x)$

d $f_4(x) = 2 - 2\sin(x - 1)$

Opgave 9

Met domein $[0{,}2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 1$.

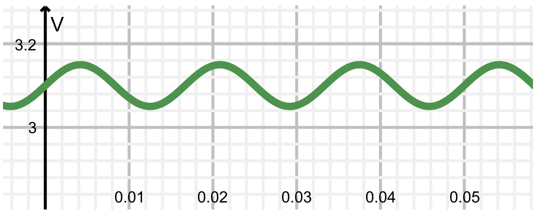
a Laat zien, dat $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 1$.

b Bereken de exacte extremen van deze functie.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Opgave 10

Het longvolume V (in L) van een mens kun je registreren met een zogenaamde spirograaf. Bij iemand die hyperventileert geeft de spirograaf de grafiek die je hiernaast ziet. Horizontaal zie je de tijd t in minuten.



Figuur 2.3

a Hoeveel keer per minuut ademt deze patiënt uit?

b Stel een formule op voor V als functie van de tijd t. Ga ervan uit dat de grafiek een zuivere sinusoïde is.

c Benader in twee decimalen nauwkeurig de toenamesnelheid van het longvolume op $t = \frac{7}{480}$.

Opgave 11

Gegeven een functie waarvan de grafiek lijkt op een sinusoïde. Alleen de evenwichtsstand is geen horizontale lijn, maar een lijn met helling van $\frac{1}{2}$. Bij deze functie hoort het voorschrift $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + 2\sin(x)$. Je spreekt nu niet van een evenwichtsstand, maar van een trendlijn.

a Welke formule geldt voor de trendlijn? Breng op je grafische rekenmachine zowel de grafiek van f als de trendlijn in beeld.

b Bereken algebraïsch de toppen van de gegeven functie.

c Vallen de x-waarden van die toppen samen met die van de toppen van $y = \sin(x)$? Geef een verklaring.

Toepassen

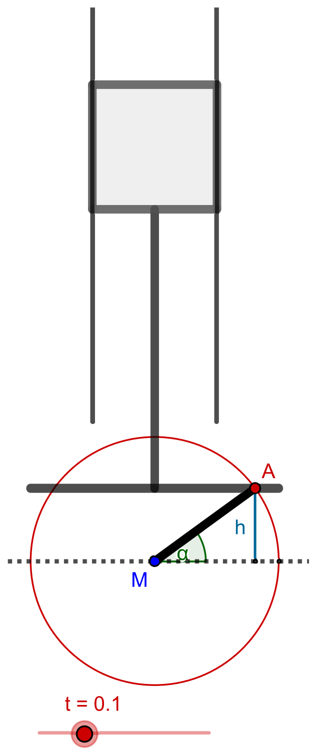
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 2.4

Opgave 12

Bekijk de formule voor $h(t)$ in **Toepassen**.
De zuiger beweegt op en neer.

a Beweegt de zuiger steeds met dezelfde snelheid omhoog?

De snelheid waarmee h verandert is gelijk aan de afgeleide van h.

b Stel een formule voor die snelheid op.

c Hoe groot is de snelheid waarmee h verandert op $t = 0$?

Opgave 13

Bekijk de formule voor de snelheid waarmee de hoogte van de zuiger verandert in de vorige opgave.

a Tussen welke waarden kan deze snelheid variëren?

b Op welke twee manieren kun je de hoogste snelheid die de zuiger kan aannemen nog verhogen?

Testen

Opgave 14

Je doorloopt in een bepaald reuzenrad een cirkelbaan waarbij geldt $h(t) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, met:

- h de hoogte boven de begane grond in m;
- t de tijd in seconden.

a Je vertrekt op $t = 0$. Hoe snel gaat de hoogteverandering op dat moment?

b Hoe snel gaat de hoogteverandering als je een kwart cirkel hebt doorlopen?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x + 2\sin(x)$ op het domein $[0, 2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Stel vergelijkingen op van de rechte lijnen l en m die de grafiek van f raken en evenwijdig zijn aan de lijn met vergelijking $y = x$.

2.4 Harmonische trilling

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- harmonische trillingen beschrijven m.b.v. sinusoïden;
- sinusoïden optellen en onderzoeken of er dan opnieuw sprake is van een sinusoïde.

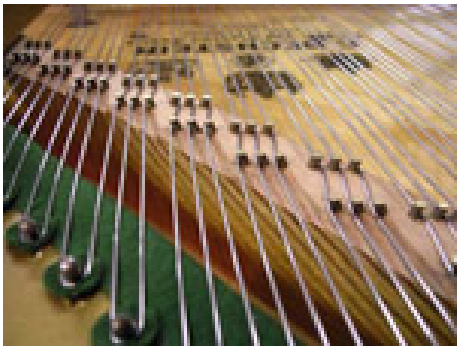
Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies differentiëren.
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.



Figuur 2.1

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880\pi \cdot t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

a Breng de bijbehorende grafiek in beeld, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Een boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

b Laat zien hoe de grafiek van $u(t) = \sin(880\pi \cdot t) + 0{,}5\sin(1760\pi \cdot t)$ er uit ziet.
Is dit een zuivere sinusoïde?

Uitleg

Bekijk de applet: Harmonische trillingen

Een harmonische trilling is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking uit de evenwichtsstand heeft dan bijvoorbeeld een formule zoals

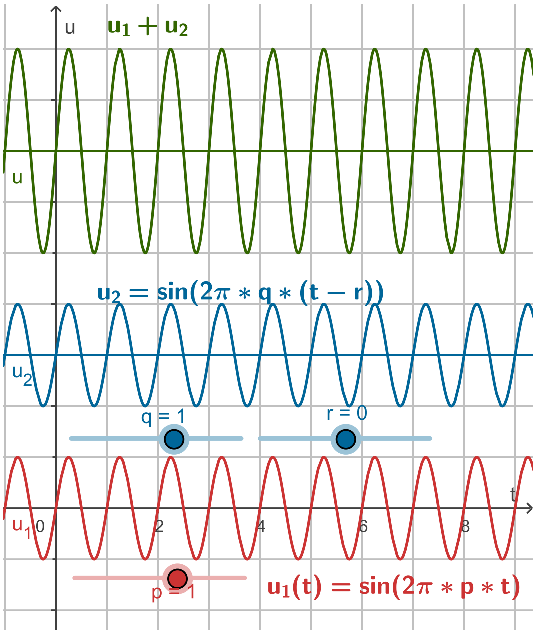
$u(t) = 10\sin(2\pi t)$

Hierin is:

- u de uitwijking uit de evenwichtsstand in cm
- t de tijd in seconden

De periode van deze trilling is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ seconde.

Je kunt ook twee harmonische trillingen optellen, ze werken dan tegelijkertijd. Soms zijn ze 'in fase' (ze starten dan op hetzelfde moment), soms niet, er is dan een faseverschil. Zo kunnen ze elkaar versterken, dan wel uitdoven. Altijd ontstaat er een nieuwe periodieke functie, niet altijd is het weer een harmonische trilling, een sinusoïde. Wanneer wel en wanneer niet?



Figuur 2.2

Even experimenteren en je zult wel vermoeden dat dit te maken heeft met de periodes van u_1 en u_2: alleen als die gelijk zijn krijg je weer een zuivere sinusoïde.

Opgave 1

Neem $u_1 = 10\sin(2\pi t)$ en $u_2 = 5\sin(2\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a Laat algebraïsch zien dat u een sinusoïde is.

b Hebben u_1 en u_2 een faseverschil?

Je gaat nu met een faseverschil werken. Gebruik de applet of maak zelf grafieken.

c Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(2\pi(t - 0{,}2))$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$. Wat valt op?

d Het faseverschil van de voorgaande trillingen is 0,2.
Wat gebeurt er als het faseverschil 0,5 wordt?

Opgave 2

Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a De periodes van u_1 en u_2 zijn nu verschillend. Is u een sinusoïde?

b Experimenteer met de periodes van u_1 en u_2. Wanneer wordt u een sinusoïde?

c Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(0{,}2\pi t)$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.
Welke periode heeft u?

Opgave 3

Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(3\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

Hoe groot is de periode van $u(t)$?
Hoe kun je die berekenen uit de periodes van u_1 en u_2?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde. Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking u (in m) uit de evenwichtsstand is een functie van de tijd t (in s):

$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- Als beide sinusoïden dezelfde periode hebben, is hun som ook een sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen met dezelfde periode is weer een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 1**.
- Als beide sinusoïden verschillende periodes hebben, is hun som geen sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen is geen zuiver harmonische trilling, maar wel een periodiek verschijnsel. Zie **Voorbeeld 2**.

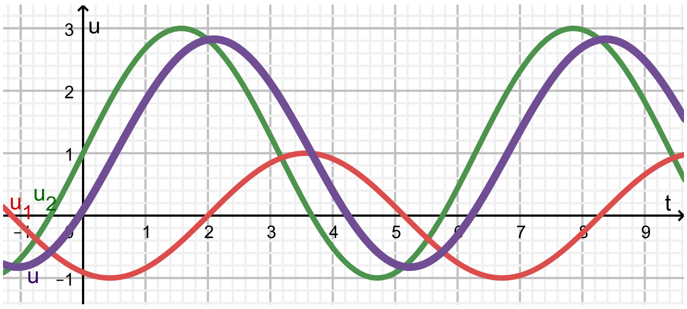
Voorbeeld 1

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = 2\sin(t) + 1$ en $u_2 = \sin(t - 2)$.
Beide trillingen hebben dezelfde periode, dus $u = u_1 + u_2$ is ook een harmonische trilling.

Stel met behulp van de grafiek een formule op voor $u(t)$.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van u_1, u_2 en u in één figuur in bijvoorbeeld GeoGebra.



Figuur 2.3

Bepaal nu met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de maxima en de minima van de grafiek van u.
Je vind maxima bij $x \approx 2{,}09 + k \cdot 2\pi$ van $\approx 2{,}83$.
Je vind minima bij $x \approx 5{,}23 + k \cdot 2\pi$ van $\approx$ -0,83.

De evenwichtsstand lees je uit de figuur af: $u = 1$.
De periode is dezelfde als die van u_1 en u_2, dus 2π.

De amplitude is $2{,}83 - 1 = 1{,}83$.

Het eerste punt op de evenwichtsstand waarin een complete trilling begint ligt bij $t = 2{,}09 - \frac{1}{4} \cdot 2\pi \approx 0{,}52$.

Dit getal bepaalt de horizontale verschuiving.

De formule wordt $u(t) \approx 1{,}83 \sin(t - 0{,}52) + 1$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode worden opgeteld.

a Breng zelf de grafiek van $u(t)$ in beeld. Ga na dat hij op een sinusoïde lijkt en bepaal frequentie, amplitude en evenwichtslijn.

b Bepaal op dezelfde manier de formule van $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ als sinusoïde.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen met dezelfde frequentie.
Bepaal de amplitude van de resulterende harmonische trilling.

a $y_1(t) = 20 \sin\left(\frac{2\pi}{5} t\right)$ en $y_2(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-1)\right)$

b $y_1(t) = 20 \sin(t)$ en $y_2(t) = 10 \cos(t)$

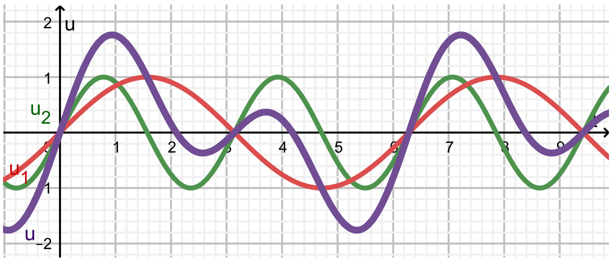
Voorbeeld 2

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(2t)$.
Beide trillingen hebben verschillende periodes, dus $u = u_1 + u_2$ is geen harmonische trilling.
Hoe groot is de periode van $u(t)$?

Antwoord

Omdat de periodes verschillen heeft u niet de gedaante van een sinusoïde.
Maar $u(t)$ is wel periodiek. Omdat $\sin(t)$ zich herhaalt met een periode van 2π en $\sin(2t)$ met een periode van π, past de trillingstijd van de $\sin(2t)$ precies twee keer in die van $\sin(t)$. De periode is daarom 2π.

(In het algemeen is in een dergelijk geval de periode het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van beide afzonderlijke periodes.)



Figuur 2.4

Opgave 6

Bekijk de twee harmonische trillingen in **Voorbeeld 2**.
Hun som is geen harmonische trilling.

a Waarom niet?

Neem nu $u_1(t) = \sin(3t)$ en $u_2(t) = \sin(4t)$.

b De grafiek van $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ is geen harmonische trilling, maar wel periodiek.
Hoe leid je de periode van u af uit die van u_1 en die van u_2?

Oefenen

Opgave 7

Ga uit van twee harmonische trillingen u_1 en u_2. Bepaal in de elk van de volgende gevallen of $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een harmonische trilling is. Bepaal in dat geval de frequentie en amplitude.

a $u_1 = 2\cos(t)$ en $u_2 = 5 + \sin(t)$

b $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi t)$

c $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi(t-2))$

d $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(100\pi t)$

Opgave 8

Je kunt met een hoorn lage tonen spelen. Zo'n toon heeft bijvoorbeeld een frequentie van 80 Hz. De toon kun je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 10.
Op een hobo speel je hogere tonen met een frequentie van bijvoorbeeld 400 Hz. Deze toon kun je je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 5.


Figuur 2.5

a Stel voor beide tonen een formule op voor de bijbehorende sinusoïde.

b Iemand hoort de beide tonen tegelijk. Teken de grafiek van de toon die hij hoort. Zorg ervoor dat er precies twee periodes zichtbaar zijn.

c De amplitudes zijn een maat voor de sterkte van het geluid. Welke amplitude heeft de grafiek die je bij b hebt gemaakt?

Opgave 9

Twee trillingen hebben alleen een faseverschil. Als voor de ene trilling geldt $y_1 = \sin(t)$ dan geldt voor de andere $y_2 = \sin(t - p)$. Een puntmassa trilt zuiver harmonisch onder invloed van beide trillingen.

a Neem $p = 0$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

b Neem $p = \pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

c Neem $p = \frac{1}{2}\pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

Opgave 10

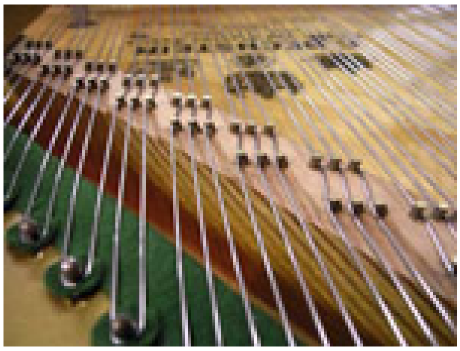
Een passerend schip veroorzaakt op een rivier een golf die tegen de wal wordt teruggekaatst. Gedurende enige tijd ondervindt een klein vissersbootje zowel invloed van de oorspronkelijke golf als van de teruggekaatste golf. Bij de terugkaatsing wordt door demping de amplitude kleiner en wel $\frac{2}{3}$ deel van de oorspronkelijke amplitude.
De teruggekaatste golf is het spiegelbeeld van de voortzetting van de oorspronkelijke golf. Stel je voor dat voor de oorspronkelijke golf geldt $h(t) = \sin(t)$ met t in radialen. Verder bevindt de dichtstbijzijnde golftop zich $\frac{5}{6}$ periode uit de wal.

a Leg uit dat voor de combinatie van beide golven geldt: $h(t) = \sin(t) + \frac{2}{3}\sin\left(t + 3\frac{1}{3}\pi\right)$.

b De combinatie van beide golven is een sinusoïde. Welke amplitude heeft deze sinusoïde?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.



Figuur 2.6

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens
$u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

Hier zie je een geluidsspoor van een A zoals die op een klarinet wordt gespeeld (blauw). Je kunt aan de grondtoon boventonen toevoegen en bekijken hoe het geluidsspoor verandert. Je kunt zo het geluidsspoor van de A op de klarinet nabootsen.

Bekijk de applet: Geluidsapplet

Opgave 11

Bekijk het trillingspatroon van een A van 440 Hz gespeeld op de klarinet.

Maak zelf dit trillingspatroon na met de applet. Welke formule hoort er bij?

Opgave 12

Van een aangeslagen pianosnaar zijn de grondtoon en de eerste boventoon hoorbaar. Voor de grondtoon geldt de formule $u_0 = \sin(880\pi t)$. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en een amplitude die half zo groot is.

a Het geluid dat deze snaar produceert ontstaat door beide trillingen op te tellen. Welke formule geldt voor de trilling van de snaar?

b Waarom trilt de snaar niet zuiver harmonisch? Welke frequentie heeft de trilling?

c Welke formule geldt er dan voor de uitwijking van de pianosnaar? Met welke frequentie trilt de snaar?

Testen

Opgave 13

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen. Leg uit in welk van de volgende gevallen de puntmassa zelf ook zuiver harmonisch trilt. Bepaal in die gevallen de frequentie en de amplitude van de trilling.

a $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(t+2)$

b $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(2t)$

c $u_1 = 5\sin(220\pi t)$ en $u_2 = 10 + 3\sin(220\pi t)$

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- goniometrische functie — de functie $f(x) = tan(x)$
- goniometrische formules: symmetrieformules, verdubbelingsformules, somformules — verbanden tussen sin en cos
- afgeleiden van sin, cos en tan
- harmonische trilling — frequentie en trillingstijd

Activiteitenlijst

- werken met goniometrische functies (o.a. $f(x) = tan(x)$) op een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos
- de goniometrische formules afleiden — de goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van goniometrische functies en het oplossen van vergelijkingen
- de afgeleide van een goniometrische functie bepalen en toepassen
- bepalen of een som van harmonische trillingen weer een harmonische trilling is

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$ met domein $[0,2\pi]$.

a De grafiek van P is een zuivere sinusoïde. Bepaal grafisch de amplitude en de evenwichtsstand van deze functie.

b Toon algebraïsch aan dat $P(t) = 25 - 25\cos(2t)$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 12{,}5$.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ en

$g(x) = 1 + \sin(x)$.
Beide hebben ze als domein $[0,2\pi]$.
Verder is gegeven de functie h met $h(x) = f(x) - g(x)$.

a De grafiek van h is een zuivere sinusoïde. Bereken de amplitude en de evenwichtsstand van h.

b Los op: $h(x) < 0$.

Opgave 3

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = 3\sin(\pi x)$

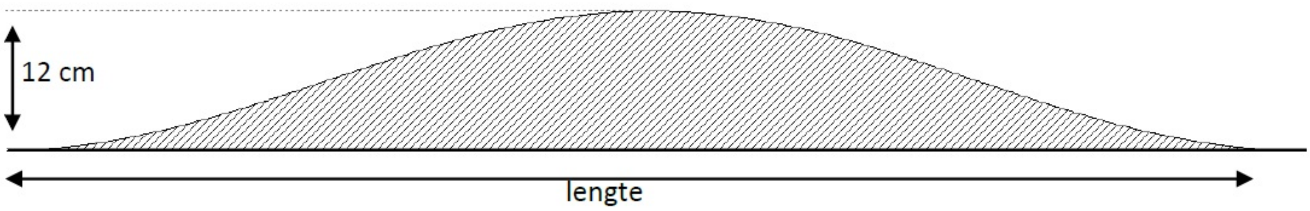
b $g(x) = 5\cos(x+2) - 10$

c $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$

d $W(t) = 0{,}5t + 4 + 3\sin(2t)$

Opgave 4

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.



Figuur 2.1

Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

b Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is. Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

c De helling van de drempel is niet overal even groot. Geef een formule voor de helling van deze verkeersdrempel en laat daarmee zien tussen welke waarden de helling varieert.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee harmonische trillingen $u_1(t) = 2\sin(2\pi t)$ en $u_2 = \cos(2\pi t) + 1$ heen en weer.

a Laat met behulp van een grafiek zien dat de uitwijking $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ van deze puntmassa door een sinusoïde kan worden beschreven. Stel een formule van deze sinusoïde op.

b Bereken de waarden van t waarin de puntmassa het snelst beweegt.

Toepassen

Opgave 6: Zwevingen

Als je twee tonen met vrijwel dezelfde frequentie tegelijk laat horen merk je het (onaangename) verschijnsel **zweving** op. De applet maakt meteen duidelijk hoe dit werkt: de rode grafiek is een A van 440 Hz, de blauwe grafiek is een toon die daar v.w.b. de frequentie vlak bij zit. Je ziet hoe hun optelling een grafiek oplevert die een frequentie heeft die weinig van de A verschilt, maar waarvan de amplitude toeneemt en weer afneemt...

Bekijk de applet: Zwevingen

Stel in de applet naast de trilling $u_1(t) = sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$ de trilling $u_2(t) = sin(2\pi \cdot 430 \cdot t)$ in, met t in seconden.

a Stel je hoort deze trillingen tegelijk. Bekijk de grafiek van de resulterende trilling. Waaraan herken je de zweving?

b De amplitude van de trilling is een maat voor de sterkte van het geluid. Tussen welke waarden zweeft de resulterende trilling? Welk verband is er met de amplitudes van de twee afzonderlijke harmonische trillingen?

c Onderzoek of zweving zich altijd voordoet als de frequenties van twee trillingen verschillen. Als dat niet het geval is, probeer dan vast te leggen wanneer zweving zich wel voordoet. Is er verband tussen de waarden waartussen de geluidssterkte zweeft en de amplitudes van de afzonderlijke harmonische trillingen?

Opgave 7: Gedempte trillingen

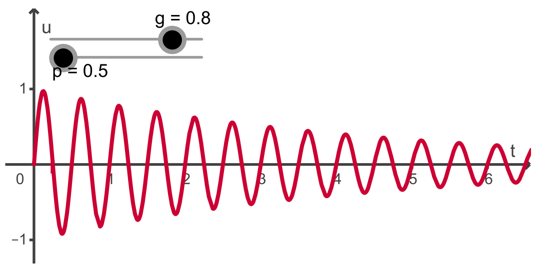
Een gedempte trilling is een trilling waarvan de amplitude met de tijd afneemt. In praktische situaties heb je bijna altijd met demping te maken: wegstervend geluid, een steeds minder uitslaande slinger, een veer die steeds minder trilt...

Bekijk de applet: Gedempte trilling

Bij een trillende snaar bijvoorbeeld wordt door de luchtweerstand de amplitude steeds iets kleiner. Op zeker moment zo klein, dat de toon niet meer te horen is. De amplitude is dan een dalende functie van t.

$u(t) = g^t \cdot sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$

Bekijk hoe de demping afhangt van g en de 'periode' p. De amplitude is $A(t) = g^t$ met $0 < g < 1$.



Figuur 2.2

a Waarom is exponentiële afname in praktijksituaties van de amplitude voor de hand liggender dan lineaire afname? Beschrijf een paar van die praktijksituaties.

Neem aan dat $g = 0{,}8$.

b Na hoeveel tijd is de amplitude dan telkens gehalveerd?

c Bij een periode van $p = 1$ heeft $u(t)$ een maximum op $t = 0{,}25$. Hoe groot is dit maximum? Is er een maximum dat precies de helft van dit maximum is? Zo ja, op welk tijdstip?

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl **www.math4mbo.nl**