

Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel specifiek (KS 1349)

Katern 4

Inhoud

Modelleren

Meetkunde in 3D

Context College

4 Math
MBO



Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie.

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

1 Modelleren 5

1.1 Een model opstellen 6

1.2 Optimaliseren 15

1.3 Dynamische modellen 23

1.4 Onderzoeksopdrachten 31

2 Meetkunde in 3D 35

2.1 Parallelprojectie 36

2.2 Hoeken en afstanden 46

2.3 Oppervlakte en inhoud 56

2.4 Doorsneden construeren 67

2.5 Totaalbeeld 77

Register 82

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Modelleren

1.1	Een model opstellen	6
1.2	Optimaliseren	15
1.3	Dynamische modellen	23
1.4	Onderzoeksopdrachten	31

1.1 Een model opstellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met allerlei functies;
- meetkundige technieken zoals de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, met sinus, cosinus, tangens.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wilt berekenen hoe ver deze persoon theoretisch over het aardoppervlak kan kijken. Welke eigenschappen (van de situatie) komen hierbij kijken?

Uitleg

Probleem:

“Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) over het aardoppervlak kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de uitleg. De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

- Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.
- Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?



Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ , met Q op het aardoppervlak.

Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.

- c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?
- d Welke eigenschap heeft driehoek MPR ? Probeer daar een verklaring voor te vinden.
- e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.
- f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a . Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in $\triangle MPR$.

- a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.
De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.
- b Hoe kun je daarmee rekening houden?
- c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

- d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a . De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR . En die kun je uitrekenen in driehoek MPR .

- a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.
- b Waarom is nu het probleem opgelost?
- c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

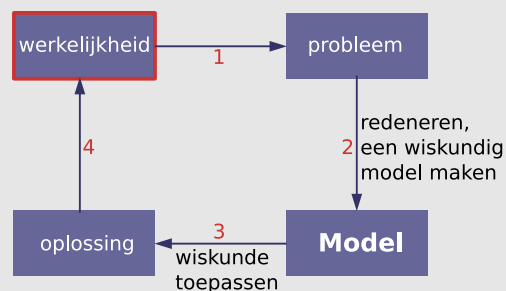
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**. Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De **lijst met mogelijke vragen** kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.



Figuur 1.1

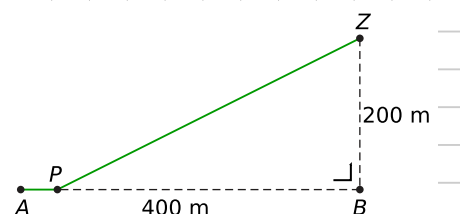
Voorbeeld 1

Bekijk de applet: zwemmer in nood

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij (punt A). Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer (bij Z) die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid 5,4 km/h.



Figuur 1.2



Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen. Bekijk daarna de opgaven.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

- a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?
- b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?
- c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

- d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP . Noem die lengte bijvoorbeeld x .

- e Stel een formule op voor de totale tijd T die nodig is om Z te bereiken vanuit A .
- f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** en de opgave over het 'zwemmer in nood' probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

- a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?
- b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?
- c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?
- d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?
- e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).



Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:

$$P = c \cdot m \cdot v^2$$

Hierin is:

- P het vermogen in kilowattuur (kWh)
- m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde
- v de windsnelheid in meter per seconde (m/s)

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v .

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m³.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

- Welke aannames zijn er gedaan?
- Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.
- Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.
- Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Oefenen

Opgave 7

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord? Dit in vergelijking met het leggen van de kabel op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden.

- Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.
- Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.
- Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.



Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselfersie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieselfersie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieselfersie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

- Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.
- Welke oplossing vind je?
- Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) $52,37^\circ$ en 40000 km.

Opgave 10

Je ziet hier een locomotief van Marklin of Fleischmann, die staat op de drijfstaaf van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.



Figuur 1.3



Opgave 11

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule:

$$W = 0,03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S.$$

Hierin is:

- W het gewicht in kg
- S het vleugeloppervlak in m^2
- V de kruissnelheid in m/s
- d de luchtdichtheid in kg/m^3

- a** Ga uit van een luchtdichtheid van $0,421 \text{ kg}/\text{m}^3$. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid $700 \text{ km}/\text{h}$ is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.
- b** Een vliegtuig met een kruissnelheid van $250 \text{ m}/\text{s}$ en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?
- c** In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van $0,369 \text{ kg}/\text{m}^3$. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V . Wat is de evenredigheidsconstante?

- d** Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig $1,4$ keer zo groot wordt?

Toepassen

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en $320 \text{ watt}/\text{m}^2$.

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a . Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € $0,15$ per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € $0,15$ kost. Neem nu per jaar:

- € $200,00$ per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € $50,00$ per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € $0,15$ per kWh.



Opgave 12

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in.

- a Welke formule geldt voor de lichtsterkte in dit punt?
Neem aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.
- b Welke twee voorwaarden leveren de formules bij a op?

Opgave 13

Bekijk de vorige opgave. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden. De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0,15 \right)$$

- a Laat zien hoe je aan deze formule komt.
- b Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Testen

Opgave 14

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.

Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

$$k = k_{\max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right)$$

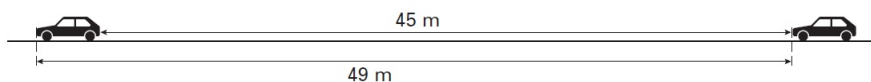
Hierin is:

- v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur
- $v_{\max}$ de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt
- k de verkeersdichtheid
- $k_{\max}$ het maximale aantal auto's per kilometer weg

Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).

Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: 'Houd 2 seconden afstand'.



Figuur 1.4

- a** Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.

Ga uit van de volgende situatie.

Op een weg is $v_{\max} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is $k_{\max}$ gelijk aan 250.

- b** Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vraag gaat over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{\max} = 250$ en $v_{\max} = 160$.

- c** Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v . Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is.

1.2 Optimaliseren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met functies en hun afgeleiden, alle differentieerregels;
- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Verkennen

Opgave V1

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2 . Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Probleem:

“Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2 . Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?”

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.

Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2 . Met deze gegevens maak je een figuur.

Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000 \text{ m}^2$. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de [Uitleg](#).

- Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000 \text{ m}^2$ is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.
- Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?
Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.
- Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?
- Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de [Uitleg](#).

Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

- Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?
- Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie.

Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.

Als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft kun je daarna in veel gevallen verder met behulp van differentiëren.

In erg lastige gevallen kun je GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine inschakelen om de optimale oplossing te vinden.

In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:

Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h , neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik ($1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.

Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$

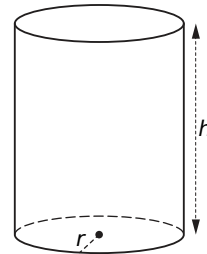
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Omdat gegeven is dat $I = 1000 \text{ cm}^3$ kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r .

De formule voor $A(r)$ kun je differentiëren.

Door die afgeleide gelijk aan 0 te stellen bepaal je de extremen.

Je vindt dat voor $r \approx 5,4 \text{ cm}$ en $h \approx 10,8 \text{ cm}$ de totale oppervlakte minimaal is.



Figuur 1.1

Opgave 3

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 1](#).

- Welke aannames worden er gedaan?
- Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?
- Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.
- Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3 .

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?



Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem af-troeuen. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x .

Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$. Deze variabelen hangen allemaal af van x .

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2**. Kies voor x het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x .

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfs-leider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verko-pen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan ge-wicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p . Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p .

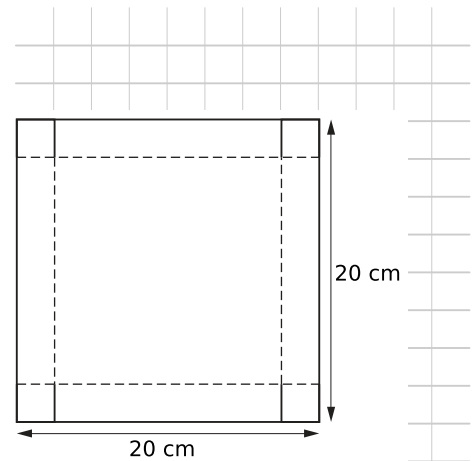
c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

Oefenen

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

- Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?
- Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.



Figuur 1.2

Opgave 8

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.



Figuur 1.3

Opgave 9

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q ($\times 1000$) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0,1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1,5q^3 - 22,5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

- Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?
- Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q .
- Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q .
- Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.
- Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q . Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 10

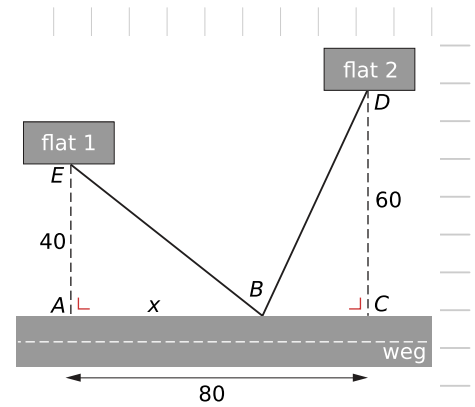
Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

- a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

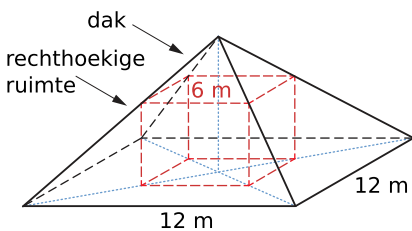
- b Bereken de totale lengte L in meter.



Figuur 1.4

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 1.5

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Opgave 12

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.

Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.



Toepassen

Bekijk de applet: garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?

Opgave 13

Bekijk het probleem in [Toepassen](#).

- a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A , beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

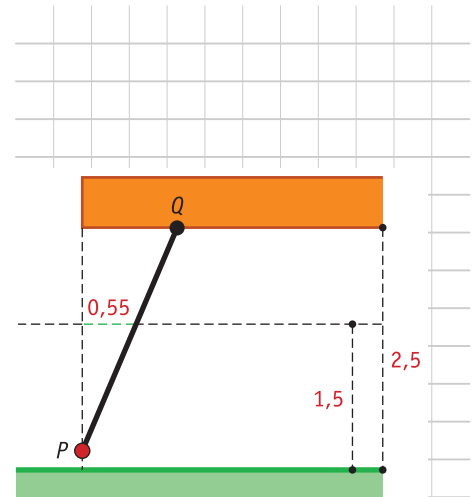
$$A = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2,5^2 - x^2}$$

- b Probeer zelf de formule voor A als functie van x af te leiden.
c Bereken voor welke x de waarde van A maximaal is.

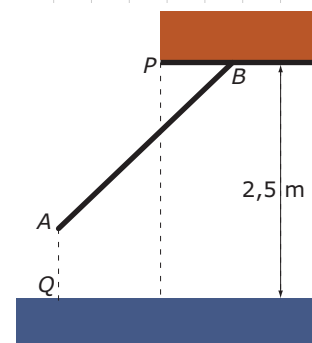
Opgave 14

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB .

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 1.6



Figuur 1.7

Testen

Opgave 15

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.

Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

- a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.
b Los het geschetste probleem op.

Opgave 16

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

1.3 Dynamische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met dynamische modellen in eenvoudige situaties;
- discrete dynamische modellen doorrekenen;
- enkele handreikingen voor het opstellen van een discreet dynamisch model.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties, de modelcyclus;
- werken met formules, veranderingen, toenames en differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt, zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is vier dagen. Daarna ben je voor langere tijd immuun, je kunt deze griep dan niet langer meer krijgen. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek zijn en 500 immuun. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?

Bij het opstellen van een wiskundig model voor het verloop van de griep moet je bedenken met welke factoren je rekening moet houden. In een eenvoudig griepmodel wordt alleen gerekend met:

- $G(t)$ is het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t
- $Z(t)$ is het aantal zieken op dat tijdstip
- $I(t)$ is het aantal immune personen op dat tijdstip

Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$. De modelformules zijn bijvoorbeeld:

- $G(t + 1) = G(t) - 0,2Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0,25Z(t) + 0,2Z(t) = 0,95Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0,25Z(t)$

de
**Grote
Griep
Meting**

Figuur 1.1

Er wordt dan aangenomen dat dagelijks 20% van alle zieken een gezond iemand aansteekt (ziek maakt) en dat per dag 25% van alle zieken gezond wordt. Je ziet dat dit rekenmodel afhangt van de tijd. Het is daarom een zogenaamd 'dynamisch model'. In dit geval wordt de tijd in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen.

Opgave 1

Bekijk het rekenmodel voor een griep epidemie in de [Uitleg](#).

- a Waarop is de aanname gebaseerd dat gemiddeld elke dag 25% van de zieken weer gezond (en dus immuun) wordt?

Bij het in de uitleg bedachte rekenmodel wordt ervan uitgegaan dat dagelijks 20% van het aantal zieken een nieuwe zieke oplevert door besmetting.

- b In welke van de drie modelformules vind je dit (na vereenvoudiging) terug?

De bedenker van het rekenmodel heeft het bestand [Griepepidemie](#) gemaakt om het verloop van de griep epidemie door te rekenen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Griepepidemie								
2		aantal							
3	tijd	Gezond	Ziek	Immuun	Totaal				
4	t	G	Z	I					
5	0	99400	100	500	100000				
6	1	99380	95	525	100000				
7	2	99361	90	549	100000				
8	3	99343	86	571	100000				
9	4	99326	81	593	100000				

Figuur 1.2

- c In cel B6 staat de formule: $=\$B5-0,2*\$C5$
 Leg uit dat dit overeenkomt met de formule:
 $G(t+1) = G(t) - 0,2 \cdot Z(t)$
 Wat staat er in cel C6? En in cel D6?
- d Hoe gaat de griep epidemie verlopen? Maak een tabel tot $t = 6$.
- e Hoe zit het nu met het maximale aantal zieken? Lijkt het model erg realistisch?

Opgave 2

Bij nader inzien lijkt het beschreven model niet goed te zijn: het aantal personen dat ziek wordt gemaakt door iemand die al ziek is, hangt natuurlijk vooral af van het aantal gezonde mensen (alleen die kunnen nog ziek worden). Dat zal geen vast percentage van het aantal zieken zijn. Dit hangt eerder af van het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt en de kans dat dan ook de ziekte wordt overgedragen.

Het rekenblad in Excel wordt daarom wat aangepast. In cel C6 komt nu $=\$C5-0,25*\$C5+0,02*0,5*\$B5$. Hieruit blijkt dat de kans dat de ziekte wordt overgedragen van een zieke op iemand die gezond is, op 50% is gesteld.

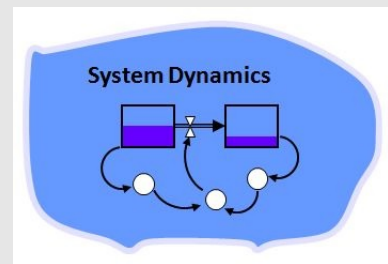


- a Hoe groot is het percentage gezonde mensen waarmee een zieke volgens dit model in contact komt?
- b Schrijf de drie bijbehorende modelformules op.
Dit verbeterde rekenmodel voor de griep epidemie is vertaald in het bestand **Griep epidemie2**.
- c Hoe gaat de griep epidemie nu verlopen? Maak de tabel verder af.
- d Lijkt dit model realistischer? Of zou je nog aanpassingen willen aanbrengen? En zo ja, welke dan?
- e Kun je een manier verzinnen om het model te testen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder een **dynamisch model** versta je een rekenmodel waarin de variabelen afhangen van de tijd. Het beschreven model van een griep epidemie is daarvan een goed voorbeeld. De variabelen G (aantal gezonde personen), Z (aantal zieke personen) en I (aantal personen dat immuun is geworden, dus beter is geworden na de griep te hebben gehad) hangen alle drie af van de tijd t . De tijd wordt in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen. Daarom heet dit wel een discreet dynamisch model. In dit model loopt de tijd dus niet in vaste stappen door. Dit in tegenstelling tot een continu dynamisch model, waarin de tijd vloeiend doorloopt.



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 L/m^3 . Dat is te hoog en dus wordt het water verversd. Elk uur wordt 60 m^3 badwater vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Na hoeveel uur is de chloorconcentratie gehalveerd?

Antwoord

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uur is en C in L/m^3 .

Ga ervan uit dat telkens het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is, waar je ook meet.

Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0,060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dus geldt de modelvergelijking:

$$C(t+1) = C(t) - 0,060 \cdot C(t) = 0,940 \cdot C(t)$$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.

Je vindt dan: $C(1) = 0,940 \cdot C(0)$, $C(2) = 0,940 \cdot C(1) = 0,940^2 \cdot C(0)$, $C(3) = 0,940 \cdot C(2) = 0,940^3 \cdot C(0)$, enzovoort. Door steeds maar door te blijven rekenen bepaal je na hoeveel minuten C is gehalveerd.

De halveringstijd is ongeveer 11,2 uur.



Zie het bestand [Modelzwembad](#).

Opgave 3

In [Voorbeeld 1](#) wordt beschreven hoe het water van een groot zwembad wordt ververs, omdat de chloorconcentratie te hoog is. Hier dient een discreet dynamisch model als benadering van het voortdurende verversingsproces (uitstromen van vuil water en instromen van schoon water).

- a Waarom is dit geen discreet model?
- b Stel je kijkt om het uur naar het verversingsproces. Leg uit waarom er het eerste uur 60 liter chloor verdwijnt. Verklaar waarom er het tweede uur 56,4 liter chloor verdwijnt.
- c Leg uit waarom $\Delta C(t) = -0,060 \cdot C(t)$.
- d Maak handmatig een tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste vier uur.
- e Na hoeveel uur is C met meer dan 60% afgenomen?
- f Je kunt op het werkblad de chloorconcentratie aanpassen.
Wat gebeurt er als de chloorconcentratie twee keer zo groot wordt?

Opgave 4

Bekijk opnieuw het verversen van het water in het zwembad uit [Voorbeeld 1](#). Neem nu aan dat elke minuut badwater wordt vervangen door $0,8 \text{ m}^3$ schoon water. Neem $\Delta t = 1$ minuut.

- a Hoeveel chloor verdwijnt er de eerste minuut? En de tweede minuut?
- b Hoe ziet je modelvergelijking er in deze situatie uit?
- c Maak een nieuwe tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste 5 minuten.
- d Na hoeveel tijd is de chloorconcentratie gehalveerd?

Voorbeeld 2

Je verwarmt water tot 100°C . Als je het in een kopje overgiet, begint het af te koelen. Volgens de warmtewet van Newton is de temperatuurverandering recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Stel dat het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 20°C , hoe kun je dit afkoelingsproces dan beschrijven?

Antwoord

Noem de temperatuur $T(t)$ met T in $^\circ\text{C}$ en t in minuten.
Het temperatuurverschil met de omgeving is dan $T(t) - 20$.
Volgens de warmtewet van Newton is dan:

$$T(t + 1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$$

c is een parameter van het afkoelingsproces die je alleen door meten in een echt experiment kunt bepalen. Eigenlijk is ook de begintemperatuur een parameter, want waarschijnlijk is het water al bij overgieten niet meer precies 100°C .



In het bestand **ModelAfkoelen** kun je nagaan hoe het afkoelen verloopt als c is gemeten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

Daarin zie je de modelformule: $T(t + 1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$

- Neem $c = 0,15$. Maak een tabel met de temperaturen van het water in het kopje voor de eerste 5 minuten.
- Als het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 19°C , wat wordt dan de modelformule?

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

- Probeer te beschrijven hoe het afkoelingsproces verloopt. Misschien ben je in de gelegenheid om metingen te verrichten aan het afkoelen van kokend water.
- Als je metingen hebt kunnen verrichten, dan heb je een tabel waar een grafiek van T bij past. Probeer door aanpassen van c die grafiek met je Excelwerkblad te benaderen. Waarvan zal c afhangen?
- Je kunt (afhankelijk van je metingen) de stapgrootte aanpassen naar bijvoorbeeld 2 minuten. Dan moet wel de factor c kleiner worden genomen. Experimenteer daarmee. Welke waarden voor c passen bij deze stapgrootte?

Oefenen

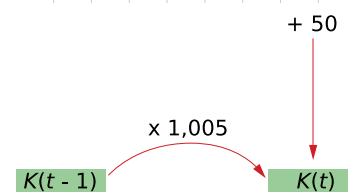
Opgave 7

Je hebt op 1 januari 2015 een saldo van € 1240,00. En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder maak je aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.

- Bereken het saldo op 1 april 2015.
- Leg uit dat het saldo K van je bankrekening t maanden na 1 januari 2015 kan worden berekend door $K(t + 1) = K(t) \cdot 1,005 + 50$ met $K(0) = 1240$.
- Bereken het saldo op 1 juli 2015.

Opgave 8

Staatsbosbeheer heeft een bepaald perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben wordt er jaarlijks maar 18% van de bomen gekapt en worden er 1000 aangeplant. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.



Figuur 1.4



Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel en maak een tabel van het verloop van de eerste zes jaren ervan.

Opgave 9

In 2005 leefden er in een natuurgebied 5000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

- a Ontwerp een dynamisch groeimodel voor het aantal konijnen K waarin t het aantal jaren na 2005 is.
- b Maak een tabel van de groei van het aantal konijnen in de loop van de tijd. Van wat voor soort groei is er sprake?
- c Na hoeveel jaar zullen er voor het eerst meer dan 15000 konijnen zijn?

Deze groei van het aantal konijnen kan niet onbeperkt doorgaan. In dit natuurgebied is slechts plaats voor een beperkt aantal konijnen. Een onderzoeker heeft een aangepast groeimodel opgesteld. Daarin is $K(t+1) = c \cdot K(t)(8000 - K(t))$, waarin $K(0) = 5000$. Dit model blijkt in 2006 precies hetzelfde geschatte aantal konijnen op te leveren als het model dat je bij a hebt ontworpen en ook in de daarop volgende jaren redelijk bij dat model te passen.

- d Welke waarde moet c dan hebben?
- e Maak voor dit aangepaste groeimodel een tabel van het aantal konijnen in de loop van de tijd.

Opgave 10

Als je melk uit de koelkast haalt en in een glas schenkt, loopt de temperatuur op vanaf $T(0) = 6$ °C (de temperatuur binnen de koelkast) naar de kamertemperatuur van 20 °C. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

- a Leg uit dat hieruit deze modelformule is af te leiden: $T(t+1) = T(t) + c \cdot (20 - T(t))$, waarin t het aantal minuten is.

Neem aan dat $c = 0,1$.

- b Bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.
- c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven modelformule is af te leiden.

Opgave 11

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci (ongeveer 1180—1250) geeft in zijn boek 'Liber Abaci' uit 1202 het volgende raadsel weer:

'In een afgesloten gebied zet ik één paar konijnen. Dit paar werpt elke maand één paar jongen. Al die jongen krijgen op hun beurt ook weer jonge konijntjes, maar pas vanaf hun tweede levensmaand en dan ook weer elke maand één paar jongen. Hoeveel paren konijnen zijn er nu na één jaar?'

- a Stel een dynamisch rekenmodel op voor het aantal paren konijnen A na n maanden.



- b** Beantwoord de vraag die Leonardo van Pisa in zijn raadsel stelt.
- c** Hoeveel paren konijnen (die meteen elke maand één paar jongen krijgen) zijn er in het begin in het afgesloten gebied gezet, als er na een jaar 1131 paren konijnen zijn?

Toepassen

Onder verstedelijking wordt de trek van de bevolking van een bepaalde regio van het platteland naar de steden verstaan. De tabel geeft daarover informatie voor deze regio (S = stedelijk gebied, P = platteland). Daarin zie je bijvoorbeeld dat 30% van de plattelandsbevolking jaarlijks naar de stad trekt.

Onderzoek of er een evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland.

Er zijn nu twee variabelen $S(t)$ (het percentage mensen in stedelijke gebieden in deze regio) en $P(t)$ (het percentage plattelanders in deze regio). Daarbij neem je aan dat er geen mensen van buiten de regio een rol spelen en dat de bevolking constant blijft. (Je kunt ook wel met één variabele werken, want $P(t) = 100 - S(t)$.)

Mogelijke modelformules zijn:

- $S(t+1) = S(t) + \Delta S(t) = S(t) - 0,20 \cdot S(t) + 0,30 \cdot P(t) = 0,80S(t) + 0,30P(t)$
- $P(t+1) = P(t) + \Delta P(t) = P(t) - 0,30 \cdot P(t) + 0,20 \cdot S(t) = 0,20S(t) + 0,70P(t)$

Hiermee kun je het bestand **ModelMigratie** opstellen.

De startpercentages zijn nog te kiezen. Ga na dat ze geen invloed hebben op het evenwicht dat ontstaat.

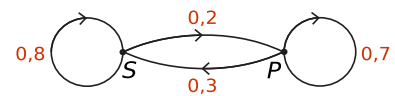
Opgave 12

In **Toepassen** wordt een sterk vereenvoudigd model van een migratieproces beschreven.

- a** Hoeveel procent van de bevolking in de stad trekt jaarlijks naar het platteland?
- b** In de tekst staat dat je ook met één modelformule zou kunnen werken voor dit migratieproces. Welke?
- c** Ga ervan uit dat in 1980 45% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er te gaan ontstaan?
- d** Ga er nu van uit dat in 1980 40% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er nu te ontstaan? Wat valt op?
- e** In werkelijkheid moet je ook rekening houden met mensen die buiten de regio toestromen of wegstromen. Kun je een model ontwerpen waarbij je ook daarmee rekening houdt?

		van	
		S	P
naar	S	0,8	0,2
	P	0,2	0,7

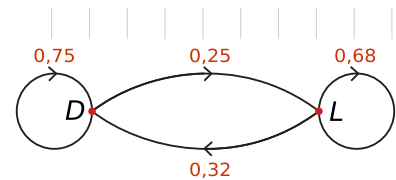
Tabel 1.1



Figuur 1.5

Opgave 13: Browsers

In het begin van het internettijdperk was er een tijdje een concurrentiestrijd tussen twee populaire internetbrowsers, noem ze bijvoorbeeld 'Discoverer' en 'Landscape'. De gebruikers van deze internetbrowsers zagen jaarlijks reikhalzend uit naar de nieuwste versie van de Discoverer of Landscape. Maar sommige gebruikers wisselden ook nogal eens van browser. In deze graaf zie je de wisselingen voor een bepaald jaar. In dat jaar werd onderzocht wat er zou gebeuren als deze vervangingen en wisselingen elk jaar zo zouden doorgaan.



Figuur 1.6

- Stel bij deze situatie een rekenmodel op. Noem het aantal gebruikers van de Discoverer $D(t)$ en dat Landscape $L(t)$ en neem $\Delta t = 1$ jaar. Ga ervan uit dat $D(0) = 0,5$ en $L(0) = 0,5$.
- Bepaal hoeveel procent van de gebruikers uiteindelijk de Discoverer zal gebruiken als dit rekenmodel geldig zou zijn gebleven.

Testen

Opgave 14

Iemand heeft een miljoen op de bank gezet tegen een rente van 0,30% per maand. Hij gaat er van leven en haalt maandelijks € 1500 van deze rekening voor zijn levensonderhoud.

- Stel hierbij een dynamisch rekenmodel op.
- Teken een bijpassende grafiek en bepaal daarmee of zijn saldo $S(t)$ naar een grenswaarde toegroeit.

Opgave 15

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan gaan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei gaan afnemen naarmate het aantal meervallen dichterbij de 5000 komt.

De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000:

$$\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t),$$

waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

- Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende formule:
$$N_{t+1} = (1 - c) \cdot N_t + 5000 \cdot c.$$
- Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c .
- Teken een grafiek van N_t . Vanaf welk moment gaat het aantal meervallen minder snel toenemen?



Figuur 1.7

1.4 Onderzoeksoopdrachten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeksoopdrachten uitvoeren door modelleren.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

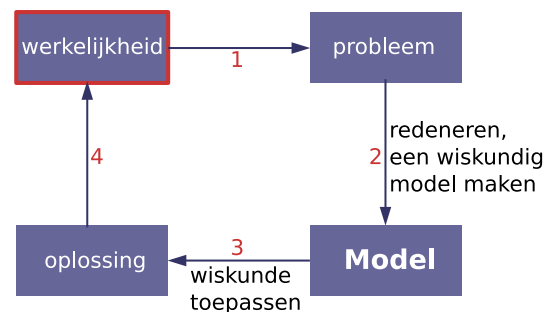
Uitleg

Het is nu de bedoeling dat je zelf wat complexere opdrachten aanpakt.

Dit worden **onderzoeksoopdrachten** genoemd.

In dergelijke opdrachten wordt een situatie beschreven waarin de wiskunde je kan helpen bij het vinden van een geschikte oplossing. Welke wiskunde dat is en hoe die oplossing tot stand kan komen, moet je zelf onderzoeken. Denk daarbij aan de modelleercyclus en de **lijst met mogelijke vragen** om je te helpen.

Omdat het de bedoeling is dat je hier zelf onderzoek doet, vind je geen uitgebreide antwoorden bij deze opgaven!



Figuur 1.1

Toepassen

De volgende opdrachten zijn bedoeld als **onderzoeksoopdrachten**. De bedoeling is dat je zelf een onderzoekje doet, mogelijk zelfs met een eigen experiment. Daarvan maak je een uitgebreid onderzoeksverslag.

Je vindt dan ook geen uitgebreide uitwerkingen bij deze opgaven.

Opgave 1: Elektrisch rijden?

Het rijden in een auto kost geld. Je maakt kosten vanwege de brandstof of de elektriciteit, maar ook betaal je wegenbelasting, verzekering, en dergelijke. En tenslotte moet je de auto kopen en ook dat kost geld. Ga na wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Hier heb je enkele gegevens om mee te werken:

- Smart fortwo op benzine:
 - benzine kost € 1,60 per liter;
 - je rijdt gemiddeld 20 km per liter benzine;
 - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 2000,-;
 - de aanschafprijs is € 15000,-.



Figuur 1.2



- Smart fortwo op elektriciteit:
 - elektriciteit kost € 0,20 per kWh;
 - de maximale accucapaciteit is 17,6 kWh;
 - met de maximale accucapaciteit rijd je gemiddeld 140 km;
 - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 1200,-;
 - de aanschafprijs is € 22000,-.

Maar het is natuurlijk leuker om met actuele gegevens te werken en je 'eigen' type auto te kiezen!

Bereken van een bepaald merk auto wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Opgave 2: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt. Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α .

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.

De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.

Dus is:

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \text{ en } y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

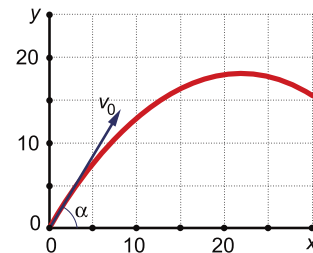
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

- Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.
- Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0 , α en g .
- Bij welke waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g .



Figuur 1.3

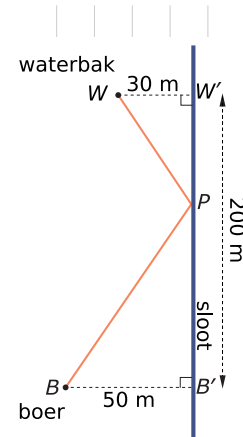
Opgave 3: Kortste weg of snelste weg?

Een boer wil water naar de waterbak brengen die voor zijn paarden is bestemd. Hij haalt dat uit de sloot met behulp van een emmer. Daarbij neemt hij ofwel de kortste weg, ofwel de snelste weg. In de figuur hiernaast is een bovenaanzicht van de situatie getekend met de afstanden erin aangegeven.

- a Bepaal de kortste weg van B naar W via de sloot.

Met een lege emmer loopt de boer met een snelheid van 3 m/s, met een volle emmer met een snelheid van 1 m/s.

- b Bepaal de snelste weg van B naar W via de sloot.



Figuur 1.4

Opgave 4: Geremde exponentiële groei

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('*Drosophila melanogaster*'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
N	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 1.1



Figuur 1.5

- a Ga na dat deze groep fruitvliegjes in het begin exponentieel groeit.

Met welk percentage per dag?

Er blijkt uiteindelijk toch geen sprake te zijn van exponentiële groei. N nadert de 350 fruitvliegjes.

De bijpassende formule heeft daardoor de vorm: $N = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

- b Stel de formule op die bij deze tabel past.
Bereken bij welke waarde van t de groeisnelheid maximaal is.
- c Probeer bij de groei van de mensheid zo'n geremd exponentieel groeimodel op te stellen.

Opgave 5: Filevorming

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.



Figuur 1.6



Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond van deze aannames een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v . Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

Opgave 6: Prooi-, roofdiercyclus

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen, heten prooi-roofdiermodellen. De Italiaanse wiskundige Vito Volterra en de Amerikaanse wiskundige Alfred J. Lotka ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip t is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (a - b \cdot R(t))$$

$$R(t+1) = R(t) \cdot (c + d \cdot P(t))$$

Hierin zijn a , b , c en d positieve getallen.

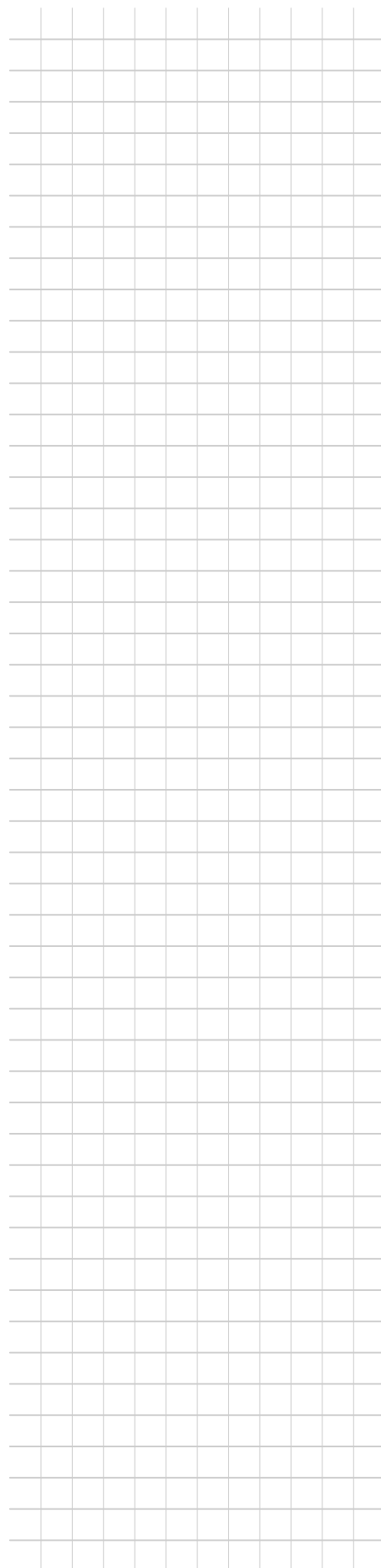
- Verklaar hoe je in dit model kunt zien dat roofdieren voor minder prooidieren zorgen.
- Stel $a < 1$, wat zou er dan met het aantal prooidieren gebeuren?
- Neem $a = 1,08$, $b = 0,0015$, $c = 0,8$, $d = 0,00048$, $P(0) = 600$ en $R(0) = 50$.

Hoeveel prooi- en roofdieren zijn er op $t = 3$?



Meetkunde in 3D

2.1	Parallelprojectie	36
2.2	Hoeken en afstanden	46
2.3	Oppervlakte en inhoud	56
2.4	Doorsneden construeren	67
2.5	Totaalbeeld	77



2.1 Parallelprojectie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Voorkennis

- de vlakke (rechthoek, vierkant, parallellogram, ruit, vlieger, trapezium) en ruimtelijke (balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel) basisvormen en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een tekening van een woonhuis. Het onderste deel kun je je voorstellen als een wiskundige balk (dus met rechte hoeken). Zo'n balk heeft drie groepen evenwijdige lijnen. De tekening is zo gemaakt dat hij levensecht lijkt, net een foto. Je ziet dat evenwijdige lijnen nu niet langer evenwijdig zijn, er vindt dus vertekening plaats.

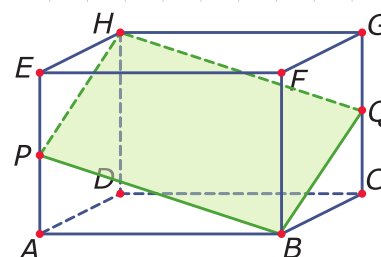


Figuur 2.1

- Waarom lopen op een foto evenwijdige lijnen niet altijd evenwijdig?
- Het gebouw lijkt uit meerdere ruimtelijke basisvormen te zijn samengesteld. Noem er zoveel mogelijk.
- De gevels vormen vlakke figuren. Welke basisvormen tref je aan?

Opgave V2

Je ziet een afbeelding van een balk. Er is een vlak $PBQH$ in getekend, P en Q zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.



Figuur 2.2

- Welke drie groepen lijnstukken zijn in werkelijkheid evenwijdig?
- Welke vorm heeft het zijvlak $BCGF$ in werkelijkheid?
- Welke vorm heeft het diagonaalvlak $ACGE$ in werkelijkheid?
- Welke vorm heeft het vlak $PBQH$ in werkelijkheid?

Uitleg 1

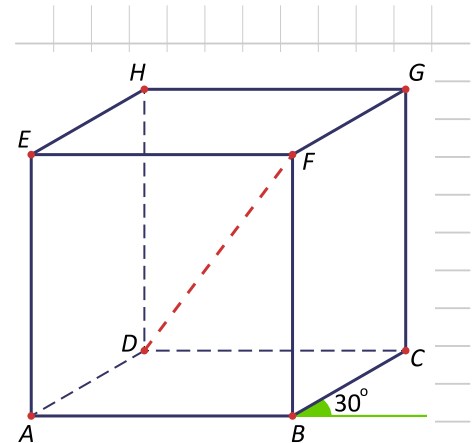
Bij het afbeelden van ruimtelijke figuren op een plat vlak, kunnen niet alle eigenschappen van de ruimtelijke figuur behouden blijven. Bekijk deze projectie van kubus $ABCD.EFGH$ op een plat vlak. Om zoveel mogelijk eigenschappen te behouden is parallelprojectie gebruikt:

- ribben die in werkelijkheid parallel zijn in de afbeelding ook evenwijdig;
- ribben die evenwijdig zijn aan het tekenvlak hebben hun ware grootte;
- ribben die loodrecht op het tekenvlak staan worden ongeveer half zo lang als ze in werkelijkheid zijn en schuin naar achteren getekend;
- hoeken houden alleen hun ware grootte als ze in een vlak liggen dat evenwijdig aan het tekenvlak is.

De hoek die de ribben die schuin naar achteren zijn getekend met een horizontale lijn maken, heet de wijkhoek.

Deze ribben zijn korter gemaakt met een vaste verkortingsfactor.

Om de lichaamsdiagonaal DF op ware grootte te zien, kun je diagonaalvlak $DBFH$ als een rechthoek en op ware grootte tekenen.



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk de afbeelding van de kubus $ABCD.EFGH$ in de uitleg. Neem aan dat alle ribben van de kubus 4 cm lang zijn.

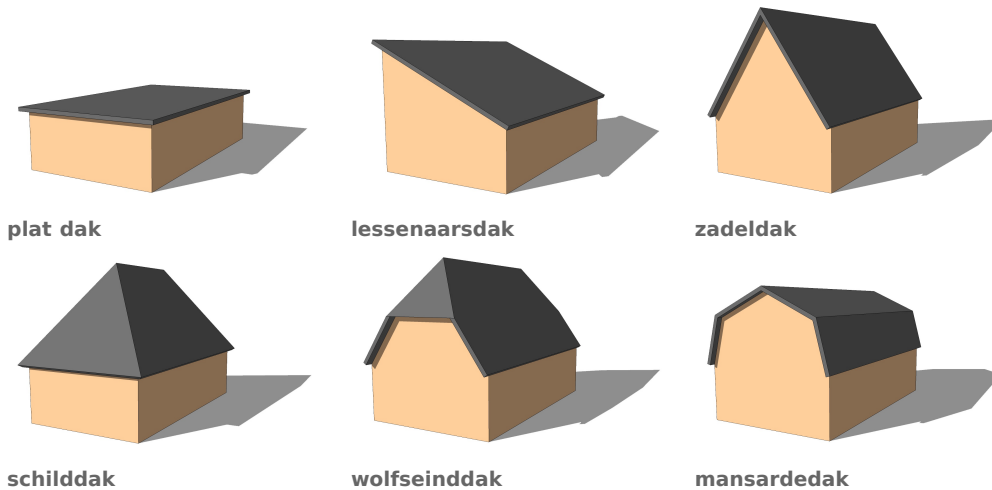
- Welke vorm heeft vlak $ABFE$ in werkelijkheid?
- Welke ribben zijn evenwijdig met ribbe AD ?
- Teken vlak $ABCD$ op ware grootte en in de juiste vorm. Je kunt nu de lengte van BD opmeten. Controleer jouw antwoord met een berekening.
- Teken diagonaalvlak $DBFH$ op ware grootte (en in de juiste vorm). Bepaal de lengte van lichaamsdiagonaal DF in één decimaal nauwkeurig. Controleer jouw antwoord met behulp van een berekening.

Opgave 2

Teken zelf een parallelprojectie van deze kubus. Neem een wijkhoek van 30° , een verkortingsfactor van 0,5 en ribben van 6 cm.

Uitleg 2

Hier zie je zes tekeningen van huizen met een bepaald soort dak, gemaakt door Michel Stomphorst van **Dutch Design Studio**. Je ziet meteen dat het geen parallelprojecties zijn, maar perspectief-tekeningen.



Figuur 2.4

In elk van deze figuren kun je verschillende ruimtelijke en vlakke basisvormen herkennen.

Zo bestaat het huis met het schilddak uit een balk, een prisma (of twee halve balken) en twee halve piramides.

Opgave 3

Bekijk de figuren in **Uitleg 2**.

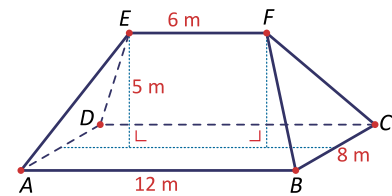
Je ziet hier een parallelprojectie van het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit.

- Teken zo'n parallelprojectie met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik een schaal van 1 : 200.
- Laat in je figuur zien, dat het schilddak kan worden verdeeld in een prisma (twee halve balken) en twee (halve) piramides.
- 'Elke ruit is ook een parallellogram.' Klopt deze uitspraak? En klopt het omgekeerde?
- Bestaat er een rechthoekige ruit?
- Hoeveel diagonalen heeft elke vierhoek?
- Heeft een parallellogram symmetrieassen? Heeft een parallellogram een centrum van symmetrie?

Opgave 4

Bekijk weer de figuren in **Uitleg 2**.

- Uit welke twee basisvormen bestaat het huis met het zadeldak?
- Het huis met het mansardedak kun je opdelen in een balk en een prisma. Wat voor prisma?



Figuur 2.5



- c Je kunt het huis met het mansardedak ook opdelen in balken en halve balken. Leg uit hoe.
- d In welke figuren kun je het huis met het wolfseinddak opdelen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afbeelding van een ruimtelijke figuur op een plat vlak heet een **projectie** van dit lichaam. Omdat dit een vereenvoudiging van het lichaam is, heeft de afbeelding niet meer alle eigenschappen van het lichaam.

Bij **parallelprojectie** geldt:

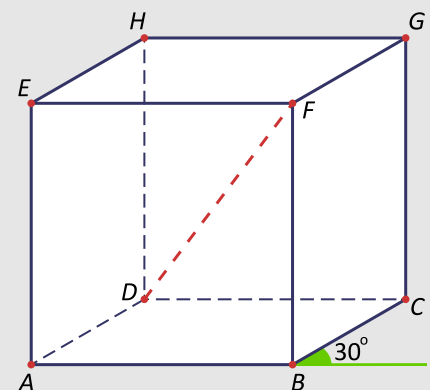
- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;
- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).

Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven bij parallelprojectie zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

Bekijk deze parallelprojectie van een kubus $ABCD.EFGH$.

De ribben AB , BF , FE , AE en DC , CG , GH , DH zijn evenwijdig aan het tekenvlak en dus op ware grootte. De vierkanten $ABFE$ en $DCGH$ zijn ook in de tekening vierkant. De ribben BC , FG , AD , EH zijn ook in de tekening evenwijdig. Ze zijn iets korter gemaakt om de figuur echt op een kubus te laten lijken. Op een blanco tekenblad werk je met een **wijkhoek** (bijvoorbeeld de hoek tussen BC en het verlengde van AB) en een **verkortingsfactor** (de vergrotingsfactor van de lengte van BC ten opzichte van die van AB).

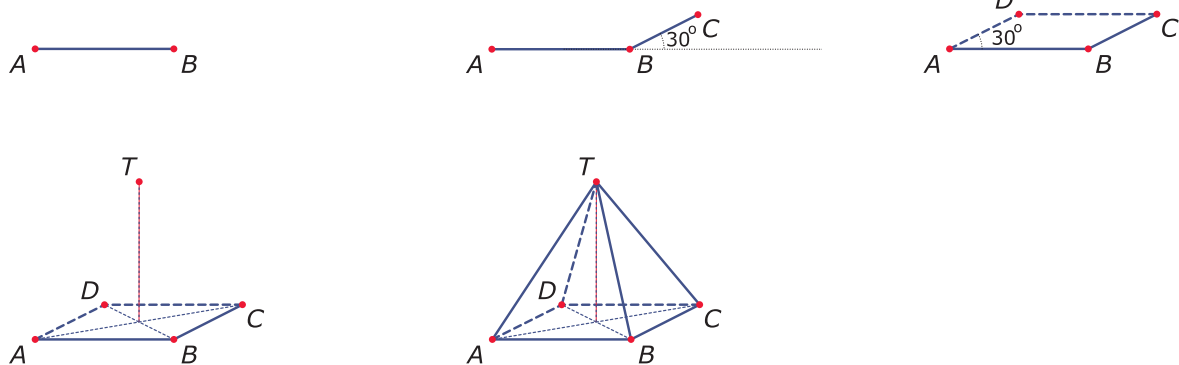
De meeste objecten kun je opvatten als **samengestelde figuren**. Ze bestaan uit een samenstelling van de bekende basisvormen balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel.



Figuur 2.6

**Voorbeeld 1**

Bekijk hoe je een parallelprojectie maakt van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ op een blanco tekenblad. Je gebruikt een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.

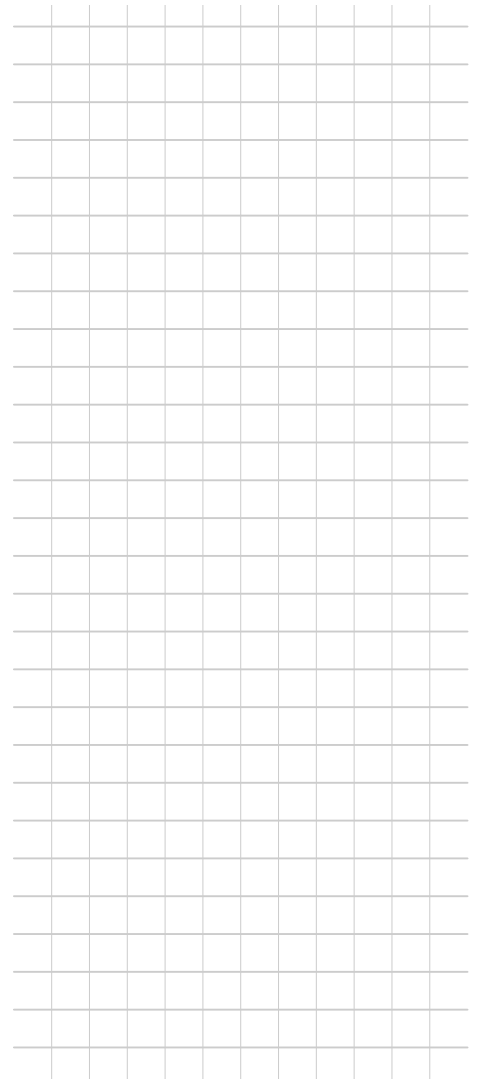
**Figuur 2.7**

Het grondvlak van een piramide is vierkant $ABCD$ met ribben van 4. De hoogte TS is 5. De constructie gaat zo:

- Teken eerst lijnstuk $AB = 4$ en teken bij B een hoek van 30° .
- Teken BC maar nu met een verkorte lengte: $0,5 \cdot 4 = 2$.
- Vervolgens teken je met behulp van evenwijdige lijnen punt D .
- Omdat de piramide regelmatig is, zit de top T recht boven het snijpunt S van de diagonalen AC en BD . Je tekent dus eerst S en dan 5 recht daarboven punt T .
- Ten slotte teken je de opstaande ribben en de figuur is klaar.

Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een parallelprojectie van een object tekent op een blanco papier met behulp van een wijkhoek en een verkortingsfactor.



- Teken een parallelprojectie van een kubus met ribben van 4 cm. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.
- Teken een parallelprojectie van een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 8$ en $AE = 2$. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.
- Teken een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en hoogte $TS = 2$ waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is. Neem een wijkhoek van 60° en een verkortingsfactor van 0,5.



Opgave 6

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte AD van het prisma is ook 4.

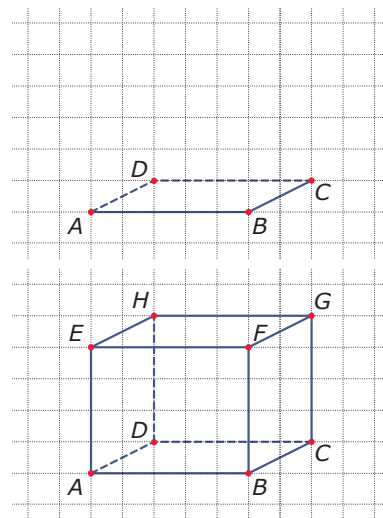
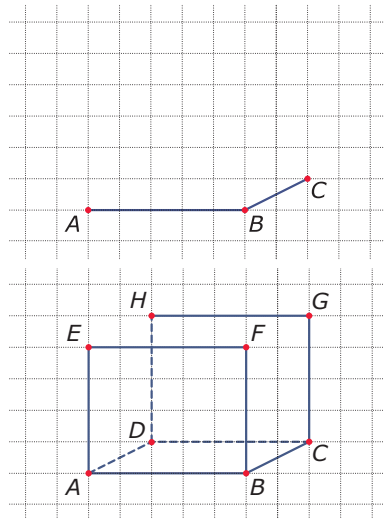
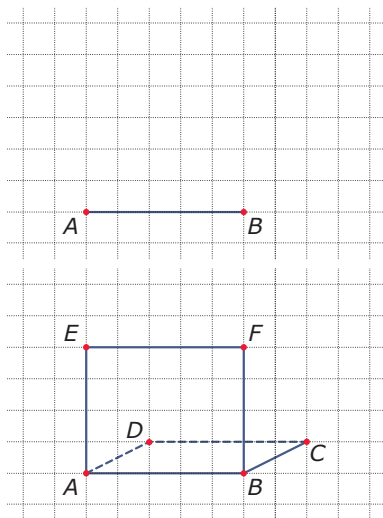
- a Teken dit driehoekige prisma $ABC.DEF$ in parallelprojectie op een rooster.

P is het midden van DE , Q is het midden van EB en R is het midden van EF .

- b Teken de driehoek PQR in de figuur en op ware grootte.

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je zelf op roosterpapier een parallelprojectie van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 4$ kunt tekenen. Merk op dat $BC = AD = 4$ korter wordt getekend. Op een rooster is het handig om de ribben schuin naar achteren te tekenen als '2 naar rechts 1 omhoog'.



Figuur 2.8

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je op een rooster een parallelprojectie van een balk maakt. Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en $AE = 6$.

Teken hiervan een parallelprojectie waarbij het vlak $ABEF$ op ware grootte te zien is.

Opgave 8

Maak op een cm-rooster een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak een vierkant is met $AB = 4$ en de hoogte $TS = 6$, waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is.

Voorbeeld 3

Je ziet hier het metalen omhulsel van een afzuigkap.
Hij bestaat uit diverse basisvormen
Beschrijf die basisvormen en noem hun afmetingen.

Antwoord

De onderkant is een balk van $10 \times 8 \times 1$ dm.

De bovenkant is een balk van $6 \times 4 \times 6$ dm.

Het middenstuk lijkt misschien op een afgeknotte piramide, maar dat klopt niet. De opstaande schuine ribben komen niet alle vier in één punt uit. In een bovenaanzicht kun je dat zien.

Het middenstuk kun je bijvoorbeeld opdelen in:

- een balk van $6 \times 4 \times 3$ dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van $6 \times 1 \times 3$ dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van $2 \times 2 \times 3$ dm;
- vier kwart piramides die samen een piramide met een grondvlak van 4×4 dm en een hoogte van 3 dm vormen.

Opgave 9

Bekijk de tekening van de afzuigkap in **Voorbeeld 3**.

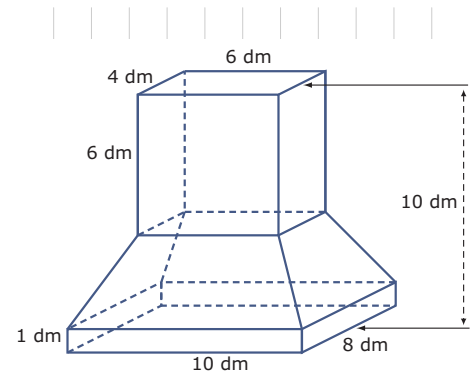
- Teken een voor-, een zij- en een bovenaanzicht van deze afzuigkap.
Laat in het bovenaanzicht zien dat het middenstuk geen afgeknotte piramide is.
- Teken het middendeel van de afzuigkap zelf in parallelprojectie op een rooster.
Gebruik schaal 1 : 20.
- Uit welke vlakke figuren bestaat dit middendeel? (Reken geen bodem en geen bovenvlak.)
- Teken het schuine voorvlak van het middendeel op schaal 1 : 20.
Laat de benodigde berekeningen zien.

Oefenen

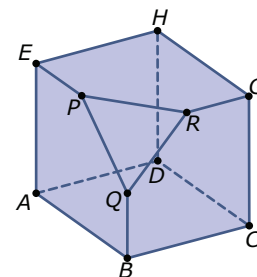
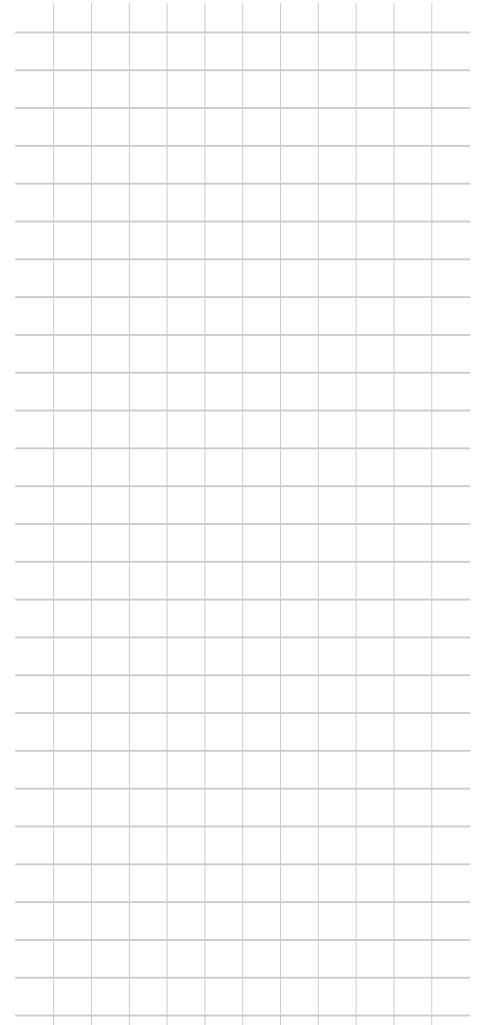
Opgave 10

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten P , Q en R zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

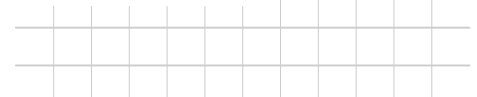
- Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik $ABQPE$ als voorvlak.
- Teken $\triangle PQR$ op ware grootte.
- Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte.



Figuur 2.9



Figuur 2.10



Opgave 11

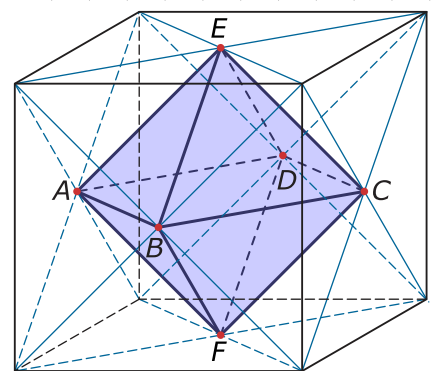
Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. De zijden van $ABCD$ zijn 6 cm en de hoogte TS van de piramide is 10 cm. S is het snijpunt van AC en BD .

- Teken een parallelprojectie van deze piramide op een rooster.
- Verdeel alle zijden van het grondvlak in drie gelijke delen. Licht je werkwijze toe.
- Verbind de getekende punten in het grondvlak, zodat je een achthoek krijgt.
- Is deze achthoek het grondvlak van een regelmatige achtzijdige piramide? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Als je de middens van de grensvlakken van een kubus met elkaar verbindt, dan krijg je een octaëder (regelmatig achthoek) $ABCDEF$. Van dit octaëder is $AC = BD = EF = 8$ cm.

- Teken een parallelprojectie van het octaëder.
- Welke vorm hebben alle grensvlakken van het octaëder? Teken één ervan op ware grootte.
- Welk lichaam heeft als hoekpunten de middens van de zijden van het octaëder?



Figuur 2.11

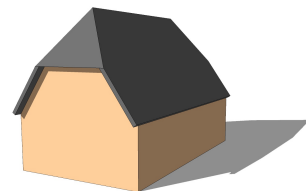
Opgave 13

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.

Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.

De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.

- Teken een parallelprojectie van dit wolfseinddak op een cm-rooster op schaal 1 : 200.
- Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken. Bereken de lengtes van de zijden van die gelijkbenige driehoeken.
- Teken ook één zo'n symmetrische vijfhoek op schaal 1 : 200.



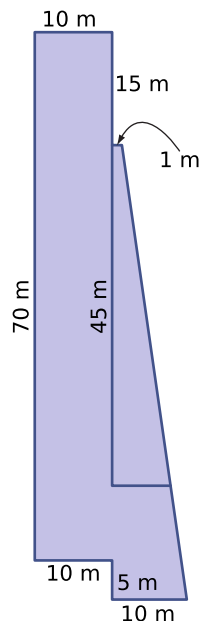
Figuur 2.12

Opgave 14

Bekijk de foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Je ziet een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak.



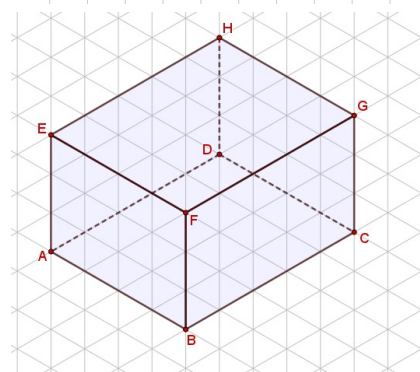
Figuur 2.13



- Teken een parallelprojectie van de vereenvoudigde versie van het gebouw 'Willemswerf' op een rooster op schaal 1 : 500.
- De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium. Teken dat grensvlak op schaal 1 : 1000.

Toepassen

Een bijzondere parallelprojectie is de **isometrische projectie**. Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met ribben $AB = 4$, $BC = 5$ en $AE = 3$ cm, getekend in GeoGebra met een isometrisch rooster. Omdat zo'n rooster uit gelijkzijdige driehoeken bestaat is er van een verkortingsfactor geen sprake. Wel zijn er twee wijkhoeken.



Figuur 2.14

Opgave 15

Hierboven zie je een isometrische projectie van een balk.

- Waarom is hier ook sprake van parallelprojectie?
- Welke twee wijkhoeken worden er gebruikt?
- Hoe zit het met de rechte hoeken van de balk?
- Hebben de lichaamsdiagonalen van de balk hun ware lengte behouden?



Opgave 16

Teken nu een isometrische projectie van de volgende figuren.
Maak eventueel gebruik van het isometrisch rooster van GeoGebra.

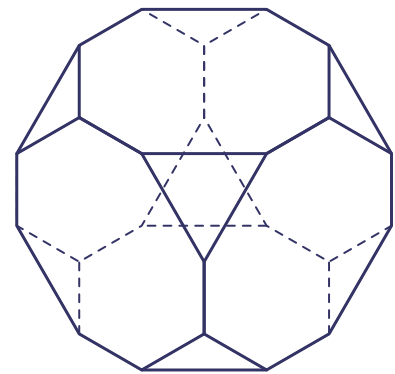
- a Een kubus $ABCD.EFGH$ waarvan alle zijden 4 cm zijn.
- b Een piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak zijden van 4 cm heeft en de hoogte $AT = 6$ cm.

Testen

Opgave 17

Bekijk de afgeknotte kubus. De oorspronkelijke kubus was 4 bij 4 bij 4 cm. Van die ribben van 4 cm zijn nu alleen nog de middenstukken van 2 cm over.

- a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus op een rooster. Gebruik een achthoek als voorvlak.
- b Bepaal de lengte van de zijden van de driehoekige grensvlakken in mm nauwkeurig. Teken zo'n grensvlak op ware grootte.
- c Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus. Gebruik nu een verkortingsfactor van 0,5 en een wijkhoek van 60° .



Figuur 2.15

2.2 Hoeken en afstanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoeken en afstanden berekenen in ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet. Om aan te geven dat A en D recht achter elkaar liggen staat links onder bij de figuur A, D .

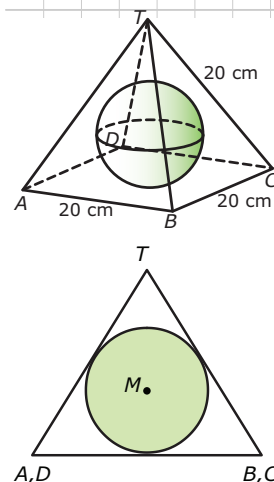
- In welke richting bekijk je de figuur als je dit vooraanzicht ziet?
- Je wilt de straal van de bol berekenen. Kun je die op (een) geschikte plek(ken) in de figuur aangeven?
- Kun je driehoeken bedenken waarin je die straal zou kunnen uitrekenen?

Uitleg 1

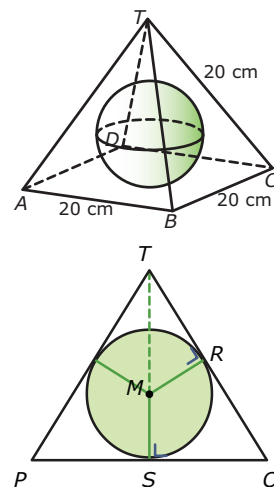
Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet.

Om de straal te berekenen van de grootste bol die nog in deze piramide past, moet je bedenken dat deze bol precies tegen de zijvlakken van de piramide aan gaat komen. Om dat goed te kunnen zien kun je het beste even de aanzichten van piramide met bol bekijken.

Het vooraanzicht dat hier is getekend, is hetzelfde als $\triangle PQT$ als P het midden van AD en Q het midden van BC is. Dit noem je een doorsnede van de piramide met bol en het vlak door T , P en Q . Hierin is de bol een cirkel die raakt aan PQ , PT en QT . Er zijn dus stralen vanuit het middelpunt M te tekenen die loodrecht op deze zijden staan. Van $\triangle PQT$ weet je alle zijden: $PQ = 20$ en $PT = QT = \sqrt{300}$.



Figuur 2.1



Figuur 2.2



Neem je r voor de straal van de bol, dan kun je de gelijkvormigheid van de driehoeken QST en MRT gebruiken om r uit te rekenen.

Opgave 1

Bekijk het probleem in [Uitleg 1](#).

- Waarom is het handig om een geschikte doorsnede te tekenen?
- Laat met een berekening zien, dat $PT = QT = \sqrt{300}$.
- Je weet dat $MS = r$. Laat zien dat $TM = \sqrt{200} - r$.
- Waarom zijn de driehoeken QST en MRT gelijkvormig?
- Bereken nu r in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bij de vorige opgave is het werken met gelijkvormigheid niet echt noodzakelijk. Je kunt ook werken met goniometrie en bijvoorbeeld $\angle Q$ uitrekenen. Laat zien, hoe je zo r berekent op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Een ander probleem is: Hoeveel bedraagt de afstand van deze bol tot de ribben van de piramide?

- Nu is $\triangle ACT$ een geschikte doorsnede om de gevraagde afstand uit te rekenen. Waarom?
- Teken zelf die driehoek op schaal en teken de cirkel die de bol voorstelt er in. (De straal heb je in de voorgaande opgaven uitgerekend.)
- Geef in je figuur de gevraagde afstand aan.
- Bereken de gevraagde afstand. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Je hebt een metalen driehoekig plaatje nodig met zijden van 65 mm, 43 mm en 52 mm.

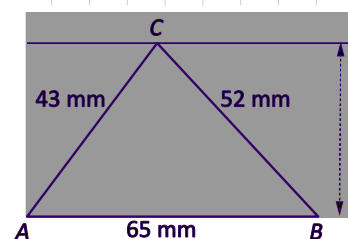
Je wilt het uit een rechthoekig stuk metaal zagen, de langste zijde komt langs de rand van de rechthoek. De lengte van de rechthoek moet daarom 65 mm of meer zijn. Maar hoe lang moet de breedte zijn?

Je kunt dit bepalen door de driehoek op papier te construeren en de afstand van C tot lijn AB te meten. Dat gaat prima, je moet dan wel de juiste afmetingen omcirkelen en niet maar even een schets maken zoals de figuur hiernaast.

Maar je kunt dit ook berekenen. Daartoe moet je inzien dat de gevraagde afstand de lengte is van hoogtelijn CD in $\triangle ABC$.

Je berekent dan met behulp van de cosinusregel bijvoorbeeld $\angle A$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$



Figuur 2.3



geeft

$$52^2 = 65^2 + 43^2 - 2 \cdot 65 \cdot 43 \cdot \cos(\angle A).$$

Ga na dat dit oplevert: $\angle A \approx 52,9^\circ$.

Nu je een hoek weet, kun je gemakkelijk de hoogte CD berekenen.

Opgave 4

Bekijk het probleem in [Uitleg 2](#).

- Construeer de driehoek op papier en meet de gevraagde afstand.
Bekijk vervolgens de berekening van CD .
- Laat zelf zien hoe je komt aan $\angle A \approx 52,9^\circ$
- Laat vervolgens zien hoe je daarmee CD berekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je in de ruimtefiguur geschikte vlakke figuren. Teken deze vlakke figuren (eventueel op ware grootte). Zet de gegevens erbij en bereken de gevraagde lengte en/of grootte.

Meestal zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken**, want daarin gelden:

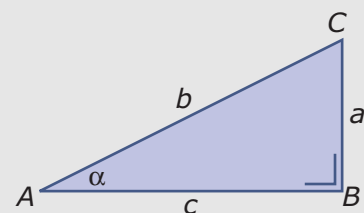
- De **stelling van Pythagoras**: $c^2 + a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
 - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
 - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
 - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

Merk op dat in dit geval b de schuine zijde (hypotenusa) is, a de voor hoek α overstaande rechthoekszijde en c de voor hoek α aanliggende rechthoekszijde is.

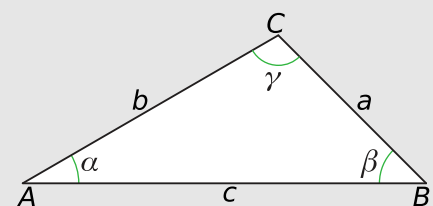
Verder maak je vaak gebruik van **gelijkvormigheid**. Twee figuren zijn gelijkvormig als hun overeenkomende paren hoeken gelijk zijn en de lengtes van de overeenkomende paren zijden recht evenredig met elkaar zijn. Alle lengtes van de zijden van de ene figuur kunnen dan door vermenigvuldiging met een vaste **vergrotingsfactor** uit de lengtes van de zijden van de andere figuur worden berekend.

Tenslotte zijn daar nog:

- De **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- De **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$



Figuur 2.4



Figuur 2.5

Voorbeeld 1

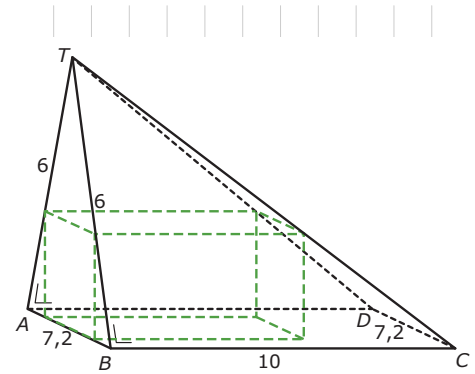
Hier zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Bereken de afmetingen van die kamer.

Antwoord

Om rechte hoeken ook inderdaad recht te zien kun je in dit geval goed met aanzichten werken. Vooral een vooraanzicht en een zijaanzicht zijn handig omdat daarin zowel de rechte hoeken als de schuine vlakken zichtbaar zijn.

Aan deze twee aanzichten zie je, dat er het beste kan worden gerekend in $\triangle ABT$ (want die is gelijk aan het vooraanzicht) en in $\triangle SRT$ als S het midden van AB en R dat van CD is (deze driehoek is een doorsnede die gelijk is aan het zijaanzicht).

Met gelijkvormigheid of goniometrie bereken je nu de afmetingen van de kamer.



Figuur 2.6

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Je gaat de afmetingen van die kamer berekenen.

- Teken de twee driehoeken waarin je gaat rekenen. Bereken eerst TS om goede figuren op schaal te kunnen tekenen.
- Zet nu alle bekende afmetingen in je figuren.
- Gebruik $\triangle SBT$ om de breedte van de kamer te berekenen.
- Gebruik $\triangle SRT$ om de lengte van de kamer te berekenen.

Opgave 6

Bekijk de zolderverdieping van de twee-onder-één-kap woning in de figuur in **Voorbeeld 1**.

Wil je de dakoppervlakte berekenen (bijvoorbeeld omdat er een nieuwe dakbedekking nodig is), dan gebruik je een uitslag van de figuur.

- Teken de uitslag op schaal 1 : 200.
- Bereken de oppervlakte van het dak van deze zolderverdieping. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een bedrijf slaat zijn afval op in een grote vierkante verdiepte betonnen bak. Om stankoverlast tegen te gaan wordt deze bak overdekt met een groot stevig tentdoek dat wordt opgespannen over twee bogen. In de figuur stelt $ABCD$ de bovenrand van de ingegraven bak voor, een vierkant van 10 m bij 10 m. De bogen ATC en $BT D$ zijn identieke delen van een cirkel. Punt T ligt 4 m boven vlak $ABCD$. Bereken de straal van de cirkel waar zo'n boog een deel van is en bereken hoe ver het middelpunt van die cirkel onder vlak $ABCD$ ligt.

Antwoord

Je ziet hier het vlak door A , B en T getekend in GeoGebra.

$$AC = \sqrt{200} \text{ en dus is } AC = CB = \frac{1}{2}\sqrt{200} = 5\sqrt{2}.$$

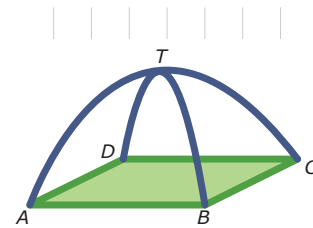
Het middelpunt M ligt op de middelloodlijn van BT en op de verticale lijn door T .

Het midden van BT noem je bijvoorbeeld N .

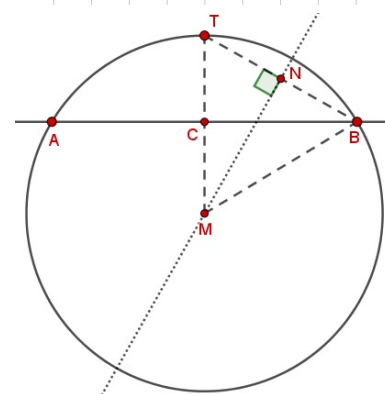
Je kunt in $\triangle CBT$ zowel BT als $\angle CBT$ uitrekenen.

Daarmee weet je van $\triangle MNT$ de grootte van $\angle MTN$ en de lengte van TN .

Nu kun je de straal van de cirkel berekenen.



Figuur 2.7



Figuur 2.8

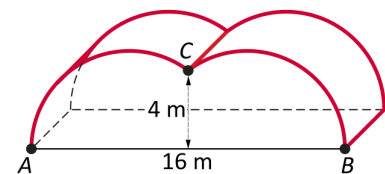
Opgave 7

Bekijk het probleem van de grote afvalbak in [Voorbeeld 2](#).

- Laat zien dat $CB = 5\sqrt{2}$.
- Bereken BT en $\angle CBT$.
- Bereken de straal van de cirkel in cm nauwkeurig.
- Beantwoord de vraag in het voorbeeld.

Opgave 8

Je ziet hier een opslagruimte die bestaat uit twee in elkaar geschoven gelijke halve cilinders. De gegeven afmetingen staan in de figuur. Hoe hoog is deze opslagruimte?



Figuur 2.9

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.

Bereken de afstand van punt E tot lijn DF .

Antwoord

Je berekent eerst de lengtes van de zijden van $\triangle DEF$.

Ga na, dat $EF = \sqrt{32}$, $DF = 5$ en $DE = \sqrt{33}$.

Cosinusregel: $EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DF \cdot DE \cdot \cos(\angle EDF)$.

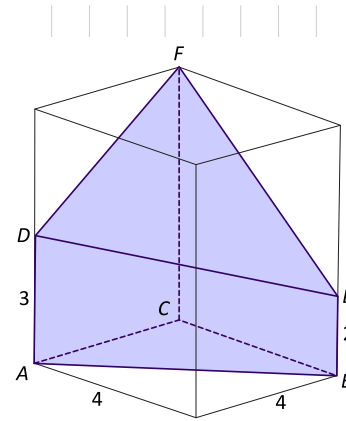
Dit geeft: $32 = 25 + 33 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{33} \cdot \cos(\angle EDF)$.

Dus: $32 = 58 - 10\sqrt{33} \cos(\angle EDF)$.

En: $\cos(\angle EDF) = \frac{-26}{-10\sqrt{33}} \approx 0,4526$, zodat $\angle EDF \approx 63^\circ$.

De gevraagde afstand is de lengte van hoogtelijn EP op lijnstuk DF .

Deze lengte kun je nu met de sinus van de gevonden hoek berekenen.



Figuur 2.10

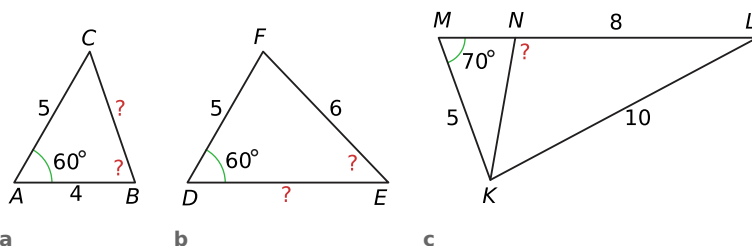
Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de berekening van de hoeken van $\triangle DEF$.

- Laat zien, hoe je de lengte van DE berekent.
- Bereken nu ook $\angle DEF$.
- Heb je bij b opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?
- Bereken de afstand van E tot lijn DF .

Opgave 10

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



Figuur 2.11

Oefenen

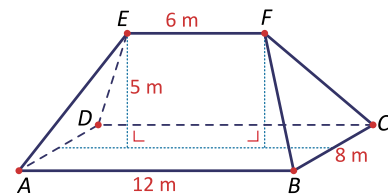
Opgave 11

Een bestelbus levert schilderijen. De opslagbak achterin heeft een lengte van 2 m, breedte 1,6 m en hoogte 1,3 m. Bereken de oppervlakte van het grootst mogelijke schilderij dat erin past, in m^2 in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.

- Bereken de lengte van de ribben AE , DE , BF en CF .
- Bereken de grootte van $\angle ABF$ en $\angle BCF$.
- Op 3 meter boven de zoldervloer $ABCD$ wordt een rechthoekige verdiepingsvloer aangebracht. Bereken de oppervlakte van die verdiepingsvloer.

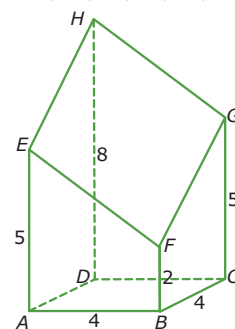


Figuur 2.12

Opgave 13

Dit is een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen vind je in de figuur.

- Bereken de hoek tussen de lijnstukken EH en HG . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de afstand van punt G tot de lijn EH . Rond af op twee decimalen.



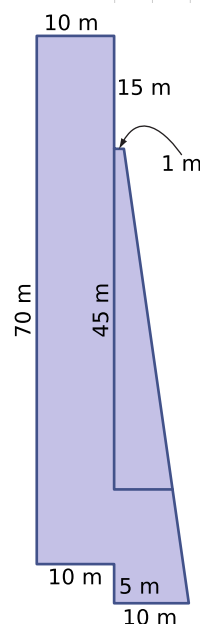
Figuur 2.13

Opgave 14

Hier zie je een foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Daarnaast zie je een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak. De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium.



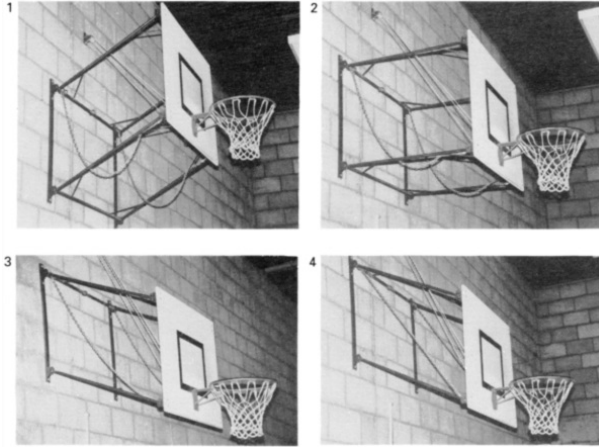
Figuur 2.14



- a Bereken de lengtes van de zijden van dat trapezium.
- b Bereken de grootte van de hoeken van dat trapezium.

Opgave 15

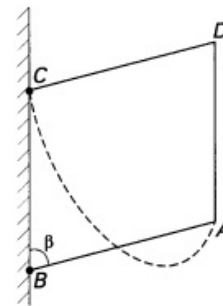
Hier zie je vier momentopnamen van het neerlaten van een basketbalbord.



Figuur 2.15 Bron: havo-examen wiskunde B1,2 in 1994

De stellage bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan de basket bevestigd is. Twee even lange kettingen dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel. Het zij-aanzicht van het frame is een parallellogram $ABCD$. Hierin is $BC = 90$ cm en $AB = 100$ cm. In de gymzaal waarin de foto's zijn genomen zit bevestigingspunt B op een hoogte van 280 cm van de grond. Eén van de kettingen is bevestigd in A en C . De ketting is zo lang dat bij het neerlaten van de stellage punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de begane grond.

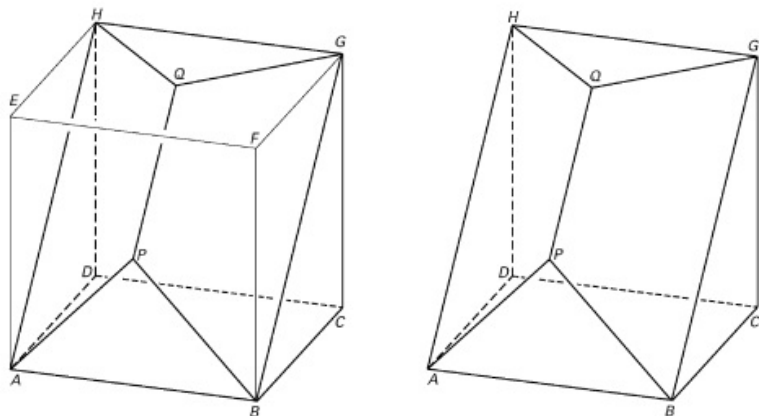
- a Bereken de lengte van de ketting AC in twee decimalen nauwkeurig.
- b Het frame wordt helemaal vanaf de laagste stand omhoog getrokken tot aan de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een cirkelboog. Bereken de lengte van de baan die punt A aflegt. Rond af op twee decimalen.
- c Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat A op 300 cm boven de begane grond zit in twee decimalen nauwkeurig.
- d De afstand a tussen de stangen AB en CD is de lengte van het kortste lijnstuk tussen beide. Deze lengte hangt af van de grootte van hoek β . Druk die afstand a uit in β .
- e Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat afstand a precies 45 cm is.



Figuur 2.16

Opgave 16

In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 cm past een lichaam L met hoekpunten A, B, C, D, P, Q, G en H . P is het snijpunt van AF en BE , Q is het snijpunt van EG en FH . In de rechter figuur is L apart getekend.



Figuur 2.17 Bron: examen havo wiskunde B1,2 in 2000

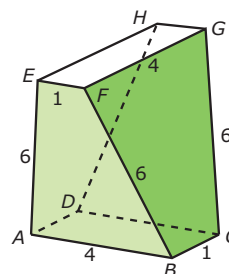
- Bereken de afstand van punt P tot punt G in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken de grootte van $\angle BPQ$ in graden nauwkeurig.
De afstand tussen de lijnen PQ en CD is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen beide.
- Bereken de lengte van het bedoelde lijnstuk in één decimaal nauwkeurig.
- Punt R is het midden van GH .
Door P, Q en R gaat een cirkel c . Bereken de straal van deze cirkel in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de lengte van het deel van de cirkel tussen de punten P en Q in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

In de figuur zie je een betonnen zuil die wordt gebruikt in een viaduct als ondersteuning van het bovenliggende wegdek. Zowel het ondervlak $ABCD$ als het bovenvlak $EFGH$ zijn rechthoeken van 1 m bij 4 m. Alle opstaande zijvlakken zijn gelijke symmetrische trapezia. Je wilt de afstand tussen ondervlak $ABCD$ en bovenvlak $EFGH$ berekenen.

Die afstand kun je het beste zien in een vooraanzicht. Zo'n vooraanzicht heeft dezelfde vorm als een verticale dwarsdoorsnede van de figuur. De gevraagde afstand kun je daarin aangeven.

Je wilt nu rekenen in de doorsnede $ABPQ$, maar dan moet je wel eerst de lengtes van AQ en BP weten. En daarvoor bekijk je één van de zijvlakken, bijvoorbeeld $BCGF$ waarin je de lengte van BP kunt berekenen.



Figuur 2.18

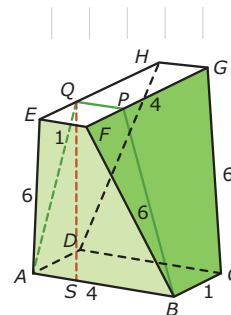
Opgave 17

Bekijk het probleem in **Toepassen**. Hier zie je een verticale doorsnede $ABPQ$ getekend. De gevraagde afstand tussen ondervlak en bovenvlak is de lengte van QS .

- a Bereken de lengte van QS in cm nauwkeurig.
- b Bereken de afstand tussen de punten B en G in twee decimalen nauwkeurig.

Er zitten ook allerlei hoeken in. Nu is het gebruik van goniometrie onvermijdelijk.

- c Bereken $\angle BAE$ in twee decimalen nauwkeurig.
- d Bereken $\angle AGC$ in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 2.19

Opgave 18

De betonnen zuil heeft een bijzondere eigenschap. Als je op hoogte x boven het grondvlak een horizontale band om de zuil maakt, dan heeft zo'n band altijd dezelfde lengte.

Toon dit aan.

Testen

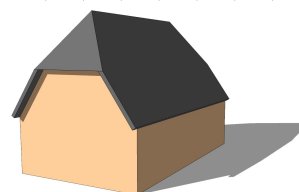
Opgave 19

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.

Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.

De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.

- a Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken. Bereken de hoeken van die twee gelijkbenige driehoeken.
- b Bereken de afstand van de onderste dakrand tot aan de nok van het dak in cm nauwkeurig.



Figuur 2.20

2.3 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- oppervlakte en inhoud berekenen van (delen van) ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

- Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in cL.
- Bereken de oppervlakte aan karton in mm².
- Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan karton waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffiebeker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het karton blijft hetzelfde.

Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Uitleg 1

Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Die afmetingen bepalen hoeveel er in kan, de inhoud van het bekertje.

Om die uit te rekenen gebruik je de formule voor de inhoud van een kegel.

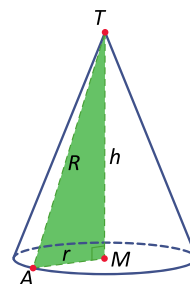
$$\text{inhoud(kegel)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Hierin is r de straal (de halve diameter) en h de hoogte van de kegel.

Voor de inhoud van het bekertje trek je als het ware twee kegels van elkaar af: een kegel met hoogte h en diameter 46 mm trek je af van een kegel met hoogte $h + 90$ en diameter 64 mm.



Figuur 2.1



Figuur 2.2

Omdat beide kegels gelijkvormig zijn is

$$\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$$

waaruit volgt: $h = 230$ mm.

De inhoud van de koffiebeker is daarom

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32^2 \cdot 320 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 23^2 \cdot 230 \approx 215733 \text{ mm}^3.$$

De inhoud van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^3 = 8$ keer zo groot.

Opgave 1

Bekijk het koffiebekertje in [Uitleg 1](#).

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

- Voor welke figuren geldt deze formule?
- Waarom geldt voor een kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?
- Leg uit waarom geldt: $\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$.
- Laat zien dat $h = 230$
- Bereken tenslotte zelf het volume van het koffiebekertje.
- Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 8 keer zo grote inhoud heeft.

Opgave 2

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

- Voor welke figuren geldt deze formule?
- Waarom geldt voor een cilinder $V = \pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?
- Bereken de inhoud van een kubus waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.
- Bereken de inhoud van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.
- Bereken het volume van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.
- Bereken het volume van een bol met diameter 6 cm.
Zoek eventueel de formule voor de inhoud van een bol op in de [Theorie](#).

Uitleg 2

Het kartonnen koffiebekertje van **Uitleg 1** is een afgeknotten kegel met diameter van de bodem 46 mm, die van de bovensirkel 64 mm en hoogte 90 mm.

Die afmetingen bepalen hoeveel karton er voor het bekertje nodig is.

Om dat uit te rekenen gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegel.

$$\text{oppervlakte(kegelmantel)} = \pi r R.$$

Hierin is r de straal (de halve diameter) en R de straal van de kegelmantel (een deel van een cirkel).

$$\text{Er geldt: } R = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

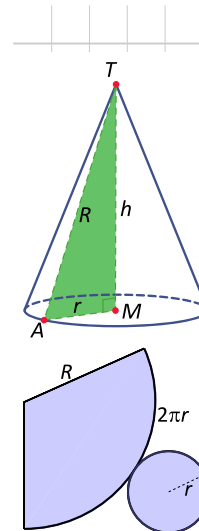
Voor de oppervlakte van het bekertje trek je als het ware twee kegelmantels van elkaar af: een kegelmantel met straal $\sqrt{230^2 + 23^2} \approx 231$ en kegelstraal 23 mm trek je af van een ke-

gelmantel met straal $\sqrt{320^2 + 32^2} \approx 322$ en kegelstraal 32 mm.

De oppervlakte van de mantel van de koffiebeker is daarom $\pi \cdot 32 \cdot 322 - \pi \cdot 23 \cdot 231 \approx 15628 \text{ mm}^2$.

De totale oppervlakte van de koffiebeker is $\approx 15628 + \pi \cdot 23^2 \approx 17290 \text{ mm}^2$.

De oppervlakte van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^2 = 4$ keer zo groot.



Figuur 2.3

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de oppervlakte van het koffiebekertje berekend. Daarbij gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegelmantel.

- a** Welke vorm heeft een kegelmantel?

De formule $\text{oppervlakte(kegelmantel)} = \pi r R$ kun je zelf afleiden. Bedenk dat de kegelmantel een deel is van een cirkel met straal R .

- b** Hoe groot is de oppervlakte van zo'n cirkel?

De kromme rand van de kegelmantel heeft een lengte van $2\pi r$. De hele cirkel waar de kegelmantel een deel van is heeft een omtrek van $2\pi R$.

- c** Welk deel van de hele cirkel is de kegelmantel?

Leid nu zelf de formule voor de oppervlakte van de kegelmantel af.

- d** Bereken met die formule zelf de oppervlakte van het koffiebekertje.

- e** Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 4 keer zo grote oppervlakte heeft.



Opgave 4

De oppervlakte van een ruimtelijke figuur is de oppervlakte van de uitslag van zo'n figuur.

- Geldt dit ook voor een bol?
- Hoe kom je aan de formule $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ voor de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h ? Welke aanname moet je dan doen?
- Bereken de oppervlakte van een balk waarvan de ribben 6, 5 en 4 cm lang zijn.
- Bereken de oppervlakte van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.
- Bereken de oppervlakte van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.
- Bereken de oppervlakte van een bol met diameter 6 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag ervan, dus het aantal eenheidsvierkantjes dat op die oppervlakte past.

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** (of het volume) is gelijk aan de het aantal eenheidskubusjes dat er in past.

Hier zie je de bijbehorende formules.

figuur	oppervlakte A	inhoud/volume V
kubus $r \times r \times r$	$A = 6 \cdot r^2$	$V = r^3$
balk $l \times b \times h$	$A = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$V = l \cdot b \cdot h$
n -zijdig prisma $G \times h$	$A = 2 \cdot G \cdot h + n \cdot A_{\text{rechthoek}}$	$V = G \cdot h$
n -zijdige piramide $G \times h$	$A = G + n \cdot A_{\text{driehoek}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
bol met straal r	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
cilinder straal r hoogte h	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
kegel straal r hoogte h	$A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

Tabel 2.1

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST , dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.

Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$

Bereken de totale oppervlakte en het volume van de afgeknotte piramide.

Antwoord

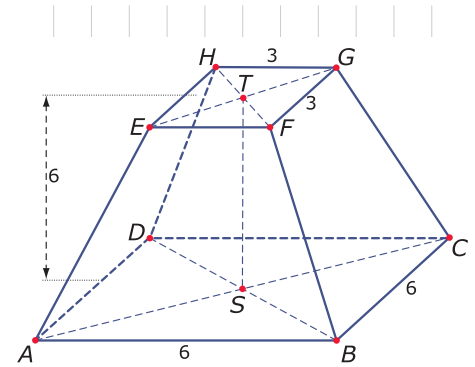
De uitslag van zo'n afgeknotte piramide bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 en een vierkant van 3 bij 3 en vier gelijke trapezia. De hoogte van zo'n trapezium kun je berekenen door bijvoorbeeld vanuit F een loodlijn naar het grondvlak te tekenen. Je vindt dan dat die hoogte gelijk is aan $\sqrt{6^2 + 1,5^2}$. De hoogte van het trapezium is dus $\sqrt{38,25}$ en heeft twee evenwijdige zijden van 6 en 3.

$$\text{oppervlakte } (ABCD.EFGH) = 6^2 + 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \sqrt{38,25} \approx 156,3$$

De afgeknotte piramide is het verschil van een grote piramide met grondvlak 6 bij 6 en hoogte $x + 6$ en een kleinere piramide met grondvlak 3 bij 3 en hoogte van x .

$$\text{Nu is: } \frac{x}{x+6} = \frac{3}{6} \text{ en dus is } x = 6.$$

$$\text{De inhoud van de afgeknotte piramide is: } \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 126$$

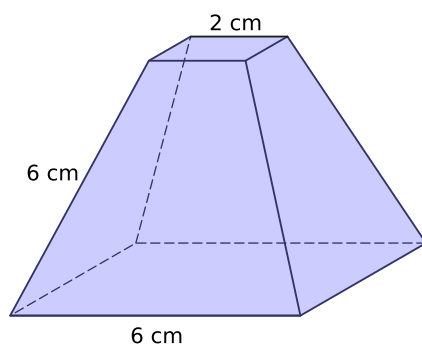


Figuur 2.4

Opgave 5

Leg uit waarom de hoogte van het trapezium uit **Voorbeeld 1** gelijk is aan $\sqrt{38,25}$.

Opgave 6



Figuur 2.5

Bereken exact de oppervlakte en de inhoud van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.

Voorbeeld 2

Dit is een 'amsterdammertje', een paaltje in Amsterdam om onder andere wildparkeren tegen te gaan. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovenscirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend.

Ga ervan uit dat er 5 liter verf nodig is voor een oppervlakte van 40 m^2 . Hoeveel liter verf is er dan nodig om alle 6500 amsterdammertjes in een bepaalde wijk te schilderen?

Antwoord

Geschilderd worden de (afgeknotte) kegelmantel en de halve bol. De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h . Met verhoudingen bereken je h : $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op:

$$h = 135 \text{ cm}$$

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een oppervlakte van

$$\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + 225^2} - \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 135^2} \approx 4528,4 \text{ cm}^2.$$

De halve bol heeft een oppervlakte van $0,5 \cdot 4\pi \cdot 6^2 \approx 226,2 \text{ cm}^2$.

De te schilderen oppervlakte is ongeveer

$$6500 \cdot (4528,4 + 226,2) = 30904900 \text{ cm}^2.$$

Dat is ongeveer $3090,5 \text{ m}^2$ en daar is ongeveer 386,3 liter verf voor nodig.

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van het amsterdammertje uit het voorbeeld berekent. Stel je voor dat het amsterdammertje van binnen hol is en dat het metaal overal een dikte heeft van 2 mm.

Hoeveel metaal is er dan voor nodig? Geef je antwoord in gehele cm^3 .

Opgave 8

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van een figuur kunt berekenen die is samengesteld uit een afgeknotte kegel en een halve bol. Heel vaak is een lichaam op te vatten als een samenstelling van (delen van) andere lichamen.

Een surprise zit in een cilinder met een diameter van 10 cm en een hoogte van 20 cm met daarop een kegelvormige punt met een hoogte van 5 cm.

Bereken in cm^2 de totale buitenoppervlakte van de verpakking. Maak eventueel zelf een schets van de situatie.



Figuur 2.6

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.

Bereken de inhoud en de totale oppervlakte $ABC.DEF$

Antwoord

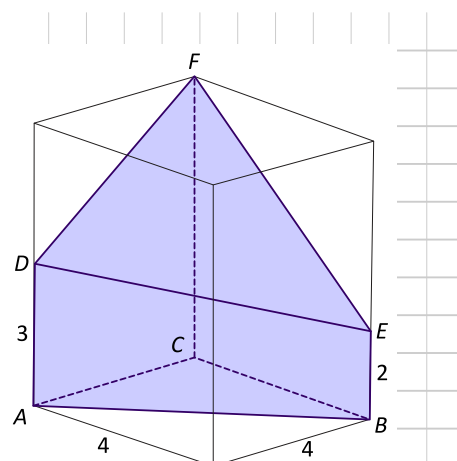
Voor de oppervlakte van $\triangle DEF$ heb je de lengtes van de zijden nodig om met de cosinusregel een hoek uit te rekenen. Dan kun je een hoogte berekenen en de oppervlakte van $\triangle DEF$ berekenen. De oppervlakte van de andere grensvlakken tel je er nog bij op.

Voor de inhoud moet je de figuur verdelen in herkenbare lichamen.

Teken daartoe een vlakje EGH evenwijdig aan $\triangle ABC$.

De figuur wordt dan verdeeld in driehoekig prisma $ABC.GEH$ en piramide $E.GHFD$.

De totale inhoud is de inhoud van prisma en piramide samen.

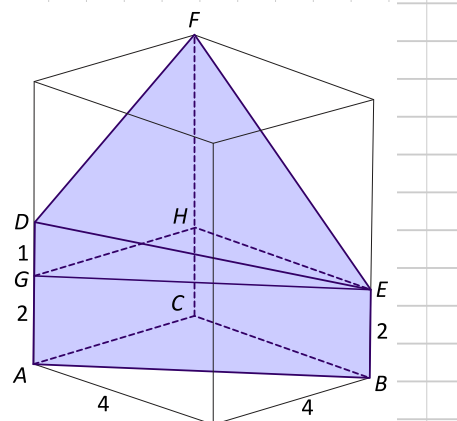


Figuur 2.7

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** het afgeknotte prisma $ABC.DEF$.

- Bereken de oppervlakte van $\triangle DEF$ berekent.
- Bereken de totale oppervlakte van $ABC.DEF$.
- In de figuur zie je de verdeling van $ABC.DEF$ in een prisma en een piramide. Bereken het volume van $ABC.DEF$.

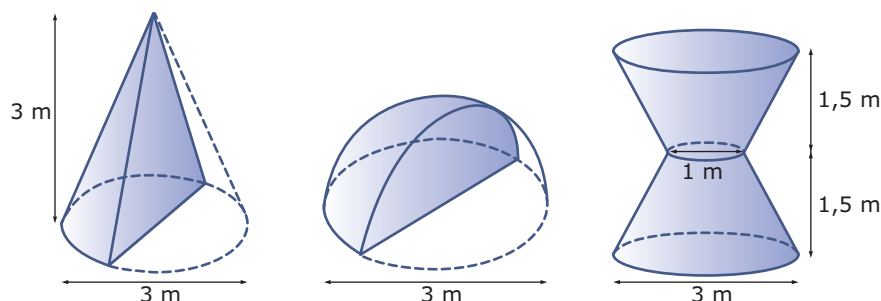


Figuur 2.8

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier drie figuren.



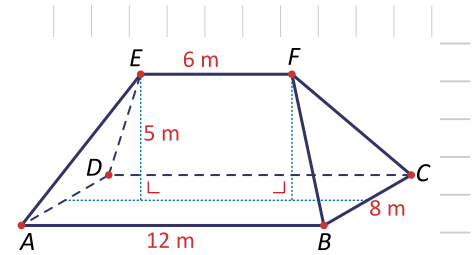
Figuur 2.9

- Bereken de oppervlakte ervan.
- Bereken de inhoud ervan.

Opgave 11

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.

- a Bereken de exacte oppervlakte van dit schilddak.
- b Bereken het volume onder dit schilddak.

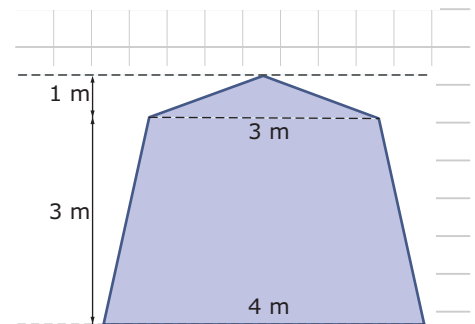


Figuur 2.10

Opgave 12

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

- a Bereken de oppervlakte van deze tent, dus de hoeveelheid tentdoek die je ervoor nodig hebt, in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.
- b Bereken de inhoud van deze tent.

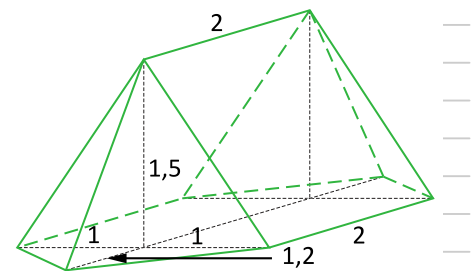


Figuur 2.11

Opgave 13

Bekijk de afbeelding van een tent met een symmetrische vorm. Door dunne stippellijnen is de onderverdeling weergegeven, de verticale dunne stippellijnen staan loodrecht op de horizontale dunne stippellijnen. Alle afmetingen zijn in meter.

- a Bereken de oppervlakte van het ervoor benodigde tentdoek, inclusief het grondzeil.
- b Bereken de inhoud van deze tent.



Figuur 2.12

Opgave 14

Van een cocktailglas heeft de bovenkant een wijde kegelvorm. Dat heeft een goede reden.

- a Stel dat de vloeistofspiegel van de cocktail tot halverwege de hoogte van de kegel staat, hoeveel procent van de totale inhoud van het cocktailglas is dan gevuld?
- b Stel dat het cocktailglas half vol is, hoe hoog is dan de vloeistofspiegel?

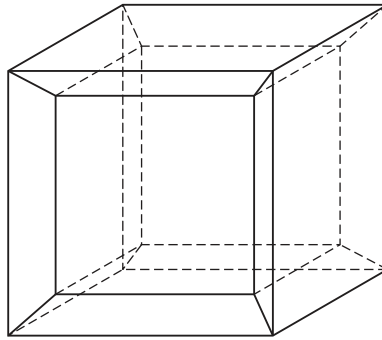
Neem aan dat de vloeistofspiegel maximaal 10 cm vanaf de bodem van het glas kan zijn.



Figuur 2.13

Opgave 15

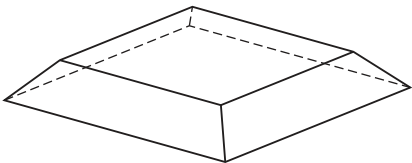
In Parijs staat een groot gebouw, La Grande Arche, dat vrijwel de vorm van een uitgeholde kubus heeft.



Figuur 2.14

Bij benadering geldt dat de buitenste acht hoekpunten van het gebouw een grote kubus vormen met ribben van 110 meter. De binnenste acht hoekpunten vormen een kleinere kubus met ribben van 88 meter. Beide kubussen hebben hetzelfde middelpunt en overeenkomstige zijvlakken zijn evenwijdig.

- a Bereken de verhouding van de oppervlaktes van de grote en de kleine kubus.



Figuur 2.15

Om de inhoud van het gebouw te bepalen kan het volgende model worden gebruikt. Als aan alle zijden van de kleine kubus hetzelfde lichaam dat staat afgebeeld wordt toegevoegd, ontstaat precies de grote kubus. La Grande Arche bevat vier van deze zes lichamen.

- b Bereken de inhoud van het gebouw in kubieke meters nauwkeurig.

Toepassen

In de modelbouw willen mensen het liefst dat de eigenschappen van bijvoorbeeld de voertuigen en gebouwen op werkelijke grootte in hun modellen behouden blijven. Dit geldt niet alleen voor hobbyisten, maar ook bijvoorbeeld voor ontwerpers van vliegtuigen die de aerodynamische eigenschappen van hun ontwerp willen uittesten op een model.



Figuur 2.16

Opgave 16

In de luchtvaart wordt de vorm van de vleugels in een getal uitgedrukt met het begrip slankheid. De formule voor slankheid is $\lambda = \frac{b^2}{A}$. Hierbij is b de spanwijdte en A de oppervlakte van de vleugels. Ga er voor het gemak van uit dat de vleugels rechthoekig zijn.

- a Een modelvliegtuig heeft een vleugeloppervlak dat 900 keer kleiner is dan die van het werkelijke vliegtuig. Wat gebeurt er met de slankheid?

Een modeltrein weegt 1,5 kg. Het is gemaakt van hetzelfde materiaal als de werkelijke trein. De werkelijke trein weegt 768 ton.

De snelheid van de modeltrein moet de werkelijkheid zo goed mogelijk nabootsen. De werkelijke trein heeft een topsnelheid van 100 km/h.

- b Hoe groot moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

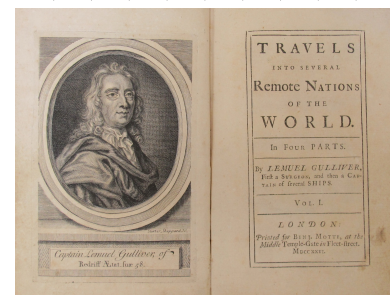
Een raket bestaat grofweg uit een cilinder met een kegel erop. Een amateur-raketwetenschapper heeft een modelraket van 125 kg gebouwd die, wanneer afgevuurd, 250 m hoog in de lucht komt. Hij heeft berekend dat een raket met de verhoudingen van zijn model een hoogte h (m) behaalt die evenredig is met het verschil van de massa van de cilinder en de massa van de kegel. Dus $h = c \cdot (m_1 - m_2)$, waarbij c een constante is, m_1 de massa van de cilinder en m_2 de massa van de kegel.

- c Stel dat de kegel en de cilinder van een raket op werkelijke grootte van precies dezelfde materialen gemaakt worden als het model. Je wilt dat een raket 100 km de lucht in gaat. Hoe zwaar moet de werkelijke raket worden?

Opgave 17: Lilliput

Jonathan Swift bedacht in zijn boek 'Gulliver's travels' het volk uit Lilliput. De bewoners van Lilliput zijn verkleiningen van echte mensen met een factor 10. Ga eens uit van een Lilliputter die een perfecte verkleining is van jouzelf.

- a Hoeveel weegt die Lilliputter ten opzichte van jou?
- b Hoeveel keer minder huidoppervlakte heeft die Lilliputter in vergelijking met jijzelf?
- c De voedselbehoefte van zoogdieren is ongeveer recht evenredig met de huidoppervlakte omdat dit vooral nodig is om de lichaamstemperatuur op peil te houden en het temperatuurverlies vooral afhangt van de huidoppervlakte. Schat hoeveel gram voedsel jij per dag zelf nodig hebt en bereken hoeveel dat voor de Lilliputter zou moeten zijn.
- d Hoeveel procent van je eigen lichaamsgewicht moet jij dagelijks eten? En de Lilliputter? In deze opgave wordt uitgegaan van een lichaamsgewicht van 80 kg.



Figuur 2.17



- e Waarom geldt voor zoogdieren dat de benodigde hoeveelheid voedsel recht evenredig is met het kwadraat van de lengte?
- f Leg uit dat voor zoogdieren de benodigde hoeveelheid voedsel per kg lichaamsgewicht recht evenredig is met $l^{\frac{2}{3}}$, waarin l de lichaamslengte is.

Testen

Opgave 18

Deze stenen vijzel met stamper bestaat uit een wat poreuze soort steen met een soortelijke massa van $2,1 \text{ gram/cm}^3$. De vijzel zelf heeft ongeveer de vorm van een balk met een vierkant grondvlak en bovenzvlak van $14 \times 14 \text{ cm}$. De vier opstaande ribben zijn 8 cm . In die vijzel is een halve bol zo uitgeslepen, dat het diepste punt van die bol $2,5 \text{ cm}$ boven het grondvlak zit.

De inhoud van een bol met straal r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$.

- a Hoeveel weegt deze vijzel in grammen nauwkeurig?
- b Af en toe moet deze vijzel worden ingesmeerd met een bepaalde olie. Hoe groot is de oppervlakte van de vijzel in cm^2 nauwkeurig?

Opgave 19

Uit Wikipedia november 2016: "Een obelisk is een gedenknaald. Het gaat om een vierkante, naar boven toe iets dunner wordende zuil of kolom, met een piramidevormige stompe punt, meestal van graniet gemaakt."

Neem aan dat een bepaalde obelisk bestaat uit een 16 m hoge afgeknotte piramide met een grondvlak van $1,8 \times 1,8 \text{ m}$ en een bovenzvlak van $1,0 \times 1,0 \text{ m}$. Op dit bovenzvlak staat een piramide met opstaande zijden van $2,0 \text{ m}$.

- a Hoeveel hoog is deze obelisk in dm nauwkeurig?
- b Graniet heeft een soortelijke massa van $2,7 \text{ g/cm}^3$. Hoe zwaar is zo'n obelisk als hij van graniet wordt gemaakt?



Figuur 2.18

2.4 Doorsneden construeren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden uit een ruimtelijke figuur halen en in hun werkelijke vorm tekenen, eventueel op schaal;
- doorsneden in een ruimtelijke figuur construeren.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

- Kun je uitleggen waarom dit de doorsnede van de kubus met een plat vlak is? Weet je zeker dat het een vlakke figuur is? En zo ja, waarom?
- Vanuit welke richting moet je de kubus bekijken om $APGQ$ als een lijnstuk te zien?
- Welke vlakke figuur is doorsnede $APGQ$?
- Bereken er de zijden en de hoeken van.
- Bereken er de oppervlakte van.

Uitleg

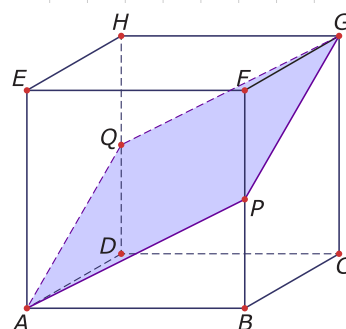
Bekijk in de bovenste figuur de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Deze doorsnede ligt in een plat vlak omdat (bijvoorbeeld) AP en QG evenwijdig zijn.

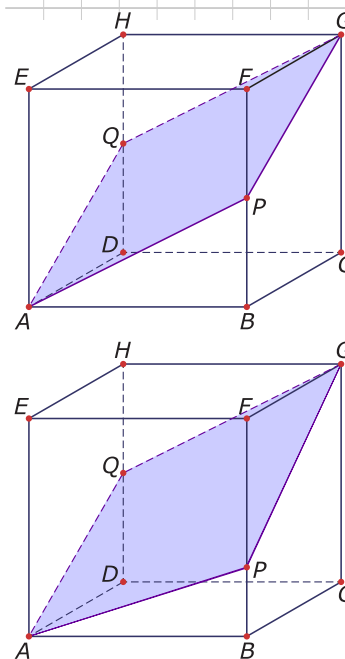
In de onderste figuur is P niet het midden van BF en daarom is $APGQ$ geen plat vlak en dus ook geen doorsnede met de kubus. AP en QG zijn nu kruisende lijnen.

Wil je in de bovenste figuur $APGQ$ op ware grootte zien, moet je inzien dat $APGQ$ een ruit waarvan alle zijden $\sqrt{5^2 + 2,5^2} = \sqrt{31,25}$ cm zijn. De diagonaal PQ is $\sqrt{50}$ cm.

Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.



Figuur 2.1



Figuur 2.2



Opgave 1

Bekijk de bovenste kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg**.
 M is het midden van AC .

- Waarom zijn de twee ribben AP en QG evenwijdig?
- Teken diagonaalvlak $ACGE$ op ware grootte en laat zien dat AG en EM loodrecht op elkaar staan.
- Waarom zie je $APGQ$ op ware grootte als je in de richting EM op dat vlak kijkt?
- Bereken zelf de lengte van de twee diagonalen van ruit $APGQ$.
- Teken de ruit op ware grootte en bereken de hoeken ervan in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. P is het midden van BF . Teken zelf die kubus als een schets. Door A , P en H gaat een vlak. Dat vlak kun je binnen de kubus nog groter maken.

- Licht toe waarom het midden R van FG ook in dit vlak ligt. Denk aan evenwijdigheid!
- Teken vierhoek $APRH$ in de kubus.
- Waarom is vierhoek $APRH$ de doorsnede van het vlak door A , P en H met de kubus?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

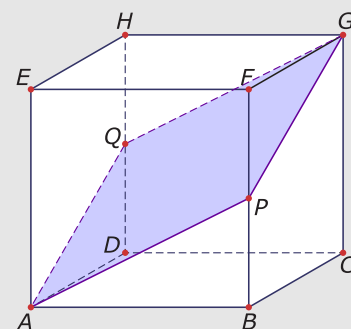
Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak.

Bij het tekenen van een doorsnede gebruik je:

- Door drie punten gaat één vlak.
- Door twee snijdende lijnen gaat één vlak.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen gaat één vlak.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn gaat één vlak.
- Als lijnen elkaar kruisen liggen ze niet in één vlak.

Bekijk de kubus. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen. De vierhoek $APGQ$ is een doorsnede van de kubus omdat AP en QG evenwijdig zijn.

Soms wil je de doorsnede op ware grootte of op schaal tekenen. Dan moeten alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (op schaal).



Figuur 2.3

**Voorbeeld 1**

Bekijk doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 4$, $CG = 3$ en $GP = 2$. Teken doorsnede $AFPQ$ op ware grootte.

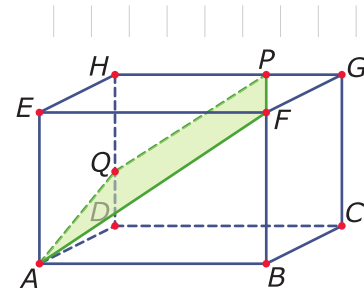
Antwoord

De ware lengte van AF kun je halen uit rechthoek $ABFE$: $AF = \sqrt{45}$.

De ware lengte van FP kun je halen uit rechthoekige $\triangle FGP$: $FP = \sqrt{20}$. De ware lengte van AP kun je halen uit rechthoekige $\triangle AHP$: $AP = \sqrt{41}$. Nu teken je eerst $\triangle AFP$ met behulp van passer en liniaal.

Omdat $AFPQ$ een plat vlak is, moet $AF \parallel PQ$. Dus zijn de driehoeken AFE en QPH gelijkvormig. Omdat $PH = \frac{4}{6}EF$ is ook $PQ = \frac{4}{6}AF$.

Hiermee kun je het trapezium $AFPQ$ afmaken.



Figuur 2.4

Opgave 3

Bekijk de doorsnede $AFPQ$ in **Voorbeeld 1**.

- Laat zien hoe de lengtes van de zijden van vierhoek $AFPQ$ kunnen worden berekend.
- Bereken zelf de lengte van de diagonalen van vierhoek $AFPQ$.
- Waarom weet je zeker dat vierhoek $AFPQ$ een trapezium is?
- Teken nu dit trapezium op ware grootte.

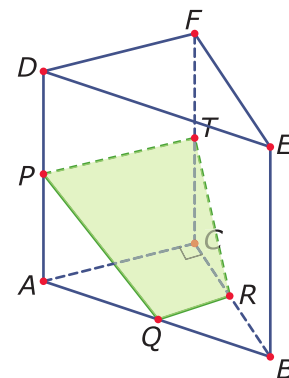
Voorbeeld 2

In het rechte prisma $ABC.DEF$ ligt P op het midden van AD , Q op het midden van AB , R op het midden van BC en T op het midden van CF . Hoek BCA is recht, $BC = BE = 4$ en $AC = 3$. Teken doorsnede $PQRT$ op ware grootte.

Antwoord

Van vierhoek $PQRT$ zijn hoek PTR en hoek TRQ recht. Verder is $TP = 3$, $TR = \sqrt{8}$ en $QR = 1,5$ (gelijkvormigheid). De figuur is nu eenvoudig te tekenen.

Ga na hoe je de hoeken en de oppervlakte van trapezium $PQRT$ berekent.



Figuur 2.5

Opgave 4

Bekijk het rechte prisma $ABC.DEF$ in **Voorbeeld 2**.

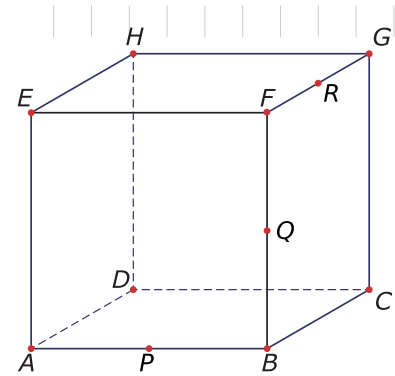
- Teken zelf de doorsnede $PQRT$ op ware grootte. Controleer alle berekende lengtes.
- Bereken de hoeken en de oppervlakte van het trapezium.

Voorbeeld 3

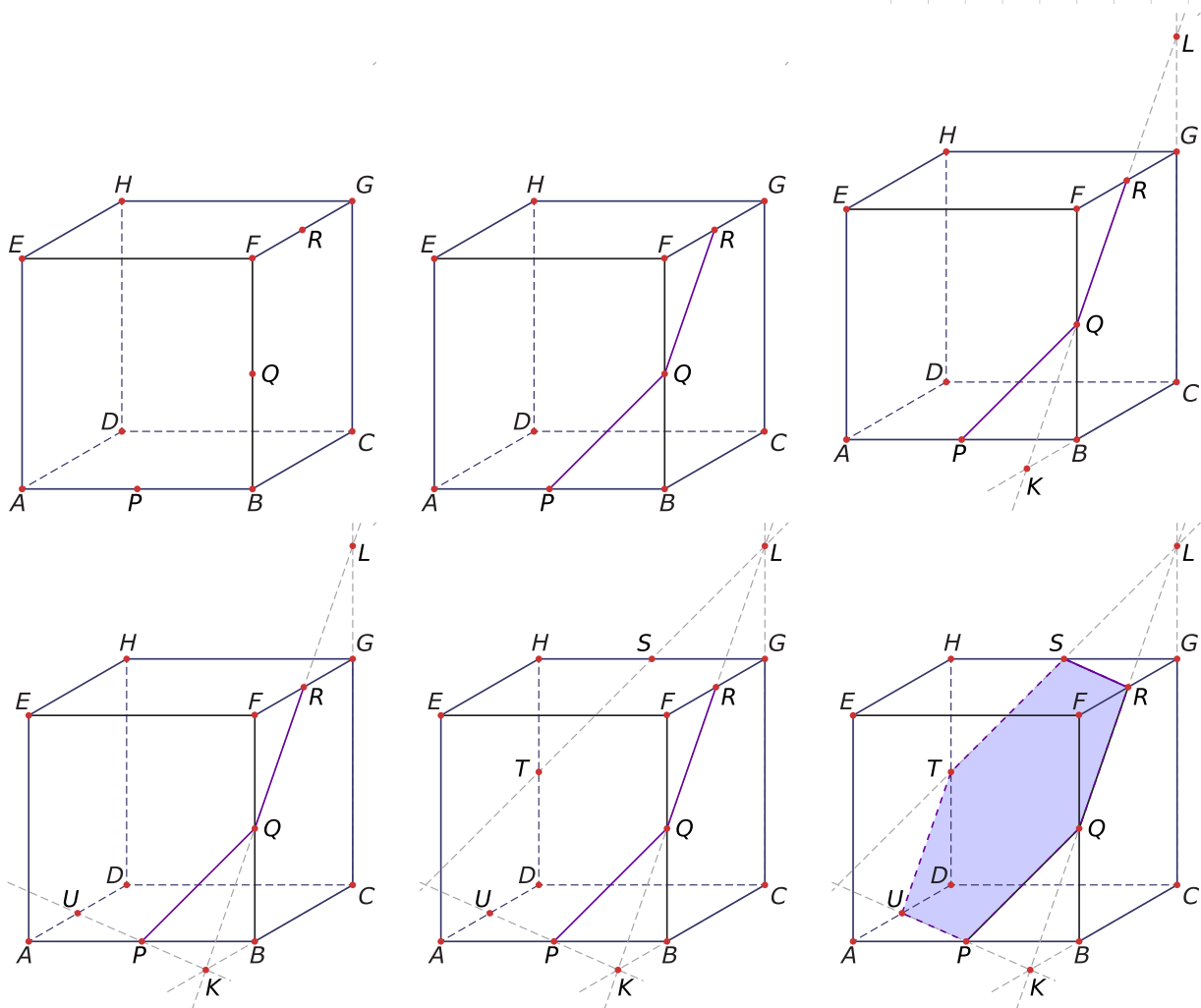
Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 8 cm. P is het midden van AB , Q dat van BF en R dat van FG .

1. Teken de doorsnede van het vlak door deze drie punten met de kubus.
2. Teken die doorsnede ook op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.

Antwoord



Figuur 2.6



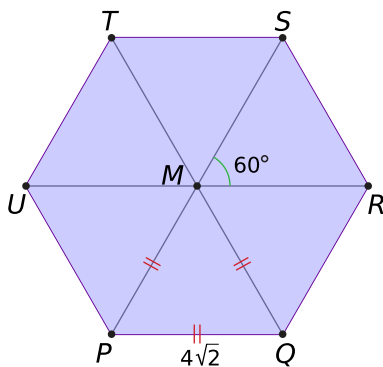
Figuur 2.7

- Bij het tekenen van de lijn door L die de punten S en T oplevert, is gebruikgemaakt van de evenwijdigheid van de snijlijnen in twee evenwijdige vlakken. Je krijgt een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met alle zijden $4\sqrt{2}$.
- Zeshoek $PQRSTU$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, want de hoeken bij punt M zijn allemaal 60° . Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 60° is gelijkzijdig.



De hoogte van één van die gelijkzijdige driehoeken is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. En daarmee bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek.

Ga na dat de zeshoek een oppervlakte heeft van $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



Figuur 2.8

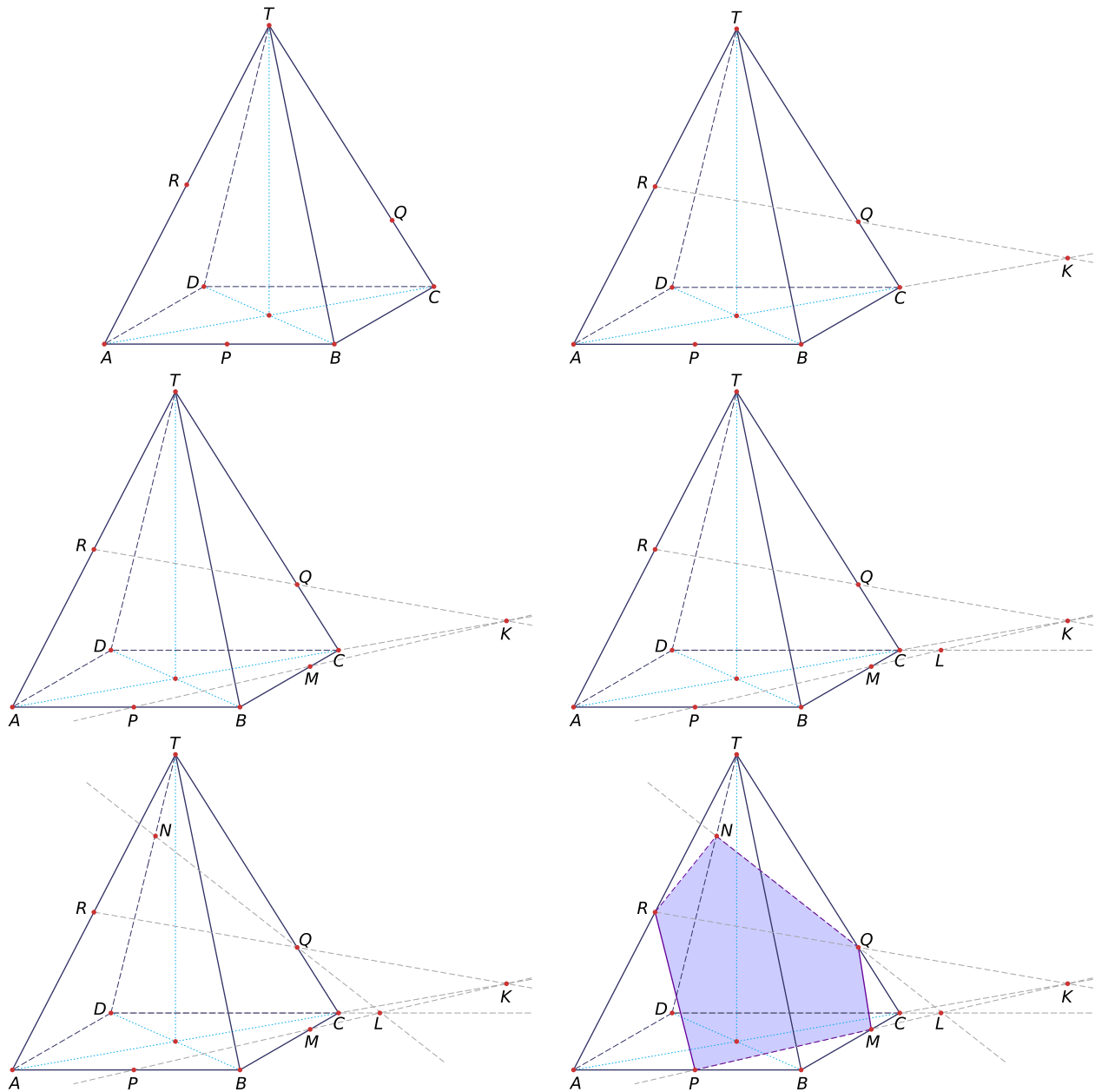
Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een doorsnede tekent door drie gegeven punten in een kubus. Gegeven is opnieuw de kubus $ABCD.EFGH$ met de punten P , Q en R . Bekijk de afbeelding.

- Teken zo'n kubus met de punten P , Q en R . Voer daarna zelf de constructie van de doorsnede door deze punten stap voor stap uit. Leg bij elke stap uit hoe en waarom hij wordt gezet.
- Toon aan dat de oppervlakte van de doorsnede inderdaad $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$ is.
- Teken de kubus nog eens. Het midden van GH is punt S , het midden van BF is punt Q . Teken de doorsnede van het vlak door E , Q en S met de kubus. Geef ook nu een uitgebreide beschrijving van je constructie.

Voorbeeld 4

Bekijk de constructie van de doorsnede van het vlak door P , Q en R met de piramide $T.ABCD$.



Figuur 2.9

Opgave 6

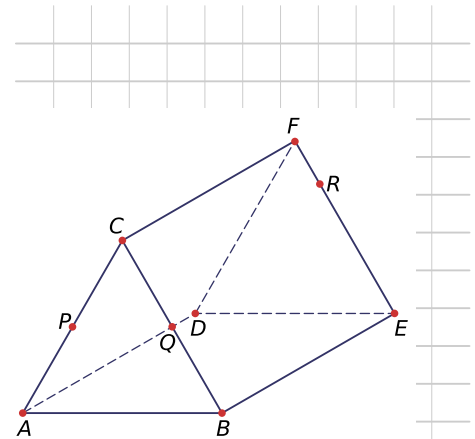
Je hebt gezien hoe de doorsnede van het vlak door P , Q en R in een gegeven regelmatige vierzijdige piramide geconstrueerd wordt.

- Waarom weet je zeker dat de lijnen RQ en AC elkaar snijden? Waarom ligt dit snijpunt K in het grondvlak $ABCD$ van de piramide?
- Geef een nauwkeurige beschrijving van de constructie.
- Teken zelf deze piramide en daarin de doorsnede van het vlak door R , B en Q .

Oefenen

Opgave 7

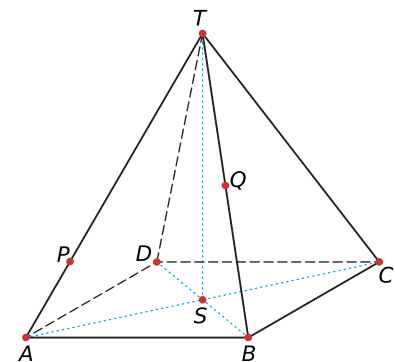
Neem het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ over en teken de doorsnede van het vlak door P , Q en R . Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 2.10

Opgave 8

Neem de piramide over en teken de doorsnede van het vlak door P , Q en C en de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Geef een beschrijving van de constructie.

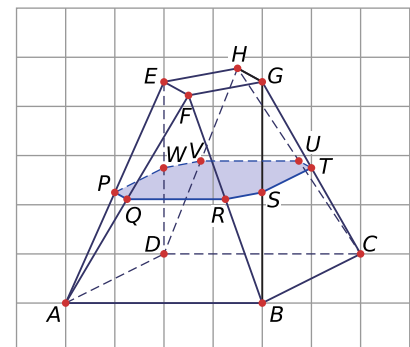


Figuur 2.11

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door het midden van alle opstaande ribben.

- Teken deze doorsnede op ware grootte. Laat zien hoe je daarbij te werk gaat.
- Bereken de totale omtrek van deze doorsnede.

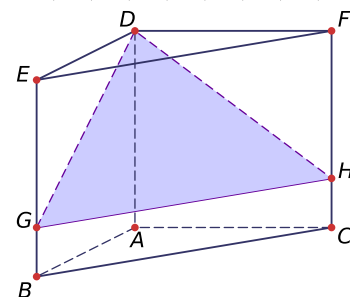


Figuur 2.12

Opgave 10

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90^\circ$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

- Teken de doorsnede van vlak GHD en het prisma op ware grootte.
- Bereken de grootte van de hoeken van driehoek GHD in één decimaal nauwkeurig.
- Neem de figuur over en teken de snijlijn van vlak GHD met het vlak waarop het grondvlak ABC ligt.

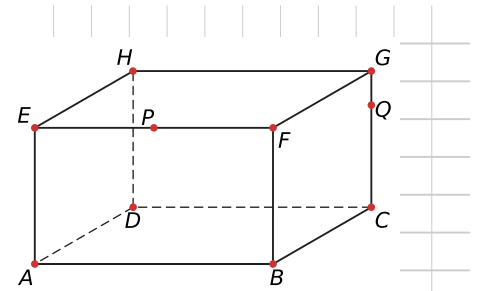


Figuur 2.13

Opgave 11

In deze balk $ABCD.EFGH$ is P het midden van EF en ligt Q op CG zo, dat $CQ : QG = 4 : 1$.

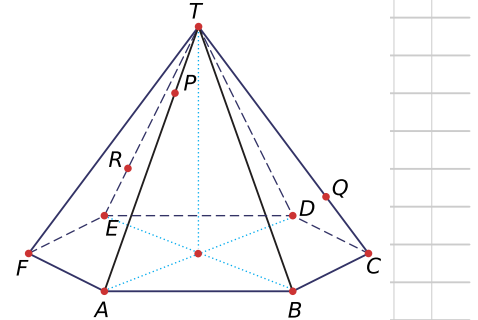
Neem de balk over en teken de doorsnede van het vlak APQ en de balk. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 2.14

Opgave 12

Gegeven is een piramide $ABCDEF.T$ met een regelmatige zes-hoek als grondvlak. Zie ook de figuur. Punt P ligt op AT , punt Q ligt op TC en punt R op TE . Teken de doorsnede door de punten P , Q en R . Licht je antwoord toe.



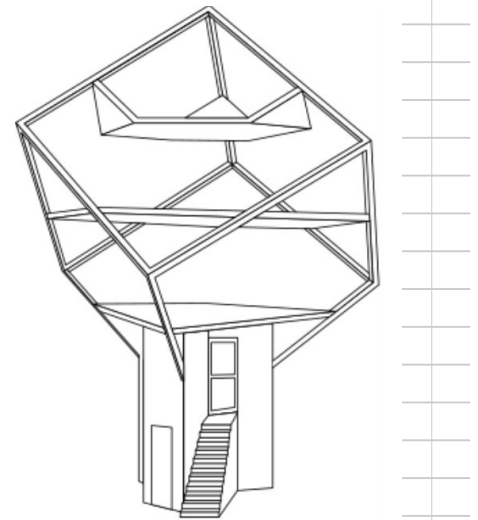
Figuur 2.15

Toepassen

Het ontwerp van de kubuswoningen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn dergelijke kubuswoningen gebouwd.



Figuur 2.17



Figuur 2.16

Opgave 13

Bekijk de kubuswoningen in de figuren hierboven.

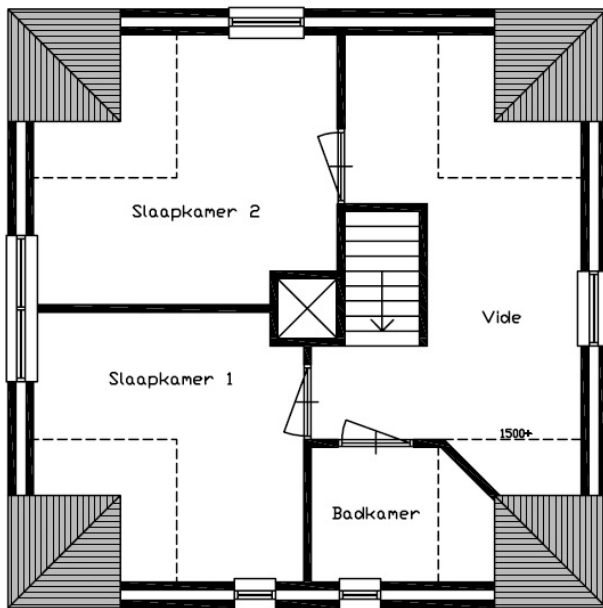
- Teken zo'n kubus die op zijn punt staat: één van de lichaamsdiagonalen is verticaal.
- Teken de vloeren van de drie verdiepingen in de kubus. Deze drie vloeren verdelen de verticale lichaamsdiagonaal in vier gelijke delen.

Opgave 14

Hier zie je een rondwandeling door het vakantiehuisje 'Heideheuvel'.

Dit huisje past precies in een kubus van $8 \times 8 \times 8$ m, als je de schoorsteen niet meerekent.

- Teken de verdiepingsvloer op schaal 1 : 100 als je weet dat hij 3 m boven de begane grond zit.
- Hoe groot is de oppervlakte van die verdiepingsvloer?
- Je ziet hier de plattegrond van de verdieping. Het muurtje tussen de badkamer en de vide bestaat uit twee delen. Teken deze delen op ware grootte.



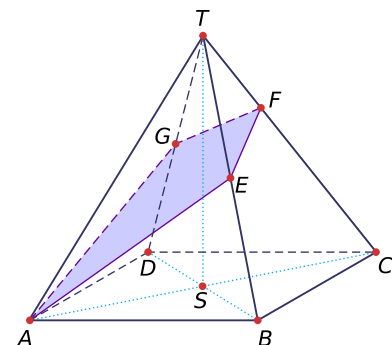
Figuur 2.18

Testen

Opgave 15

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. De hoogte van deze piramide is 5 cm. Punt E is het midden van BT en punt G is het midden van DT . De doorsnede $A E F G$ heeft de vorm van een vlieger. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD . M is het snijpunt van TS en GE .

- Leg uit waarom deze doorsnede de vorm van een vlieger heeft.
- Teken doorsnede $A E F G$ op ware grootte. Licht je antwoord met berekeningen toe.
- Bereken de grootte van $\angle EAG$.

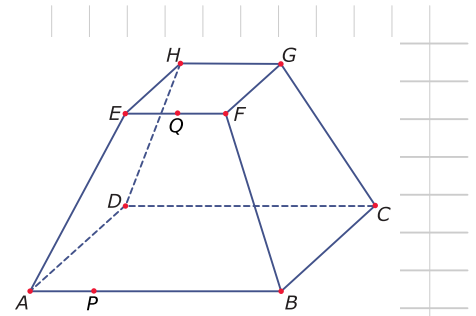


Figuur 2.19

**Opgave 16**

Dit is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. P ligt zo op AB dat $AP : PB = 1 : 3$ en Q is het midden van EF .

Teken de doorsnede van het vlak PQG en de afgeknotte piramide. Geef een beschrijving van de constructie.

**Figuur 2.20**

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met ruimtelijke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, aanzichten en uitslagen, formules voor inhoud en oppervlakte en doorsneden voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Meetkunde in 3D** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- parallelprojectie — wijkhoek, verkortingsfactor
- gelijkvormig — stelling van Pythagoras — goniometrie — sinusregel, cosinusregel
- oppervlakte — inhoud, volume
- doorsnede — snijdende, kruisende, evenwijdige lijnen

Activiteitenlijst

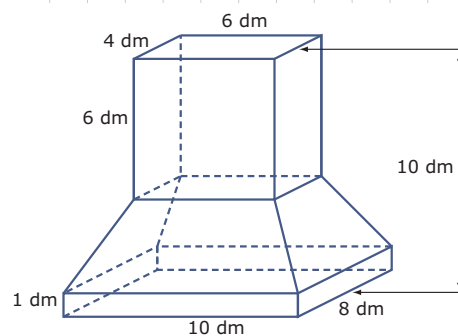
- eigenschappen parallelprojectie gebruiken — figuren in parallelprojectie tekenen (ook met wijkhoek en verkortingsfactor);
- hoeken en afstanden berekenen met behulp van gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinus- en de cosinusregel;
- oppervlakte en inhoud van een (samengestelde) ruimtelijke figuur berekenen — lengte- oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken;
- een doorsnede van een vlak met een ruimtelijke figuur construeren.

Testen

Opgave 1

Je ziet een stalen afzuigkap in een keuken. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.

- Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de afzuigkap.
- Bereken de hoeken in graden nauwkeurig en bereken exact de lengte van de zijden van de trapezia.
- Teken een uitslag op schaal 1:20 van de afzuigkap.
- Bereken de totale oppervlakte van deze afzuigkap in dm^2 nauwkeurig.
- Bereken de inhoud van deze afzuigkap in dm^3 nauwkeurig.



Figuur 2.1

Opgave 2

Bekijk de foto van de toren van de Walfriduskerk in Bedum. Deze toren is ongeveer 35,70 meter hoog en heeft vier gelijke ruitvormige dakdelen. Iemand maakt een papieren model van deze torenspits. Daarbij maakt hij als grondvlak van de toren een vierkant van 6 cm bij 6 cm. De totale hoogte van het bouwsel wordt 36 cm. De vier onderste punten van deze ruiten komen 30 cm boven het grondvlak.

- Teken de drie aanzichten van de torenspits.
- Bereken exact de lengtes van de zijden van zo'n ruitvormig dakdeel. Bereken ook de hoeken daarvan.
- Teken een parallelprojectie van de torenspits met daarin een serie horizontale doorsneden op 2 meter, 4 meter en 6 meter onder de top.

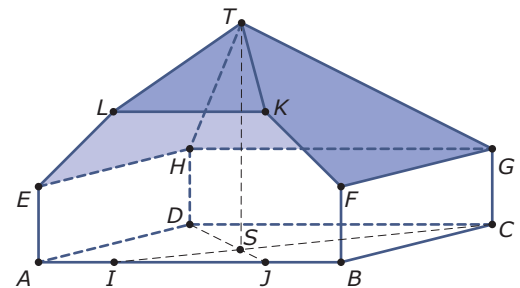


Figuur 2.2

Opgave 3

Bekijk de vereenvoudigde weergave van een boerenschuur. Grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ m en $BC = 6$ m. De zijvlakken $BCGF$ en $ADHE$ zijn rechthoeken van 6 m bij 2 m. Verder is $AI = BJ = 2$ m, $KL = IJ$ en $TS = 6$ m. Punt L zit recht boven I , punt K zit recht boven J en punt T zit recht boven S . Verder is gegeven dat $KJ = 4$ m.

- Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de schuur.
- Teken het grensvlak $FGTK$ op schaal 1:100 en bereken alle hoeken ervan in graden nauwkeurig.
- Teken in de figuur de doorsnede van een vlak door C , L en K met de schuur.

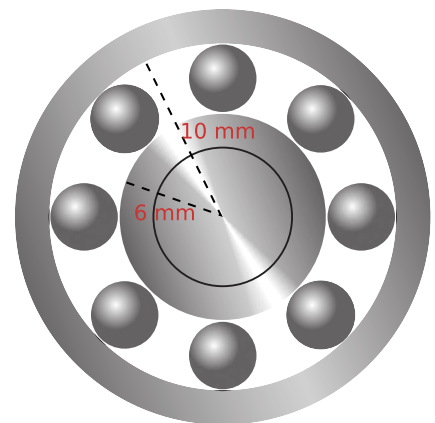


Figuur 2.3

Opgave 4

Je ziet een doorsnede van een kogellager. In je fiets zit om de as van elk wiel zo'n kogellager om ervoor te zorgen dat de draaibeweging van elk wiel met weinig wrijving kan worden uitgevoerd. De kogeltjes van dit lager zijn zuivere bollen en hebben een diameter van 4 mm. De kogeltjes zitten in een cilindervormige ring met een buitenstraal van 10 mm en een binnenstraal van 6 mm. De hoogte van die ring is gelijk aan de diameter van elk kogeltje. De ruimte tussen de kogeltjes is opgevuld met vet.

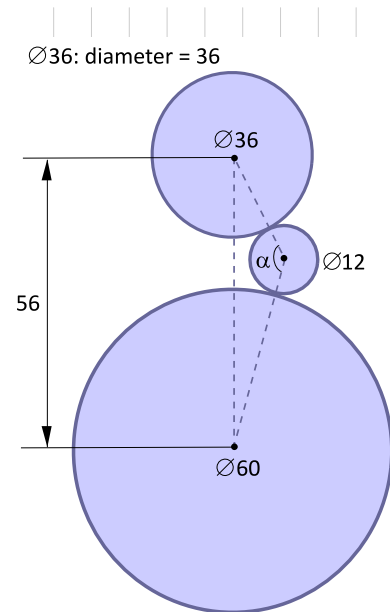
Hoeveel procent van de inhoud van de ring waarbinnen de kogeltjes zitten, bestaat uit vet? Geef een exact antwoord.



Figuur 2.4

Opgave 5

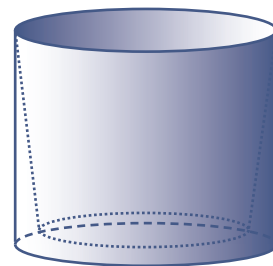
Je ziet hier twee tandwielen met een tussentandwiel.
Alle lengtematen zijn in mm.
Bereken de grootte van hoek α .



Figuur 2.5

Opgave 6

Een warenhuis heeft een nieuwe plastic vaas op de markt gebracht. Je ziet een afbeelding. Hij bestaat uit een massieve cilinder met een diameter van 40 cm en een hoogte van 41 cm waaruit een afgeknotte kegel is weg geboord. De bodem van deze afgeknotte kegel is 1 cm dik en de diameter van de grondcirkel van de afgeknotte kegel is 30 cm. De vaas is behoorlijk zwaar hoewel de soortelijke massa van het plastic maar 0,5 gram/cm³ is.



Figuur 2.6

- Bereken de hoeveelheid plastic van de vaas in cm³.
- Bereken het gewicht van de vaas in grammen.

Opgave 7

In een cilindervormige koker passen precies drie tennisballen boven elkaar.
Hoeveel procent van de inhoud van de koker bestaat uit lucht (de lucht in de tennisballen niet meegerekend)?

Opgave 8: Schaatshouding

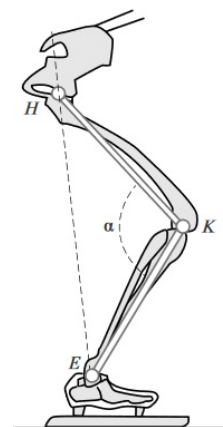
Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.

Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H , het kniegewricht K en het enkelgewricht E .

De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α . Zie de figuur.

We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser:
 $HE = 69$ cm en $\alpha = 100^\circ$.



Figuur 2.7

- Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.
- Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.

Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken. Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180° .

Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt:

$$HE = \sqrt{3625 - 3600 \cos \alpha}.$$

Hierbij is α in graden en HE in cm.

- c Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180° . Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.



Figuur 2.8

Toepassen

Opgave 9: De 'kegel' van Marius van der Made



Figuur 2.9

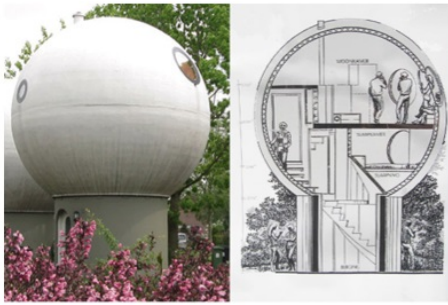
Marius van der Made maakte deze 'kegel'. De doorsnede van het grote cirkelvormige deel van de kegel is 1,50 m. De doorsnede van het kleinere cirkelvormige deel van de kegel is 50 cm. Als de kegel op de grond staat met de punt omhoog, is de hoogte 3 meter. Het achtsde deel van de kegel is 'weggesneden'. De top van de kegel ligt recht boven het midden van het grondvlak. Veronderstel dat het oppervlak van de kegel een speciale behandeling nodig heeft. Deze behandeling kost € 50 euro per m^2 .

Bereken de kosten van deze behandeling.

Opgave 10: Bolwoningen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in 's-Hertogenbosch. De bolwoning is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk, door de bolvorm heeft de wind er bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze

energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor 1 of 2 personen.



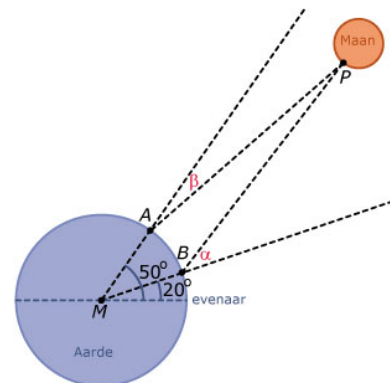
Figuur 2.10

De diameter van de bol zelf is 8 meter en die van de cilinder is 6 meter, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is. Voor de oppervlakte A van een bolsegment met hoogte h van een bol met straal r geldt $A = 2\pi rh$ en voor de inhoud I geldt $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

- Bereken de totale inhoud van zo'n bolwoning.
- Bereken de totale oppervlakte van zo'n bolwoning.

Opgave 11: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M , A , B en P liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.



Figuur 2.11

Register

c

cosinusregel 48

d

doorsnede 68

dynamisch model 25

g

gelijkvormigheid 48

goniometrische verhoudingen 48

i

inhoud lichaam 59

l

lengtevergrotingsfactor 59

m

modelleren 8

o

onderzoeksoopdrachten 31

oppervlakte lichaam 59

oppervlaktevergrotingsfactor 59

optimaliseren 16

p

parallelprojectie 39

projectie 39

r

rechthoekige driehoek 48

s

samengestelde figuur 39

sinusregel 48

stelling van pythagoras 48

v

vergrotingsfactor 48

verkortingsfactor 39

volumevergrotingsfactor 59

w

wijkhoek 39

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All



www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

