Wiskunde voor het technisch MBO

Aanvullend lesmateriaal / geen examenstof

Katern 5

Inhoud

Context College

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

Deze reader is door het CONTEXT COLLEGE samengesteld uit het lesmateriaal van Math4MBO.

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit katern op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Complexe getallen

1.1 Wat is een complex getal?

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen kennen;
- werken met complexe getallen als vectoren;
- modulus en argument van een complex getal berekenen.

Voorkennis

- het begrip reëel getal en rekenen met reële getallen;
- werken met vectoren in een xy-vlak.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt nu afgesproken dat i het getal is waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$.
Daarmee heeft de vergelijking $x^2 = -1$ twee oplossingen, namelijk $x = \mathrm{i} \vee x = -\mathrm{i}$.

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Figuur 1.1

a Welke oplossingen heeft $x^2 = -4$?

b Welke oplossingen heeft $(x-1)^2 + 15 = 0$?

Uitleg 1

Je bent gewend om te zeggen dat de vergelijking $x^2 = -1$ geen oplossingen heeft. Dat is echter niet helemaal correct: je moet zeggen dat er geen reële oplossingen zijn. Spreek je af dat er een getal i bestaat (waarvoor de bestaande rekenregels gelden) met als eigenschap $\mathrm{i}^2 = -1$ dan heeft deze vergelijking als oplossing $x = \mathrm{i} \vee x = -\mathrm{i}$. De letter 'i' komt van 'imaginair' en is bedacht door de wiskundige Leonhard Euler. Het getal i is een voorbeeld van een complex getal. Ga er van uit dat je met i kunt rekenen als een 'gewoon' getal.

Stel je eens voor dat je de vergelijking $x^2 - 2x + 5 = 0$ wilt oplossen.

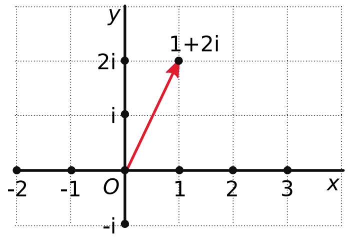
Met de abc-formule vind je $x = \frac{2+\sqrt{-16}}{2} \vee x = \frac{2-\sqrt{-16}}{2}$. Er zijn dus geen reële oplossingen.
Door te rekenen met i kun je schrijven

$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot -1} = \sqrt{16 \cdot \mathrm{i}^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\mathrm{i}^2} = 4\,\mathrm{i}$ en dan is $x = 1 + 2\,\mathrm{i} \vee x = 1 - 2\,\mathrm{i}$. En nu heeft de vergelijking twee oplossingen...

Je kunt je een getal als $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ voorstellen als een vector in een 'gewoon' tweedimensionaal rechthoekig assenstelsel Oxy. Daarin beschrijf je vectoren door kentallenparen zoals $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Dit kun je ook als voorstelling voor het complex getal $1 + 2\,\mathrm{i}$ gebruiken.

Opmerking: In de techniek wordt in plaats van i meestal j gebruikt, omdat i daar al een andere betekenis heeft, namelijk stroomsterkte.



Figuur 1.2

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. De afspraak $\mathrm{i}^2 = -1$ maakt het mogelijk om uit negatieve getallen wortel te trekken.

a Bereken $\sqrt{-25}$.

b Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -25$?

c Welke oplossingen heeft $(x - 2)^2 = -4$?

d Welke oplossingen heeft $x^2 + 4x + 3 = 0$?

e Welke oplossingen heeft $x^2 + 4x + 30 = 0$?

Opgave 2

Een complex getal heeft de vorm $z = x + \mathrm{i}\,y$. Maar je kunt het ook voorstellen door een vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van een xy-assenstelsel.

a Teken de volgende complexe getallen als vectoren: $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 3\,\mathrm{i}$, $z_3 = -3 + \mathrm{i}$, $z_4 = -3$ en $z_5 = 1 - 4\,\mathrm{i}$.

b Waar zitten de gewone reële getallen in dit assenstelsel?

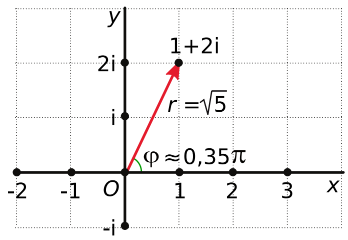
Uitleg 2

Bekijk de applet

Een complex getal als $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ kun je voorstellen door de vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van een Oxy-assenstelsel (het complexe vlak). Als je die vector tekent, dan zie je dat hij een draaihoek φ met de positieve x-as maakt en een bepaalde lengte heeft. Deze hoek heet wel het argument van z: $\varphi = \arg(z)$.

Ga na, dat de lengte $|z|$ van deze vector $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ is en dat $\tan(\varphi) = \frac{2}{1} = 2$.

De bijbehorende hoek is $\varphi \approx 63{,}4°$.



Figuur 1.3

Met de applet kun je ook andere complexe getallen bekijken en lengte en draaihoek (argument) berekenen. Voor de draaihoek zijn meerdere waarden mogelijk: positieve waarden als je linksom draait, negatieve waarden als je rechtsom draait. Meestal spreek je af dat $-180° \leq \varphi \leq 180°$.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je van een complex getal de hoek φ die de bijbehorende vector met de positieve x-as maakt en de lengte r van die vector kunt berekenen. Ga daarbij uit van $-180° \leq \varphi \leq 180°$.

a Neem $z = 2 + 2\text{i}$. Bepaal r en φ.

b Neem $z = 1 - 2\text{i}$. Bepaal r en φ.

c Neem $z = -1 + 2\text{i}$. Bepaal r en φ.

d Neem $z = -1 - 2\text{i}$. Bepaal r en φ.

Opgave 4

Als je van een complex getal z de lengte $|z|$ en de draaihoek φ weet, kun je met behulp van goniometrie het getal zelf berekenen.

a Hoe bereken je het reële deel van z?

b Hoe bereken je het imaginaire deel van z?

c Ga na, dat je hiermee het getal z uit **Uitleg 2** kunt berekenen vanuit $|z| = \sqrt{5}$ en $\varphi = 63{,}4°$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **complex getal** is een getal van de vorm $z = x + \text{i}\,y$ met x en y reële getallen en i het getal met de eigenschap $\text{i}^2 = -1$.

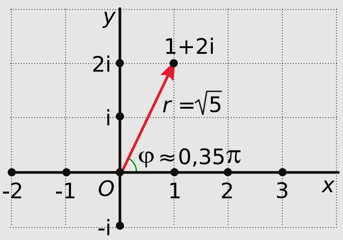
y is het **imaginaire deel**: $y = \text{Im}(z)$.
Als $x = 0$ is het getal zuiver imaginair.
x is het **reële deel**: $x = \text{Re}(z)$.
Als $y = 0$ is het getal zuiver reëel.

Een complex getal kan meetkundig worden voorgesteld door een vector vanuit O in een Oxy-assenstelsel.
Je noemt zo'n Oxy-vlak waarin je complexe getallen tekent het **complexe vlak**.

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ is de lengte, de **modulus** van z;
- φ is de hoek die de vector bij het complexe getal z maakt met de positieve x-as, het **argument** van z, notatie: $\varphi = \arg(z)$.

Meestal laat je voor φ alleen waarden toe vanaf $-180°$ tot en met $180°$.

Verder zie je dat $\text{Re}(z) = r\cos(\varphi)$ en $\text{Im}(z) = r\sin(\varphi)$.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $z^2 - 5z + 90 = 0$ op met behulp van complexe getallen.

Antwoord

Gebruik de abc-formule met $a = 1$, $b = \text{-}5$ en $c = 90$.

Je vindt: $z = \frac{5 \pm \sqrt{\text{-}335}}{2}$.

Nu is $\sqrt{\text{-}335} = \sqrt{335 \cdot \text{-}1} = \sqrt{335 \cdot \text{i}^2} = \sqrt{335} \cdot \text{i}$.

De oplossingen worden dus $z = \frac{5+\sqrt{335} \cdot \text{i}}{2} \vee z = \frac{5-\sqrt{335} \cdot \text{i}}{2}$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe een vergelijking die geen reële oplossingen heeft, toch kan worden opgelost met behulp van complexe getallen.

a Waarom heeft deze vergelijking geen reële oplossingen?

b Los de vergelijking $z^2 + 6z = 40$ op. Zijn er complexe getallen als oplossing?

c Los de vergelijking $z^2 + 6z + 40 = 0$ op.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bepaal modulus en argument van $z = 3 + 4\,\text{i}$.

Antwoord

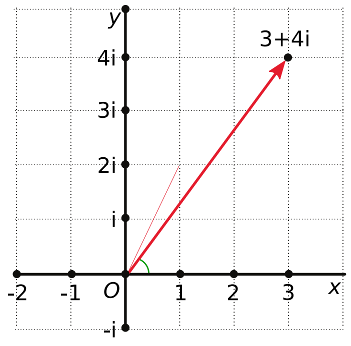
Bekijk de bijpassende vector.

De lengte van die vector is $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$.

Dus de modulus van z is 5 en het argument van z is $\arg(z) \approx 53{,}1°$.

Met de meeste rekenmachines kun je de modulus en het argument van een complex getal meteen bepalen, bekijk het **Practicum**.



Figuur 1.5

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je modulus en argument bepaalt van $z = 3 + 4\,\text{i}$.

a Maak z met de applet. Lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af en controleer dat deze waarden overeenstemmen met de berekende waarden.

b Voer zelf de berekeningen in het voorbeeld uit.

c Maak $z_2 = \text{-}4 + 2\,\text{i}$ met de applet en lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

d Bepaal $|z_2|$ en $\arg(z_2)$ ook door berekening.

e Oefen het berekenen van modulus en argument van complexe getallen met deze applet.

Opgave 7

Van een complex getal z is $|z| = 3$ en $\arg(z) = 120°$.

a Bereken $\text{Re}(z)$ en $\text{Im}(z)$.

b Schrijf z als complex getal.

Oefenen

Opgave 8

Teken de volgende complexe getallen in een Oxy-assenstelsel. Bereken vervolgens hun modulus $|z|$ in één decimaal en hun argument $\arg(z)$ in graden nauwkeurig.

a $z_1 = 2 + 3\text{i}$

b $z_2 = 2 - 2\text{i}$

c $z_3 = -2 + 3\sqrt{3} \cdot \text{i}$

d $z_4 = -2 - 3\text{i}$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van complexe getallen.

a $(z - 2)^2 = -9$

b $12 + z^2 = 4$

c $2(z - \text{i})^2 + 8 = 0$

Opgave 10

Van een complex getal z is de modulus $|z| = 30$ en het argument $\arg(z) = -150°$.

a Bereken het reële deel en het imaginaire deel van z in één decimaal nauwkeurig.

b Schrijf z als complex getal.

Opgave 11

Van een complex getal z is het argument $\arg(z) = 70°$ en $\text{Im}(z) = 12$.

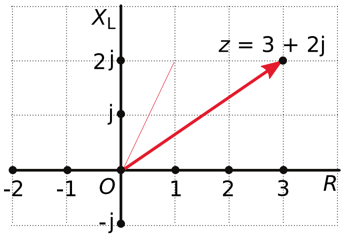
a Bereken $|z|$ in één decimaal nauwkeurig.

b Schrijf z als complex getal.

Toepassen

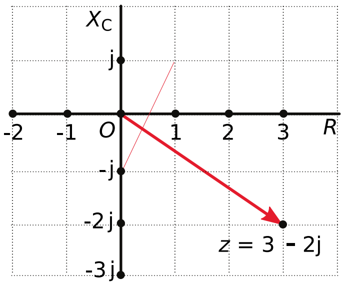
Complexe getallen worden veel gebruikt in de **elektrotechniek**.

Bijvoorbeeld bij een **spoel** waar een stroom doorheen loopt wordt onderscheid gemaakt tussen de Ohmse weerstand R (in Ω) en de inductieve weerstand X_{L} (in Ω). Die kunnen samen worden weergegeven als één complex getal z, waarin $\mathrm{Re}(z) = R$ en $\mathrm{Im}(z) = X_{\mathrm{L}}$, zie de figuur.
Dit complexe getal stelt dan de totale weerstand, de zogenaamde 'impedantie' voor.
Je ziet ook dat in deze situaties in plaats van de i altijd de j wordt gebruikt: $z = R + \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{L}}$.



Figuur 1.6

Iets dergelijks geldt bij een **condensator** waar onderscheid wordt gemaakt tussen de Ohmse weerstand R (in Ω) en de capacitatieve weerstand X_{C} (in Ω). Die kunnen samen worden weergegeven als één complex getal z, waarin $\mathrm{Re}(z) = R$ en $\mathrm{Im}(z) = -X_{\mathrm{C}}$, zie de figuur.
Dit complexe getal stelt weer de totale weerstand, de zogenaamde 'impedantie' voor: $z = R - \mathrm{j} \cdot X_{\mathrm{C}}$.



Figuur 1.7

Opgave 12

Ga uit van een spoel met een Ohmse weerstand van $R = 20$ Ω en een inductieve weerstand van $X_{\mathrm{L}} = 15$ Ω.

a Schrijf de impedantie z van deze spoel op.

b Bereken de modulus en het argument van z.

Ga uit van een condensator met een Ohmse weerstand van $R = 20$ Ω en een capacitatieve weerstand van $X_{\mathrm{C}} = 15$ Ω.

c Schrijf de impedantie z van deze condensator op.

Opgave 13

Van een condensator is de impedantie $z = 12 - 10\mathrm{j}$ Ω.

a Bepaal de Ohmse weerstand R en de capacitatieve weerstand X_{C} van deze condensator.

b Bereken de modulus en het argument van z.

Testen

Opgave 14

Teken de volgende complexe getallen in een Oxy-assenstelsel. Bereken vervolgens hun modulus $|z|$ in één decimaal en hun argument $\arg(z)$ in graden nauwkeurig.

a $z_1 = 5 - 4\,\mathrm{i}$

b $z_2 = -5 + 4\,\mathrm{i}$

Opgave 15

Van een complex getal z is de modulus $|z| = 15$ en het argument $\arg(z) = 130°$.

a Bereken het reële deel en het imaginaire deel van z in één decimaal nauwkeurig.

b Schrijf z als complex getal.

1.2 Complexe getallen optellen/aftrekken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen optellen en aftrekken.

Voorkennis

- het begrip complex getal en module en argument van een complex getal;
- werken met complexe getallen als vectoren in een xy-vlak.

Verkennen

Opgave V1

Stel je twee complexe getallen voor: $z_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 + \mathrm{i}$.

a Teken de vectoren bij deze complexe getallen in één figuur.

b Hoe kun je $z_1 + z_2$ nu in beeld brengen? En wat komt er uit?

Uitleg

Bekijk de applet

Je ziet hier de complexe getallen $z_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 + \mathrm{i}$.

Ook is in beeld gebracht hoe je beide getallen kunt optellen. Je telt dan de twee bijbehorende vectoren op met de parallellogrammethode. Je ziet:

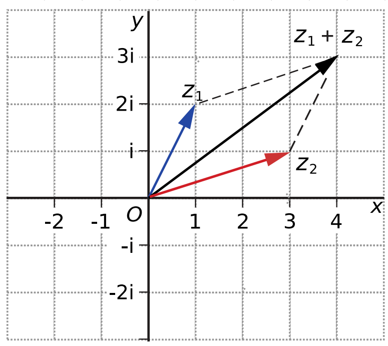
$z_1 + z_2 = 1 + 2\,\mathrm{i} + 3 + \mathrm{i} = 4 + 3\,\mathrm{i}$

Je kunt dus gewoon de reële delen bij elkaar optellen en de imaginaire delen bij elkaar optellen.

Dus complexe getallen optellen is eenvoudig. Maar wat als je ze van elkaar wilt aftrekken?

Je gebruikt dan: $z_1 - z_2 = z_1 + {-z_2}$, waarbij $-z_2 = -3 + -\mathrm{i}$.

Zo maak je van een aftrekking een optelling met de negatieve vector die even lang is, maar de andere kant op wijst.



Figuur 1.1

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Teken zelf $-z_2$.

b Bereken zo $z_1 - z_2$.

Opgave 2

Gegeven zijn $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2 - \mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 + z_2$.

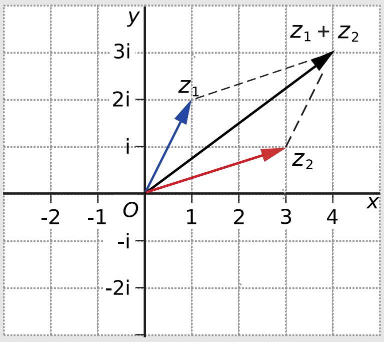
b Bereken $z_1 - z_2$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt met complexe getallen op vergelijkbare wijze rekenen als met reële getallen.

- Bij **complexe getallen optellen** tel je de reële delen en de imaginaire delen afzonderlijk op. Maar je kunt ook met de parallellogrammethode voor het optellen van twee vectoren werken, zie de figuur.
- Bij **complexe getallen aftrekken** gebruik je $z_1 - z_2 = z_1 + {-z_2}$. En als $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$, dan is $-z_2 = -c + -d\,\mathrm{i}$. Je behandelt de aftrekking dus als een optelling met het tegengestelde, met de tegengestelde vector.



Figuur 1.2

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 5 + 2\,\mathrm{i}$.

Bereken $2z_1 + 3z_2$.

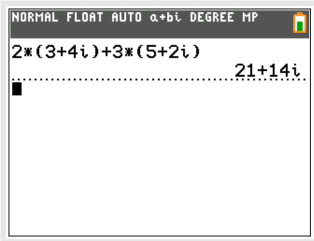
Antwoord

Bedenk eerst dat $2z_1 = 2 \cdot (3 + 4\,\mathrm{i}) = 6 + 8\,\mathrm{i}$.

En ook dat $3z_2 = 3 \cdot (5 + 2\,\mathrm{i}) = 15 + 6\,\mathrm{i}$.

Daarom is $2z_1 + 3z_2 = 6 + 8\,\mathrm{i} + 15 + 6\,\mathrm{i} = 21 + 14\,\mathrm{i}$.

Je kunt dit uiteraard nagaan met behulp van vectoren. En sommige rekenmachines kunnen prima met complexe getallen uit de voeten, zoals je in de figuur ziet.



Figuur 1.3

Opgave 3

Neem de twee complexe getallen z_1 en z_2 uit **Voorbeeld 2**.

a Bereken $3z_1 + 2z_2$.

b Bereken $z_1 - z_2$.

c Bereken $-2z_1 + 3z_2$.

d Bereken $2z_1 - 3z_2$.

Voorbeeld 2

Door het rekenen met complexe getallen kun je een vergelijking als $4z + 2 + 3\,\mathrm{i} = 2z + 4\,\mathrm{i}$ oplossen.

Laat zien, hoe.

Antwoord

Doe hetzelfde wat je bij een vergelijking met reële getallen ook doet.

$$\begin{aligned} 4z + 2 + 3\,\mathrm{i} &= 2z + 4\,\mathrm{i} && \text{beide zijden } -2z \\ 2z + 2 + 3\,\mathrm{i} &= 4\,\mathrm{i} && \text{beide zijden } -2-3\,\mathrm{i} \\ 2z &= -2 + \mathrm{i} && \text{beide zijden } /2 \\ z &= -1 + 0{,}5\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe een vergelijking met complexe getallen kan worden opgelost. Los zelf op:

a $5 + 4\,\mathrm{i} + 3z = 9 - z$

b $5(z-2) = 10 + 5\,\mathrm{i}$

Oefenen

Opgave 5

Bereken $z_1 + z_2$ als

a $z_1 = 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 - 2\,\mathrm{i}$.

b $z_1 = 12 + 8\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 20 + 12\,\mathrm{i}$.

Bereken $z_1 - z_2$ als

c $z_1 = 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 - 2\,\mathrm{i}$.

d $z_1 = 12 + 8\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 20 + 12\,\mathrm{i}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 10 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 6 - 8\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 + z_2$.

b Bereken $z_1 - z_2$.

c Bereken $4z_1 + 5z_2$.

d Bereken $2z_1 - 3z_2 + 2\,\mathrm{i}$.

Opgave 7

Van het complexe getal z_1 is gegeven $|z_1| = 10$ en $\varphi_1 = 30°$.

Van het complexe getal z_2 is gegeven $|z_2| = 8$ en $\varphi_2 = 45°$.

a Bereken $z_1 + z_2$ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken lengte en draaihoek van $z_1 + z_2$.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op.

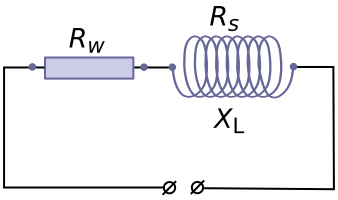
a $3z + 5 - 2\,\mathrm{i} = \mathrm{i} - 2z$

b $4(z + 2\,\mathrm{i}) = 12 - z$

Toepassen

Complexe getallen worden gebruikt om de impedantie van een spoel of van een condensator weer te geven. Dat begrip heeft te maken met de weerstand in een stroomkring. Als je daar een gewone weerstand en/of een spoel en/of een condensator in een **serieschakeling**, dus achter elkaar zet, dan moet je weerstand en/of impedanties optellen. Dus complexe getallen optellen.

Neem bijvoorbeeld een stroomkring waarin een gewone weerstand R Ω en een spoel met impedantie z_s, zie de figuur.
Voor de gewone weerstand is dan $z_w = R$ Ω en voor de spoel is $z_s = R_s + X_\mathrm{L} \cdot \mathrm{j}$ Ω waarin R_s de gewone weerstand en X_L de inductieve weerstand van de spoel zijn.
Voor de totale impedantie in de stroomkring moet je dan $z = z_w + z_s$ berekenen.



Figuur 1.4

Opgave 9

Ga uit van een spoel met een Ohmse weerstand van $R_s = 20$ Ω en een inductieve weerstand van $X_\mathrm{L} = 15$ Ω. Deze spoel is in serie geschakeld met een gewone weerstand van $R_w = 12$ Ω.

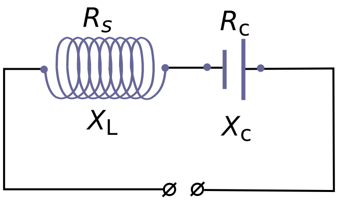
a Geef zowel de impedantie van de spoel als de gewone weerstand weer als complex getal.

b Bereken de totale impedantie van deze stroomkring.

c Teken deze impedantie in een assenstelsel en laat zien hoe hij is ontstaan uit de impedantie van de spoel en de gewone weerstand.

Opgave 10

Ga uit van een spoel met een Ohmse weerstand van $R_s = 20$ Ω en een inductieve weerstand van $X_\mathrm{L} = 15$ Ω. Deze spoel is in serie geschakeld met een condensator van met een Ohmse weerstand van $R_c = 12$ Ω en een capacitatieve weerstand van $X_\mathrm{C} = 10$ Ω.



Figuur 1.5

a Geef zowel de impedantie van de spoel als die van de condensator weer als complex getal.

b Bereken de totale impedantie van deze stroomkring.

c Teken deze impedantie in een assenstelsel en laat zien hoe hij is ontstaan uit de impedantie van de spoel en de condensator.

Opgave 11

In een stroomkring zijn een spoel, een condensator en een weerstand in serie geschakeld. De condensator heeft een Ohmse weerstand van $R_c = 15\ \Omega$ en een capacitatieve weerstand van $X_{\mathrm{C}} = 12\ \Omega$. De weerstand is $R = 20\ \Omega$.

De totale impedantie in de stroomkring is $z = 42 + 8\,\mathrm{j}\ \Omega$.

Bereken de Ohmse weerstand en de inductieve weerstand van de spoel.

Testen

Opgave 12

Gegeven $z_1 = 5\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 12 + 7\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 + z_2$.

b Bereken $z_1 - z_2$.

c Bereken $6 + 2z_1 - 3z_2$.

d Bereken $5z_1 - 2z_2$.

1.3 Complexe getallen vermenigvuldigen/delen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- het begrip complex getal en module en argument van een complex getal;
- werken met complexe getallen als vectoren in een xy-vlak;
- complexe getallen optellen en aftrekken.

Verkennen

Opgave V1

Stel je twee complexe getallen voor: $z_1 = 1 + 2\,\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$.

a Wat is de uitkomst van $\text{i} \cdot \text{i}$?

b Hoe kun je beide complexe getallen z_1 en z_2 vermenigvuldigen?

c Hoe kun je beide complexe getallen z_1 en z_2 delen?

Uitleg

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 1 + 2\,\text{i}$ en $z_2 = 3 + \text{i}$.

Je wilt beide getallen **vermenigvuldigen**: $z_1 \cdot z_2 = (1 + 2\,\text{i}) \cdot (3 + \text{i})$.

Maar hoe bereken je dit?
Haakjes wegwerken ligt het meest voor de hand:

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2\,\text{i}) \cdot (3 + \text{i}) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot \text{i} + 2\,\text{i} \cdot 3 + 2\,\text{i} \cdot \text{i} = 3 + 7\,\text{i} + 2\,\text{i}^2$

En omdat $\text{i}^2 = -1$ (dat is bij het invoeren ven het getal i immers afgesproken), kun je dit schrijven als:
$z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot \text{i} + 2\,\text{i} \cdot 3 + 2\,\text{i} \cdot \text{i} = 3 + 7\,\text{i} - 2 = 1 + 7\,\text{i}$.

Dus complexe getallen optellen gaat door haakjes wegwerken en $\text{i}^2 = -1$ gebruiken.

Vervolgens wil je ze **delen**: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2\,\text{i}}{3+\text{i}}$.

Dit kun je als één complex getal schrijven door teller en noemer te vermenigvuldigen met $3 - \text{i}$.
Waarom nu juist $3 - \text{i}$?

Dat komt omdat $(3 + \text{i}) \cdot (3 - \text{i}) = 9 - \text{i}^2 = 9 - -1 = 10$, een reëel getal.

Dit levert op:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2\,\text{i}}{3+\text{i}} = \frac{1+2\,\text{i}}{3+\text{i}} \cdot \frac{3-\text{i}}{3-\text{i}} = \frac{5+5\,\text{i}}{10} = 0{,}5 + 0{,}5\,\text{i}$

$3 - \text{i}$ heet de 'geconjugeerde' van $3 + \text{i}$.

In het algemeen heeft $z = x + y\,\mathrm{i}$ als geconjugeerde $\overline{z} = x - y\,\mathrm{i}$.
Bij het delen van complexe getallen vermenigvuldig je teller en noemer met de geconjugeerde van de noemer.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Reken zelf $z_1 \cdot z_2$ na.

Neem nu $z_1 = 5 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2 + 3\,\mathrm{i}$

b Vermenigvuldig z_1 en z_2.

c Vermenigvuldig $z_3 = 5 - 4\,\mathrm{i}$ met z_2.

d Bereken $\mathrm{i} \cdot z_1$.

e Bereken z_3^2.

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

a Reken zelf $\frac{z_1}{z_2}$ na.

Neem nu $z_1 = 5 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2 + 3\,\mathrm{i}$

b Deel z_1 door z_2.

c Deel $z_3 = 5 - 4\,\mathrm{i}$ door z_2.

d Bereken $\frac{1}{z_3}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt met complexe getallen op vergelijkbare wijze rekenen als met reële getallen.

- Bij **complexe getallen vermenigvuldigen** krijg je vormen als $z_1 \cdot z_2 = (a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i})$
  Dan moet je (meestal) haakjes wegwerken en gebruik maken van $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Bij **complexe getallen delen** krijg je vormen als
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}}$
  Je werkt dan met de **geconjugeerde** van de noemer: $\overline{z_2} = c - d\,\mathrm{i}$:
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}} = \frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}} \cdot \frac{c-d\,\mathrm{i}}{c-d\,\mathrm{i}} = \frac{(a+b\,\mathrm{i})(c+d\,\mathrm{i})}{c^2+d^2}$
  De noemer van de breuk wordt dan een reëel getal.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 6 + 2\,\mathrm{i}$.

Bereken $2z_1 \cdot 0{,}5z_2$ en $\frac{2z_1}{0{,}5z_2}$.

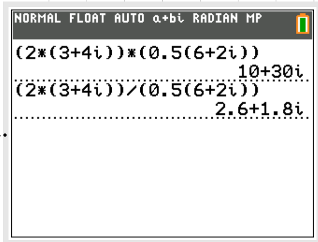
Antwoord

Bedenk eerst dat $2z_1 = 2 \cdot (3 + 4\,\mathrm{i}) = 6 + 8\,\mathrm{i}$.

En ook dat $0{,}5z_2 = 0{,}5 \cdot (6 + 2\,\mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i}$.

Daarom is $2z_1 \cdot 0{,}5z_2 = (6 + 8\,\mathrm{i}) \cdot (3 + \mathrm{i}) = 18 + 6\,\mathrm{i} + 24\,\mathrm{i} + 8\,\mathrm{i}^2 = 10 + 30\,\mathrm{i}$.

En $\frac{2z_1}{0{,}5z_2} = \frac{6+8\,\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{6+8\,\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \cdot \frac{3-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{26+18\,\mathrm{i}}{10} = 2{,}6 + 1{,}8\,\mathrm{i}$



Figuur 1.1

Opgave 3

Neem de twee complexe getallen z_1 en z_2 uit **Voorbeeld 1**.

a Bereken $3z_1 \cdot 2z_2$.

b Bereken $\frac{3z_1}{2z_2}$.

c Bereken $3\,\mathrm{i} \cdot z_1$.

d Bereken $\frac{3\,\mathrm{i}}{z_2}$.

Voorbeeld 2

Door het rekenen met complexe getallen kun je een vergelijking als $(1 + 3\,\mathrm{i})z = 2z + 4\,\mathrm{i}$ oplossen.

Laat zien, hoe.

Antwoord

Doe hetzelfde wat je bij een vergelijking met reële getallen ook doet.

$$\begin{aligned} (1 + 3\,\mathrm{i})z &= 2z + 4\,\mathrm{i} && \text{beide zijden } -2z \\ (-1 + 3\,\mathrm{i})z &= 4\,\mathrm{i} && \text{beide zijden delen door } -1 + 3\,\mathrm{i} \\ z &= \frac{4\,\mathrm{i}}{-1+3\,\mathrm{i}} = 1{,}2 - 0{,}4\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe een vergelijking met complexe getallen kan worden opgelost.

a Reken na, dat het antwoord dat in het voorbeeld wordt gegeven, juist is.

Los nu zelf op:

b $(5 + 4\,\mathrm{i})z = 9 - z$

c $5\,\mathrm{i}(z - 2) = 10 + 5\,\mathrm{i}$

Oefenen

Opgave 5

Bereken $z_1 \cdot z_2$ als

a $z_1 = 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 - 2\,\mathrm{i}$.

b $z_1 = 12 + 8\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 20 + 12\,\mathrm{i}$.

Bereken $\frac{z_1}{z_2}$ als

c $z_1 = 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 3 - 2\,\mathrm{i}$.

d $z_1 = 12 + 8\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 20 + 12\,\mathrm{i}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 10 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 6 - 8\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 \cdot z_2$.

b Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

c Bereken $4z_1 \cdot 5z_2$.

d Bereken $\frac{2z_1}{3z_2 + 2\,\mathrm{i}}$.

Opgave 7

Van het complexe getal z_1 is gegeven $|z_1| = 10$ en $\varphi_1 = 30°$.

Van het complexe getal z_2 is gegeven $|z_2| = 8$ en $\varphi_2 = 45°$.

a Bereken $z_1 \cdot z_2$ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken lengte en draaihoek van $z_1 \cdot z_2$. Zijn de antwoorden verrassend?

Opgave 8

Van het complexe getal z_1 is gegeven $|z_1| = 10$ en $\varphi_1 = 30°$.

Van het complexe getal z_2 is gegeven $|z_2| = 8$ en $\varphi_2 = 45°$.

a Bereken $\frac{z_1}{z_2}$ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken lengte en draaihoek van $z_1 \cdot z_2$. Zijn de antwoorden verrassend?

Opgave 9

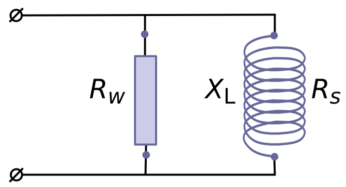
Los de volgende vergelijkingen op.

a $(5 - 2\,\mathrm{i})z = \mathrm{i} - 2z$

b $z + 2\,\mathrm{i}\,(2 - \mathrm{i}) = (2 + \mathrm{i})z$

Toepassen

Complexe getallen worden gebruikt om de impedantie van een spoel of van een condensator weer te geven. Dat begrip heeft te maken met de weerstand in een stroomkring. Als je daar een gewone weerstand en/of een spoel en/of een condensator in een **parallelschakeling**, dus naast elkaar zet, dan moet je weerstand en/of impedanties berekenen door vermenigvuldigen en delen.



Figuur 1.2

Neem bijvoorbeeld een stroomkring waarin een gewone weerstand R Ω en een spoel met impedantie z_s parallel zijn geschakeld, zie de figuur.
Voor de gewone weerstand is dan $z_w = R$ Ω en voor de spoel is $z_s = R_s + X_L \cdot \text{j}$ Ω waarin R_s de gewone weerstand en X_L de inductieve weerstand van de spoel zijn.
Voor de totale impedantie in de stroomkring moet je dan $z_{\text{totaal}} = \frac{z_w \cdot z_s}{z_w + z_s}$ berekenen.

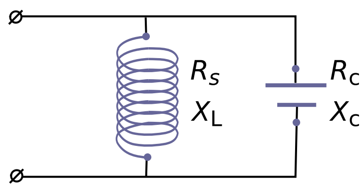
Opgave 10

Ga uit van een spoel met een Ohmse weerstand van $R_s = 20$ Ω en een inductieve weerstand van $X_L = 15$ Ω. Deze spoel is parallel geschakeld met een gewone weerstand van $R_w = 12$ Ω.

a Geef de totale impedantie z van de stroomkring weer als een bewerking met complexe getallen.

b Schrijf de totale impedantie van deze stroomkring als één complex getal. Geef een benadering in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken $|z|$.



Figuur 1.3

Opgave 11

Ga uit van een spoel met een Ohmse weerstand van $R_s = 20$ Ω en een inductieve weerstand van $X_L = 15$ Ω. Deze spoel is parallel geschakeld met een condensator met een Ohmse weerstand van $R_c = 12$ Ω en een capacitatieve weerstand van $X_C = 10$ Ω.

a Geef de totale impedantie z van de stroomkring weer als een bewerking met complexe getallen.

b Schrijf de totale impedantie van deze stroomkring als één complex getal. Geef een benadering in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken $|z|$.

Opgave 12

In een stroomkring is een spoel in serie geschakeld met een condensator en een weerstand die parallel aan elkaar zijn geschakeld. De condensator heeft een Ohmse weerstand van $R_c = 15$ Ω en een capacitatieve weerstand van $X_C = 12$ Ω. De weerstand is $R = 20$ Ω.

De totale impedantie in de stroomkring is $z = 42 + 8\text{j}$ Ω.

Bereken de Ohmse weerstand en de inductieve weerstand van de spoel in één decimaal nauwkeurig.

Testen

Opgave 13

Gegeven $z_1 = 5\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 12 + 7\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 \cdot z_2$.

b Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

c Bereken $(6 + 2z_1) \cdot 3z_2$.

d Bereken $\frac{6+2z_1}{3z_2}$.

1.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Complexe getallen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het getal i — complex getal — modulus en argument van een complex getal
- complexe getallen optellen/aftrekken
- complexe getallen vermenigvuldigen/delen

Activiteitenlijst

- werken met complexe getallen zoals met vectoren — modulus en argument van een complex getal berekenen
- complexe getallen optellen/aftrekken
- complexe getallen vermenigvuldigen/delen

Testen

Opgave 1

Bepaal van de volgende complexe getallen de modulus en het argument en teken ze in een x,y-assenstelsel.

a $z_1 = -3 + 4\,\mathrm{i}$

b $z_2 = 1 - \mathrm{i}$

c $z_3 = 1 + 2\,\mathrm{i}$

Opgave 2

Van een complex getal z is de modulus 6 en het argument 150°.

a Bereken het reële deel en het imaginaire deel van z.

b Schrijf z als complex getal.

Opgave 3

Gegeven zijn de getallen $z_1 = -3 + 4\,\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ en $z_3 = 1 + 2\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 + z_2$.

b Bereken $z_1 - z_2$.

c Bereken $2z_2 - 4z_3$.

d Bereken $z_1 + 4z_2 - z_3$.

Opgave 4

Gegeven zijn de getallen $z_1 = -3 + 4\,\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ en $z_3 = 1 + 2\,\mathrm{i}$.

a Bereken $z_1 \cdot z_2$.

b Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

c Bereken $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$.

d Bereken $\frac{1}{z_3}$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $3z + \mathrm{i} = 4 - 2\,\mathrm{i}$.

b $3\,\mathrm{i} \cdot z = 5(z - 2\,\mathrm{i})$.

c $5z^2 + 45 = 0$.

d $\frac{3-\mathrm{i}}{z} = 5 + 2\,\mathrm{i}$.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $(2z + 1)(z - 1) = -6$.

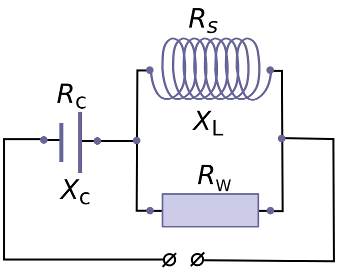
b $(z + 4 - 2\,\mathrm{i})^2 = -25$.

c $\frac{2}{z} - \frac{\mathrm{i}}{z-1} = \frac{2\,\mathrm{i}}{z}$.

Toepassen

Hier zie je een stroomkring waarin een condensator in serie is geschakeld met een spoel en een weerstand die parallel geschakeld zijn.

Voor de gewone weerstand is dan $z_w = R\ \Omega$ en voor de spoel is $z_s = R_s + X_\mathrm{L} \cdot \mathrm{j}\ \Omega$ waarin R_s de gewone weerstand en X_L de inductieve weerstand van de spoel zijn.
Voor de condensator is $z_c = R_c + X_\mathrm{C} \cdot \mathrm{j}\ \Omega$ waarin R_c de Ohmse weerstand en X_C de capacitatieve weerstand is.



Figuur 1.1

Opgave 7

Bekijk de figuur bij **Toepassen**.

De spoel heeft een Ohmse weerstand van $R_s = 20\ \Omega$ en een inductieve weerstand van $X_\mathrm{L} = 15\ \Omega$.
De condensator heeft een Ohmse weerstand van $R_c = 15\ \Omega$ en een capacitatieve weerstand van $X_\mathrm{C} = 12\ \Omega$.
De weerstand is $R_w = 12\ \Omega$.

a Geef de totale impedantie z van deze stroomkring weer als een bewerking met complexe getallen.

b Schrijf de totale impedantie van deze stroomkring als één complex getal. Geef een benadering in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken $|z|$.

Opgave 8

Bekijk opnieuw de figuur bij **Toepassen**.

De spoel heeft een Ohmse weerstand van $R_s = 20\ \Omega$ en een inductieve weerstand van $X_\text{L} = 15\ \Omega$.
De condensator heeft een Ohmse weerstand van $R_c = 15\ \Omega$ en een capacitatieve weerstand van $X_\text{C} = 12\ \Omega$.
De weerstand wordt vervangen door een tweede spoel, waarvan de impedantie nog onbekend is.

De impedantie van de totale stroomkring wordt daardoor $z = 25 + 20\,\text{j}$.

a Laat zien, hoe je de impedantie z van de tweede spoel kunt berekenen.

b Bereken de impedantie van deze tweede spoel als één complex getal. Geef een benadering in één decimaal nauwkeurig

2

Plaats en beweging

2.1 Coördinaten in 2D

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een cartesisch coördinatenstelsel in 2D is;
- de afstand tussen twee punten berekenen in 2D;
- het midden tussen twee punten berekenen in 2D.

Voorkennis

- werken met coördinaten in twee dimensies;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

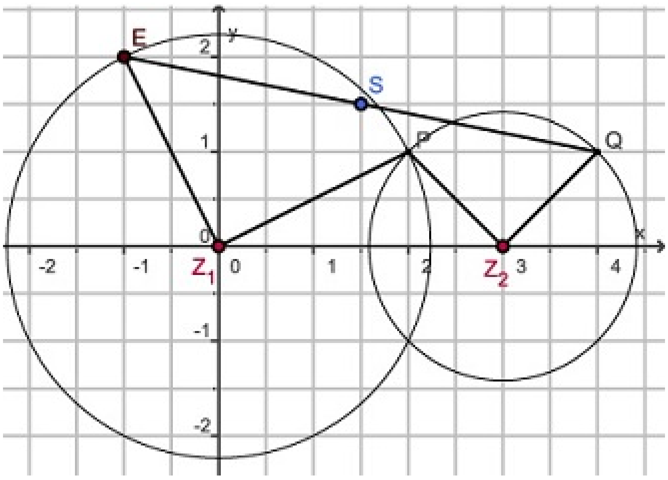
Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Loop vervolgens dezelfde afstand, in een lijn loodrecht op de vorige richting. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga tenslotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: schatgraversprobleem



Figuur 2.1

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

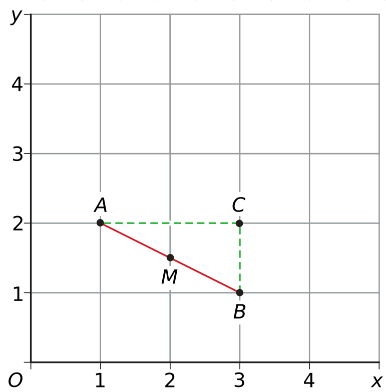
Eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst.

Is de plaats van de oude eik belangrijk voor de positie van de schat?

Uitleg

Bekijk de applet

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke. Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel wordt gebruikt: onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling. In twee dimensies (in 2D) spreek je van een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as. In drie dimensies komt er nog een z-as bij.



Figuur 2.2

Bekijk het 2D cartesisch coördinatenstelsel met de punten A en B. Door de manier waarop het assenstelsel is gekozen, heeft A de coördinaten $(1,2)$ en is $B(3,1)$.

De afstand van A tot B is de lengte van lijnstuk AB. De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte AB door in ΔABC de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van lijnstuk AC vind je door de x-coördinaten van A en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk CB vind je door de y-coördinaten van B en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

De coördinaten van M, het midden van AB, bereken je als volgt: De x-coördinaat van M is het gemiddelde van de x-coördinaten van A en B. De y-coördinaat van M is het gemiddelde van de y-coördinaten van A en B. Dus M is $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(2, 1\frac{1}{2}\right)$.

In een 3D coördinatenstelsel kun je op een vergelijkbare manier rekenen, er komt alleen een coördinaat bij.

Opgave 1

Je weet nu wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

a Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?

b Teken een cartesisch coördinatenstelsel met punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ en bereken de lengte van lijnstuk AB.

c Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 2

Gegeven zijn in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van AB.

c Laat zien hoe je in een 3D-coördinatenstelsel M en de lengte van AB berekent als $A(-1,3,2)$ en $B(1,4,5)$.

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(-10,33)$ en $B(20,-45)$ in een coördinatenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdelingen op de assen gelijk zijn.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$.

a Druk de lengte van lijnstuk AB uit in x en y.

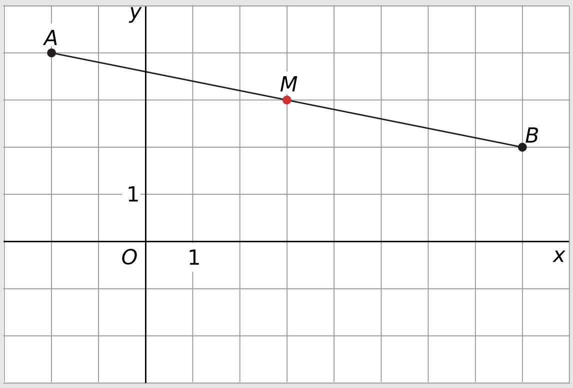
b Druk de coördinaten van punt M uit in x en y.

c Hoe zien de coördinaten van punt M en de lengte van AB eruit als $A(x_A,y_A,z_A)$ en $B(x_B,y_B,z_B)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet



Figuur 2.3

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.

Een **cartesisch assenstelsel** is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

In twee **dimensies**, dus in 2D, gaat het om een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as, in 3D komt daar nog een z-as bij.

In 2D kan het **midden** M van lijnstuk AB op deze manier worden bepaald: Als door de keuze van het cartesische coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A,y_A) en B aan (x_B,y_B), geldt: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een 2D cartesisch coördinatenstelsel:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

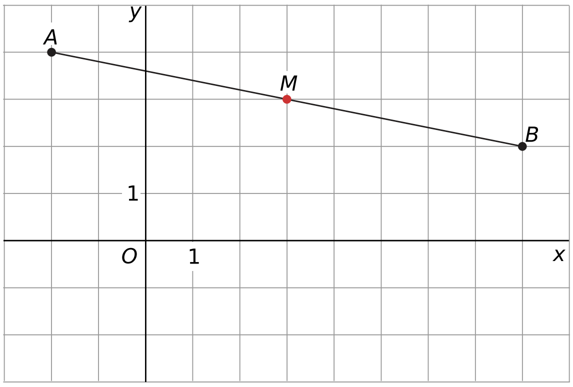
De 'omgekeerde stelling van Pythagoras' is: als in een driehoek geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is die driehoek rechthoekig.

In een 3D cartesisch coördinatenstelsel gelden vergelijkbare formules. Er komt alleen een z-coördinaat bij!

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(-2,2)$ en $B(3,1)$.
M is het midden van lijnstuk AB.
Laat zien hoe je de coördinaten van M berekent.
Laat ook door berekening zien, dat $|AM| = |MB|$.



Figuur 2.4

Antwoord

$M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (0{,}5; 1{,}5)$.

$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-2 - 0{,}5)^2 + (2 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}$.

$|MB| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{(3 - 0{,}5)^2 + (1 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}$.

Dus inderdaad is $|AM| = |MB|$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe het midden van AB wordt berekend en vervolgens wordt aangetoond dat $|AM| = |MB|$.

a Laat dit zelf zien. Neem de punten $A(-2,-1)$ en $B(3,2)$.

b Neem zelf twee andere punten A en B en voer dezelfde berekeningen uit.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten de punten $A(2,8,3)$ en $B(10,14,5)$.

Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB en controleer dat $|AM| = |MB|$.

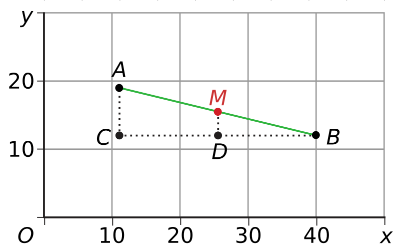
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$.
Bereken de lengte van AB met de formule

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.

Laat ook zien, dat $|MB| = \frac{1}{2}|AB|$.



Figuur 2.5

Antwoord

$|AB| = \sqrt{(40-11)^2 + (12-19)^2} = \sqrt{890}$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarop de stelling van Pythagoras toe te passen.

$M = \left(\frac{11+40}{2}, \frac{19+12}{2}\right) = (25{,}5; 15{,}5)$

$|MB| = \sqrt{(25{,}5-11)^2 + (15{,}5-19)^2} = \sqrt{222{,}5} = \frac{1}{2}\sqrt{890}$

Hoe zou je kunnen aantonen dat ook de 3D-versie van de afstandsformule klopt?

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zijn de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$ gegeven.

a Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de formule voor de lengte van lijnstuk AB klopt.

b Neem nu in 3D de punten $A(11,19,2)$ en $B(40,12,5)$.
Bereken $|AB|$ met de formule voor de lengte.

c Hoe kun je meetkundig laten zien, dat de voorgaande berekening in 3D geldig is?

Opgave 8

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de punten $A(-3,6)$, $B(6,0)$ en $C(18,18)$.

a Bereken de lengtes van de lijnstukken AB, BC en AC.

b Laat zien, dat driehoek ABC rechthoekig is.

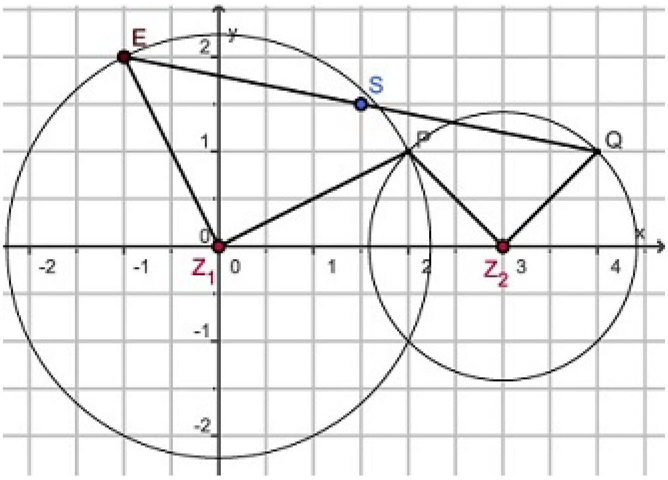
c Noem het midden van AB punt D, het midden van BC punt E, en het midden van AC punt F.
Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF.

d Laat zien, dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: schatgraversprobleem

In de figuur is E variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Gevraagd is aan te tonen dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen, ook als punt E van plaats verandert.



Figuur 2.6

Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoeken: $\Delta EAZ_1 \cong \Delta Z_1BP$ en $\Delta PBZ_2 \cong \Delta Z_2CQ$.

Neem voor het variabele punt $E(\text{-}x,y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3–y$. Tenslotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3-y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x{,}3 - y)$. Het midden van EQ is dus $S = \left(\frac{-x+3+x}{2},\frac{y+3-y}{2}\right) = (1{,}5; 1{,}5)$.

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk en dus ook niet van de positie van punt E.

Opgave 9

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Punt E kan van positie veranderen, maar de positie van punt S zou daardoor niet moeten veranderen.

a Neem $E(\text{-}1{,}2)$ en toon door berekening aan dat de positie van het punt S niet verandert.

b Neem $E(\text{-}x,y)$ en toon zelf door berekening aan dat het punt S niet verandert.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(\text{-}11{,}23)$ en $B(106{,}133)$.

a Bereken $|AB|$ en de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

b B is het midden van lijnstuk AC. Bereken de coördinaten van C.

Opgave 11

Teken de punten $A(6{,}0)$, $B(10{,}8)$, $C(6{,}10)$ en $D(2{,}2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

a Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

b Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.

c Bereken de oppervlakte van driehoek ABS.

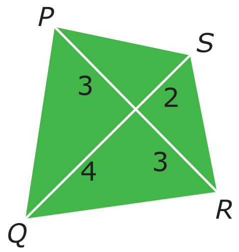
Opgave 12

Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger $PQRS$ vormen een rechthoek (zoals dat bij elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.

a Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?

b Nu zijn de hoekpunten $P(-3{,}0)$, $Q(0{,}-4)$, $R(3{,}0)$ en $S(0{,}2)$. Noem A midden PQ, B midden QR, C midden SR en D midden PS en bereken de coördinaten van A, B, C en D.

c Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.



Figuur 2.7

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l : y = 5x + 3$, $m : y = 2\frac{1}{2}x - 12$ en $n : y = -2x + 6$.
Lijnen l en m snijden elkaar in punt A, en m en n snijden elkaar in punt B.
Bereken $|AB|$ algebraïsch.

Opgave 14

Van een lijnstuk KL in 3D is het punt $K(2{,}8{,}0)$ gegeven en het midden $M(4{,}12{,}3)$.

a Bereken het eindpunt L.

b Bereken de lengte van het lijnstuk KL.

c Bereken de coördinaten van het midden N van ML.

Toepassen

Opgave 15: Schepen op zee

Twee schepen varen op zee een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die zich in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S verwijderd. Hoe dicht zullen de schepen bij elkaar komen?

a De variabele t is de tijd in uren. Kies $t = 0$ op het moment van de beschreven situatie en maak een passende tekening met een geschikt assenstelsel. Zet de afstand tussen beide schepen in het assenstelsel.

b Neem nu $t = 1$ en teken de onderlinge afstand tussen beide schepen. Doe dit ook voor $t = 2$, $t = 3$ enzovoort.

c Hoe groot is de onderlinge afstand van de schepen op $t = 0$ (t in uren)?

d Hoe groot is die afstand op $t = 1$?

e Druk de onderlinge afstand a uit in t.

f Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand tussen beide schepen?

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn in 2D de punten $P(120,36)$ en $Q(0,12)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk PQ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Gegeven zijn in 3D de punten $P(120,35,20)$ en $Q(0,12,10)$.

c Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(3,2)$ en $C(1,6)$ en verbind de punten met elkaar.

a Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

b Verbind het midden P van AC met B. Toon aan dat ΔABP een gelijkbenige driehoek is.

2.2 Vectoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een vector is;
- de begrippen draaihoek en lengte van een vector;
- vectoren in componenten ontbinden;
- werken met componenten van vectoren;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

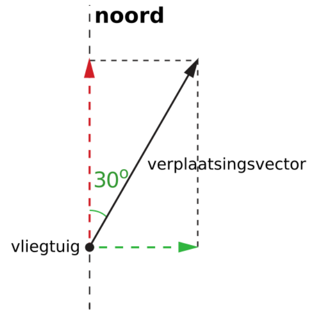
- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand, e.d., gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de snelheid). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.



Figuur 2.1

a Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30°, hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component?

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

b Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?

c Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30°?

d Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?

e Als je de verplaatsingen met een westelijke component meetelt, zijn er nog twee hoeken met dezelfde noordelijke of zuidelijke component als de noordelijke component bij 30°. Hoe groot zijn deze hoeken?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

De verplaatsing van bijvoorbeeld een vliegtuig beschrijf je met twee grootheden:

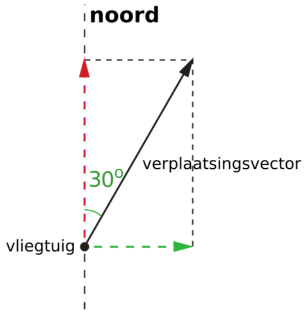
- de richting, bijvoorbeeld de hoek met het noorden is 30°.
- de afstand, bijvoorbeeld over 500 km.

Teken een pijltje, een vector, wanneer zowel afstand als richting belangrijk is. De lengte van de vector is de afstand in kilometer, de richting is de richtingshoek ten opzichte van de hoofdrichting, in dit geval het noorden.
Geef deze verplaatsingsvector als (30°,500).

Omdat er een hoofdrichting is (het noorden), kun je doen alsof de vector bestaat uit een noordelijke component samen met een oostelijke component. De richting van een component kan negatief zijn. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.
Bepaal de lengte van de twee componenten door de vector te ontbinden in twee onderling loodrechte richtingen (noord en oost). Je kunt de lengte van die componenten meten (of berekenen met behulp van sinus of cosinus).

De lengte van de oostelijke component is 250.
De lengte van de noordelijke component is ≈ 433.

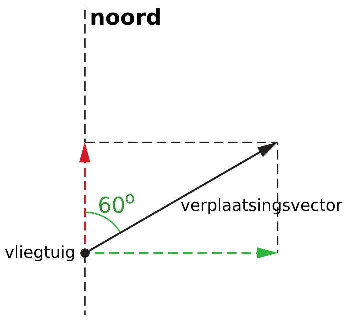
Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van de vector. Als er meerdere vliegtuigen van verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend, maar toch kunnen de verplaatsingsvectoren gelijk zijn.



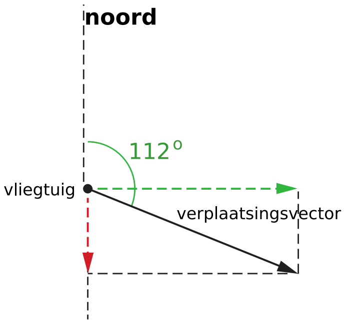
Figuur 2.2

Opgave 1

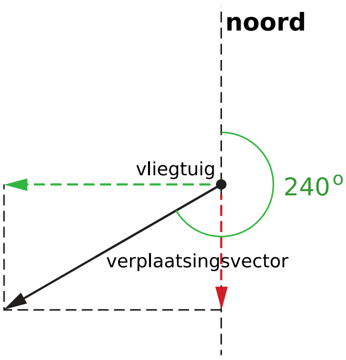
Bekijk de vier figuren waarin een verplaatsingsvector met lengte 400 is getekend. Bepaal met behulp van cosinus of sinus bij elke situatie de lengte van de noordelijke component en de lengte van de oostelijke component. Rond zo nodig af op gehele getallen. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



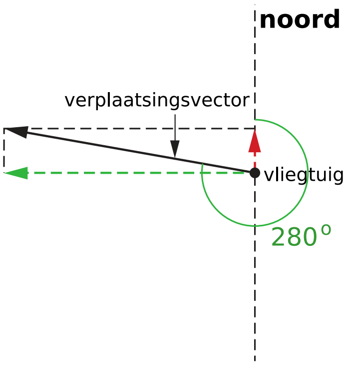
a



b



c



d

Figuur 2.3

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.

b noordelijke component: - 300 km, oostelijke component: 400 km.

c noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 300 km.

d noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: - 150 km.

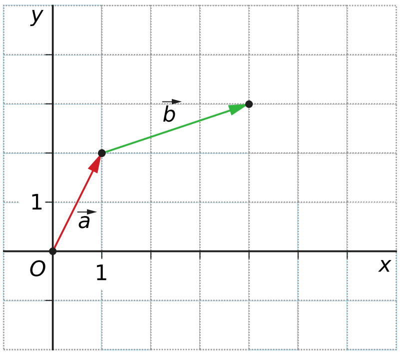
e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: - 100 km.

f noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 0 km.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

In de wiskunde bestudeer je verplaatsingen het liefst in een cartesisch assenstelsel Oxy. Daarin neem je aan dat de positieve x-as de hoofdrichting is en elke hoek vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in wordt gemeten. Een vector kun je dan gemakkelijk beschrijven met een component in de x-richting en een component in de y-richting: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 2.4

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector. Zo'n vector kun je gemakkelijk verlengen, de componenten worden dan beide met hetzelfde getal vermenigvuldigd: $3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ of meer algemeen: $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$.

Je telt vectoren op door twee verplaatsingen na elkaar uit te voeren. Dan zet je de vectoren na elkaar, ‘staart aan kop’. De vector vanaf het allereerste startpunt tot het allerlaatste eindpunt is dan de som van beide vectoren, de vectoren worden opgeteld. Dit kan eenvoudig door de kentallen op te tellen: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Als je twee vectoren van elkaar wilt aftrekken, tel je het tegengestelde van de tweede vector op bij de eerste vector: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe er met vectoren wordt gewerkt. Gebruik de gegeven vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

a Teken $\vec{p} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

b Teken $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

c Teken $\vec{p} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met **lengte** r en **richtingshoek** α, de hoek die de vector maakt met de gekozen hoofdrichting.

In de wiskunde is de standaard hoofdrichting in een assenstelsel de positieve x-as. Verder wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Er geldt:

- de x-**component** $v_x = r\cos(\alpha)$;
- de y-**component** $v_y = r\sin(\alpha)$.

Dit zijn de **kentallen** van vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van de vector is: $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van een vector.

Maak de vector $\vec{v}$ langer (of korter) door hem met een factor k te vermenigvuldigen. Dit noem je **scalaire vermenigvuldiging** van de vector met k.

$$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$$

Als $k = -1$ dan krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** door ze ‘staart aan kop’ te leggen.

Je krijgt dan de **somvector** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

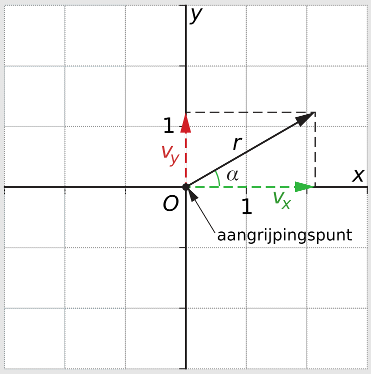
De kentallen van $\vec{r}$ ontstaan door de overeenkomstige kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op te tellen.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **aftrekken** door gebruik te maken van $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$

Tel dan bij $\vec{a}$ het tegengestelde van $\vec{b}$ op.

Als je $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ optelt, krijg je de **nulvector** $\vec{0}$.
De nulvector heeft geen richting en heeft lengte 0.

Noteer de vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B als $\overrightarrow{AB}$.



Figuur 2.5

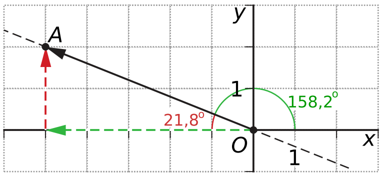
Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(-5,2)$, $B(23,16)$ en $C(28,14)$ in een cartesisch assenstelsel.

Bereken de lengte en de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$.

Laat zien dat de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{CB}$ gelijk zijn.

Waarom is $\overrightarrow{BC}$ niet gelijk aan $\overrightarrow{OA}$?



Figuur 2.6

Antwoord

De componenten van $\overrightarrow{OA}$ zijn -5 en 2. Dit geeft: $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hoek α die lijn OA met de x-as maakt en daarvoor geldt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$.

Die hoek is ongeveer 21,8°.

Hieruit volgt de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$: $180 - 21{,}8 = 158{,}2°$.

De componenten van $\overrightarrow{CB}$ zijn $23 - 28 = -5$ en $16 - 4 = 2$. Dit geeft: $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dus dezelfde kentallen en dezelfde lengte en richtingshoek als $\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{BC}$ heeft de tegenovergestelde richting ten opzichte van $\overrightarrow{CB}$ en ook ten opzichte van $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{BC}= -\overrightarrow{OA}$.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-31,12)$ en $D(-28,17)$ in een cartesisch assenstelsel. Bereken $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ en $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 5

Bepaal lengte en richtingshoek van de vectoren:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-15\\7\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{f}=\begin{pmatrix}13\\-25\end{pmatrix}$

Voorbeeld 2

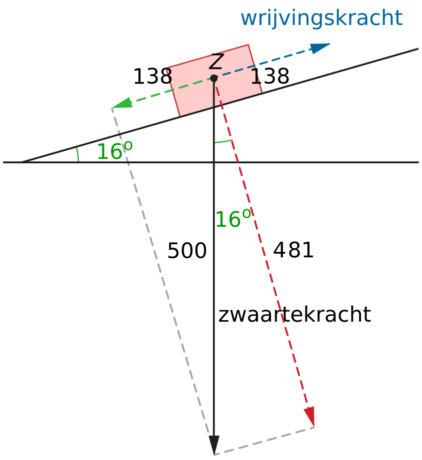
Bekijk de applet.

Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is aan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2 - 200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$ dus de gevraagde hoek is 23,6°. Om α te berekenen, gebruik je de arctan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.



Figuur 2.7

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

a Hoe groot zal in de weergegeven situatie de wrijvingskracht zijn?

b Bij welke hellingshoeken blijft het gewicht liggen?

c Leg uit waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.

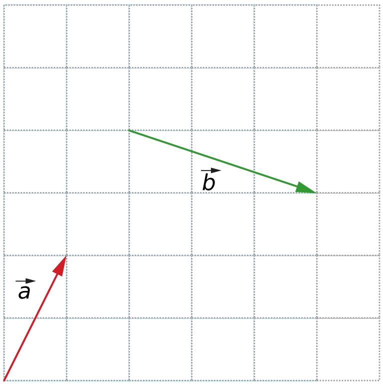
d Bereken de maximale hellingshoek waarbij een gewicht dat een zwaartekracht van 350 N ondervindt, nog blijft liggen op het hellende vlak.

Voorbeeld 3

Bekijk de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ worden opgeteld tot $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

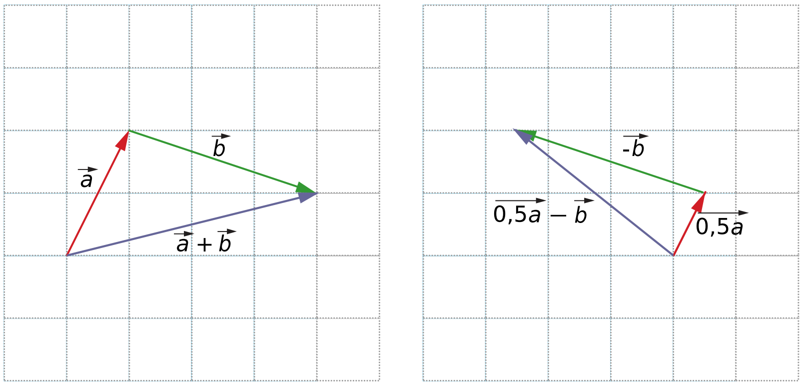
Dit heet de ‘staart aan kop’-methode.



Figuur 2.8

Op dezelfde manier maak je $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

Bekijk de applet.



Figuur 2.9

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je vectoren kunt optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Gebruik de gegeven vectoren.

a Teken de vector $2\,\vec{a}$ en bepaal de kentallen ervan.

b Teken de vector $2\,\vec{a} + 1{,}5\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

c Teken de vector $-2\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

d Teken de verschilvector van $-\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en de vectoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

a Laat zien dat $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Gegeven zijn de punten $A\left(a_x, a_y\right)$ en $B\left(b_x, b_y\right)$ en de vectoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

b Laat zien dat $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Bepaal de x-component en de y-component, in één decimaal nauwkeurig.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135°$

b $\left|\vec{v}\right| = 5$ en $\alpha = 210°$

c $\left|\vec{v}\right| = 4$ en $\alpha = 300°$

d $\left|\vec{v}\right| = 2$ en $\alpha = 270°$

Opgave 10

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek van deze vector. Geef de lengte exact, rond de hoek af op één decimaal.

a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\vec{v} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

d $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

Opgave 11

Gegeven is $O(0,0)$ en punt A met $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 5$. Voor een ander punt B geldt $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OB}$ ten opzichte van de x-as tegen de klok in is 30°. Bepaal de coördinaten van punt B en rond af op één decimaal.

Opgave 12

Gegeven zijn de vectoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Bepaal de kentallen van de vectoren.

a $\vec{v_1} = \vec{b} + \vec{c}$

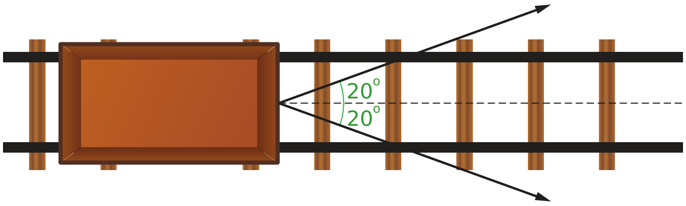
b $\vec{v_2} = \vec{f} + 0{,}5\,\vec{c}$

c $\vec{v_3} = \vec{a} - \vec{e} - 2\,\vec{d}$

d $\vec{v_4} = \vec{e} + \vec{d} - \vec{b}$

Opgave 13

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken een lorrie met dezelfde kracht van 8 N elk aan een touw.



Figuur 2.10

a Met welke kracht trekken beide personen samen aan het karretje in de rechter richting? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Beantwoord dezelfde vraag als de ene persoon trekt met een kracht van 8 N en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

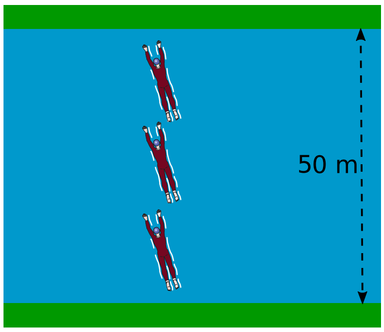
a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{AS}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 15: Zwemmer (1)

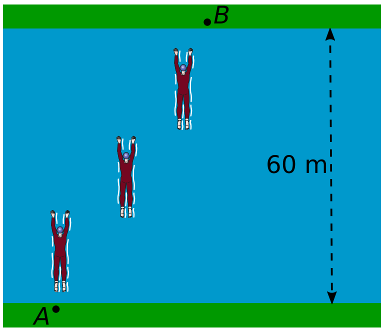
Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier met een stroomsnelheid van 0,6 km/h in. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 m breed. Hoe lang doet hij over de overtocht?



Figuur 2.11

Opgave 16: Zwemmer (2)

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar hij heeft last van de stroming. Tot zijn verbazing komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar in een punt B dat verder stroomafwaarts ligt.
De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in 5 minuten de overkant van de rivier. Wat is de snelheid in km/h waarmee hij AB aflegt? Geef je antwoord in drie decimalen.



Figuur 2.12

Opgave 17: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

a Maak van deze vlucht een tekening op schaal.

b Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$ en $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

d Bereken de kentallen van de vector $\vec{c}$ zo, dat $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 19

Gegeven zijn de punten $P(0{,}12)$ en $Q(8{,}2)$.

a Bereken $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt, zo nodig in één decimaal.

b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x-as. Bepaal de coördinaten van R.

2.3 Lijnen en snijpunten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je met een plaatsvector en een richtingsvector lijnen kunt beschrijven en er vectorvoorstellingen van maakt;
- vergelijkingen van lijnen omzetten in vectorvoorstellingen en omgekeerd;
- vectorvoorstellingen van lijnen toepassen bij berekeningen, onder andere van snijpunten.

Voorkennis

- het begrip vector (componenten, lengte, richtingshoek) en rekenen met vectoren;
- werken met vergelijkingen van lijnen.

Verkennen

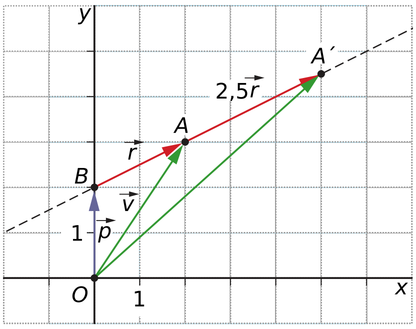
Opgave V1

Bekijk de applet

Je kunt punt A bewegen door de richtingsvector $\vec{r}$ te verlengen.

Je ziet hier de vectoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Verder is $\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.



Figuur 2.1

a Bekijk de eindpunten van de vectoren $\vec{p}+1\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+2\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+3\cdot\vec{r}$ en $\vec{p}-1\cdot\vec{r}$.

b Hoe komt het dat deze eindpunten allemaal op dezelfde rechte lijn liggen?

c Laat dit zien door een vergelijking op te stellen waaraan elk eindpunt van vector $\vec{v}$ voldoet.

d Als t de tijd in seconden voorstelt, met welke snelheid beweegt punt A dan?

Uitleg

Bekijk de applet

Als je de vector $\vec{r}$ langer maakt zie je punt A over een rechte lijn bewegen.

Bij elk punt A hoort een vector

$\vec{v} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$.

ofwel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

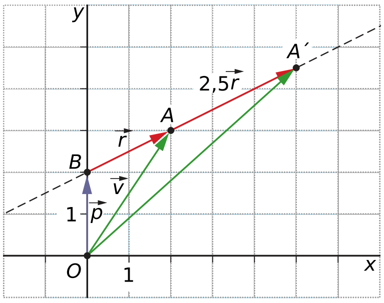
Dit noem je een vectorvoorstelling van de lijn waar A op ligt.

$\vec{r}$ heet een richtingsvector en $\vec{p}$ een plaatsvector (of steunvector) van de lijn.

Uit de kentallen van de richtingsvector kun je afleiden dat de richtingscoëfficiënt van de lijn $\frac{1}{2}$ is. De bijbehorende vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + 2$ ofwel $-x + 2y = 4$.

Voor elk punt A op de lijn geldt $x = 0 + 2t$ en $y = 2 + t$. Door hieruit t weg te werken, kun je ook de vergelijking van de lijn maken.

Je kunt de variabele t opvatten als de tijd.



Figuur 2.2

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat een vectorvoorstelling van een lijn is.

a Waarom is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van de getekende lijn? Welk verschil is er met de in de uitleg gegeven vectorvoorstelling als ook nu p de tijd voorstelt?

b En is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook een geschikte vectorvoorstelling? Licht je antwoord toe.

c Hoe bepaal je vanuit een richtingsvector van de lijn de richtingscoëfficiënt?

d Laat zien, hoe je een vergelijking van de lijn opstelt vanuit de richtingscoëfficiënt.

Je kunt de vergelijking van de lijn ook rechtstreeks uit de vectorvoorstelling halen.

e Laat zien hoe dit gaat door t weg te werken.

Opgave 2

De lijn m gaat door de punten $A(2,3)$ en $B(4,0)$.

a Stel voor m een vectorvoorstelling op.

b Waarom wordt bij a gesproken over ‘een’ vectorvoorstelling?

c Stel een vergelijking van m op.

d Controleer nu dat de vergelijking die je hebt gevonden een richtingscoëfficiënt heeft die past bij de richtingsvector.

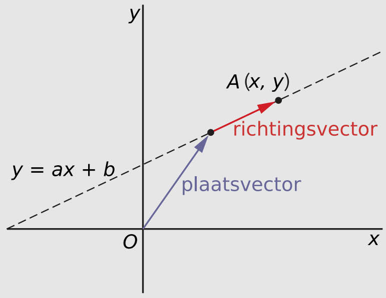
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe je de plaats een willekeurig punt A dat over een rechte lijn beweegt door t te variëren kunt beschrijven met twee vectoren:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$)



Figuur 2.3

Neem lijn l door $B(-1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst een vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit noem je een **vectorvoorstelling van de lijn** l. De plaatsvector is een vector vanuit $O(0,0)$ naar een punt B op de lijn, de richtingsvector ligt op de lijn. Voor elk punt op l geldt: $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

En daarom is de richtingscoëfficiënt van de lijn 0,5. De vergelijking is dus $y = 0{,}5x + 2{,}5$, ofwel $x - 2y = -5$.
Je kunt deze vergelijking ook vinden door t weg te werken uit $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door $P(-2,3)$ en $Q(4,0)$. Maak vervolgens vanuit de vectorvoorstelling een vergelijking van lijn PQ.

Antwoord

Elk punt van die lijn bereik je vanuit O door eerst naar een punt ervan (bijvoorbeeld P) te ‘lopen’ en vervolgens de richtingsvector (bijvoorbeeld $\overrightarrow{PQ}$) te verlengen, of verkorten. Dus:

- een plaatsvector (steunvector) van l is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- een richtingsvector van l is $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Die richtingsvector kun je nog inkorten door beide kentallen door 3 te delen.

Een mogelijke vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Je kunt hierbij een vergelijking maken door in $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ de t weg te werken. Je krijgt dan $x + 2y = 4$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door twee gegeven punten.

a Maak een andere vectorvoorstelling van deze lijn door $\overrightarrow{OQ}$ als plaatsvector en (een verlengde of verkorte vector) $\overrightarrow{QP}$ als richtingsvector te gebruiken.

b Gebruik $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ en stel een vergelijking van lijn PQ op door hieruit de t weg te werken.

c Laat ook zien, dat je vanuit de vectorvoorstelling die je bij a hebt gevonden dezelfde vergelijking voor lijn PQ kunt opstellen.

Opgave 4

a Maak een vectorvoorstelling en een vergelijking van de lijn door $R(-4,1)$ en $S(2,-1)$.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op de van de lijn door $A(-3,0)$ en $B(2,5)$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lijn $l: 4x + 3y = 12$. Stel een vectorvoorstelling op van lijn l.

Antwoord

Er zijn verschillende manieren om dit te doen:

- Neem bijvoorbeeld $x = 3t$, dan is $4 \cdot 3t + 3y = 12$ en dus $y = 4 - 4t$.
  Je vindt dan $x = 3t$ en $y = 4 - 4t$. De bijbehorende vectorvoorstelling kun je meteen opschrijven.
- Bepaal twee punten op lijn l, bijvoorbeeld $A(3,0)$ en $B(0,4)$ en stel een vectorvoorstelling op van een lijn door deze twee punten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt uitgelegd hoe je vanuit een vergelijking van een lijn een bijpassende vectorvoorstelling kunt maken. Een algebraïsche manier is het invoeren van t door bijvoorbeeld $x = 3t$ te kiezen.

a Waarom wordt $x = 3t$ gekozen en niet $x = t$?

b Schrijf zelf de vectorvoorstelling op.

Bekijk de meer meetkundige methode van het bepalen van twee punten op de lijn en daarmee de vectorvoorstelling maken.

c Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

Opgave 6

Stel van de volgende lijnen een vectorvoorstelling op.

a $l : 2x - 5y = 10$

b $m : y = 12 - 0{,}25x$

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0{,}1)$ en Q in $(-2{,}6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6{,}3)$ en Q in $(4{,}0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S.
Bereken de exacte coördinaten van dit punt en licht toe waarom beide punten niet met elkaar in botsing komen.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x, y)$ ligt op lijn l met:

  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ en dus $x = t$ en $y = 1 + \frac{1}{3}t$.

- Punt $Q(x, y)$ ligt op lijn m met:

  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en dus $x = -2 + t$ en $y = 6 - t$.

Denk er om dat je beide richtingsvectoren nu niet mag vergroten of verkleinen!

Als je een waarde van t zoekt waarvoor beide punten op dezelfde plek zitten (botsen), dan moet $t = -2 + t$ en $1 + \frac{1}{3}t = 6 - t$. En dat levert geen mogelijke waarde voor t op.

Toch hebben beide banen een snijpunt. Dat kun je op diverse manieren berekenen:

- Kies in de vectorvoorstelling (of parametervoorstelling) van m een andere letter voor de parameter en los het stelsel vergelijkingen dat hoort bij het snijpunt van beide banen exact op.
- Maak van beide parametervoorstellingen vergelijkingen in x en y en bereken daarmee het gevraagde snijpunt.
- Maak van één van beide parametervoorstellingen een vergelijking in x en y en vul daarin de parametervergelijkingen van de andere lijn in.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt het snijpunt van de banen van twee bewegende punten berekend.

a Laat zien hoe je aan de twee vectorvoorstellingen komt.

b Waarom mogen de richtingsvectoren nu niet worden verlengd of verkort?

c Bereken het snijpunt van beide banen door in de vectorvoorstelling van m de parameter t te vervangen door s en $t = -2 + s \wedge 1 + \frac{1}{3}t = 6 - s$ op te lossen.

d Je kunt ook eerst vergelijkingen maken van beide lijnen. Bereken het snijpunt ook op deze manier.

e En bereken tenslotte het snijpunt nog eens vanuit een vergelijking van de éne lijn en een parametervoorstelling van de andere.

Opgave 8

Bereken exact het snijpunt van de lijnen p en q in de volgende gevallen.

a $l : 2x - y = 12$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en m door $x = 1 + s$ en $y = 3s$.

Opgave 9

In een cartesisch assenstelsel bewegen de punten A en B over de lijnen l en m. Op $t = 0$ zit A in (1,4) en B in (-1,0). Op $t = 4$ zit A in (6,3) en B in (4,1).

a Stel de vectorvoorstellingen van l en m op.

b Waarom botsen deze punten nu wel tegen elkaar?

c Bereken de coördinaten van het botsingspunt.

d Laat zien dat je dit punt ook kunt berekenen vanuit twee vergelijkingen van l en m.

Oefenen

Opgave 10

Maak bij de volgende lijnen een passende vectorvoorstelling:

a de lijn l door $P(-20,45)$ en $Q(30,15)$;

b de lijn m met vergelijking $2x - 5y = 10$;

c de lijn n door $P(-20,45)$ en evenwijdig met m;

d de x-as.

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l door $A(30,0)$ en $B(0,20)$ en $m : x - y = 50$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken exact het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 12

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. P beweegt over de lijn $l : x + 2y = 20$, zit op $t = 0$ op de y-as en op $t = 10$ op de x-as. Q beweegt over lijn m en zit op $t = 0$ in het punt (2,0) en op $t = 6$ in (8,12).

a Stel een parametervoorstelling op voor de beweging van punt Q.

b Bereken het snijpunt van l en m.

c Komen beide punten P en Q met elkaar in botsing?

Opgave 13

Stel in de volgende gevallen een vectorvoorstelling van l op.

a l is evenwijdig met de lijn $m : 4x - y = 16$ en gaat door $P(2,5)$.

b l gaat door $P(2,5)$ en maakt een hoek van 45° met de x-as.

Opgave 14

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde. Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(0,0)$, $A(8,2)$ en $B(4,6)$.

Bereken het snijpunt van de zwaartelijn door A en de zwaartelijn door B. Laat zien, dat de zwaartelijn door O ook door ditzelfde snijpunt gaat.

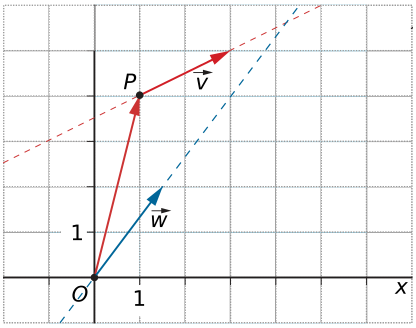
Toepassen

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe een roofdier dat zich op $t = 0$ in punt O bevindt, de achtervolging inzet op een prooi die hij op dat moment opmerkt in het punt $P(1,4)$. De prooi rent voorbij met een constante snelheid en in een constante richting. t is de tijd in seconden.

De snelheid en de richting waarin het roofdier beweegt is nog instelbaar. Wel wordt er van uitgegaan dat ook dit roofdier vanaf $t = 0$ een constante snelheid en een constante richting heeft (in werkelijkheid zal het vanuit stilstand die snelheid nog moeten halen en misschien ook de beweegrichting aanpassen).

Welke snelheidsvector moet je instellen opdat het roofdier de prooi te pakken krijgt?



Figuur 2.4

Opgave 15: Roofdier en prooi (1)

Bekijk **Toepassen** en de applet die je daar ziet.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de beweging van de prooi.

b Bereken de snelheid van de prooi in eenheden per seconde.

c In de applet is $k = 1{,}5$ ingesteld. Hoe snel beweegt het roofdier dan?

d Laat zien, dat in dit geval het roofdier de prooi gaat missen.

e Hoe kan het dat toch beide lijnen een snijpunt hebben en hoe bereken je dat?

Opgave 16: Roofdier en prooi (2)

Bekijk **Toepassen** en de applet die je daar ziet.

a Stel $k = 3$ in. Krijgt het roofdier de prooi te pakken?

b Voor welke waarde van k krijgt het roofdier de prooi te pakken? En hoeveel seconden duurt dit dan?

Testen

Opgave 17

Gegeven de lijnen l door $A(-3,2)$ en $B(5,1)$ en m met vergelijking $x + 2y = 24$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken het snijpunt van beide lijnen.

Punt P beweegt over lijn l en punt Q over lijn m. Op $t = 0$ zitten beide punten op de y-as en op $t = 6$ zit P en Q op de x-as.

c Onderzoek met behulp van een berekening of beide punten met elkaar botsen.

Opgave 18

Gegeven is lijn l door: $3x - 5y = 15$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn m door $P(2,3)$ en evenwijdig met l.

b Bereken de snijpunten met de assen van lijn m.

2.4 Hoeken en inproduct

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een vector die is gegeven door twee loodrechte componenten de draaihoek en de lengte berekenen;
- het inproduct van twee vectoren berekenen;
- de hoek tussen twee vectoren berekenen met behulp van het inproduct.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Verkennen

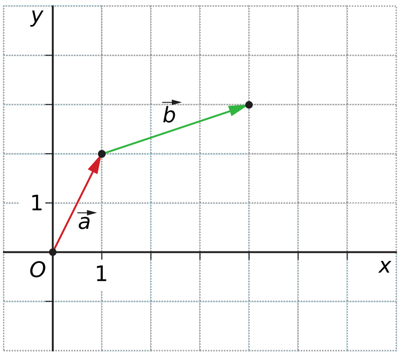
Opgave V1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De groottes van de componenten heten de kentallen. Elke vector heeft een lengte die je aangeeft met $|\vec{a}|$.



Figuur 2.1

a Hoeveel bedraagt de lengte van vector $\vec{a}$?

Elke vector heeft een richting die bepaald wordt door de draaihoek α ten opzichte van de positieve x-richting.

b Bereken de draaihoek van $\vec{a}$.

c Maakt het voor vector $\vec{a}$ wat uit als hij niet in $O(0,0)$ begint?

d Bereken de draaihoek (richtingshoek) van $\vec{b}$?

e Hoe groot is de hoek die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar maken?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De groottes van de componenten heten de kentallen.

De lengte van deze vector is $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

De draaihoek α, ook wel de richtingshoek genoemd, is de hoek die de vector met de positieve x-as maakt. Deze hoek heeft waarden vanaf 0° tot 360°.

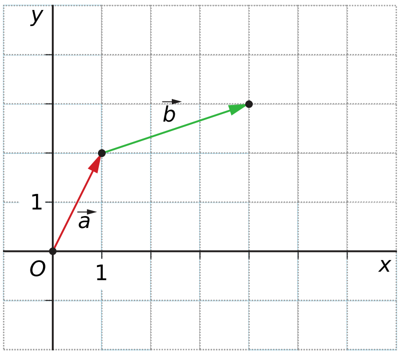
Je bepaalt hem uit $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{1} = 2$.

Hieruit volgt: $\alpha \approx 63{,}4°$.
Bij negatieve kentallen krijg je zo niet altijd de goede hoek. Bekijk dan goed de figuur.

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector.

Je ziet dat de vector $\vec{a}$ vanuit de oorsprong O is getekend. Dit punt wordt het aangrijpingspunt genoemd. Er zijn gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. Het aangrijpingspunt van vector $\vec{b}$ is (1,4).

Als je de hoek tussen twee vectoren wilt berekenen, dan kun je gewoon beide richtingshoeken vergelijken. Ze hoeven daarvoor niet hetzelfde aangrijpingspunt te hebben. Let er wel op dat zo'n hoek altijd tussen 0° en 180° in ligt.



Figuur 2.2

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Teken vector $\vec{c}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem de oorsprong als aangrijpingspunt.

b Teken vector $\vec{d}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem punt (1,4) als aangrijpingspunt.

c Bereken de richtingshoeken van beide vectoren. Rond af op gehelen graden.

d Bereken de hoek die beide vectoren met elkaar maken. Rond af op gehelen graden.

Opgave 2

In **Uitleg 1** zijn de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ gegeven.

a Teken $\vec{p_1}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_1}$.

b Teken $\vec{p_2}=\vec{a}-\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_2}$.

c Teken $\vec{p_3}=3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_3}$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je kunt twee vectoren ook met elkaar vermenigvuldigen. Een manier om dit te doen heet het inproduct van twee vectoren. Onder het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$$

Hierin zijn $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ de lengtes van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en is φ de hoek tussen beide vectoren. Deze afspraak gaat je straks in staat stellen om hoeken te berekenen.

$\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zijn de twee eenheidsvectoren in een cartesisch xy-assenstelsel.

Deze twee vectoren maken een hoek van 90° en hebben daarom een inproduct van 0:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=|\vec{e_x}|\cdot|\vec{e_y}|\cdot\cos(90°)=1\cdot1\cdot0=0.$$

Zo is ook:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}=|\vec{e_x}|\cdot|\vec{e_x}|\cdot\cos(0°)=1\cdot1\cdot1=1.$$

En ook geldt $\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}=1$.

Elke vector is te schrijven als een samenstelling van eenheidsvectoren. Neem bijvoorbeeld:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-2\,\vec{e_x}+3\,\vec{e_y}$ en

$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\,\vec{e_x}+1\,\vec{e_y}.$

Voor het inproduct van beide krijg je dan:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-2\,\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y\right) \cdot \left(2\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y\right)$

Neem nu aan dat ook voor het inproduct van twee vectoren de regels voor het wegwerken van haakjes gelden. Gebruik verder de regels hierboven. Je vindt dan

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$.

Kennelijk hoef je alleen de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en de twee uitkomsten op te tellen om het inproduct van beide vectoren te krijgen.

Opgave 3

Het inproduct van twee vectoren wordt gegeven door kentallen in een cartesisch assenstelsel te bepalen, en de vectoren te ontleden in eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

a Laat zien dat het inproduct van $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ inderdaad $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$ is door haakjes weg te werken.

b Bereken op dezelfde manier met behulp van eenheidsvectoren het inproduct van $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

In het algemeen geldt voor het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Neem nu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen te berekenen.

Opgave 5

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bereken het inproduct van beide vectoren. Gebruik dit inproduct om de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen.

Opgave 6

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ en laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting.

Je kunt hem beschrijven door

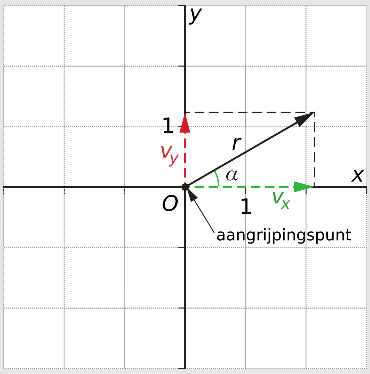
- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector met de x-richting maakt.

De richtingshoek wordt linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Je kunt een vector beschrijven met **kentallen**: $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als aangrijpingspunt. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is dus geen eigenschap van een vector. Een vector die vanuit punt A naar punt B wijst, schrijf je als $\overrightarrow{AB}$.



Figuur 2.3

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Dus: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

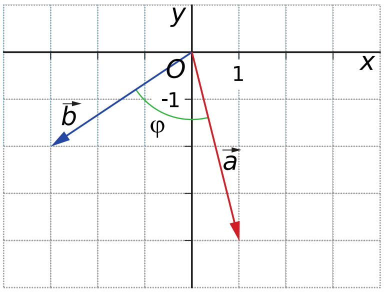
Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

Voorbeeld 1

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf vliegveld O eerst naar een punt dat 3 km oostelijker en 5 km noordelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km oostelijker en 4 km zuidelijker ligt.
Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte van de vlucht. De retourvlucht is de kortste route terug. Bereken de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende afstand en draaihoek (ten opzichte van het oosten).

Antwoord

Voer een assenstelsel in met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.



Figuur 2.4

De vlucht kun je dan beschrijven als $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

De lengte van de vlucht is

$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+5^2}+\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{34}+\sqrt{20}\approx 10{,}3$ km.

De retourvlucht is $-\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$.

En de lengte van de retourvlucht is

$\left|-\vec{v}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}\approx 5{,}1$ km.

Voor de draaihoek φ die daarbij hoort, geldt:

$\tan(\varphi-180°)=\frac{-1}{-5}=0{,}2$.

Dit geeft $\varphi\approx 191°$.

Opgave 7

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf O eerst naar een punt dat 2 km westelijker en 5 km noordelijker ligt en daarvandaan naar een punt dat 6 km oostelijker en 7 km zuidelijker ligt.

a Teken deze vlucht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van de vlucht.

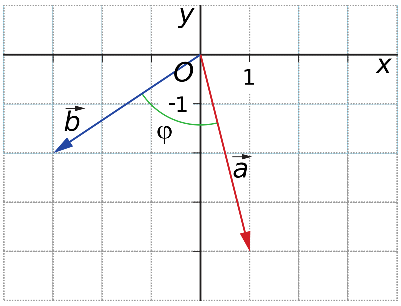
c De retourvlucht is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende draaihoek (ten opzichte van het oosten) en lengte.

d Bereken in km de lengte van de retourvlucht.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 2.5

Antwoord

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -3 + -4 \cdot -2 = 5$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus $5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$.

Dus $\varphi \approx 70{,}3°$.

Opgave 8

De hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ is ongeveer 70,3°.

a Controleer dit met een berekening.

b Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in één decimaal nauwkeurig.

c In de applet kun je andere vectoren kiezen. Bereken zelf telkens de hoek ertussen met behulp van het inproduct. In de applet vind je het antwoord.

Opgave 9

Met behulp van voorbeelden kun je uitzoeken wanneer twee vectoren een inproduct van 0 hebben.

a Geef een voorbeeld van twee vectoren waarvoor dat geldt. Laat door berekening zien dat het inproduct dan ook 0 is.

b Toon algebraïsch aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} kb \\ -ka \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

c Geef ook een voorbeeld van twee vectoren waarvan het inproduct gelijk is aan het product van hun lengtes.

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in (0,1) en Q in (-2,6). Op $t = 6$ zit P in (6,3) en Q in (4,0). Beide banen snijden elkaar in punt S.
Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Met behulp van het inproduct van beide richtingsvectoren kun je de hoek tussen beide banen berekenen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot -1 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \cos(\varphi)$$

geeft

$$\frac{2}{3} = \sqrt{2\frac{2}{9}} \cdot \cos(\varphi) \text{ en dus } \varphi \approx 63{,}4°.$$

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent.

Gegeven zijn de lijnen $l : y = -x + 4$ en $m : 2x - 3y = 6$.

a Bepaal van beide lijnen de richtingsvectoren.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Punt P beweegt over een lijn door $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en punt Q beweegt over een lijn door $C(0,5)$ en $D(2,9)$.

a Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Waarschijnlijk heb je bij a een stompe hoek gevonden. Beide lijnen maken echter ook een scherpe hoek met elkaar.

b Hoeveel graden is die scherpe hoek?

c Waarom wordt meestal afgesproken dat de hoek tussen twee lijnen een scherpe hoek is?

d Waarom kun je voor de hoek tussen twee vectoren niet afspreken dat hij altijd scherp is?

Oefenen

Opgave 12

Bereken telkens de hoek tussen de gegeven vectoren in graden nauwkeurig.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Opgave 13

Een zeilboot vaart op het IJsselmeer vanuit de haven van Enkhuizen naar een punt dat 5 km oostelijker en 3 km zuidelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km westelijker en 8 km noordelijker ligt.

a Teken deze zeiltocht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf de zeiltocht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van deze zeiltocht.

c De retourvaart is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourtocht beschrijft met de bijbehorende en draaihoek (t.o.v. het oosten).

d Bereken in km de lengte van de retourvaart.

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $m : 2x - 5y = 10$.

Bereken de hoek tussen beide lijnen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 15

a Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Geef een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{b}$ en twee keer zo lang is.

Opgave 16

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{SA}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 17: Bootje in een sloot

Een bootje wordt door een jongen en een twee keer zo sterke man aan touwen die beide aan dezelfde plek op de boeg van de boot zijn bevestigd door het midden van een sloot getrokken. De jongen en de man lopen ieder aan een andere kant van de sloot. De boot blijft in het midden van de sloot varen. De man trekt met een kracht van 10 N en onder een hoek van 20° met de vaarrichting.

a Construeer in een bovenaanzicht de vectoren die de twee trekkrachten voorstellen.

b Bereken de richtingshoek van de kracht die de jongen uitoefent in graden nauwkeurig.

De arbeid die door een kracht wordt verricht is het inproduct van deze kracht (de krachtvector) en de afgelegde afstand (de afstandsvector). Het is daarom ook het product van de component van die kracht in de bewegingsrichting en de afgelegde afstand.

c Welke arbeid verrichten beiden samen als ze het bootje 1 km voort trekken?

d Verrichten ze beiden evenveel arbeid?

Opgave 18: Gegeven hoek tussen twee vectoren

Voor welke exacte waarde(n) van a is de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$ gelijk aan 45°?

Testen

Opgave 19

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek tussen beide vectoren in graden nauwkeurig.

Opgave 20

Punt P beweegt over een lijn vanaf $A(0,10)$ op $t = 0$ en door $B(20,25)$ op $t = 10$.

Punt Q beweegt over een lijn vanaf $C(0,1)$ op $t = 0$ en door $D(20,31)$ op $t = 10$.

t is de tijd in seconden.

a Laat zien dat beide punten met elkaar botsen en bereken na hoeveel seconden dit het geval is.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

2.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn (normaal);
- een normaalvector van een gegeven vector berekenen;
- werken met middelloodlijnen, hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices;
- het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op coördinaten berekenen.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- werken met het inproduct van vectoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Gegeven zijn de lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
De (kortste) afstand van punt A tot lijn l is de lengte van een lijnstuk AS, waarbij S het snijpunt is van een loodlijn door A en loodrecht op l. (Ga dit na met de applet.) Om die afstand AS te berekenen moet je daarom eerst een lijn loodrecht op l en door punt A beschrijven.

a Laat zien, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ een mogelijke richtingsvector van l is.

b Laat met behulp van het inproduct zien, dat de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht op die richtingsvector staat.

c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door A en loodrecht l en bereken daarmee punt S en de afstand van A tot lijn l.

Uitleg 1

Bekijk de applet

Je ziet hier de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

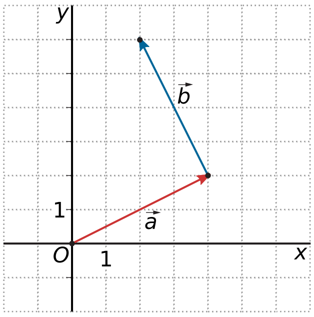
Met behulp van het inproduct van beide vectoren kun je laten zien dat ze loodrecht op elkaar staan:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot -2 + 2 \cdot 4 = 0$

zodat voor de hoek φ tussen deze vectoren geldt: $\cos(\varphi) = 0$ en dus $\varphi = 90°$.

Zo kun je met het inproduct laten zien dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ altijd loodrecht op elkaar staan. Je noemt $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ een normaalvector van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dit kun je gebruiken om een loodlijn op een gegeven lijn te maken. En met behulp van een loodlijn kun je dan weer de afstand van een punt tot een lijn berekenen.



Figuur 2.1

Opgave 1

In **Uitleg 1** kun je met de applet nagaan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

a Laat dit ook zien met behulp van hun inproduct.

b Staat de vector $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ ook loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$?

c Staat de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -2a \end{pmatrix}$ loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -3a \end{pmatrix}$?

Opgave 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,2)$, $B(4,1)$ en $C(3,4)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn AB.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door C en loodrecht op AB.

c Bereken de afstand van punt C tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet hier een driehoek ABC met $A(1,3)$, $B(5,1)$ en $C(3,5)$.

Punt M is het midden van AB.

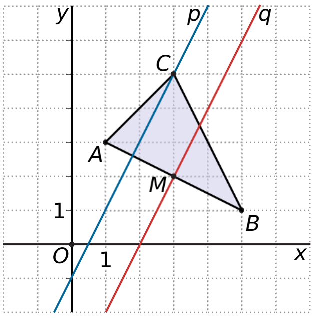
De lijn p staat loodrecht op AB en gaat door punt C. Zo'n lijn wordt wel de hoogtelijn door C van ΔABC genoemd.

De lijn q staat loodrecht op AB en gaat door punt M. Zo'n lijn wordt wel de middelloodlijn van AB genoemd.

Als je een lijn r door C en het midden M van AB tekent, is dat de zwaartelijn door C van ΔABC.

Elke driehoek heeft drie hoogtelijnen, drie middelloodlijnen en drie zwaartelijnen.

Door gebruik te maken van normaalvectoren kun je vanuit de gegeven hoekpunten vectorvoorstellingen (en dus ook vergelijkingen) van hoogtelijnen en middelloodlijnen maken. Vanuit de hoekpunten en de middens van de zijden kun je vectorvoorstellingen (en vergelijkingen) van zwaartelijnen maken. De snijpunten van de zwaartelijnen heet het zwaartepunt van de driehoek. Het snijpunt van de drie middelloodlijnen is het middelpunt van een cirkel door de drie punten. En wat is het hoogtepunt?



Figuur 2.2

Opgave 3

Bekijk de gegeven ΔABC in **Uitleg 2**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

d Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door B.

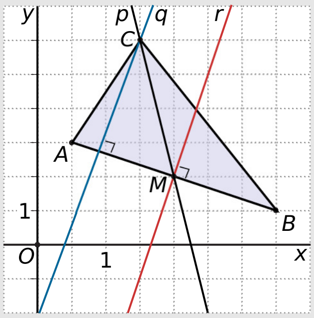
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In deze ΔABC zijn drie **bijzondere lijnen** getekend:

- p is de **zwaartelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt naar het midden M van de overstaande zijde AB;
- q is de **hoogtelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt en loodrecht op de overstaande zijde AB.
- r is de **middelloodlijn** van zijde AB, een lijn door het midden M van en loodrecht op lijnstuk AB.



Figuur 2.3

Een hoogtelijn is een voorbeeld van een **loodlijn**, een lijn die loodrecht op een andere lijn staat. De richtingsvector van zo'n loodlijn is de **normaalvector** van de richtingsvector van de lijn waar hij loodrecht op staat.

Van een vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een vector zoals $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (of een veelvoud ervan) een normaalvector.

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de **afstand van een punt tot een lijn**.

In elke driehoek kun je drie zwaartelijnen tekenen die door één punt gaan: het **zwaartepunt**.

In elke driehoek kun je drie middelloodlijnen tekenen die door één punt gaan: het **middelpunt van de omgeschreven cirkel**.

Voorbeeld 1

Bereken de afstand van punt $A(4,2)$ tot de lijn $l: 4x + 3y = 12$.

Antwoord

Teken eventueel de situatie en ga na, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l is.

Bij deze richtingsvector van l hoort een normaalvector als $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nu kun je een vectorvoorstelling of een vergelijking van de loodlijn m door A en loodrecht op l opstellen.

Dan bereken je het snijpunt S van de lijnen l en m.

De gevraagde afstand is de lengte van AS. Ga na dat deze afstand precies 2 is.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de loodlijn m van l.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l.

Opgave 5

Twee evenwijdige lijnen hebben overal dezelfde afstand tot elkaar.

a Wat versta je onder de afstand tussen twee evenwijdige lijnen?

b Hoe bereken je de afstand tussen twee evenwijdige lijnen k en l?

Voorbeeld 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee zwaartelijnen en bereken daarmee de coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

Antwoord

De zwaartelijn door C gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze zwaartelijn is $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking is $y = -2{,}5x + 9{,}5$.

De zwaartelijn door A heeft zo vergelijking $y = 2x - 1$.

Z is het snijpunt van deze twee lijnen: $Z\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Stel zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel ook zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

c Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z.

d Laat zien, dat ook de zwaartelijn door B door punt Z gaat.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee middelloodlijnen van de zijden en bereken daarmee de coördinaten van het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

Antwoord

De middelloodlijn van AB gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze middelloodlijn is de normaalvector van $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking ervan is $y = -2x + 8$.

De middelloodlijn van AC is $y = 4$.

M is het snijpunt van deze twee lijnen: $M(2,4)$.

Ga zelf na, dat dit punt gelijke afstanden heeft tot elk van de hoekpunten van ΔABC en dat er dus een cirkel met middelpunt M is die precies door A, B en C gaat.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Laat zien hoe je de coördinaten van punt M berekent.

b Stel zelf een vergelijking op van de middelloodlijn van BC.

c Laat zien, dat ook de middelloodlijn van BC door punt M gaat.

Opgave 8

Gebruik de drie punten uit **Voorbeeld 3**.

a Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door punt C.

b Laat zien, dat alle drie de hoogtelijnen door één punt gaan.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven zijn de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en punt $P(5,0)$.

Bereken de afstand van P tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Driehoek ABC is gegeven door de punten $A(-2,0)$, $B(4,2)$ en $C(0,6)$.

a Stel een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

d Bereken de afstand van punt C tot lijn AB.

Opgave 11

Een punt beweegt vanaf punt $A(0{,}10)$ op $t = 0$ in 10 seconden naar punt $B(20{,}0)$.

a Op welk tijdstip is dit punt het dichtst bij de oorsprong van het assenstelsel?

b Welke afstand tot $O(0{,}0)$ heeft het punt op dit moment?

Een ander punt P beweegt over de middelloodlijn van AB.
Op $t = 0$ zit dit punt in het midden van AB.

c Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand van beide punten? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $A(-4{,}0)$, $B(6{,}0)$ en $C(0{,}8)$.

a Bereken de exacte coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

b Bereken het exacte middelpunt M van de cirkel door A, B en C.

Opgave 13

Op de lijn $l : 3x + 4y = 24$ ligt een punt P dat gelijke afstanden heeft tot $A(0{,}2)$ en $B(6{,}0)$.

a Bereken de exacte coördinaten van punt P.

b Bereken de afstand van P tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet

In deze applet kunnen de punten A en B bewegen met de tijd t in seconden.

Voor punt A geldt $x = t$ en $y = 0{,}25t$.

De vectorvoorstelling van de lijn die A doorloopt is dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Punt B begint in $(0{,}5)$ en zit na 4 seconden in $(2{,}4)$.

Beide punten botsen niet.

Beide punten passeren wel het driehoekige ‘grasveld’ PQR.

Opgave 14: Bewegende punten (1)

Bekijk in **Toepassen** de twee bewegende punten A en B.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de baan die punt B doorloopt.

b Bereken de hoek die beide banen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

c Bereken de kleinste onderlinge afstand van beide punten.

Opgave 15: Bewegende punten (2)

Bekijk in **Toepassen** de twee bewegende punten A en B.

a Hoeveel seconden bevindt punt B zich op het 'grasveld'? (Ga er vanuit dat de punten en de lijnen geen breedtes hebben.)

b Bereken het tijdsverschil waarmee de punten A en B de middelloodlijn van QR passeren.

Testen

Opgave 16

Bereken de afstand van $A(0{,}12)$ tot de lijn $l : y = 4x + 5$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Driehoek ABC heeft hoekpunten $A(2{,}0)$, $B(6{,}0)$ en $C(0{,}4)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde BC.

b Bereken het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

c Bereken het zwaartepunt Z van ΔABC.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Analytische meetkunde** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch assenstelsel — dimensie — midden, lengte van een lijnstuk
- vector met kentallen, lengte en richtingshoek — x- en y-component — nulvector — aangrijpingspunt — som, verschil van twee vectoren — scalaire vermenigvuldiging
- vectorvoorstelling van een lijn — plaatsvector en richtingsvector
- inproduct van twee vectoren
- normaalvector — loodlijn — middelloodlijn — zwaartelijn en zwaartepunt — hoogtelijn

Activiteitenlijst

- werken met coördinaten in een cartesisch assenstelsel — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen;
- van een met kentallen gegeven vector de lengte en de richtingshoek berekenen en omgekeerd — vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- een lijn beschrijven met een vectorvoorstelling — een vectorvoorstelling van een lijn omzetten naar een vergelijking en omgekeerd — snijpunten van lijnen berekenen;
- de hoek tussen vectoren berekenen met behulp van hun inproduct — de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn — vectorvoorstellingen en vergelijkingen van middelloodlijnen, zwaartelijnen en hoogtelijnen opstellen — het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek berekenen.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m.

b Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB en evenwijdig met lijn l.

Opgave 2

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Bereken de hoeken van ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$ in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Bereken het middelpunt M en de straal r van de cirkel door de drie gegeven punten in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 5

Punt P beweegt vanaf (0,12) op $t = 0$ in een rechte lijn door (36,0) op $t = 12$.

Punt Q beweegt vanaf (0,0) op $t = 0$ in een rechte lijn door (24,36) op $t = 12$.

a Stel vectorvoorstellingen op voor de banen van deze punten.

b Toon aan dat beide punten niet botsen met elkaar.

c Beide punten bewegen langs $A(7,6)$. Welk punt komt er het dichtst in de buurt?

d Bereken de kortste afstand tussen beide punten in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Als er in een cartesisch assenstelsel vier punten zijn gegeven, dan kun je je afvragen **liggen de vier gegeven punten op één cirkel**?

Dit probleem kun je oplossen door een cirkel door drie van de vier punten te maken. Dat is dan de omgeschreven cirkel van de driehoek waar die punten de hoekpunten van zijn. Hoe je het middelpunt M van zo'n cirkel uitrekent, heb je eerder gezien. En de straal is gewoon de afstand tussen het middelpunt en een hoekpunt van de driehoek.

Opgave 6: Op de cirkel? (1)

Gegeven zijn in een cartisch assenstelsel de punten $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(6,4)$ en $D(1,6)$.
Je wilt nagaan of deze vier punten op één cirkel liggen.

a Bereken het middelpunt van de cirkel door A, B en C.

b Bereken de straal van de cirkel door A, B en C.

c Bereken de afstand van het middelpunt tot D. Ligt punt D op de cirkel?

Opgave 7: Op de cirkel? (2)

Gaat de cirkel door $A(-1,2)$, $B(2,1)$ en $C(6,3)$ door de oorsprong van het cartesisch assenstelsel?

Register

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

Dit boek is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in dit boek zijn gekozen door docenten van het CONTEXT COLLEGE.

Stichting Math4All

www.math4all.nl **www.math4mbo.nl**