Wiskunde voor het technisch MBO

Basisdeel (leerjaar 1 en 2)

Alle hoofdstukken / sectorneutraal

Maart 2023

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

ISBN 978 94 906 8806 6 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2023

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord 5

1 Rekenen I 7
1.1 Getallen 8
1.2 Rekenen 14
1.3 Rekenvolgorde 22
1.4 Afronden en schatten 29
1.5 Machten van 10 en technische notatie 38
1.6 Eenheden 45
1.7 Totaalbeeld 54

2 Rekenen II 57
2.1 Breuken 58
2.2 Rekenen met breuken 68
2.3 Breuken en procenten 77
2.4 Machten 84
2.5 Wortels 91
2.6 Totaalbeeld 98

3 Algebra I 103
3.1 Wat is een formule? 104
3.2 Variabelen optellen/aftrekken 112
3.3 Variabelen vermenigvuldigen 120
3.4 Haakjes wegwerken 128
3.5 Som, verschil, product delen 137
3.6 Vergelijkingen 145
3.7 Totaalbeeld 156

4 Algebra 2 159
4.1 Formules met machten 160
4.2 Breuken met variabelen 168
4.3 Formules met breuken herleiden 174
4.4 Formules en ongelijkheden 182
4.5 Totaalbeeld 189

5 Talstelsels en logica 193
5.1 Binaire getallen 194
5.2 Binair rekenen 200
5.3 Het hexadecimale stelsel 206
5.4 Logische schakelingen 212
5.5 Totaalbeeld 219

6 Lineaire functies 221
6.1 Recht evenredig 222
6.2 Lineaire functies 228
6.3 Het hellingsgetal 234
6.4 Lineaire vergelijkingen 241
6.5 Totaalbeeld 248

7 Kwadratische functies 251
7.1 Kwadratische functies 252
7.2 Ontbinden in factoren 260
7.3 De abc-formule 269
7.4 Handig oplossen 277
7.5 Totaalbeeld 284

8 Machten en wortels 287
8.1 Recht evenredig met een macht 288
8.2 Omgekeerd evenredig met een macht 297
8.3 Grafieken verschuiven en vervormen 307
8.4 Wortelfuncties en gebroken functies 315
8.5 Totaalbeeld 324

9 Exponenten en logaritmen 329
9.1 Exponentiële groei 330
9.2 Exponentiële functies 340
9.3 Het begrip logaritme 348
9.4 Logaritmische functies 355
9.5 Logaritmische schalen 362
9.6 Totaalbeeld 371

10 Periodieke functies 375
10.1 Periodiciteit 376
10.2 Graden en radialen 384
10.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie 391
10.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand 399
10.5 Totaalbeeld 407

11 Modelleren 411
11.1 Een model opstellen 412
11.2 Optimaliseren 420
11.3 Onderzoeksopdrachten 427

12 Vlakke figuren 431
12.1 Driehoeken en vierhoeken 432
12.2 Berekeningen in vlakke figuren 442
12.3 Omtrek en oppervlakte 453
12.4 Cirkels 466
12.5 Bijzondere lijnen 473
12.6 Totaalbeeld 479

13 Goniometrie 483
13.1 Goniometrische verhoudingen 484
13.2 Omtrek en oppervlakte 491
13.3 Vectoren 498
13.4 Sinusregel 506
13.5 Cosinusregel 511
13.6 Totaalbeeld 518

14 Ruimtelijke figuren 521
14.1 Lichamen 522
14.2 Aanzichten 530
14.3 Doorsneden 540
14.4 Oppervlakte en inhoud 548
14.5 Totaalbeeld 556

15 Beschrijvende statistiek 561
15.1 Metingen en statistiek 562
15.2 Meetnauwkeurigheid 571
15.3 Diagrammen 579
15.4 Centrummaten 591
15.5 Spreidingsmaten 601
15.6 Totaalbeeld 610

16 Normale verdeling 615
16.1 Soorten verdelingen 616
16.2 Normaalkromme 626
16.3 Rekenen met de normale verdeling 635
16.4 Betrouwbaarheidsintervallen 645
16.5 De Shewhartkaart 654
16.6 Totaalbeeld 664

17 Conclusies trekken 669
17.1 z-toetsen 670
17.2 t-toetsen 678
17.3 f-toetsen 686
17.4 Regressielijnen 693
17.5 Totaalbeeld 704

Register 708

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit boek kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit boek op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Rekenen I

1.1 Getallen 8
1.2 Rekenen 14
1.3 Rekenvolgorde 22
1.4 Afronden en schatten 29
1.5 Machten van 10 en technische notatie 38
1.6 Eenheden 45
1.7 Totaalbeeld 54

1.1 Getallen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een decimaal getal en de betekenis van de cijfers herkennen;
- positieve en negatieve getallen op een getallenlijn weergeven;
- tekens voor groter dan en kleiner dan kunnen gebruiken.

Voorkennis

- enige kennismaking met getallen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk het getal 6 . 504,76.

a Uit welke cijfers bestaat dit getal?

b Welke waarde heeft elk van die cijfers? Welke betekenis hebben de punt en de komma?

c Welk getal is het tegengestelde van 6 . 504,76?

d Hoeveel verschillen deze twee getallen?

Uitleg

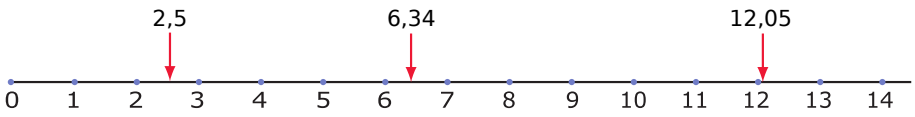
Het getal 16302,54 bestaat uit:

1 tienduizendtal is 1 · 10000
6 duizendtallen is 6 · 1000
3 honderdtallen is 3 · 100
0 tientallen is 0 · 10
2 eenheden is 2 · 1
decimale komma
5 tienden is 5 · 0,1
4 honderdsten is 4 · 0,01

Omdat er 10 cijfers (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) worden gebruikt, spreek je van het tientallig stelsel of decimale stelsel. De plaats van het cijfer bepaalt de waarde ervan. De 0 is nodig om een lege plaats aan te geven.

Decimale getallen kun je weergeven op een getallenlijn, een schaalverdeling. Een positief getal zit rechts van 0, een negatief getal zit links van 0.

Bekijk de applet: Getallenlijn



Figuur 1.1

Bij gehele getallen komen er geen cijfers achter de decimale komma (punt). Het zijn 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, enzovoorts. Ze kunnen ook negatief zijn.

Hoe verder een getal naar rechts ligt op de getallenlijn hoe groter het is:

- 3 is groter dan 2; je schrijft $3 > 2$
- - 307,15 is kleiner dan - 62,853; je schrijft $-307{,}15 < -62{,}853$
- 11,3 is kleiner dan 11,31; je schrijft $11{,}3 < 11{,}31$

Het getal 3,15 ligt tussen 3,1 en 3,2 in. Dat betekent dat 3,15 groter is dan 3,1 maar kleiner is dan 3,2: $3{,}1 < 3{,}15 < 3{,}2$.

Opgave 1

Bekijk het getal 6102,543.

a Hoeveel cijfers achter de komma heeft dit getal?

b Hoeveel duizendtallen komen er in dit getal voor?

c Hoeveel honderdsten komen er in dit getal voor?

d Hoeveel keer zo groot wordt dit getal als je de komma één plaats naar rechts verschuift?

e Wat gebeurt er met dit getal als je de komma twee plaatsen naar links verschuift?

Opgave 2

In de applet in de **Uitleg op pagina 8** kun je de rode punt verschuiven. Je klikt er op en verschuift hem dan met de pijltjestoetsen. Zo kun je zelf bekijken welke getallen waar liggen.

a Met hoeveel cijfers achter de decimale komma werkt de applet?

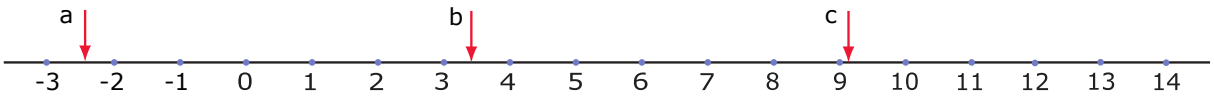
b Welk getal ligt midden tussen 3 en 4?

c Welk getal ligt midden tussen 3,1 en 3,2?

d Welk getal ligt midden tussen 5,123 en 5,124?

Opgave 3

Bekijk de getallenlijn hieronder.



Figuur 1.2

Welke getallen worden door de pijlen aangegeven?

Opgave 4

Bekijk opnieuw de **Uitleg op pagina 8**. Lees het gebruik van het groterteken > en het kleinerteken < na.

a Welk getal is groter: 4,65 of 4,56? Schrijf dit op met behulp van het groterteken.

b Welk getal is kleiner: 4,65 of - 4,56? Schrijf dit op met behulp van het kleinerteken.

c Schrijf over en vul het juiste teken in: 51,7 ... 15,7.

d Tussen welke twee gehele getallen ligt 5,074? Schrijf je antwoord op met behulp van kleinertekens.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Getallen schrijf je in het **decimale stelsel**.
Daarbij gebruik je de cijfers 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
De plaats van het cijfer geeft zijn waarde aan. De **decimale komma** scheidt de eenheden en de tienden.

Het **decimale getal** 16302,54 bestaat uit:

1 tienduizendtal is $1 \cdot 10000$
6 duizendtallen is $6 \cdot 1000$
3 honderdtallen is $3 \cdot 100$
0 tientallen is $0 \cdot 10$
2 eenheden is $2 \cdot 1$
decimale komma
5 tienden is $5 \cdot 0{,}1$
4 honderdsten is $4 \cdot 0{,}01$

Het **tegengestelde** van 16302,54 is - 16302,54.
Dit is een negatief getal.

Op een **getallenlijn** of **schaalverdeling** zitten de positieve getallen rechts van 0 en de negatieve getallen links van 0.
Hoe groter een getal, hoe verder het naar rechts zit, hoe kleiner een getal hoe verder het naar links zit.
Voor ‘groter dan’ gebruik je het teken >, voor ‘kleiner dan’ het teken <.

Voorbeeld 1

Ga met behulp van de getallenlijn na:

- 3,13 is kleiner dan 3,31; je schrijft $3{,}13 < 3{,}31$
- 0,77 is groter dan - 0,76; je schrijft $0{,}77 > -0{,}76$
- 4,13 ligt in tussen 4,1 en 4,2; je schrijft $4{,}1 < 4{,}13 < 4{,}2$

Bekijk de applet: Getallenlijn

Opgave 5

Vul in > of <:

a 5,6 ... 5

b 8,2 ... 9

c 0,5 ... 0,501

d 1,34 ... - 1,40

Opgave 6

Bekijk de getallenlijn.

a Schrijf twee getallen op die tussen 5,7 en 5,8 liggen.

b Schrijf ook twee getallen op die tussen 5,011 en 5,012345 liggen.

c Tussen welke twee gehele getallen ligt 6,025? Gebruik de notatie met de kleinertekens.

d Tussen welke twee getallen met twee cijfers achter de komma ligt 5,3496?

Voorbeeld 2

Op rekenmachines en in computerprogramma's wordt vaak in plaats van onze **decimale komma** een punt gebruikt, de Amerikaanse **decimale punt**.
Het getal 16302,54 wordt dan 16302 . 54.

Soms schrijf je in plaats van 16302,54 liever 16 . 302,54.
Vooral bij grotere getallen zoals 120 . 000 . 000 (120 miljoen) is dat handig.

Amerikanen schrijven dan: 16,302 . 54 en 120,000,000.
Ze gebruiken de decimale punt en de decimale komma net andersom dan wij dat doen!
Lekker verwarrend, hè? Op sommige rekenmachines kun je zelf instellen met welke notatie hij werkt.

Opgave 7

Op je rekenmachine krijg je als uitkomst van een berekening het getal 1364 . 45.

a Hoeveel honderdtallen komen er in dit getal voor?

b En hoeveel honderdsten?

Oefenen

Opgave 8

Hieronder zie je acht getallen.

3,4 ; 3 ; 2,95 ; 3,04 ; 3,14 ; 4,3 ; 4,03 ; 3,43

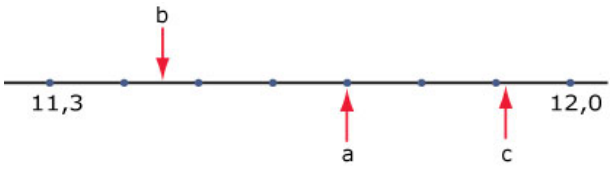
a Schrijf de acht getallen op van klein naar groot.
Gebruik het kleinerteken.

b Hoeveel van deze getallen hebben twee cijfers achter de komma?

c In welke van deze getallen komen 4 tienden voor?

Opgave 9

Schrijf de juiste getallen bij de pijltjes. Alle getallen hebben één of twee cijfers achter de komma.



Figuur 1.3

Opgave 10

Stel je weer een getallenlijn voor.

a Welk getal ligt precies midden tussen 42 en 45?

b Welk getal ligt precies midden tussen 42,01 en 42,02?

c Welk getal ligt precies midden tussen 142,91 en 142,7?

Opgave 11

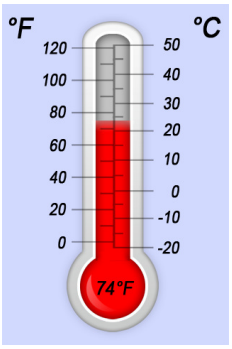
a Hoeveel gehele getallen liggen er tussen 13,52 en 103,52?

b Hoeveel gehele getallen liggen er tussen - 13,52 en 103,52?

Toepassen

Getallenlijnen gebruik je vooral bij het verrichten van metingen met analoge apparaten. Je leest dan af op een schaalverdeling.

Op de Iphone is deze thermometer als app beschikbaar. Er staat een schaalverdeling voor de temperatuur op. De temperatuur staat er niet alleen in graden Celsius, maar ook in graden Fahrenheit. Dat komt omdat in veel Engelstalige landen met graden Fahrenheit wordt gewerkt.
Het nulpunt (de plek waar 0 staat) is op beide schalen verschillend. Dat komt omdat zo'n nulpunt betrekkelijk willekeurig wordt gekozen:



Figuur 1.4

- **Celsius** koos de temperatuur waarbij water bevriest bij een luchtdruk van 1 bar als 0 °C (0 graden Celsius).
- **Fahrenheit** koos de temperatuur van een mengsel van ijs, water en ammoniumchloride (een zout) als 0 °F (0 graden Fahrenheit).

Opgave 12

Hierboven worden twee verschillende temperatuurschalen getoond.

a Op de temperatuurschaal van Celsius zie je ook getallen onder 0. Hoe worden die getallen geschreven? En wat betekenen ze?

b Wat betekent het als de temperatuur buiten -6 °C is?

c De temperatuurschaal van Fahrenheit lijkt geen getallen onder 0 te kennen. Is dat ook zo?

d Voor het maken van zo'n temperatuurschaal zijn afspraken nodig. Onder andere die voor de plaats van het nulpunt. Waarom is er minstens nog één andere afspraak nodig?

e Zoek uit welke andere afspraken Celsius en Fahrenheit nog hebben gebruikt.

Opgave 13

Grote delen van Nederland liggen onder de zeespiegel. Om de hoogte van het land te meten is het (Normaal Amsterdams Peil) ingevoerd: een hoogteschaal waarbij 0 ongeveer overeen komt met het gemiddelde zeeniveau.

a In de Wieringermeerpolder zijn plaatsen die 4,5 m onder zeeniveau liggen. Hoeveel m NAP is dat?

b Het laagste punt van Nederland ligt op 6,76 meter onder het NAP in Nieuwerkerk aan den IJssel. Met welk getal geef je dat aan?

c Dicht bij het drielandenpunt op de Vaalserberg bevindt zich het hoogste punt van het Nederlandse vasteland op 322,20 m boven NAP. Hoeveel hoger is dat dan het laagste punt van Nederland?

Testen

Opgave 14

Bekijk het getal 1234,5.

a Hoe groot is de waarde van het cijfer 2?

b Welk getal is het tegengestelde van 1234,5?

c Welk getal krijg je als je 1234,5 door 100 deelt?

Opgave 15

Bekijk de getallen 1,25; - 4,05; - 4,25 en 1,15.

a Gebruik het kleinerteken om ze op volgorde te zetten

b Hoeveel verschillen het grootste en het kleinste getal van elkaar?

c Welk getal ligt precies midden tussen 1,15 en 1,25?

d Welk getal ligt precies midden tussen - 4,05 en 1,25?

1.2 Rekenen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- decimale getallen handmatig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met decimale getallen op de rekenmachine.

Voorkennis

- positieve en negatieve decimale getallen herkennen;
- decimale getallen op een getallenlijn plaatsen en aflezen welk decimaal getal er bij een bepaalde plaats op een getallenlijn hoort.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze kassabon.

a Reken de kassabon handmatig na.

b Hoe kom je aan de prijs die je voor de gekochte komijnekaas moet betalen?

c Hoe bereken je het bedrag dat je van € 20,= terug krijgt?

BOTER	1,23
PREI	
0,208 kg a 1,92 €/kg	0,40
KOFFIEBROODJE	
4 st a 1,30	5,20
FRIES ROGGEBROOD	0,85
CHOC.HAGEL PUUR	1,30
BRONWATER KOOLZUUR	0,50
STATIEGELD	0,25
KOMIJNEKAAS 30+	
0,360 kg a 10,95 €/kg	3,94
PURE LINZEN	1,21
==========	
Totaal	**€ 14,88**

Figuur 1.1

Uitleg 1

Je wilt weten hoeveel twee getallen samen zijn. Je moet de getallen **optellen**.
Je krijgt dan de **som** van deze getallen.

Je wilt weten hoeveel twee getallen verschillen. Je moet de getallen van elkaar **aftrekken**.
Je krijgt het **verschil** van beide getallen.

Bijvoorbeeld:

2,15 + 3,98 = 6,13

10 – 8,95 = 1,05

Figuur 1.2

Optellen en aftrekken gaat gemakkelijk met je rekenmachine.
Let op: je moet wel een punt gebruiken in plaats van de decimale komma!

Optellen en aftrekken kun je ook met de hand uitvoeren. Je maakt dan gebruik van het tientallig stelsel. Bekijk dit op de website.

Je kunt ook optellen en aftrekken met negatieve getallen.
Hieronder zie je hoe dit gaat.

Bekijk de applet: Positieve en negatieve getallen optellen

Bekijk de applet: Positieve en negatieve getallen aftrekken

Opgave 1

Bereken uit het hoofd.

a 25 + 13

b 59 – 21

c 112 + 99

d 204 – 48

Opgave 2

Vul in:

a 7 + 4 = 11, dus 11 is ... van 7 en 4.

b 7 – 4 = 3, dus 3 is ... van 7 en 4.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 1 op pagina 14** hoe je twee getallen met de hand optelt en aftrekt.

Maak de volgende optellingen en aftrekkingen met de hand. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

a 2531 + 395

b 2531 – 395

c 1543,9 + 56,73

d 1543,9 – 56,73

e 2607 – 9321

Opgave 4

Bekijk nog even in **Uitleg 1 op pagina 14** hoe je met negatieve getallen rekent.
Bereken:

a 16 – 25

b 16 – - 25

c - 16 – 25

d - 16 – - 25

e 105,3 + - 314,2

f - 105,3 – - 314,2

Uitleg 2

Wat kosten 8 schriften van € 1,25 samen?
Je moet **vermenigvuldigen** om het antwoord te vinden: 8 × 1,25 = 10,00.
Je krijgt dan het **product** van deze getallen.
Acht schriften kosten € 10,00.

Hoeveel schriften van € 1,25 kun je voor € 15,00 kopen?

Je moet **delen** om het antwoord te vinden: 15/1,25 = 12.
12 is het **quotiënt** van 15 en 1,25. Je ziet dat voor delen het teken / gebruikt wordt en niet langer de dubbele punt (mocht je dit gewend zijn).
Voor € 15,00 kun je 12 schriften kopen.

Figuur 1.3

Dergelijke vermenigvuldigingen en delingen kun je met je rekenmachine doen.

Maar je kunt ze ook met de hand uitvoeren. Bekijk dit op de website.

Je kunt ook met negatieve getallen vermenigvuldigen en delen.

Bij vermenigvuldigen en delen hebben getallen met hetzelfde teken een positieve uitkomst en getallen met verschillende tekens een negatieve uitkomst.

Opgave 5

Bereken uit het hoofd.

a 20 × 13

b 130/5

c 1,12 × - 50

d - 28,40/ -40

Opgave 6

Vul in:

a 7 × 42 = 294 is ... van 7 en 42.

b 42/7 = 6, dus 6 is ... van 42 en 7.

Opgave 7

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 16** hoe je twee getallen met de hand vermenigvuldigt en deelt.

Maak de volgende vermenigvuldigingen en delingen met de hand. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

a 624 × 39

b 624/39

c 5967 × 17

d 5967/17

e 32,24 × 1,24

f 32,24/1,24

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt met decimale getallen **rekenen**. De vier basisbewerkingen zijn:

- **optellen**, je krijgt dan de **som** van beide getallen;
- **aftrekken**, je krijgt dan het **verschil** van beide getallen;
- **vermenigvuldigen**, je krijgt dan het **product** van beide getallen;
- **delen**, je krijgt dan het **quotiënt** van beide getallen.

Je kunt deze bewerkingen zowel met de hand uitvoeren (zie voorbeelden) als met de rekenmachine.

Verder kun je zowel met positieve als negatieve getallen rekenen.

Bekijk de applet: Positieve en negatieve getallen optellen

Bekijk de applet: Positieve en negatieve getallen aftrekken

Bij vermenigvuldigen en delen hebben getallen met hetzelfde teken een positieve uitkomst en getallen met verschillende tekens een negatieve uitkomst.

Voorbeeld 1

Bij het met de hand optellen en aftrekken van getallen met decimalen (cijfers achter de komma) moet je rekening houden met de plek van de decimale komma.

Hoe bijvoorbeeld 420,1 – 39,57 gaat zie je op de website.

Als je 39,57 – 420,1 handmatig wilt berekenen, dan doe je hetzelfde als hiervoor. Alleen doe je dan het tegengestelde van wat je wilt doen. Daarom geef je het antwoord een negatiefteken: 39,57 – 420,1 = -380,53.

Figuur 1.4

Opgave 8

Bekijk nog even in **Voorbeeld 1 op pagina 17** hoe je met negatieve getallen en decimalen rekent. Bereken:

a 160,34 – 25,9

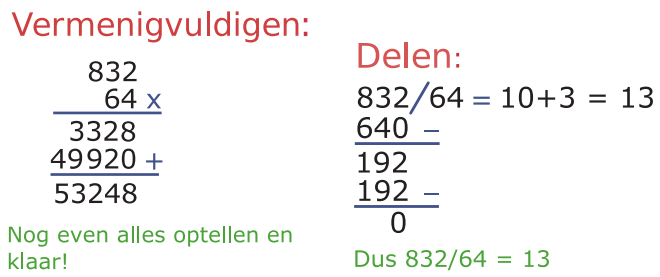
b 25,9 – 160,34

c 105,3 + - 314,2

d - 105,3 – - 314,2

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je decimale getallen met de hand vermenigvuldigt en deelt. Soms blijft er bij deling een **rest** ongelijk aan 0 over. Dat betekent dat je een getal overhoudt dat kleiner is dan het getal waar je door deelt, maar niet 0 is.



Figuur 1.5

Opgave 9

Bereken met de hand. Controleer je antwoorden met de rekenmachine.

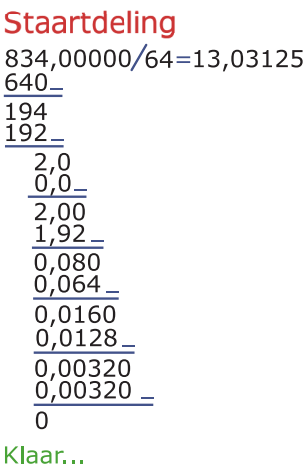
a Bereken het product van 3783 en 291.

b Bereken het quotiënt van 3783 en 291.

c Bereken het quotiënt van 2648 en 115. Hoeveel bedraagt de rest?

Voorbeeld 3

Sommige delingen komen uit als je tot achter de komma door gaat.



Figuur 1.6

Opgave 10

Soms moet je doorgaan tot achter de decimale komma om een deling te laten uitkomen. Bereken nu zelf met de hand

a 738/16

b 5204,654/91

Oefenen

Opgave 11

Doe de volgende optellingen en aftrekkingen met de hand. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

a 341 + 1715

b 341 – 1715

c 22,39 – 7,6

d 22,39 – -7,6

e 0,123 + 0,049

f -0,123 – 0,049

Opgave 12

Je kunt 1264 – 913 ook uitrekenen door 913 aan te vullen tot 1264:
913 + 7 + 80 + 264 = 1264, dus 1264 – 913 = 7 + 80 + 264 = 351.
Bereken op deze manier:

a 2573 – 2412

b 6,72 – 5,38

Opgave 13

Bereken met de hand en controleer je antwoord achteraf met de rekenmachine.

a 1645 – 797 – 418

b 1645 + 797 – 418

c 1645 – 797 + 418

d 1645 + 797 + 418

Opgave 14

Doe de volgende vermenigvuldigingen en delingen met de hand. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

a 1734 × 51

b 1734/51

c 23,56 × 3,1

d 23,56/3,1

e 1,23 × - 0,05

f 1,23/ -0,05

Opgave 15

12 × 98 kun je met de hand uitrekenen door 12 × 90 + 12 × 8 te doen.
Handiger is 12 × 98 = 12 × 100 – 12 × 2.

a Licht deze handiger berekening toe.

b Bereken op dezelfde manier 97 × 14.

c Bereken 115 × 99 met de hand.

Opgave 16

Bereken met de hand en controleer je antwoord achteraf met de rekenmachine.

a 1645 × - 97/25

b 1645/ -35 × - 418

c 112,6 × 52/2,6

d 150/1,25/ -32

Opgave 17

Vul op de stippeltjes het juiste getal in:

a 1645 × ... = 41,125

b 1645/... = - 23,5

c 2,56 × ... = 87,04

d 2,56/... = 128

Toepassen

Het Empire State Building is 381 m hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Het gebouw heeft 103 verdiepingen die samen ongeveer 373 m hoog zijn. Daar boven op staat nog een torentje. Op de punt van dat torentje staat nog een antenne die 61 m hoog is. De entree op de begane grond beslaat vier verdiepingen, de lobby is drie verdiepingen hoog.
Op de 87e verdieping is het 'Observatory' dat elke dag open is en waar jaarlijks 3,5 miljoen bezoekers komen. Je kunt er vanaf de begane grond in net iets minder dan een minuut met één van de 73 liften komen.

Figuur 1.7

Opgave 18

Hierboven vind je informatie over het Empire State Building in New York.

a Laat zien dat elke verdieping ongeveer 3,62 m hoog is. Hoe hoog is de lobby?

b Je kunt met trappen naar boven tot de 103e verdieping. Een traptrede is 20,1 cm hoog. Hoeveel traptreden zijn er per van de begane grond tot het 'Observatory'?

c Met hoeveel meter per minuut gaat de lift naar het 'Observatory'?

d Hoeveel bezoekers heeft het "Observatory" gemiddeld per dag?

Opgave 19

Je wilt in je kamer nieuwe gordijnen hangen. Je koopt gordijnstof in verticale banen van 0,90 m breed. Je hebt twee ramen in je kamer. Die ramen zijn 1,30 m hoog en beide ramen zijn 2,10 m breed. De gordijnrail steekt aan weerszijden van de ramen 20 cm uit.
Je hangt een gordijn altijd in plooien, dus je gordijn krijgt een totale breedte van anderhalf keer de lengte van de rails. De gordijnstof die je hebt uitgezocht kost € 23,95 per meter lengte.

a Je neemt 8 banen gordijnstof met een lengte van 1,50 m. Waarom neem je die lengte?

b Bereken de totale lengte van de rail en daarmee hoe breed het totale gordijn zou moeten worden.

c Als je 8 banen van 0,90 m breedte koopt, heb je wel genoeg gordijnstof, maar dan plooien de gordijnen niet erg. Laat dat met een berekening zien.

d Hoeveel kost de gordijnstof in totaal?

Opgave 20

Je wilt je kamer opnieuw behangen. Die kamer is netjes rechthoekig en 3,5 m breed en 4 m lang. De hoogte van de kamer is overal 2,80 m. Verder zit er in je kamer een deur van 1 m breed en 2,15 m hoog en een raam van 2 m breed en 1 m hoog. Behang kun je kopen op rollen van 60 cm breed en 10 m lang. Het behang dat je wilt hebben kost € 16,80 per rol.

Hoeveel kost het je aan behang?

Testen

Opgave 21

Voer de volgende berekeningen eerst met de hand uit. Controleer ze vervolgens met je rekenmachine.

a 2,55 + 15,81

b 2,55 – 15,81

c 2,55 × 15,81

d 15,81/2,55

Opgave 22

Bekijk de getallen 1,25; - 4,05; - 4,25 en 1,15.
Doe de volgende berekeningen met de hand en controleer je antwoorden met een rekenmachine.

a Bereken de som van deze getallen.

b Bereken het positieve verschil van het tweede en het derde getal.

c Bereken het product van het tweede en het derde getal.

d Bereken het quotiënt van het derde en het eerste getal.

Opgave 23

Vul op de stippeltjes het juiste getal in:

a 456 – ... = - 98

b 456/... = - 76

1.3 Rekenvolgorde

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de juiste rekenvolgorde gebruiken.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen.

Verkennen

Opgave V1

Je gaat met drie vriend(inn)en koffie drinken met een lekkere appelpunt erbij. De koffie kost € 1,65 en een appelpunt is € 3,25.

a Eén van jullie berekent hoeveel het moet gaan kosten. Dat levert deze berekening op $1{,}65 + 3{,}25 \times 4$. Waarom is dit geen goede berekening?

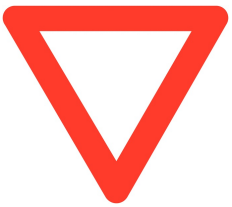
b Hoe kun je door het toevoegen van haakjes de berekening kloppend maken?

c Kun je de berekening op een andere manier kloppend maken?

Uitleg

Bij rekenen zijn voorrangsregels afgesproken:

1. Eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Dan machtsverheffen en worteltrekken van links naar rechts.
3. Dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
4. Tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.



Figuur 1.1

Hierin is machtsverheffen het herhaaldelijk met hetzelfde getal vermenigvuldigen: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

En hierin is worteltrekken het terugrekenen vanuit een kwadraat: $\sqrt{64} = 8$ want $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

Dus:

- $(6 + 3) \times 2 = 9 \times 2 = 18$
- $3 \times 8/4 + 2 = 24/4 + 2 = 6 + 2 = 8$
- $3 \times \frac{8}{4+2} = 3 \times 8/(4 + 2) = 24/6 = 4$
- $6 + 4 - 3 = 10 - 3 = 7$
- $5 \times 2^4 - \sqrt{10^2 - 8^2} = 5 \times 16 - \sqrt{100 - 64} = 80 - \sqrt{36} = 80 - 6 = 74$

Verder mag je bij optellen en vermenigvuldigen de volgorde verwisselen:

- $5 + 2 = 2 + 5$
- $5 \times 2 = 2 \times 5$

Bij aftrekken, delen en machten kan dit niet zo maar:

- $5 - 2 \neq 2 - 5$
- $5/2 \neq 2/5$
- $5^2 \neq 2^5$

Opgave 1

Bekijk de berekeningen in de uitleg.

a Leg het verschil uit tussen $3 \times 8/4 + 2$ en $3 \times \frac{8}{4+2}$

b Leg uit waarom $\sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

c Bereken: $\frac{6 \cdot 3^4}{\sqrt{16}+5}$.

Opgave 2

Bereken zonder rekenmachine. Laat zien welke rekenvolgorde je gebruikt.

a $12/4 \times 3^2$

b $12 + 4 \times 3^2$

c $(12 + 4) \times 3^2$

d $12/4 - 3^2$

e $\frac{12}{4-3^2}$

f $\sqrt{15^2 - 9^2} - 4 \times 3^2$

Opgave 3

Je wilt berekenen: $15/(13 - 8) + (10 \times 3 + 2)$.

a Welke haakjes zijn hier nutteloos?

b Bereken het juiste antwoord. Laat zien welke volgorde je hanteert.

c Bereken: $15/(13 - 8) + 10 \times (3 + 2)$.

Opgave 4

Bij sommige berekeningen is het handig om de volgorde te verwisselen.

a Waarom kun je $102 + 129 + 98$ beter berekenen door het te schrijven als $102 + 98 + 129$?

b Waarom kun je $102 + 129 - 98$ niet berekenen door het te schrijven als $102 + 98 - 129$?

c Waarom kun je $4 \times 36 \times 0{,}5$ beter berekenen door het te schrijven als $4 \times 0{,}5 \times 36$?

d Waarom kun je $4 \times 36/0{,}5$ niet berekenen door het te schrijven als $4 \times 0{,}5/36$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij rekenen gebruik je deze **voorrangsregels**:

1. Eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Dan machtsverheffen en worteltrekken van links naar rechts.
3. Dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
4. Tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Machtsverheffen is het herhaaldelijk met hetzelfde getal vermenigvuldigen: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

Worteltrekken is het terugrekenen vanuit een kwadraat: $\sqrt{64} = 8$ want $8^2 = 8 \times 8 = 64$.
Worteltrekken levert niet altijd een exact reëel getal op, vaak moet je afronden.

LET OP:
De lange deelstreep en de lange streep aan een wortelteken vervangen haakjes:
$\frac{6}{5+7} = 6/(5+7) = 6/12 = 0{,}5$ en $\sqrt{16+9} = \sqrt{(16+9)} = \sqrt{25} = 5$.

Voorbeeld 1

Bereken, denk om de voorrangsregels:

- $5 \times \sqrt{12^2 + 5^2} - 3 + 2^4$
- $5 \times \sqrt{12^2} + \sqrt{5^2} - (3+2)^4$
- $5 \times \sqrt{12^2 + 5^2} \,/\, 3 + 2^4$
- $\frac{5 \times \sqrt{12^2+5^2}}{3+2^4}$
- $5 - \sqrt{12^2 + 5^2} - 3 \times -2^4$
- $5 - \sqrt{12^2 + 5^2} - (3 \times -2)^4$

Antwoord

- $5 \times \sqrt{12^2 + 5^2} - 3 + 2^4 = 5 \times \sqrt{169} - 3 + 16 = 5 \times 13 - 3 + 16 = 65 - 3 + 16 = 78$
- $5 \times \sqrt{12^2} + \sqrt{5^2} - (3+2)^4 = 5 \times 12 + 5 - 5^4 = 60 + 5 - 625 = -560$
- $5 \times \sqrt{12^2 + 5^2} \,/\, 3 + 2^4 = 5 \times \sqrt{169} \,/\, 3 + 16 = 5 \times 13/3 + 16 = \frac{65}{3} + \frac{48}{3} = \frac{113}{3}$
- $\frac{5 \times \sqrt{12^2+5^2}}{3+2^4} = \frac{5 \times \sqrt{169}}{3+16} = \frac{5 \times 13}{19} = \frac{65}{19}$
- $5 - \sqrt{12^2 + 5^2} - 3 \times -2^4 = 5 - \sqrt{169} - 3 \times -16 = 5 - 13 + 48 = 40$
- $5 - \sqrt{12^2 + 5^2} - (3 \times -2)^4 = 5 - \sqrt{169} - (-6)^4 = 5 - 13 - 1296 = -1304$

Opgave 5

Bereken zonder rekenmachine.

a $2^3 \times 4 + 6 \big/ \sqrt{9}$

b $2^7 + \frac{6}{\sqrt{9-5}}$

c $(2^7 + 6) \big/ \sqrt{9-5}$

d $30/3 \times 5 - \sqrt{3^3 - 18}$

e $(12 - 3^2)^3 \times 2$

f $\frac{2 \times 3^2}{9-3}$

Opgave 6

Maak de volgende berekeningen kloppend door haakjes te plaatsen.

a $5 - 2 \times 8 = 24$

b $3 \times 4^2 \big/ 12 - 3 + 1 = 0$

c $15 - 2 \times \sqrt{36} - 11 = 5$

d $5 + 3/3 - 2 = 8$

e $(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = 4$

f $3 - 1 + 2 \big/ \sqrt{25} - 4 = 0$

Voorbeeld 2

Aan een tafel in de pizzeria zitten vier mensen.
Ze bestellen alle vier een pizza van € 9,= en een glas cola van € 1,45.
De ober tikt op de kassa $4 \times 9 + 1{,}45$ in. Hij vindt als bedrag € 37,45.

Aan het eind van de avond, als de bestellingen en de kassa-inkomsten met elkaar vergeleken worden, ontbreekt er een bedrag. De bediening is teleurgesteld, want het tekort wordt op de ontvangen fooien in mindering gebracht. De ober ontdekt meteen zijn fout. Wat is er misgegaan?

Antwoord

Hij had moeten doen: $4 \times 9 + 4 \times 1{,}45$, of $4 \times (9 + 1{,}45)$.

Opgave 7

Evelien verdient iedere week € 3,50 met het rondbrengen van folders en € 5,50 met oppassen. Als ze na een jaar (van 52 weken) sparen een aardig bedrag voor een vakantie bijeen heeft, doen haar ouders er nog € 100,00 bij.

Welk bedrag heeft ze dan? Schrijf je antwoord als één berekening op.

Oefenen

Opgave 8

Voer de volgende berekeningen handmatig uit en let daarbij op de juiste rekenvolgorde.
Controleer je antwoorden met de rekenmachine.

a $6 \times 13 - 2 \times \sqrt{6^2 + 8^2} = ...$

b $12 + 9 \times (-10)^2 = ...$

c $19 - 32 \big/ 2^3 = ...$

d $\left(7^2 + \sqrt{225}\right) \big/ 4^2 - 2 = ...$

Opgave 9

Koffie kost € 2,25 per kop en de bijpassende punt appeltaart is € 3,60. 12 personen bestellen koffie met appeltaart.
Bij het afrekenen doet de ober op zijn rekenmachine $2{,}25 + 3{,}60 \times 12$.

Hoeveel betaalt deze groep te weinig?

Opgave 10

Jaap zegt tegen Joop: “Twee keer zestig min acht gedeeld door vier is toch zesentwintig?”
Joop antwoordt: “Nee hoor, daar komt achtentwintig uit.”

Wie heeft gelijk? Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Je wilt je vakantiefoto's laten afdrukken om in een fotoalbum te plakken. Op internet vind je de tarieven van FotoFix:

- de administratiekosten zijn € 2,25 per bestelling;
- het afdrukken van minder dan 40 foto's kost € 0,19 per foto;
- het afdrukken van 40 foto's of meer kost € 0,16 per foto;
- de bezorgkosten zijn € 2,95 per bestelling.

Je bestelt eerst 60 afdrukken en verstuurt je opdracht met de foto's erbij.
Nu blijkt echter dat je nog 15 foto's vergeten bent en daarvan bestel je opnieuw 15 afdrukken.

Hoeveel kost dit in totaal? Schrijf je antwoord als één berekening op.

Opgave 12

Voer de volgende berekeningen handmatig uit en let daarbij op de juiste rekenvolgorde.
Controleer je antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3^4 + \sqrt{81}}{3^2 \cdot \sqrt{50 - 5^2}} = ...$

b $\left(3^4 + \sqrt{81}\right) \big/ 3^2 \cdot \sqrt{50 - 5^2} = ...$

c $3^4 + \sqrt{81} \big/ 3^2 \cdot \sqrt{50 - 5^2} = ...$

Opgave 13

Maak de volgende berekeningen kloppend door haakjes te plaatsen.

a $4 \times 3^3 \,/\, \sqrt{100} - 19 = 12$

b $(-2)^4 - (-2)^3 + (-2)^2 - -2 = 22$

Toepassen

Jaren geleden introduceerde het bedrijf Smith's de flippo. In elk pak chips zat er één en je kon ze sparen. Een flippo was een rond schijfje met op de achterkant vier getallen van 1 tot en met 9. Het was de bedoeling om daarmee het 24-spel te spelen: maak met de vier gegeven getallen door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en/of haakjes gebruiken het getal 24.

Figuur 1.2

Opgave 14

Speel het 24-spel in de volgende situaties.

a De vier getallen zijn 3, 4, 8 en 9.

b De vier getallen zijn 4, 6, 6 en 8.

c De vier getallen zijn 3, 5, 7 en 8.

d De vier getallen zijn 1, 4, 7 en 9.

Opgave 15

Je hebt precies drie getallen tot je beschikking:

2, 3 en 4

Elk van deze getallen gebruik je precies één keer.
Je kunt er door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen andere (gehele) getallen mee maken.
Bijvoorbeeld:
$2 \times (3 + 4) = 14$.

Hoeveel verschillende gehele getallen kun je zo maken?
(Geef bij elk getal ook alle mogelijke manieren om het met deze drie getallen te maken!)

Testen

Opgave 16

Voer de volgende berekeningen met de hand uit. Controleer ze vervolgens met je rekenmachine.

a $12 + \frac{15}{2^3 - 5}$

b $\frac{6 \times 10 + \sqrt{\frac{80}{5}}}{0{,}3 \times (-10)^2 - 14}$

Opgave 17

Je koopt vijf boekenplanken van € 9,75 per stuk.
Bij elke boekenplank horen twee beugels van € 2,69 per stuk.
Verder koop je een zakje geschikte schroeven en bijpassende pluggen voor bevestigen aan de muur. Het zakje schroeven kost € 5,40 en het zakje pluggen kost € 2,35.

a Wat is er mis met deze berekening van de totale kosten: $9{,}75 + 2 \times 2{,}69 \times 5 + 5{,}40 + 2{,}35$ euro.

b Bereken het juiste totaalbedrag.

Opgave 18

Maak deze berekeningen kloppend door haakjes te plaatsen.

a $40 - 25/2 + 1 = 5$

b $2^5 + 31 \cdot 2^2 \big/ \sqrt{16} + 3^3 = 36$

1.4 Afronden en schatten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- decimale getallen op de juiste wijze afronden;
- de uitkomst van een berekening van te voren schatten of in ieder geval de orde van grootte vaststellen.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen met de juiste rekenvolgorde.

Verkennen

Opgave V1

Als je in een winkel bent, dan zie je veel bedragen staan van € 29,99 of € 2,49.
Dat doen winkeliers vaak omdat het dan lijkt of het bedrag lager is dan het in werkelijkheid is.

a Als je een mooi T-shirt van € 29,99 contant afrekent, hoeveel betaal je dan?

b Hoe heet het als je van getallen gehele getallen maakt?

Opgave V2

Je gaat met drie vrienden koffiedrinken met een lekkere appelpunt erbij. De koffie kost € 1,65 en een appelpunt is € 3,25. Jij betaalt de hele rekening.

a Heb je aan 20 euro genoeg?

b Bij het afrekenen moet je $4 \times 1{,}65 + 3{,}25 = 9{,}85$ euro betalen. Waarom kan dit nooit goed zijn?

c Hoeveel moet je wel betalen?

Uitleg 1

Vaak heb je na een berekening een getal in een flink aantal decimalen. Lang niet alle cijfers zijn van belang, zijn significant. Daarom rond je af tot alleen de significante cijfers overblijven.

Als je een getal wilt afronden op twee decimalen nauwkeurig, dus op twee cijfers achter de komma, dan kijk je naar de derde decimaal. Is de derde decimaal een 0, 1, 2, 3 of 4, dan rond je af naar beneden (de tweede decimaal blijft gelijk):

- $17{,}7834 \approx 17{,}78$
- $0{,}67285 \approx 0{,}67$

Is de derde decimaal een 5, 6, 7, 8 of 9, dan rond je af naar boven (je telt bij de tweede decimaal 1 op):

- $12{,}7864 \approx 12{,}79$
- $0{,}67914 \approx 0{,}68$

Het teken = betekent: ‘is precies gelijk aan’. Het teken ≈ betekent: ‘is ongeveer gelijk aan’. Als je een getal afrondt, gebruik je dus ≈.

Als je bijvoorbeeld 2,49 wilt afronden op een geheel getal, kijk je alleen naar het eerste cijfer achter de komma. Je kijkt niet naar de tweede decimaal: $2{,}49 \approx 2$.

Je rondt in de praktijk niet altijd af naar het getal dat het dichtst in de buurt van je uitkomst ligt:

- Marieke is 15 jaar en 11 maanden oud. Ze mag nog niet op een brommer rijden, want ze is nog geen 16. Haar leeftijd wordt naar beneden afgerond.
- Voor het bakken van zeven grote pizzabodems heb je 1100 gram bloem nodig. Bloem wordt verkocht in pakken van 1000 gram. Als je zeven pizzabodems wilt bakken, koop je niet één, maar twee pakken bloem. Het aantal pakken bloem wordt naar boven afgerond.

Opgave 1

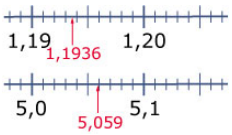
Iemand heeft een 6 als eindcijfer. Maar ze staat gemiddeld niet precies een 6.

a Welk cijfer staat ze minstens gemiddeld?

b Welk cijfer heeft ze hoogstens als eindcijfer?

Opgave 2

Leg aan de hand van de figuren uit waarom:



Figuur 1.1

a 1,1936 op drie decimalen afgerond gelijk is aan 1,194.

b 1,1936 op twee decimalen afgerond gelijk is aan 1,19.

c 5,059 op twee decimalen afgerond gelijk is aan 5,06.

d 5,059 op één decimaal afgerond gelijk is aan 5,1.

Opgave 3

Gebruik het ongeveerteken. Rond af op vier decimalen.

a 0,785607

b 32,359952

Opgave 4

Gebruik het ongeveerteken. Bereken en rond je antwoord af op twee decimalen.

a $3 \times 0{,}3134 + 4 \times 0{,}052$

b $3 \times 0{,}3134 - 4 \times 0{,}052$

c $\frac{0{,}36}{9{,}15}$

d $\frac{9{,}15}{0{,}36}$

Uitleg 2

Schatten betekent grof afronden.

Je gebruikt schatten bijvoorbeeld om uit te rekenen hoeveel iets ongeveer gaat kosten of hoeveel verf je ongeveer nodig hebt om je kamer te schilderen. Je rondt dan de preciese bedragen of maten grof af op getallen waarmee je gemakkelijk kunt rekenen.

Ook bij berekeningen op je rekenmachine is het verstandig om van tevoren de uitkomst te schatten.

Soms is het handig om ruim te schatten. Dan rond je alle getallen naar boven af. Je hebt natuurlijk geen zin om een dagje naar een pretpark te gaan en dan geen geld meer te hebben om wat te drinken of te eten te kopen.

Soms geef je alleen aan dat een getal tussen de 100 en de 1000 of tussen de 1000 en de 10000 ligt. Dit heet: de orde van grootte.

Opgave 5

Je rekent op een rekenmachine uit 628,463/0,95. Je antwoord is 66154.

a Waarom kan dit nooit goed zijn?

b Kennelijk ben je de decimale komma vergeten. Waar moet de komma in het antwoord? Gebruik geen rekenmachine!

Opgave 6

Je gaat met drie vrienden pizza eten. Jullie eten twee Margherita's van € 6,95 per stuk en twee Marinara's van € 10,50 per stuk. Verder drinken jullie alle vier een glas fris van € 2,75 per stuk.

Heb je aan € 50,00 genoeg als je alles in één keer wilt afrekenen? Gebruik geen rekenmachine.

Opgave 7

Bij de volgende opgaven ontbreekt in het antwoord de komma. Zet de komma op de juiste plaats door het antwoord te schatten (gebruik dus geen rekenmachine).

a $879{,}4 + 54{,}75 = 93415$

b $4376{,}7 - 3887{,}24 = 48946$

c $4{,}58 \times 16{,}2 = 74196$

d $5743 \times 6{,}5 = 373295$

e $\frac{651{,}298}{13{,}7} = 4754$

f $\frac{126{,}96552}{101{,}2} = 12546$

Opgave 8

Bepaal zonder rekenmachine de orde van grootte van het antwoord.

a 24×512

b $0{,}24 \times 512$

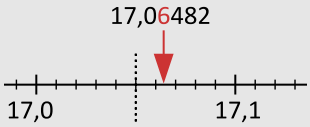
c $\frac{24}{512}$

d $\frac{0{,}24}{512}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Afronden betekent dat je een getal eenvoudiger schrijft, met minder cijfers. Je doet dit om de cijfers die niet belangrijk zijn in een bepaalde situatie buiten beschouwing te laten.
Alleen de **significante cijfers** (betekenisvolle cijfers) blijven over.



Figuur 1.2

Heb je 17,06482 als uitkomst van een berekening en moet je in één decimaal nauwkeurig werken, dan kijk je (alleen) naar de tweede decimaal

- Is de tweede decimaal 4 of lager dan rond je naar beneden af.
  De eerste decimaal verandert dan niet.
- Is de tweede decimaal 5 of hoger dan rond je naar boven af.
  De eerste decimaal wordt dan 1 hoger.

Dus 17,06482 ≈ 17,1 als je op één decimaal nauwkeurig moet afronden.
Het teken ≈ betekent 'ongeveer'.

Schatten is grof afronden.
Je doet dit omdat je dan getallen krijgt waarmee je gemakkelijk uit het hoofd kunt rekenen.
Je kunt vooraf uit het hoofd bepalen hoeveel er ongeveer uit een berekening zal komen. En daarmee kun je foute berekeningen voorkomen.

Soms geef je alleen aan dat een getal tussen bijvoorbeeld de 100 en de 1000 of tussen de 1000 en de 10000 ligt. Dit heet: de **orde van grootte**.

Voorbeeld 1

Een eindcijfer is vaak een geheel getal vanaf 1 t/m 10. Dit betekent dat maar één cijfer significant is. Je moet dit eindcijfer berekenen uit onderzoeksverslagen en toetsen. Het hangt er dan van af hoe vaak deze meewegen. Neem aan dat een onderzoeksverslag twee keer zo zwaar weegt als een toets.

Je hebt de volgende resultaten:

- toetsen: 7,5 en 6,9 en 8,1
- onderzoeksverslagen: 8,0 en 5,4

Bereken het juiste eindcijfer, zowel op één decimaal nauwkeurig als afgerond op een geheel getal.

Antwoord

Je telt eerst alle resultaten bij elkaar op en houdt daarbij rekening met hoe vaak een resultaat meetelt:

$7{,}5 + 6{,}9 + 8{,}1 + 8{,}0 \times 2 + 5{,}4 \times 2 = 49{,}3$

Dit deel je door het aantal keer dat elk resultaat meeweegt, dus door: $1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$.

$\frac{49{,}3}{7} = 7{,}04285714...$

Je eindcijfer is afgerond op één decimaal een 7,0.
Je eindcijfer is afgerond op gehele getallen een 7.

Opgave 9

Voor een bepaald vak heb je twee toetsen en drie verslagen gemaakt en één presentatie gehouden. Voor de toetsen heb je een 7,8 en een 6,4 en voor de verslagen een 4,2, een 7,3 en een 8,1 gescoord. De presentatie is met een 8 beoordeeld. Voor het eindcijfer wegen de toetsen drie keer zo zwaar en weegt de presentatie twee keer zo zwaar als een verslag.

a Bereken het eindcijfer afgerond op één decimaal.

b Bereken het eindcijfer afgerond op een geheel getal.

Opgave 10

Rond de volgende getallen af op twee decimalen nauwkeurig.

a 15,0374

b 15,0347

c 15,3074

d 15,3047

Voorbeeld 2

Vaak is het handig om eerst een schatting van een deel te maken en dan het totaal te schatten.

- Een Italiaans restaurant wil weten hoeveel pizza's men per jaar verkoopt. Ze tellen een week lang hoeveel pizza's ze verkopen en vermenigvuldigen dat aantal met 52.
- Je wilt weten hoeveel spaghetti er nodig is voor veertien personen. Een handvol spaghetti geeft een schatting van de hoeveelheid spaghetti voor één persoon. Die hoeveelheid neem je dan met 14 keer.

Soms maak je een schatting door te vergelijken met een afmeting die je kent.

- Je weet hoe lang je zelf bent. Dus zal een deur ongeveer 2 meter hoog zijn.
- Een deur is ongeveer 2 meter. Dus de verdiepingen van een flat zullen tussen 2,5 meter en 3 meter in zitten. Een flat van tien verdiepingen zal dus zo'n kleine 30 meter hoog zijn.

Opgave 11

In februari moet iemand € 19,35 betalen voor zijn smartphonegebruik.

Schat welk bedrag deze persoon per jaar kwijt is aan zijn smartphonegebruik. Leg ook uit waarom het lang niet zeker is dat het geschatte bedrag het werkelijke bedrag is.

Opgave 12

Maak een schatting van de hoogte van het flatgebouw. Licht je antwoord toe.

Figuur 1.3

Opgave 13

Maak eerst een schatting van het antwoord en reken vervolgens het antwoord uit.

a 39,8 + 213

b 753,14 – 25,5

c $\frac{682{,}5}{250}$

d 1209 × 4,92

Oefenen

Opgave 14

Rond de getallen af op één decimaal.

a 12,36

b 312,139

Rond de volgende getallen af op twee decimalen.

c 4,5549

d 12,506

Opgave 15

Je hebt een strook kunststof folie van 2 bij 10 m.
Daarmee ga je ronde tafelbladen bekleden, alleen de bovenkant. De randen worden met aan speciaal profiel afgewerkt.
De oppervlakte van een cirkel is $\pi \times r^2$, waarin r de straal van de cirkel is. Van deze tafelbladen is $r = 0{,}73$ m.

a Hoeveel van die tafelbladen kun je bekleden als je alleen ronde stukken uitsnijdt? Maak eerst een schatting.

b Bereken hoe groot elk ronde stuk moet zijn afgerond op gehele cm^2.

Opgave 16

Je hebt in een bepaalde periode voor een bepaald vak drie toetsen gemaakt en een 6,1, een 8,4 en een 7,6 gehaald. Daarnaast heb je een presentatie gehouden waarvoor je een 7,5 kreeg. Voor de twee practicumverslagen heb je een 9,1 en een 6,6 gehaald. De toetsen worden drie keer zo zwaar en de presentatie wordt twee keer zo zwaar als de practicumverslagen meegeteld. Bereken het eindcijfer van die periode op één decimaal nauwkeurig en ook afgerond op een geheel getal.

Opgave 17

In winkels wordt bij contant betalen niet langer met eurocenten gerekend. Alle bedragen worden bij de kassa afgerond op veelvouden van vijf eurocent.

a Hoeveel wordt € 10,99 aan de kassa?

b Hoeveel wordt € 8,86 aan de kassa?

c Wat kun je beter doen: in één keer vier flessen cola van € 1,29 per stuk kopen of vier keer één fles?

Opgave 18

Iemand vindt met zijn rekenmachine $\frac{1204}{15{,}6} = 7{,}717948718$.

a Waarom zie je meteen dat in het antwoord de komma niet op de juiste plaats staat?

b Laat met behulp van een schatting zien waar de komma hoort te staan.

c Waarom is het voor de plaats van de komma genoeg als je de orde van grootte van het antwoord weet?

d Waarom mag je zelfs met de komma op de juiste plek geen isgelijkteken gebruiken in deze berekening?

e Geef het juiste antwoord afgerond op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 19

Bereken. Maak eerst een schatting van het antwoord.

a $31{,}5 + 2{,}8$

b $31{,}5 - 2{,}8$

c $31{,}5 \times 2{,}8$

d $\frac{31{,}5}{2{,}8}$

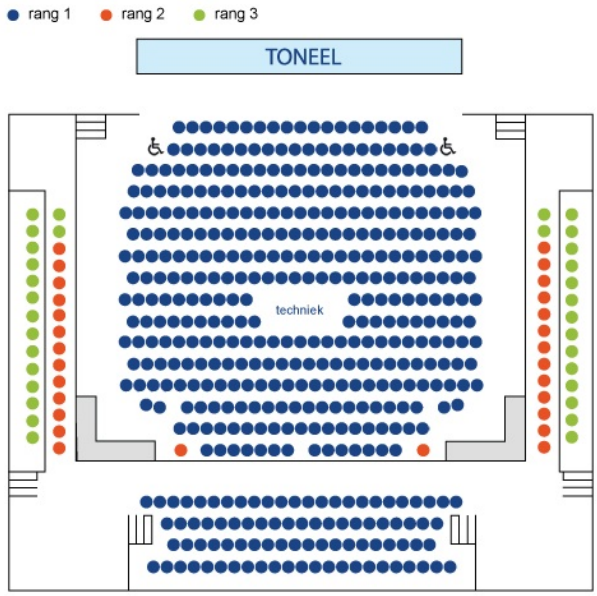
Toepassen

Het schatten van afmetingen en hoeveelheden en dergelijke is in de praktijk nogal belangrijk. Hoe beter je schattingen, hoe nauwkeuriger je bijvoorbeeld bepaalde kosten kunt berekenen zonder dat je veel tijd moet stoppen in het doen van metingen en langdurige tellingen.

Hier zie je daar een paar voorbeelden van.

Opgave 20

Schat het aantal zitplaatsen in deze concertzaal.



Figuur 1.4

Opgave 21

Hier zie je een Amerikaanse schoolbus.

a Hoe hoog schat je deze bus?

b Hoe lang schat je deze bus?

c Hoeveel scholieren zal deze bus ongeveer kunnen vervoeren?

Figuur 1.5

Opgave 22

Hier zie je twee flessen. In de kleine fles gaat 1 liter.

Hoeveel gaat er ongeveer in de grote fles?

Figuur 1.6

Testen

Opgave 23

Rond de getallen af op twee decimalen.

a 14,6384

b 12,381

Opgave 24

Bereken. Maak eerst een schatting van het antwoord.

a 53,2 + 4,7

b 18,4 – 2,6

c 3,8 × 4,3

d $\frac{18,6}{3,2}$

Opgave 25

Je gaat een macaronischotel maken. Daarvoor zijn de volgende ingrediënten nodig: een pak macaroni voor € 0,83, een pak gehakt voor € 3,00, een paprika voor € 0,46, een blikje tomatenpuree voor € 0,09 en een prei voor € 0,23.

a Hoeveel kost dit ongeveer?

b Je betaalt met € 10,00. Hoeveel krijg je terug?

1.5 Machten van 10 en technische notatie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- grote of kleine getallen schrijven met behulp van machten van 10;
- de wetenschappelijke notatie gebruiken en daarmee rekenen;
- de technische notatie gebruiken en daarmee rekenen.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen met de juiste rekenvolgorde;
- afronden en significante cijfers gebruiken;
- het begrip macht en met machten werken.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand tegen je zegt dat er in 2017 precies 17 . 203 . 670 Nederlanders waren, geloof je hem natuurlijk niet.

a Waarom niet?

b Kun je een meer zinvolle uitspraak doen?

c Hoe kun je een getal als 17000000 overzichtelijker opschrijven?

Uitleg 1

Grote getallen met veel nullen kun je beter wat overzichtelijker noteren.

Neem bijvoorbeeld het aantal Nederlanders in 2016. Dat ligt rond de 17000000.
Je kunt dit korter schrijven als 17 miljoen.
Maar ook als $17000000 = 17 \cdot 1000000 = 17 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17 \cdot 10^6$.

Daarbij gebruik je machten van 10: $10^2 = 10 \cdot 10$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$, enzovoorts.
(Als vermenigvuldigingsteken gebruik je vanaf nu meestal de (hoge) punt.)
Het getal dat aangeeft hoe vaak je 10 met zichzelf vermenigvuldigt, heet de exponent.

Als je met getallen in die vorm wilt rekenen, bedenk dan wel dat:

- $10^6 \cdot 10^2 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$ (exponenten optellen)
- $10^6 / 10^2 = (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)/(10 \cdot 10) = 10^4$ (exponenten aftrekken)
- $10^2 / 10^2 = (10 \cdot 10)/(10 \cdot 10) = 1$ en $10^2 / 10^2 = 10^0$ (exponenten aftrekken), dus $10^0 = 1$

Er zijn twee belangrijke notaties voor grote getallen:

- De wetenschappelijke notatie: $17000000 = 1{,}7 \cdot 10^7$ waarin het getal voor de macht altijd een getal vanaf 1 tot kleiner dan 10 is.
- De technische notatie: $17000000 = 17 \cdot 10^6$ waarin de exponent van de macht van 10 altijd een drievoud is.

Rekenmachines gebruiken soms de E voor ‘exponent’. Dan wordt $17 \cdot 10^6$ weergegeven als 17 E 6.

Opgave 1

Bekijk de uitleg.

a Schrijf 100000 als macht van 10.

b Leg uit waarom $304586 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$.

c Schrijf 2050031 met machten van 10 op dezelfde manier als bij b.

Opgave 2

Grote getallen zijn bijvoorbeeld 1 miljoen en 1 miljard.

a Schrijf deze getallen als macht van 10.

b Schrijf 135 miljard in de technische notatie

c Schrijf 135 miljard in de wetenschappelijke notatie

Opgave 3

Enkele uitspraken met grote getallen.

- Ongeveer 3 miljoen jaar geleden zijn de dinosauriërs uitgestorven.
- Volgens het ministerie komt ons nationaal inkomen uit op 468 miljard.
- De afstand van de aarde tot de zon is in januari ongeveer 147100000 km.

Schrijf deze getallen in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.

Uitleg 2

Voor kleine getallen gebruik je (denk om het aftrekken van de exponenten):

- $0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{10^0}{10^1} = 10^{-1}$
- $0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{10^0}{10^2} = 10^{-2}$
- $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{10^0}{10^3} = 10^{-3}$
- enzovoort.

Heel kleine getallen zoals 32 miljoenste = 0,000032 kun je daarom als volgt in de wetenschappelijke notatie schrijven:

$0{,}000032 = 3{,}2 \cdot 0{,}00001 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{100000} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Heel kleine getallen zoals 32 miljoenste = 0,000032 kun je daarom als volgt in de technische notatie schrijven:

$0{,}000032 = 32 \cdot 0{,}000001 = 32 \cdot \frac{1}{1000000} = 32 \cdot 10^{-6}$.

Opgave 4

Bekijk de uitleg.

a Schrijf 0,00001 als macht van 10.

b Leg uit waarom $30{,}4596 = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$

c Schrijf het getal 0,01035 op dezelfde manier.

Opgave 5

Kleine getallen zijn bijvoorbeeld 1 miljoenste en 1 miljardste.

a Schrijf deze getallen als macht van 10.

b Schrijf 135 miljardste in de technische notatie

c Schrijf 135 miljardste in de wetenschappelijke notatie

Opgave 6

Enkele uitspraken met kleine getallen.

- Sommige eencelligen zijn slechts 2,5 miljoenste mm breed.
- Aluminiumfolie is ongeveer 150 miljoenste meter dik.

Schrijf deze getallen in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het werken met hele grote en hele kleine getallen gebruik je **machten van 10** zoals: $10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.
Het getal 4 is de **exponent** van de macht van 10.

Er zijn twee belangrijke notaties voor grote/kleine getallen:

- De **wetenschappelijke notatie** waarin het getal voor de macht van 10 altijd een getal vanaf 1 tot kleiner dan 10 is.
  153 miljard = $153000000000 = 1{,}53 \cdot 10^{11}$
  45 miljoenste = $0{,}000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$
- De **technische notatie** waarin de exponent van de macht van 10 altijd een drievoud is en het getal voor de macht van 10 altijd een getal vanaf 1 tot kleiner dan 1000 is.
  153 miljard = $153000000000 = 153 \cdot 10^9$
  45 miljoenste = $0{,}000045 = 45 \cdot 10^{-6}$

Als vermenigvuldigingsteken gebruik je meestal de (hoge) punt.

Bij getallen vanaf 1 tot 1000 gebruik je de gewone schrijfwijze.
Je gaat niet bijvoorbeeld 23 schrijven als $23 \cdot 10^0$ of $0{,}023 \cdot 10^3$.

Voorbeeld 1

De lichtsnelheid is in het vacuüm (het luchtledige) gelijk aan 299792458 m/s.

Het licht legt dus ongeveer $300000000 = 3{,}0 \cdot 100000000$ meter per seconde af.
De wetenschappelijke notatie van de lichtsnelheid is $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

Hoeveel km/h is dat? Geef je antwoord zowel in de wetenschappelijke als in de technische notatie.

Antwoord

Om de lichtsnelheid in m/s om te rekenen naar kilometer per uur moet je dit getal vermenigvuldigen met 3600 (het aantal seconden in een uur) en vervolgens delen door 1000 (het aantal meter in een kilometer).
Dus is de lichtsnelheid ongeveer $3{,}6 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 = 10{,}8 \cdot 10^8 = 1{,}08 \cdot 10^9$ km/h.
Hier zijn de technische en de wetenschappelijke notatie hetzelfde.

Opgave 7

Bekijk in het **Voorbeeld 1 op pagina 40** hoeveel de lichtsnelheid in m/s bedraagt. Gebruik de wetenschappelijke notatie.

a Het omrekenen van m/s naar km/h kan in twee stappen.
Bereken eerst de lichtsnelheid in m/h.

b Reken de lichtsnelheid in m/h nu om naar km/h.

Opgave 8

De omtrek van de aarde is 40000 km. Als mensen hand in hand staan met de armen gespreid, zitten de middens van hun lichamen ongeveer 1,5 meter van elkaar.

a Hoeveel mensen moeten er hand in hand staan met de armen gespreid om de aarde te omspannen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie in één decimaal nauwkeurig.

Er zijn ongeveer 7 miljard mensen op de aarde.

b Hoeveel keer kunnen zij op de beschreven manier de aarde omspannen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een meter is gedefinieerd als de afstand die het licht in $\frac{1}{299792458}$ seconde aflegt. Hoelang doet het licht over het afleggen van 1 meter? Geef je antwoord in de wetenschappelijke en in de technische notatie in drie significante cijfers.

Antwoord

Als je deze deling met de rekenmachine uitvoert, dan krijg je waarschijnlijk $3{,}33564... \cdot 10^{-9}$ seconden.

Je kunt de rekenmachine ook in de wetenschappelijke of de technische notatie zetten. Je vindt dan hetzelfde.

Met drie significante cijfers wordt dit ongeveer $3{,}34 \cdot 10^{-9}$.

Opgave 9

Neem voor de lichtsnelheid $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Hoelang is het licht onderweg vanaf de zon naar de aarde?

Opgave 10

Bekijk de foto van de huisstofmijt. Deze diertjes leven van menselijke huidschilfers. In een hoofdkussen van je bed kunnen er wel 12000 voorkomen. Sommige mensen zijn allergisch voor huisstofmijt. Een huisstofmijt weegt gemiddeld slechts $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ gram en heeft afmetingen van ongeveer 0,3 mm breed tot 0,5 lang. Je kunt ze met het blote oog niet zien.

Hoeveel wordt je kussen zwaarder tengevolge van de huisstofmijt er in?

Figuur 1.1

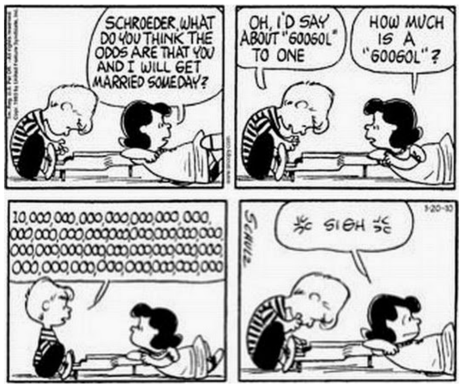
Voorbeeld 3

Voor $1 \cdot 10^{100}$ bestaat de naam googol.

Deze naam is omstreeks 1920 bedacht door een negenjarig neefje van de Amerikaanse wiskundige Edward Kasner. De naam Google is hiervan afgeleid door Larry Page, één van de oprichters van deze zoekmachine.

Op veel rekenmachines is dit getal de grens voor de getallen die weergegeven kunnen worden.
Het getal is ongeveer zo groot als $70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

1 googolplex = $1 \cdot 10^{\text{googol}}$, een 1 met googol nullen.



Figuur 1.2

Opgave 11

Je weet nu hoeveel een ‘googol’ is.

a Hoeveel is googol^2?

b Hoeveel is $\sqrt{\text{googol}}$?

Oefenen

Opgave 12

Schrijf als macht van 10:

a 1000

b 100000000

c 10 miljard

d 0,001

e $\frac{1}{100000}$

f 10 miljardste

Opgave 13

Schrijf in de wetenschappelijke en in de technische notatie:

a 123 miljoen

b 614000000000

c 0,00001496

d 0,00000000000042

Opgave 14

Gebruik bij de volgende berekeningen de technische notatie. Geef je antwoord ook in die vorm.

a In Nederland wonen ongeveer 16 miljoen mensen. Het gemiddeld inkomen van een Nederlander is ongeveer € 18.000,=. Bereken het nationaal inkomen (het inkomen van alle Nederlanders samen).

b In Nederland zijn er jaarlijks ongeveer 1,5 miljoen middelbare scholieren. Zo'n scholier kost de overheid gemiddeld € 4500,=. Hoeveel geeft de overheid jaarlijks ongeveer uit aan middelbaar onderwijs?

Opgave 15

Bacteriën zijn micro-organismen. Een bepaald soort bacterie heeft een gewicht van $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ kg.

a Op een plant bevinden zich 3,2 miljoen van deze bacteriën. Hoeveel wegen deze bacteriën samen?

b Hoeveel van deze bacteriën wegen samen 1 kg?

Opgave 16

Uit Wikipedia (13-11-2009):

> Een amoebe (spreek uit als 'ameube') is een eencellig organisme dat bestaat uit protoplasma met één of meerdere kernen. Het endoplasma (binnenste laagje) is troebel en korrelig terwijl het ectoplasma (buitenste laagje) meestal helder is. Het organisme behoort tot de wortelpotigen en varieert afhankelijk van de soort tussen de 0,003 en 0,080 mm.

1 mm = $\frac{1}{1000}$ m.

Hoeveel meter is een amoebe van 0,080 mm? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.

Opgave 17

Bereken en geef je antwoord in de technische notatie.

a $4{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{3}$

b $\frac{6 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-5}}$

c $\frac{2{,}5 \cdot 10^{3} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{4}}$

Toepassen

Opgave 18

Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is ongeveer $3 \cdot 10^8$ m/s. Een astronomische eenheid is de gemiddelde afstand (AE) van de aarde tot de zon: 1 AE = 149,6 miljoen kilometer. Vooral in de sterrenkunde zijn lichtjaar en AE nuttige maten.

De **dubbelster Alpha Centauri** vormt samen met de veel zwakkere Proxima Centauri een drievoudig systeem, dat zich van alle sterren het dichtst bij ons zonnestelsel bevindt. De afstand tot de zon bedraagt 4,36 lichtjaar.

a Hoeveel km is 1 lichtjaar? En hoeveel AE?

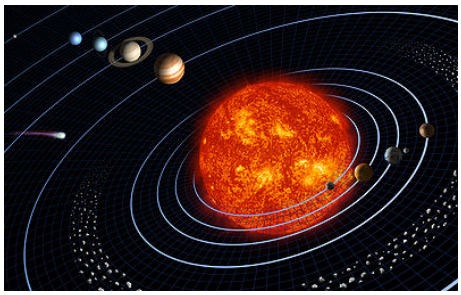
b Hoeveel km is Alpha Centauri van onze zon verwijderd? En van de aarde?

c Stel je voor dat je in een ruimteschip met 20000 km/uur van de aarde rechtstreeks naar de zon zou kunnen vliegen. Hoe lang doe je daar dan over? En hoe lang doe je over de reis naar Alpha Centauri?

Opgave 19

Ons **Zonnestelsel** bestaat uit een ster (de zon) en 8 planeten. Je wilt een schaalmodel maken van het zonnestelsel dat nog in een schoollokaal past. Zoek de afmetingen van deze planeten en hun onderlinge afstanden op.

Bereken hoe groot je de afmetingen van de planeten moet maken en hoe groot je de (bijna) cirkelvormige banen om de zon moet maken. Geef een overzicht van alle afmetingen.



Figuur 1.3

Testen

Opgave 20

Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie. Gebruik twee significante cijfers.

a 12500000

b 0,004078253

Opgave 21

Er worden per dag 750000 boterhammen met hagelslag in Nederland gegeten. Hoeveel zijn dat er per jaar? Geef je antwoord in de technische notatie.

Opgave 22

Een olifant krijgt per dag ongeveer 180 kilogram aan voedsel binnen. Hiervan scheidt de olifant ongeveer 60 kilogram uit als mest. Hier kan tegenwoordig papier van worden gemaakt. Per 10 kilogram mest kan 8 kilogram papier worden gemaakt.
Er zijn ongeveer 550000 olifanten op de wereld. Als we van al die olifanten de mest zouden verzamelen om papier te maken, hoeveel papier zouden we dan in een jaar maken? Geef je antwoord in de technische notatie.

1.6 Eenheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij bekende grootheden de juiste eenheden kiezen;
- eenheden (met voorvoegsels) omrekenen.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen met de juiste rekenvolgorde;
- aflezen van een getallenlijn (schaalverdeling).

Verkennen

Opgave V1

Er is in 3 uur tijd op een bepaalde plaats 42 mm water per m^2 gevallen.

Hoeveel liter water is er in die tijd op het platte dak van een school met een oppervlakte van 400 m^2 gevallen? (Rond af op hele L).

Opgave V2

Op 16 augustus 2009 liep Usain Bolt op de 100 meter een wereldrecord van 9,58 seconden. Op dat moment was het wereldrecord 100 m voor vrouwen 10,49 seconden en stond het op naam van Florence Griffith-Joyner sinds 16 juli 1988.

Hoeveel m zou Usain Bolt op de finishlijn hebben voorgelegen als ze tegen elkaar hadden gelopen tijdens hun recordloop? (Geef je antwoord in dm nauwkeurig).

Uitleg

Je hebt leren werken met maten voor lengte, oppervlakte en inhoud. Maar er zijn veel meer grootheden die je kunt meten. Bijvoorbeeld:

- tijd in uren, minuten, seconden, dagen, jaren, ...;
- gewicht in gram (g);
- temperatuur in graden Celsius (°C) of graden Fahrenheit (°F);
- grootte van computerbestanden in byte (b);
- geluidssterkte in decibel (dB);
- snelheid in meter per seconden (m/s) of kilometer per uur (km/h).

Bij eenheden als kilometer zie je ook al een voorvoegsel staan.
De officiële eenheid is de meter, kilo betekent 1000, dus 1 km = 1000 m.

Er zijn nog veel meer voorvoegsels.
De bekendste zijn:

- milli voor duizendste;
- centi voor honderdste;
- deci voor tiende;
- deca voor 10;

- hecto voor 100;
- kilo voor 1000.

Maar dit zijn ze nog lang niet allemaal...

Opgave 1

Bekijk in de uitleg enkele veel voorkomende eenheden en hun voorvoegsels. Leer vooral die voorvoegsels en hun betekenis goed uit je hoofd.

a Stel: je hebt 1 mg van een bepaalde stof.
Van welk woord is 'm' de afkorting?
En hoeveel gram heb je nu?

b En hoeveel g is 1 kg? Geef je antwoord als getal zonder voorvoegsel.

1 Mg (megagram) is 1 miljoen gram.

c Hoeveel kg is 1 Mg?

d In de praktijk wordt voor Mg het woord 'ton' gebruikt.
Hoeveel kg is een megaton? Schrijf je antwoord zo kort mogelijk.

Opgave 2

Elke liter water weegt 0,998 kg.

a Hoeveel g weegt 1 mL water? Geef je antwoord in decimalen.

b Een liter zeewater weegt ongeveer 1,024 kg. Je mengt een liter zeewater met een liter water en haalt daar 1 mL gemengd water uit. Hoeveel g weegt die mL? Geef een exact antwoord.

Opgave 3

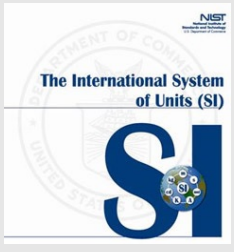
In de nanotechnologie wordt gewerkt met afstanden van nanometers: 1 nm = 1 miljardste m.

Hoeveel mm is 3,1 nm? Geef je antwoord als normaal decimaal getal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In het **S.I.-stelsel** zijn alle gebruikte **grootheden** met hun **eenheden** vastgelegd.
Hieronder zie je een lijst met veel voorkomende grootheden en hun eenheden.



Figuur 1.1

grootheid	**letter**	**eenheid**	**symbool**
lengte	*l*	meter	m
oppervlakte	*A*	vierkante meter	m^2
inhoud, volume	*V*	kubieke meter liter	m^3 L (1 L = 0,001 m^3)
massa	*m*	kilogram	kg
tijd	*t*	seconde	s
temperatuur	*T*	graden Celsius	°C
absolute temperatuur	*T*	Kelvin	K
elektrische stroom	*I*	ampère	A
snelheid	*v*	meter per seconde	m/s
bestandsgrootte		byte	b

Tabel 1.1

Eenheden die zijn samengesteld uit meer dan één eenheid (zoals m/s), noem je **samengestelde eenheden**.
Meestal gebruik je **voorvoegsels** om tienvouden van die eenheden aan te geven.
De belangrijkste voorvoegsels zijn:

voorvoegsel	**afkorting**	**betekenis**	**waarde**	**voorvoegsel**	**afkorting**	**betekenis**	**waarde**
deci	d	tiende	0,1	deca	da	tiental	10
centi	c	honderdste	0,01	hecto	h	honderdtal	100
milli	m	duizendste	0,001 = 10^{-3}	kilo	k	duizendtal	1000 = 10^3
micro	µ	miljoenste	0,000001 = 10^{-6}	Mega	M	miljoen	1 . 000 . 000 = 10^6
nano	n	miljardste	10^{-9}	Giga	G	miljard	10^9
pico	p	biljoenste	10^{-12}	Tera	T	biljoen	10^{12}

Tabel 1.2

Voorbeeld 1

Het omrekenen van eenheden komt veel voor.
Je ziet een paar voorbeelden:

- Van liter naar m^3:
  1 L = 1 dm^3 = 1 dm ×1 dm ×1 dm = 0,1 m ×0,1 m ×0,1 m = 0,001 m^3
- Van centiliter naar cm^3:
  1 cL = 0,01 L = 0,01 dm^3 = 0,01 × 1000 cm^3 = 10 cm^3
- Van milliliter naar cm^3:
  1 mL = 0,001 L = 0,001 dm^3 = 0,001 × 1000 cm^3 = 1 cm^3
- Van MB (megabyte) naar kB (kilobyte):
  1 MB = 1 miljoen B = 10^6 B = 1000 kB
- Van kg naar mg:
  1 kg = 10^3 g = 10^4 dg = 10^5 cg = 10^6 mg
- Van m^3 naar cm^3:
  1 m^3 = 100 cm ×100 cm ×100 cm = 10^6 cm^3
- Van m^3 naar km^3:
  1 m^3 = 10^{-3} km ×10^{-3} km ×10^{-3} km = 10^{-9} = 1 miljardste km^3

Opgave 4

In het **Voorbeeld 1 op pagina 47** zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van eenheden.

a Hoeveel cm^3 is 1 dL?

b Een 'ons' is een oude benaming voor 1 hg. Hoeveel g is dat?

c Hoeveel L gaan er in 1 m^3?

d Een 'are' is 1 dam^2. Hoeveel m^2 is 1 hectare ('hecto-are')?

Opgave 5

Vul in.

a 0,013 m^3 =... L

b 12 nm =... cm

c 3,15 ha =... m^2

d 0,31 hL =... cm^3

e 125 mL =... cm^3

f 0,95 kg =... mg

Opgave 6

Voor de grootte van databestanden worden de megabyte (1 MB = 1 miljoen byte), de gigabyte (1 GB = 1 miljard byte) en bij de opslag zelfs de terabyte (1 TB = 1 biljoen byte) gebruikt.

a Hoeveel MB is 2,95 GB?

b Hoeveel MB is 0,95 TB?

Opgave 7

Schrijf de volgende hoeveelheden eerst in de technische notatie en daarna met een voorvoegsel.

a 60000 Pa

b 0,000015 W

c $5 \cdot 10^7$ V

d 0,0045 A

e $15 \cdot 10^5$ Ω

f 35 . 000 . 000 . 000 Hz

Voorbeeld 2

De tijd is een speciale grootheid: de eenheid van tijd is de seconde, maar je spreekt niet van een decaseconde om 10 seconden of een kiloseconde om 1000 seconden aan te geven. Voor grotere tijdseenheden gebruik je namen als:

- minuut: 1 minuut = 60 seconden = 60 s
- uur: 1 uur = 60 minuten = 60 × 60 seconden = 3600 s
- dag: 1 dag = 24 uur = 24 × 60 minuten = 24 × 3600 seconden = 86400 s

Figuur 1.2

En dan zijn er nog meer begrippen: een etmaal (1 dag), de maand (tussen de 28 en de 31 dagen), het jaar (ongeveer 365 dagen), de eeuw (100 jaar). Dit is cultureel bepaald en daarom niet overal hetzelfde.

Kleinere tijdseenheden zijn: de tiende seconde, de honderdste seconde, de milliseconde (duizendste seconde), enzovoort.

Opgave 8

De tijdrekening heeft zijn eigen systeem.

a Hoeveel ms (milliseconde) gaan er in 1 dag?

b Hoeveel dagen, uren, minuten en seconden zou 1 megaseconde moeten zijn?

Opgave 9

De omtrek van de aarde is 40000 km.

a Je fietst gemiddeld 20 km in een uur. Hoeveel dagen en uren doe je over deze afstand?

b Stel je voor dat je met een raket zo snel zou kunnen gaan dat je de omtrek van de aarde in 1 uur aflegt. De afstand tot de planeet Mars is vanaf de aarde ongeveer 56 miljoen km. Hoeveel dagen en uur doe je daar over?

Voorbeeld 3

Voor de grootheid snelheid worden de samengestelde eenheden km/h of m/s gebruikt. Regelmatig moet je omrekenen van km/h naar m/s of omgekeerd:

- 1 km/h = $\frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3{,}6}$ m/s
- 1 m/s = 3600 m/h = 3,6 km/h

Dus een auto die 50 km/h rijdt, heeft een snelheid van $\frac{50}{3{,}6}$ = 13,88888... m/s.

Een deeltje dat met 120 m/s voortbeweegt, heeft een snelheid van 120 × 3,6 = 432 km/h.

Opgave 10

Bij een grootheid als snelheid heb je te maken met samengestelde eenheden zoals m/s of km/h.

a Voor lucht bij kamertemperatuur (20 °C) is de geluidssnelheid ongeveer 343 m/s. Hoeveel km/h is dat? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b De lichtsnelheid is ongeveer 300000 km/s. Hoeveel km/h is dat? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

c Hoeveel m/s is dat? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

Opgave 11

De soortelijke massa (of 'dichtheid') van een bepaalde stof is het gewicht bijvoorbeeld per dm^3 of per cm^3. Zo heeft gewoon water een soortelijke massa van 0,998 kg/dm^3.

a Hoeveel g/cm^3 is de soortelijke massa van water?

b Hoeveel kg weegt 1 m^3 water?

c Goud heeft een soortelijke massa van 19,2 kg/dm^3. Een gouden ring heeft een volume van 0,4 mL. Hoeveel gram weegt deze ring? Rond af op één decimaal.

Oefenen

Opgave 12

Kubieke centimeter wordt ook wel afgekort tot cc ('cubic centimetre'). Een bromfietsmotor van 50 cc heeft een totale cilinderinhoud van 50 cm^3.

a Hoeveel liter is dat?

b Hoeveel cc heeft een motor met een totale cilinderinhoud van 0,25 L?

c Een automotor heeft soms wel een cilinderinhoud van 2 L. Hoeveel cc is dat?

Opgave 13

Een liter water weegt ongeveer 1 kg.

a Hoeveel gram weegt 1 mL water?

Antwoord: ongeveer 1 g.

b Het platte dak van een schoolgebouw heeft een totale oppervlakte van 400 m^2. Er valt op een bepaalde morgen 12 mm regen op dat dak. Hoeveel liter is dat in totaal?

c Stel je voor dat dit water op het dak zou blijven staan. Hoeveel kg water drukt er dan op elke m^2 van het dak?

Opgave 14

Sommige computers hebben een harde schijf met een opslagruimte van 1,2 TB (terabyte is biljoen byte). Foto's hebben een bestandsgrootte van bijvoorbeeld 8 MB (megabyte is miljoen byte).

a Hoeveel van die foto's gaan er op zo'n harde schijf? Geef je antwoord als geheel getal.

b Je neemt per foto vier seconden om hem te bekijken. Hoeveel dagen, uren, minuten heb je nodig om alle foto's te bekijken?

Opgave 15

Reken om.

a 36 hPa =... Pa

b $1{,}4 \cdot 10^5$ V =... MV

c 54 nm =... cm

d 1,8 Ts =... uur

e 3,6 kg/m^3 =... g/L

f 12 g/cm^3 =... kg/L

g 120 km/h =... m/s

h 12 m/s =... km/h

Opgave 16

Schaatser Sven Kramer reed op 17 november 2007 de 5 km in 6:03,32. Dit betekent dat hij er 6 minuten en 3,32 seconden over deed.

a Met hoeveel km/h schaatste hij gemiddeld? Rond af op één decimaal.

Een cheetah (jachtluipaard) haalt wel een topsnelheid van 108 km/h. Dat houdt hij echter niet langer dan zo'n 500 m vol.

b Hoeveel seconden houdt de cheetah deze snelheid vol? Rond af op één decimaal.

Opgave 17

Een ijzeren staaf heeft een lengte van 1,20 m en een vierkante doorsnede van 5 cm bij 5 cm.

De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Hoeveel kg weegt deze staaf?

De staaf wordt verchroomd, dus aan alle kanten van een laag chroom voorzien. Die laag chroom is overal 1 mm dik. De staaf wordt hierdoor 1800 gram zwaarder.

b Bereken met behulp hiervan de soortelijke massa van chroom in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

In Engeland worden afwijkende lengtematen gebruikt: de 'inch' (precies 2,54 cm), de 'foot', de 'yard', de 'mile' en de 'league'. Via de **Wikipedia** kun je hier nog veel meer over lezen.

Bijvoorbeeld wordt voor snelheid op land de eenheid mph, dat is 'miles per hour' ('mijl per uur') gebruikt. En op zee wordt de snelheid in kt, dat is 'knot' ('knopen') uitgedrukt. 1 kt = 1 nmph, dus 1 nautical mile per hour.

En er zijn nog andere maatsystemen, bijvoorbeeld in de astronomie.

Figuur 1.3

Opgave 18

Hierboven vind je informatie over het Brits-Amerikaanse maatsysteem.

a 1 mile is 1609,344 m. Hoeveel km/uur is 1 mph? En hoeveel m/s?

b 1 nautical mile is 1852 m. Hoeveel km/uur is 1 kt? En hoeveel m/s?

c Als een Britse automobilist in Nederland ziet dat hij op de snelweg maximaal 120 km/uur mag en hij rekent om naar mph, hoe hard zou hij dan maximaal mogen rijden?

d De maximaal toegestane snelheid op Amerikaanse snelwegen is vaak 90 mph. Komt dit enigszins overeen met onze maximale snelheid op snelwegen?

Opgave 19

Reken nu zelf de Engelse maten om naar het standaard eenhedenstelsel, het **S.I.-stelsel**.

a Een foot is 12 inches. Hoeveel cm is een foot?

b Een yard is 3 feet (meervoud van foot). Hoeveel cm is een yard?

c Een mile is 1760 yards. Hoeveel m is een mile?

d Een league is 3 miles. Hoeveel km is een league?

Het voetbal is een sport die van oorsprong uit Engeland komt. Er worden daarom veel Engelse maten gebruikt.

e Het doel is bijvoorbeeld 24 feet breed en 8 feet hoog. Reken dit om naar meters (in twee decimalen nauwkeurig).

f De middencirkel heeft een straal van 30 feet. Hoeveel m is dat in twee decimalen nauwkeurig?

g De penaltystip ligt op 11 meter voor het midden van het doel. Hoeveel feet is dat?

h De breedte van een voetbalveld moet tussen de 50 en de 100 yards liggen en de lengte tussen de 100 en de 130 yards. Reken deze waarden om naar m.

Opgave 20

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon wordt de astronomische eenheid AE genoemd. 1 AE is ongeveer 150 miljoen km.

a De planeet Mars heeft een gemiddeld afstand van 228 mln km van de Zon. Hoeveel AE is dat?

b Neptunus is de planeet in ons zonnestelsel die het verst van de zon af staat, gemiddeld maar liefst ongeveer 30 keer zover als de aarde. Hoeveel km staat Neptunus ongeveer van de zon af? Geef je antwoord in miljoenen km.

De lichtsnelheid is ongeveer $3 \cdot 10^5$ km/s.

c Hoe lang is het zonlicht onderweg naar de Aarde?

Een lichtjaar is de afstand die het licht in 1 jaar aflegt.

d Hoeveel km is dat? En hoeveel AE?

Uit Wikipedia (13-11-2009):

> Alpha Centauri is de helderste ster in het sterrenbeeld Centaur (Centaurus). De ster staat ook bekend als Toliman, Rigil Kentaurus en Rigil Kent. De dubbelster Alpha Centauri vormt samen met de veel zwakkere Proxima Centauri een drievoudig systeem, dat zich van alle sterren het dichtst bij ons zonnestelsel bevindt. De afstand tot de zon bedraagt 4,36 lichtjaar.

e Hoeveel km is Alpha Centauri van onze zon verwijderd? En hoeveel AE?

Testen

Opgave 21

Reken exact om, waar mogelijk in decimale notatie:

a 67850 pm =... mm

b 23,5 hm^2 =... dm^2

c 18 m/s =... km/h

d 80 km/h =... m/s

e 2,5 mg/dL =... g/hL

f 0,0012 mm/µs =... cm/ms

g 0,0067 mA =... µA

h $40 \cdot 10^4$ kV =... MV

Opgave 22

Je wilt bestanden kopiëren van je laptop naar een externe harde schijf.
Het kopiëren gaat gemiddeld met 20 MBps (megabyte/s).

a Hoeveel minuten en seconden duurt het om een bestand van 8,5 GB te versturen?

b Het kopiëren van alle bestanden naar de externe harde schijf duurt in totaal 3 uur, 16 minuten en 30 seconden. Hoeveel TB heb je gekopieerd? Geef een exact, decimaal antwoord.

Opgave 23

Als je veel te vervoeren of op te bergen hebt, kun je containers huren. Er bestaan verschillende typen en afmetingen. Dit zijn de gegevens van een 20 ft-zeecontainer:

- Inhoud: 33,2 m^3
- Afmetingen ($l \times b \times h$ cm) inwendig: 589 × 234 × 239
- Deuropening ($b \times h$ cm): 233 × 228

a Een ton is 1000 kg. Leg uit waarom 1 ton eigenlijk 1 megagram zou moeten heten.

b Ga na dat de opgegeven inhoud van de zeecontainer wel ongeveer klopt. Bereken daarvoor zelf de inhoud in m^3, op één decimaal nauwkeurig.

c De container zelf weegt 2260 kg. De container met inhoud mag maximaal 24000 kg wegen. Hoeveel ton aan inhoud kun je er in kwijt? (Geef een exact antwoord).

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al veel eerder leren rekenen. In dit onderwerp is het rekenen met decimale getallen, het afronden en schatten en het gebruik van getallenlijnen (schaalverdelingen) met bijpassende eenheden voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Rekenen I** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- decimaal getal — decimalen — decimale komma — getallenlijn, kleiner en groter
- rekenen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen
- rekenvolgorde
- afronden — schatten — orde van grootte
- machten van 10 — wetenschappelijke notatie — technische notatie
- grootheid — eenheid — voorvoegsel — S.I.-stelsel

Activiteitenlijst

- de waarde van een cijfer in een decimaal getal herkennen — decimale getallen op een getallenlijn plaatsen en de groter- en kleinertekens correct gebruiken;
- decimale getallen zowel handmatig als met de rekenmachine optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- bij het rekenen met decimale getallen de correcte rekenvolgorde hanteren;
- decimale getallen afronden — de uitkomst van een berekening vooraf schatten;
- machten van 10 gebruiken bij de notatie van grote en kleine getallen — de wetenschappelijke en de technische notatie gebruiken;
- bij de bekendste grootheden de juiste eenheid kunnen benoemen — eenheden (met voorvoegsels) omrekenen.

Testen

Opgave 1

Je moet een bedrag van € 314,76 betalen.
Je betaalt contant. Hoeveel briefjes van 100, hoeveel tientjes, hoeveel euro, hoeveel dubbeltjes en hoeveel centen heb je nodig?

Opgave 2

Bereken met de hand (dus zonder rekenmachine):

a de som van 7909,48 en 125,15;

b het verschil van 7909,48 en 125,15;

c het product van 7909,48 en 125,15;

d het quotiënt van 7909,48 en 125,15.

Opgave 3

Je zit achter de kassa bij een winkel en de stroom is uitgevallen, dus je rekent met de hand.

a Iemand koopt 16 doosjes schroeven van € 1,67 per stuk. Hoeveel is dat samen?

b Iemand betaalt € 202,65 voor 35 dezelfde houten latten. Hoeveel kost elke houten lat?

c Gordijnstof kost € 12,95 per meter. Iemand koopt voor € 59,57 van die gordijnstof. Hoeveel meter van die gordijnstof krijgt hij?

Opgave 4

Cijfers uitrekenen:

a Als alle cijfers even zwaar mee tellen en je hebt een 7,6, een 5,4, een 6,3 en een 6,6 gehaald, wat is dan je gemiddelde? Bereken het gemiddelde in één decimaal nauwkeurig.

b Je cijfer van de eerste periode is 5,1 en dat van de tweede periode is 5,8. Wat sta je in gehele cijfers gemiddeld als het cijfer van de tweede periode drie keer zo zwaar telt?

Opgave 5

Janna rekent op haar rekenmachine correct uit: 481,95 + 113,45 × 25,55 = ...
Bij het opschrijven van het antwoord vergeet ze de komma: 33805975.

Schrijf het goede antwoord op zonder je rekenmachine te gebruiken.

Opgave 6

In een glas gaat ongeveer 0,2 liter. Je hebt 7 volle flessen cola van elk 1,5 liter.

Hoeveel glazen cola kun je ongeveer vullen?

Opgave 7

Maak de volgende berekeningen kloppend door op de juiste plaats haakjes te zetten:

a $16 - 4 \times 2 = 24$

b $16 + 4 \times 12 - 8 = 32$

c $3 \cdot 2^3 + 6 \,/\, \sqrt{9} + 3 = 25$

d $3 \cdot 2^3 + 6 \,/\, \sqrt{9} + 3 = 5$

Opgave 8

Reken om:

a 2,4 L = ... cm^3

b 2,5 uur = ... s

c 1250 dm = ... km

d 1,25 Tb (terabyte) = ... Mb (megabyte)

Opgave 9

Op de Olympische Spelen in 2018 in Pyeong Chang was bij het 500 m schaatsen voor mannen het verschil tussen de nummers 1 en 2 erg klein: de Noor Havard Lorentzen deed er 34,41 seconden over, de Koreaan Cha Min Kyu deed 34,42 seconden over die afstand.

Hoeveel mm lag Lorentzen voor op de Koreaan toen hij finishte?

Figuur 1.1

Opgave 10

In Australië woonden in 2001 ongeveer 16,6 miljoen mensen. Het nationaal inkomen van Australië bedroeg in dat jaar ongeveer € 270580000000,00.

a Schrijf beide grote getallen in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken het gemiddelde inkomen van een inwoner van Australië.

De landoppervlakte van Australië bedraagt ongeveer $7{,}7 \cdot 10^6$ km^2.

c Hoeveel grond heeft een Australiër gemiddeld tot zijn beschikking?

Toepassen

Opgave 11: Loon naar werken

Kees heeft een bijbaantje in een supermarkt. Hij krijgt € 3,15 per uur netto uitbetaald.
Elke maand krijgt hij dit salaris. De afgelopen maand heeft hij volgens zijn loonstrookje € 128,52 verdiend.
Maar daar gaat nog € 21,42 aan belasting van af.

Hoeveel uren heeft hij afgelopen maand gewerkt?

Opgave 12: Rijst

In de haven van Rotterdam is een container met pakken rijst aangekomen. Die pakken rijst zitten in dozen, er gaan 80 pakken rijst in één doos en elk pak rijst weegt 400 gram. Die dozen staan op pallets die elk 5 kilogram wegen. Op elke pallet staan 32 dozen. Het gewicht van deze dozen mag je verwaarlozen.
Het totale gewicht van de pallets met rijst in de container is 24696 kilogram.

Hoeveel pallets met rijst zitten er in de container?

Figuur 1.2

Opgave 13: Eigen kamer

Stel je voor dat je zou gaan verhuizen naar een nieuwe eigen kamer.
Die kamer moet nog worden ingericht.
Voor het verven of behangen van de muren, voor gordijnen en voor vloerbedekking hoef je niet meer te zorgen, maar de rest kun je vernieuwen. Je mag zelf je spullen kiezen, in ieder geval heb je een nieuw bed (met toebehoren) en een nieuw bureautje nodig om je pc op te zetten.
Stel dat je niet meer dan € 500,= kunt uitgeven. Zoek (op internet bijvoorbeeld) naar leuke spullen en maak een begroting waarbij je binnen het budget blijft.

2

Rekenen II

2.1 Breuken 58
2.2 Rekenen met breuken 68
2.3 Breuken en procenten 77
2.4 Machten 84
2.5 Wortels 91
2.6 Totaalbeeld 98

2.1 Breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een breuk en de teller en de noemer herkennen;
- breuken vereenvoudigen;
- breuken gelijknamig maken om ze te kunnen vergelijken;
- breuken omzetten naar een decimaal getal.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen en de juiste rekenvolgorde;
- afronden en schatten;
- werken met grootheden en de bijbehorende eenheden.

Verkennen

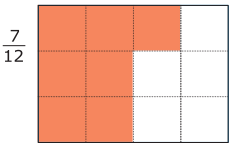
Opgave V1

In twee groepen is een toets gemaakt. In groep A waren er 3 onvoldoendes en in groep B waren dat er 4. In groep A hebben 20 leerlingen de toets gemaakt, in groep B hebben 30 leerlingen de toets gemaakt.

In welke groep is de toets beter gemaakt als je alleen let op de onvoldoendes?

Uitleg 1

Deze rechthoek is in 12 gelijke vierkantjes verdeeld. 7 daarvan zijn rood gekleurd.
Dat is $\frac{7}{12}$ deel.

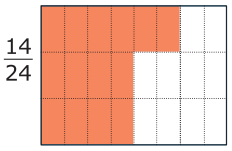


Figuur 2.1

$\frac{7}{12}$ heet een breuk. 7 is de teller en 12 is de noemer.

De noemer is de naamgever: het zijn twaalfde delen, kortweg twaalfden.
De teller telt hoeveel twaalfden er zijn: er zijn zeven twaalfden.

Je ziet: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.



Figuur 2.2

7 van de 12 is hetzelfde gedeelte als 14 van de 24.

Zo geldt ook: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25}$. Je kunt teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen zonder dat de waarde van de breuk verandert.

Als je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt, blijft de breuk hetzelfde deel weergeven.

Omgekeerd is $\frac{8}{20}$ gelijk aan $\frac{2}{5}$, dus je kunt ook teller en noemer door hetzelfde getal delen zonder dat de waarde van de breuk verandert. Het vereenvoudigen van een breuk is het zoeken naar een gelijke breuk met de kleinst mogelijke teller en noemer.

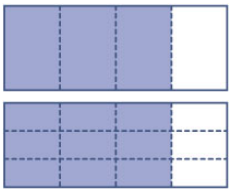
Heb je behalve $\frac{7}{12}$ deel ook nog 2 gehele rechthoeken rood gekleurd, dan is dat samen $2 + \frac{7}{12}$.

Dat schrijf je als $2\frac{7}{12}$.

(Dit laatste is eigenlijk een hele rare notatie: een plus-teken mag je eigenlijk niet weglaten, dan is niet duidelijk hoe je moet rekenen!)

Opgave 1

Bekijk de figuren hiernaast.



Figuur 2.3

a Geef met een breuk aan welk deel van de bovenste figuur gekleurd is.

b Wat is de teller en wat is de noemer van de breuk die je bij a hebt opgeschreven?

c Leg met behulp van beide figuren uit waarom $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Opgave 2

Op dezelfde manier als bij **Opgave 1 op pagina 59** kun je de breuk $1\frac{3}{4}$ in beeld brengen.

a Laat zien hoe de breuk $1\frac{3}{4}$ er met rechthoeken uit ziet.

Waarom is $1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$?

b Waarom is $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$?

c Hoeveel twaalfden is $1\frac{3}{4}$?

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 1 op pagina 58** wat je verstaat onder breuken vereenvoudigen.

a Leg met behulp van een figuur uit waarom $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

b Welke breuk krijg je als je in $\frac{12}{30}$ teller en noemer beide door 2 deelt? Is die breuk ook gelijk aan $\frac{2}{5}$?

c Hoe kun je een breuk vereenvoudigen?

Uitleg 2

Als je wilt weten welk deel groter is, moet je breuken vergelijken.

$\frac{5}{12}$ deel is minder dan $\frac{7}{12}$ deel. Je schrijft: $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$.
Het teken < betekent: is kleiner dan.

$\frac{7}{12}$ deel is meer dan $\frac{7}{13}$ deel. Je schrijft: $\frac{7}{12} > \frac{7}{13}$.
Het teken > betekent: is groter dan.

Als je $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ met elkaar wilt vergelijken, moet je de breuken eerst gelijknamig maken. Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ dus: $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Je weet: $\frac{1}{10} = 0{,}1$ en $\frac{2}{10} = 0{,}2$ en bijvoorbeeld $\frac{12}{100} = 0{,}12$.

Breuken met als noemer 10,100,1000,... kun je als decimaal getal schrijven.

Ook andere breuken kun je als decimaal getal schrijven:

- $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$
- $\frac{1}{4} = \frac{1\times25}{4\times25} = \frac{25}{100} = 0{,}25$
- $\frac{3}{8} = \ldots = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

Je ziet dat je er dan eerst een breuk met als noemer 10, of 100, of 1000,... van moet maken. Je rekenmachine doet dit snel met een deling.

Figuur 2.4

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 59** hoe je breuken kunt vergelijken.
Vul het juiste teken > of < in.

a $\frac{2}{10}\cdots\frac{19}{100}$

b $\frac{2}{15}\cdots\frac{1}{5}$

c $\frac{3}{4}\cdots\frac{2}{3}$

d $\frac{13}{16}\cdots\frac{7}{8}$

Opgave 5

Je kunt breuken ook goed vergelijken door er eerst decimale getallen van te maken.
Doe de voorgaande opgave nog eens, maar nu met behulp van decimale getallen.

a $\frac{2}{10}\cdots\frac{19}{100}$

b $\frac{2}{15}\cdots\frac{1}{5}$

c $\frac{3}{4}\cdots\frac{2}{3}$

d $\frac{13}{16}\cdots\frac{7}{8}$

Opgave 6

In groep A hebben 3 van de 20 leerlingen voor een wiskundetoets een onvoldoende gehaald.
In groep B hebben voor dezelfde toets 4 van de 30 leerlingen een onvoldoende gehaald.

Mag je zeggen dat er in groep B naar verhouding meer onvoldoendes zijn?
Er zijn wel meer onvoldoendes, maar ook meer leerlingen...

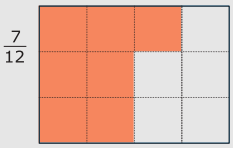
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

$\frac{7}{12}$ heet een **breuk**.

7 is de **teller** en 12 is de **noemer**.

Van de rechthoek is $\frac{7}{12}$ deel gekleurd.



Figuur 2.5

$\frac{7}{12}$ en $\frac{14}{24}$ geven hetzelfde deel weer: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.

Dus omgekeerd kun je zeggen $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Je hebt dan $\frac{14}{24}$ **vereenvoudigd** tot $\frac{7}{12}$ door teller en noemer door hetzelfde getal 2 te delen.

Wil je breuken vergelijken dan moet je ze eerst **gelijknamig maken**.
Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk.

Breuken met als noemer 10,100,1000,... kun je als **decimaal getal** schrijven: $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{123}{1000} = 0{,}123$. Bij andere breuken kan dat ook door de deling uit te voeren, met de hand of met een rekenmachine.
Soms gaat het aantal decimalen eindeloos door. Dan werk je vaak met een benadering: $\frac{2}{7} = 0{,}28571428571428... \approx 0{,}286$.

Voorbeeld 1

"Van mensen van rond de 30 jaar oud dragen al vier op de tien personen een bril of contactlenzen."
Dit is een uitspraak die ooit stond in een artikel van het **Centraal Bureau voor de Statistiek**.
Hoeveel personen in een groep van 200 dertigjaren zouden er een bril of contactlenzen moeten dragen?

Antwoord

De uitspraak betekent dat $\frac{4}{10}$ deel van de dertigjarigen een bril of contactlenzen draagt.

Omdat $\frac{1}{10}$ van 200 gelijk is aan 20, zijn er $4 \times 20 = 80$ personen in die groep die een bril of contactlenzen dragen.

Je kunt ook de breuk eerst vereenvoudigen: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Dan bepaal je eerst $\frac{1}{5}$ deel van 200 en neem je dat 2 keer.

Opgave 7

Schrijf in de volgende gevallen het beschreven deel als breuk.

a 7 van de 12 personen bestellen een pizza.

b Van elke 100 mensen hebben er 45 een bril.

c 1 minuut is een deel van 1 uur.

d 7 cm is een deel van 1 m.

Opgave 8

Lees het stukje over het voor komen van kleurenblindheid.

Kleurenblindheid
Kleurenblindheid is het wijdst verspreid onder blanke westerse mannen. Op elke 100 mannen lijden er ongeveer 11 aan één of andere vorm van kleurenblindheid. Onder Aziatische mannen is dat aandeel veel lager, slechts 1 op elke 20 Aziatische mannen is kleurenblind.

a Welk deel van de westerse mannen is kleurenblind? Geef je antwoord als breuk.

b Welk deel van de Aziatische mannen is kleurenblind?

c Laat zien dat het aandeel Aziatische mannen dat kleurenblind is inderdaad kleiner is dan het aandeel westerse mannen dat kleurenblind is.

Opgave 9

Een opslagtank bevat 450 liter vloeistof wanneer hij voor driekwart is gevuld.

Hoeveel liter vloeistof bevat deze tank als hij voor tweederde deel is gevuld?

Voorbeeld 2

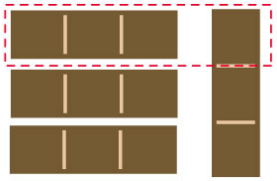
Je koopt met twee vrienden een pakje met vier repen chocola.
Je verdeelt deze 4 repen dus met 3 personen, ieder even veel. Hoeveel krijgt elk?

Antwoord

Bekijk de figuur.

Je ziet dat ieder krijgt dan $\frac{4}{3}$ deel.

Dat is meer dan een hele reep: $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$.



Figuur 2.6

Opgave 10

Je verdeelt 15 repen chocolade met zijn zessen.

Hoeveel chocoladerepen krijgt ieder? Schrijf je antwoord als breuk met de gehelen zichtbaar.

Opgave 11

Je kent de tandwielen van technisch Lego wel. Ze zijn er met verschillende hoeveelheden tanden. Neem twee tandwielen waarvan de tanden in elkaar grijpen.

Figuur 2.7

a Beide tandwielen hebben 20 tanden. Als je het éne tandwiel één keer helemaal ronddraait, hoeveel draait het andere dan rond?

De tandwielen zijn verschillend: het kleinste heeft 8 tanden, het grootste 18 tanden.

b Je draait het kleinste één keer helemaal rond. Hoeveel draait het grootste tandwiel?

c Je draait het grootste één keer helemaal rond. Hoeveel draait het kleinste tandwiel?

Voorbeeld 3

Wat is meer $\frac{3}{10}$ of $\frac{2}{7}$?

Antwoord

Breuken kun je vergelijken door ze gelijknamig te maken.
Je zoekt dan eerst het kleinste getal dat zowel een veelvoud van 10 als een veelvoud van 7 is. Dat getal heet het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) van 10 en 7.
In de tabel hiernaast zie je dat dit getal 70 is.

10	**7**
20	14
30	21
40	28
50	35
60	42
70	49
	56
	63
	70

Tabel 2.1

$\frac{3}{10} = \frac{21}{70}$ en $\frac{2}{7} = \frac{20}{70}$, dus $\frac{3}{10} > \frac{2}{7}$.

Je kunt de breuken ook vergelijken door ze eerst beide om te zetten naar een decimaal getal: $\frac{3}{10} = 0{,}3$ en $\frac{2}{7} = 0{,}28571428....$
Ook nu zie je snel welke van beide het grootst is.

Opgave 12

Bekijk het voorbeeld.

a Vergelijk de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{15}$ door gelijknamig maken.

b Vergelijk de breuken $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{15}$ door ze om te zetten naar decimale getallen.

c Neem nu de breuken $\frac{6}{25}$ en $\frac{4}{15}$.
Vergelijk ze door gelijknamig maken.

d Vergelijk de breuken $\frac{6}{25}$ en $\frac{4}{15}$ door ze eerst naar decimale getallen om te zetten.

Opgave 13

Er wordt van een griepepidemie gesproken als er van elke 1000 inwoners meer dan 80 de griep hebben. In de klas van Antoine hebben 3 leerlingen de griep en zijn er 24 gezond. Volgens Antoine zou er wel eens sprake kunnen zijn van een epidemie.

Ga na of hij daarin gelijk heeft.

Oefenen

Opgave 14

Uit onderzoek (uit 2003) bleek dat je elke dag gemiddeld ongeveer 8 uur slaapt, 1,5 uur eet en 2 uur televisie kijkt.

a Hoe groot is het deel van de dag dat iemand slaapt?

Ga verder uit van een mens die 84 jaar oud wordt.

b Hoeveel jaar heeft hij dan geslapen?

c Hoe groot is het deel van de dag dat een mens aan het eten is?

d Hoeveel keek een mens toen gemiddeld in zijn leven televisie?

Opgave 15

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk en haal indien mogelijk de gehelen er uit.

a $\frac{15}{12} = \ldots$

b $\frac{12}{15} = \ldots$

c $\frac{13}{4} = \ldots$

d $\frac{4}{13} = \ldots$

e $\frac{5}{85} = \ldots$

f $\frac{85}{5} = \ldots$

Opgave 16

Schrijf de volgende breuken als decimale getallen.
Geef waar nodig een benadering in vijf decimalen.

a $\frac{7}{3} = \ldots$

b $\frac{13}{12} = \ldots$

c $8\frac{3}{25} = \ldots$

d $\frac{1}{19} = \ldots$

e $\frac{4}{21} = \ldots$

Opgave 17

Schrijf de volgende getallen als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

a $2{,}17 = \ldots$

b $0{,}0125 = \ldots$

c $0{,}675 = \ldots$

d $0{,}0002 = \ldots$

Opgave 18

Je kunt de euromunten die delen van 1 euro voorstellen, weergeven door een breuk. Zo is de munt van 50 eurocent weer te geven als $\frac{1}{2}$. En zo kun je € 2,50 weergeven als $2 + \frac{1}{2}$.

a Laat zien dat € 2,50 ook is te schrijven als $2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$.

b Geef nog minstens twee andere manieren om € 2,50 weer te geven met breuken.

c Geef ook € 0,99 op minstens drie manieren weer met behulp van breuken.

Opgave 19

Vul <, >; of = in:

a $\frac{2}{11} \cdots \frac{3}{11}$

b $\frac{2}{11} \cdots \frac{2}{10}$

c $\frac{2}{10} \cdots \frac{3}{11}$

d $1\frac{3}{8} \ldots 1\frac{1}{3}$

e $\frac{1}{3} \ldots 0{,}33$

f $0{,}1538 \ldots \frac{2}{13}$

Opgave 20

Volgens de statuten van sportclub LLDM moet $\frac{3}{4}$ deel van de leden op een vergadering aanwezig zijn om over een voorstel te mogen stemmen. Als men over een wijziging van de statuten stemt moet $\frac{2}{3}$ van de aanwezigen vóór stemmen om die wijziging aan te nemen.

a Op een ledenvergadering zijn 176 van de 234 leden aanwezig. Mag er worden gestemd?

b Voor een voorstel tot wijziging van de statuten stemmen 117 van de aanwezige leden. Wordt het voorstel aangenomen?

Toepassen

Fietsen hebben een voortandwiel (dat aan de trapas vast zit) en een achtertandwiel aan de achteras. Het aantal tanden van die tandwielen bepalen de versnelling. Voortandwielen hebben gemiddeld 42 tot 54 tanden; achtertandwielen 12 tot 34 tanden.

Bij het werken met tandwielen van verschillende groottes heb je met breuken (verhoudingen) te maken.

Opgave 21: Overbrenging

Bekijk de tekst over de overbrenging bij een fiets.

a Waarom heeft het voortandwiel de meeste tanden?

b Met één pedaalslag gaat het voortandwiel één keer rond. Hoeveel keer gaat het achterwiel dan rond als het voortandwiel 48 tanden en het achtertandwiel 20 tanden heeft?

Het getal dat je bij b hebt gevonden heet de overbrenging. Bij elke verhouding van de tanden op de twee tandwielen kun je die overbrenging berekenen in twee decimalen nauwkeurig.

c Vul deze tabel in (antwoorden in decimalen):

tanden voor	tanden achter	overbrenging
42	15	
43	16	
45	15	
46	16	
51	17	
54	18	

Tabel 2.2

d Kun je bij verschillende aantallen tanden toch dezelfde overbrenging hebben?

Opgave 22: Verzet

De afstand die de fiets met één pedaalslag vooruit gaat noemen we het verzet. Het verzet hangt af van de overbrenging en de grootte van de wielen. Stel dat je fiets 2,83 m vooruit gaat als het achterwiel één keer rond draait.

a Hoe groot is het verzet bij een overbrenging van $\frac{12}{5}$ bij één pedaalslag?

b Hoe groot is het verzet bij 54 tanden voor en 18 tanden achter?

c Breid de tabel bij c van de voorgaande opgave uit met een kolom waarin het verzet staat.

d Toen Francesco Moser in 1988 het indoor uurrecord verbeterde (ruim 50 km afgelegd in 1 uur), gebruikte hij een fiets met een versnelling van 47 bij 17. Wat was de overbrenging? Hij had een speciale fiets laten maken met een verzet van 8,93 meter! Hoe groot was de omtrek van zijn achterwiel wel niet?

Testen

Opgave 23

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.
Schrijf er daarna achter om welk decimale getal het gaat. Geef waar nodig een benadering in vier decimalen.

a $\frac{2}{8}$

b $\frac{35}{49}$

c $\frac{315}{40}$

Opgave 24

Vul het juiste teken in.

a $\frac{2}{3}$...0,66

b $\frac{6}{14}$···$\frac{14}{35}$

Opgave 25

$\frac{2}{3}$ deel van de 144 personeelsleden van een bedrijf komt met de auto naar het werk.

$\frac{1}{8}$ deel komt lopend, de rest gaat op de fiets.

a Hoeveel personeelsleden komen met de auto naar het werk?

b Hoeveel personeelsleden komen met de fiets?

2.2 Rekenen met breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken handmatig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met breuken op de rekenmachine.

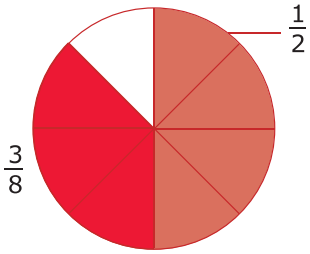
Voorkennis

- het begrip breuk, breuken vereenvoudigen en omrekenen naar een decimaal getal;
- breuken vergelijken door gelijknamig maken.

Verkennen

Opgave V1

Ton en Hans bestellen samen een grote pizza. Ton neemt de helft van de pizza, Hans neemt $\frac{3}{8}$ deel.



Figuur 2.1

a Welk deel van de pizza nemen ze samen?

b Welk deel van de pizza heeft Ton meer dan Hans?

Ton eet van zijn stuk maar $\frac{3}{4}$ deel op.

c Welk deel van de hele pizza is dat?

d Leg uit dat het bij de vorige opgave eigenlijk ging om het vermenigvuldigen van twee breuken.

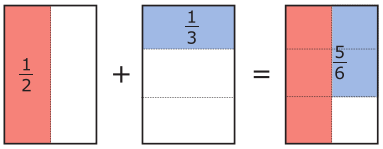
Uitleg 1

Gelijknamige breuken kun je eenvoudig bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken:

- $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$
- $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

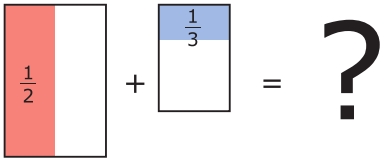
Als breuken niet gelijknamig zijn, moet je ze eerst gelijknamig maken!

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.



Figuur 2.2

Denk er wel om dat beide breuken delen van hetzelfde geheel moeten zijn!



Figuur 2.3

Opgave 1

Bereken en vereenvoudig daarna zoveel mogelijk:

a $\frac{5}{9} + \frac{1}{9}$

b $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$

c $3\frac{7}{12} + \frac{11}{12}$

d $4\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$

Opgave 2

Je wilt de breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{8}$ optellen.

a Beide breuken zijn niet gelijknamig. Ze zijn wel gemakkelijk gelijknamig te maken. Hoe?

b Hoeveel is dus $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$?

c En hoeveel is $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$?

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 68**.

a Maak zelf zo'n tekening bij $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

b Waarom moeten de twee rechthoeken waarvan je $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{4}$ deel hebt aangegeven even groot zijn?

c Waarom maak je de éne verdeling horizontaal en de andere verticaal?

d Bereken $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

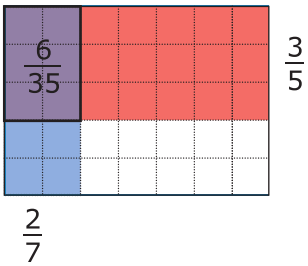
Je kunt $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ ook exact berekenen met de rekenmachine. Je hebt behalve de toetsen voor de cijfers alleen de toetsen [÷] en [+] nodig.

e Wat is dan de uitkomst van deze optelling?

Uitleg 2

$\frac{3}{5}$ deel van 35 kun je als volgt berekenen:

- $\frac{1}{5}$ deel van 35 is 7;
- $\frac{3}{5}$ deel is 3 keer $\frac{1}{5}$ deel, dus $3 \times 7 = 21$.



Figuur 2.4

En $\frac{2}{7}$ deel van $\frac{3}{5}$ deel is zo $\frac{2}{7} \times 21 = 6$. En 6 is $\frac{6}{35}$ deel van 35.

Je ziet dat $\frac{2}{7}$ van $\frac{3}{5}$ hetzelfde is als $\frac{6}{35}$. Dus: $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

Zo kun je breuken vermenigvuldigen: je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Opmerking:
In plaats van × gebruik je voor vermenigvuldigen meestal ·: $2 \cdot 3 = 2 \times 3$.

Als je een getal deelt door een breuk, kijk je hoe vaak die breuk in dat getal past. Zo kun je de uitkomst van $14 / \frac{1}{2}$ voorstellen als het antwoord op de vraag: “Hoeveel halve euro's passen er in 14 hele euro's?”

Je ziet dan dat $14 / \frac{1}{2} = 28$.

Je kunt ook **twee breuken op elkaar delen**.

Een munt van € 0,50 is $\frac{1}{2}$ euro. Een munt van € 0,10 is $\frac{1}{10}$ euro.
Stel je wilt weten hoeveel munten van € 0,10 er gaan in een munt van € 0,50. Dan reken je eigenlijk uit: $\frac{1}{2} / \frac{1}{10}$. De uitkomst is 5 zoals je wel weet. Dus: $\frac{1}{2} / \frac{1}{10} = 5$.

Dit komt omdat $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Dus: $\frac{1}{2} / \frac{1}{10} = \frac{5}{10} / \frac{1}{10} = 5/1 = 5$.
Je ziet dat het handig is om beide breuken gelijknamig te maken.

Je kunt ook zo redeneren: $\frac{1}{2} / \frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1} = 5$.
Je hebt dan beide breuken vermenigvuldigd met het omgekeerde van de tweede breuk.

Opgave 4

Bekijk de vermenigvuldiging $\frac{6}{7} \times \frac{5}{8}$.

a Voer de vermenigvuldiging met de hand uit.

b Kun je de breuk nog vereenvoudigen?

c Je kunt ook vereenvoudigen voordat je de tellers en de noemers vermenigvuldigt. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 5

Je hebt nog $2\frac{1}{2}$ taart. Je geeft iedereen $\frac{1}{6}$ deel van een taart.

a Hoeveel personen kun je een stuk taart geven?

b Welke deling van breuken hoort hier bij?

c Maak beide breuken gelijknamig. Leg nu uit hoe je het antwoord op a kunt zien aan beide breuken.

d Je kunt de deling ook uitvoeren door beide breuken te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede (de noemer). Laat zien hoe.

Opgave 6

Bereken nu met de hand (geef je antwoord als breuk):

a $\frac{2}{11} \times \frac{3}{11}$

b $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$

c $\frac{7}{10} / \frac{2}{5}$

d $\frac{3}{8} \cdot 1\frac{5}{6}$

e $\frac{5}{12} / 1\frac{7}{8}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt met **breuken rekenen**. De vier basisbewerkingen zijn:

- **breuken optellen**, je maakt ze dan eerst gelijknamig;
- **breuken aftrekken**, je maakt ze dan eerst gelijknamig;
- **breuken vermenigvuldigen**, door de tellers te vermenigvuldigen en de noemers te vermenigvuldigen;
- **breuken delen**, je kunt dit doen door ze gelijknamig te maken, je kunt ook twee breuken delen door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede.

Je kunt deze bewerkingen zowel met de hand uitvoeren (zie voorbeelden) als met de rekenmachine.

Voorbeeld 1

Breuken optellen en aftrekken doe je door ze eerst gelijknamig te maken.

- $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{3}{6} + 1 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3\frac{5}{6}$.
- $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} = 2 + \frac{3}{6} - 1 - \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Je kunt ook je rekenmachine gebruiken bij het rekenen met breuken. Je gebruikt dan de 'breukentoets' die er soms zo uitziet $A\frac{b}{c}$ om breuken in te voeren.

Hier zie je hoe dat gaat bij $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$:

2 $A\frac{b}{c}$ 1 $A\frac{b}{c}$ 2 — 1 $A\frac{b}{c}$ 1 $A\frac{b}{c}$ 3 =

levert meteen $1\frac{1}{6}$ op.

Opgave 7

Bekijk de optelling $3\frac{1}{6} + 1\frac{1}{4}$.

a Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine.

b Doe deze optelling ook op je rekenmachine zonder de breukentoets te gebruiken.

Bekijk de aftrekking $3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}$.

c Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine.

d Doe deze aftrekking ook op je rekenmachine zonder de breukentoets te gebruiken.

e Oefen het optellen en aftrekken van breuken via het practicum.

Voorbeeld 2

Soms zijn er ook helen betrokken bij de vermenigvuldiging. Die werk je dan eerst weg.

$2\frac{1}{7} \times 5\frac{3}{4}$ doe je zo:

- $2\frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$.
- $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.
- $\frac{15}{7} \times \frac{23}{4} = \frac{345}{28} = 12\frac{9}{28}$.

Kijk ook hoe dit met je rekenmachine gaat.

Opgave 8

Bekijk de vermenigvuldiging $3\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4}$.

a Breng die vermenigvuldiging in beeld met behulp van een rechthoek van $3\frac{1}{6}$ bij $1\frac{1}{4}$.

b Leg met behulp van die rechthoek uit waarom je niet gewoon 3×1 en $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$ kunt uitrekenen en dit bij elkaar optellen.

c Bepaal de juiste uitkomst met behulp van je figuur.

d Bepaal de juiste uitkomst nog eens door eerst de gehelen weg te werken.

e Oefen het vermenigvuldigen van breuken via het practicum.

Voorbeeld 3

Breuken delen kan door ze eerst gelijknamig te maken:

- $\frac{2}{5} / \frac{3}{7} = \frac{14}{35} / \frac{15}{35} = \frac{14}{15}$.
- $1\frac{2}{5} / 2\frac{3}{7} = \frac{7}{5} / \frac{17}{7} = \frac{49}{35} / \frac{85}{35} = \frac{49}{85}$.

Breuken delen kan ook door ze te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk:

- $\frac{2}{5} / \frac{3}{7} = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}\right) / \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$.
- $1\frac{2}{5} / 2\frac{3}{7} = \frac{7}{5} / \frac{17}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{17} = \frac{49}{85}$.

Dit kan ook op de rekenmachine met behulp van de breukentoets.
$1\frac{2}{5} / 2\frac{3}{7}$ gaat dan zo:

Opgave 9

Bekijk de deling $\frac{5}{6} / \frac{1}{4}$.

a Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine. Kies de methode die je het handigst vindt.

b Welke vraag beantwoord je met deze deling?

Bekijk de deling $3\frac{1}{6} / 1\frac{3}{4}$.

c Doe deze berekening met de hand en controleer hem met je rekenmachine. Kies de methode die je het handigst vindt.

d Oefen het delen van breuken via het practicum.

Oefenen

Opgave 10

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3} = \ldots$

b $2\frac{1}{6} + 1\frac{3}{4} - 2\frac{1}{12} = \ldots$

c $3\frac{7}{12} - 2\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \ldots$

d $4\frac{3}{10} - 2\frac{2}{5} + \frac{17}{20} = \ldots$

Opgave 11

In een stad is 1/3 deel van mannen boven de 40 jaar en 1/7 deel van de vrouwen boven de 40 jaar. Er zijn evenveel mannen als vrouwen.

a Welk deel van mensen in die stad is boven de 40 jaar?

b Waarom kun je het antwoord bij a alleen berekenen omdat er evenveel mannen als vrouwen in deze stad wonen?

Opgave 12

Anneke, Henk en Frits verdelen een taartje.

Vreetzak Frits neemt $\frac{2}{3}$ deel van de taart, Anneke snijdt (bescheiden als ze is) $\frac{1}{12}$ deel van de taart af.

Welk deel van de taart blijft er over voor Henk?

Opgave 13

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{3} = \ldots$

b $2\frac{1}{6} \times 1\frac{3}{5} = \ldots$

c $3\frac{7}{12} \times 2\frac{5}{6} = \ldots$

d $\frac{3}{10} \times 3\frac{1}{3} = \ldots$

Opgave 14

Je kunt het land van boer Groot Koerkamp voorstellen door een rechthoek. Als de boer sterft wordt het land verdeeld onder zijn zonen. Bart krijgt de helft, Dirk $\frac{3}{8}$ en Ben $\frac{1}{8}$ deel.

a Geef met drie kleuren aan wie van de zonen welk deel krijgt.

Bart verbouwt op $\frac{1}{4}$ deel van zijn land tulpen, op de helft narcissen en op de rest hyacinten. Dirk verbouwt op zijn stuk voor de helft tulpen en de rest hyacinten en Ben verbouwt alleen maar narcissen.

b Deel de vakken op en geef in elk vakje met een T, een N of een H aan welke soort bloemen er verbouwd wordt.

c Op welk deel van het totale land staan tulpen?

d Schrijf de berekening op waarmee je het deel tulpen kunt berekenen zonder het plaatje te gebruiken.

e Bereken op welk deel narcissen staan en controleer het in de tekening.

f Bereken het deel hyacinten.

Opgave 15

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $12 / \frac{2}{3} = \ldots$

b $\frac{2}{3} / 12 = \ldots$

c $\frac{3}{5} / \frac{2}{3} = \ldots$

d $2\frac{1}{6} / 1\frac{3}{5} = \ldots$

e $3\frac{7}{12} / 2\frac{5}{6} = \ldots$

f $\frac{3}{10} / 3\frac{1}{3} = \ldots$

Opgave 16

Nathalie heeft vaak last van benauwdheid. Daarom slikt ze medicijnen. Ze slikt per dag $1\frac{1}{2}$ tablet. In een strip zitten 20 tabletjes.

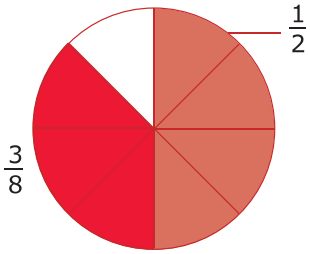
a Hoeveel dagen doet Nathalie met één strip?

In de zomer moet ze een $\frac{1}{4}$ tablet meer nemen.

b Hoeveel dagen doet ze nu met één strip?

Toepassen

Ton en Hans bestellen samen een grote pizza. Ton neemt de helft van de pizza, Hans neemt $\frac{3}{8}$ deel.



Figuur 2.5

Samen eten ze dan $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ deel van de pizza op.

Ton eet $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ deel van de pizza minder dan Hans.

Als Ton van zijn stuk maar $\frac{3}{4}$ opeet, eet hij $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ deel van de pizza.

Dit is een voorbeeld van het toepassen van rekenen met breuken.

Opgave 17

Schilder A kan een huis in 5 uur geheel schilderen, schilder B kan dit in 3 uur.

a Welk deel van het huis kunnen beide schilders samen in een uur schilderen?

b Waarom moet het steeds over hetzelfde huis gaan en kun je niet het schilderwerk van twee verschillende huizen vergelijken?

c Hoeveel tijd hebben beide schilders samen nodig om het huis te schilderen?

d Schilder C schildert het huis in 3,5 uur. Welk deel van het huis schilderen A en C in 1 uur? Hoeveel tijd hebben ze nodig voor het hele huis?

e Beantwoord de vragen uit d ook voor alle drie de schilders samen.

Opgave 18

Stel dat 1 op de 8 werkende Nederlanders werkt bij een bouwbedrijf. En ook dat daarvan $\frac{2}{10}$ deel op kantoor werkt.

a Welk deel van alle werkende Nederlanders werkt dan bij een bouwbedrijf op kantoor?

In een stad bestaat $\frac{3}{5}$ deel van de beroepsbevolking uit mannen van 20 jaar of ouder. Van die mannen is ongeveer 1 op de 40 werkeloos.

b Welk deel van de beroepsbevolking bestaat uit werkeloze mannen van 20 jaar of ouder?

c Deze stad heeft op het moment een beroepsbevolking van 86 . 315 mensen. Hoeveel werkeloze mannen van 20 jaar of ouder zijn er?

Opgave 19

Zo'n 9 miljoen Nederlanders doen aan sport. Bij al die activiteit komen nogal wat blessures voor: elk jaar moet 1 op de 5 sporters medisch worden behandeld. 1/6 deel van alle sportblessures zijn knieblessures.

a Het hoeveelste deel van alle 17 miljoen Nederlanders doet aan sport?

b Het hoeveelste deel van alle Nederlanders moet voor een sportblessure worden behandeld?

c Hoeveel sportende Nederlanders krijgen in de loop van het jaar een knieblessure? Schrijf je berekening op.

Opgave 20

In Nederland gebruikten we tot 1 januari 2002 de gulden. Verder waren er kwartjes (kwart guldens), dubbeltjes ($\frac{1}{10}$ gulden), stuivers ($\frac{1}{20}$ gulden) en centen ($\frac{1}{100}$ gulden). Ook was er de rijksdaalder ($2\frac{1}{2}$ gulden).

a Hoeveel stuivers gingen er in een rijksdaalder?

b Hoeveel stuivers gingen er in een kwartje?

In de Wikipedia vind je een **artikel over de geschiedenis van de Tibetaanse munten**. In het begin van de twintigste eeuw toen Tibet een zelfstandig land was, had het een eigen muntstelsel: 1 srang = $6\frac{2}{3}$ tangkas, 1 tangka = $1\frac{1}{2}$ sho = 15 skar.

c Hoeveel sho gingen er in 1 srang?

d Welk deel van 1 srang is 1 skar?

Testen

Opgave 21

Bereken met de hand en controleer achteraf met je rekenmachine.

a $1\frac{2}{3} + 5\frac{4}{5}$

b $2\frac{7}{8} - \frac{3}{10}$

Opgave 22

Bereken zonder rekenmachine.

a $2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{5}$

b $\frac{1}{3} / 4\frac{2}{8}$

c $3\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}$

d $\frac{1}{7} / \frac{2}{3}$

e $\frac{2}{5} \times 2\frac{4}{7}$

f $4\frac{1}{4} / 2\frac{1}{8}$

Opgave 23

Neem aan dat in een bepaald gebied vier op de zes leerlingen naar het mbo gaat. Van deze leerlingen kiest $\frac{1}{4}$ de richting zorg en welzijn, $\frac{2}{3}$ gaat voor techniek en de rest kiest economie.

a Het hoeveelste deel van deze mbo-leerlingen kiest voor economie?

b Welk deel van de leerlingen in dit gebied gaat naar zorg en welzijn op het mbo?

c Op een scholengemeenschap in dit gebied zitten 1500 leerlingen.
Hoeveel van hen kiezen voor techniek op het mbo?

2.3 Breuken en procenten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip procent (en promille) gebruiken
- rekenen met percentages (en promillages).

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen;
- werken met verhoudingstabellen;
- rekenen met breuken.

Verkennen

Opgave V1

In het jaar 2000 gaf Nederland volgens het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) 5,5% van de totale uitgaven (overheid, bedrijven, instellingen en huishoudens samen) aan onderwijs uit.

a Leg uit hoeveel euro per uitgave van € 100,00 besteed werd aan onderwijs.

b Welk deel van elke euro van de totale Nederlandse uitgaven ging dat jaar naar het onderwijs?

Opgave V2

Vroeger gaven scholieren minder geld uit dan nu. In 1984 gaven ze gemiddeld € 53,00 per maand uit. Er kwam toen gemiddeld € 103,00 per maand binnen. In de loop van de jaren is dit veranderd. De gemiddelde totale uitgaven waren enkele tijd geleden € 100,00 per maand tegenover € 144,00 aan inkomsten. In 1984 hield een scholier aan het einde van de maand dus een groter deel van zijn inkomen over dan tegenwoordig het geval is. De gemiddelde prijsstijging in deze tijd is 63%. Anno nu zou een scholier uit 1984 dus € 86,00 uitgeven. Jongeren van nu besteden beduidend meer, terwijl hun inkomsten niet evenredig zijn toegenomen met de prijsstijgingen.

a In 1984 gaf de gemiddelde scholier € 53,00 per maand uit. Hoeveel hield een scholier in dat jaar dan maandelijks over?

b Hoeveel houdt een scholier tegenwoordig gemiddeld maandelijks over?

c Is dat naar verhouding even veel?

naar: nationaal scholieren onderzoek Nibud

Uitleg

Figuur 2.1

Het Latijnse *pro centum* betekent 'per honderd'. Dus 1 procent (1%) betekent 1 van elke 100.

Dat is $\frac{1}{100}$ deel van het totaal. Je schrijft: $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Dus 1% van 500 is $\frac{1}{100}$ deel van 500. Dat is $\frac{1}{100} \times 500 = 5$ of $0{,}01 \times 500 = 5$.

En 12% van 500 is $\frac{12}{100}$ deel van 500. Dat is $\frac{12}{100} \times 500 = 60$ of $0{,}12 \times 500 = 60$.

100% van 500 is 500.

1%, 12%, 100% en dergelijke zijn percentages.

percentage	100	1	12
hoeveelheid	500	5	60

Tabel 2.1

Op de vraag welk percentage 60 is van 500, is het antwoord: 12%. Dit kun je met een verhoudingstabel uitrekenen, in dit geval via 1.

Veel gebruikt wordt ook promille, dat is 1 op de 1000. Het teken daarvoor is ‰.

4‰ is een promillage van 4. 4‰ van 500 is $\frac{4}{1000} \cdot 500 = 2$.

Opgave 1

45% komt overeen met $\frac{45}{100}$ deel.

a Met welk deel komt 23% overeen?

b Bereken 23% van 150.

c Laat zien dat 25% overeenkomt met $\frac{1}{4}$ deel.

d Waarom is 33% niet precies gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel? Is het meer of minder?

Opgave 2

Bereken.

a 10% van 350.

b 12‰ van € 68,00.

c Hoeveel procent is 15 van de 1560?

d Van welk bedrag is € 45,00 20%?

Opgave 3

Meer dan 100% komt ook voor. De inkomsten per maand van een twaalfjarige scholier bedroegen enige tijd geleden gemiddeld € 49,00. Van een achttienjarige scholier was dit € 358,00.

Hoeveel procent bedragen de inkomsten van een achttienjarige ten opzichte van die van een twaalfjarige?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

1 **procent** is $\frac{1}{100} = 0{,}01$. Dus 1% ergens van is $\frac{1}{100}$ deel daarvan.

Figuur 2.2

Bij het rekenen met procenten kun je werken met verhoudingstabellen.
Daarin bereken je bijvoorbeeld welk **percentage** (hoeveel procent) 50 van de 125 is:

getal	125		50
procent	100	1	?

Tabel 2.2

$\frac{50}{125} \cdot 100 = 40\%$.

Je gebruikt procenten vooral om te vergelijken.
Het is niet eenvoudig om te zeggen of 11 van de 43 een groter of kleiner deel is dan 23 van de 81.
Wanneer je berekent hoeveel procent 11 van de 43 is (25,58...%) en hoeveel procent 23 van de 81 is (28,39...%), dan kun je het antwoord zo geven.

1 **promille** is $\frac{1}{1000}$. Het teken daarvoor is ‰.

4‰ is een **promillage** van 4. 4‰ van 500 is $\frac{4}{1000} \cdot 500 = 2$.

Voorbeeld 1

Wat is meer: 23 van de 53 of 31 van de 64?

Antwoord

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{23}{53} \cdot 100 \approx 43{,}4\%$.

aantal	53	23
procent	100	?

Tabel 2.3

Of je deelt: $\frac{23}{53} \approx 0{,}434$, dus is het 43,4%.

Je kunt werken met een verhoudingstabel: $? = \frac{31}{64} \cdot 100 \approx 48{,}4\%$.

aantal	64	31
procent	100	?

Tabel 2.4

Of je deelt: $\frac{31}{64} \approx 0{,}484$, dus is dit 48,4%.

Conclusie: 31 van 64 is meer dan 23 van 53.

Opgave 4

Wat is naar verhouding meer?

a 5 van de 11 of 45 van de 100

b 23% of $\frac{15}{71}$ deel

Opgave 5

Jaap spaart maandelijks € 18,00 van zijn € 55,00 inkomsten. Zijn oudere broer Willem heeft maandelijks € 125,00 aan inkomsten en spaart € 40,00 euro per maand.

Wie spaart naar verhouding het meest?

Voorbeeld 2

Ooit was al ons gas om te koken en het huis te verwarmen afkomstig uit Nederland, maar tegenwoordig wordt ook gas uit het buitenland gekocht. In 2013 was 63% van het gebruikte gas afkomstig uit Nederland. Dit was samen 38,7 miljard m^3 gas. Hoeveel aardgas was afkomstig uit het buitenland?

Antwoord

Het buitenland leverde $100 - 63 = 37\%$.

Met een verhoudingstabel: $? = \frac{37}{63} \cdot 38{,}7 \approx 22{,}7$ miljard m^3.

miljard m^3 gas	38,7	?
procent	63	37

Tabel 2.5

Opgave 6

Een basketballer heeft van de zestien doelpogingen veertien keer gescoord.

Hoe hoog is zijn scoringspercentage?

Opgave 7

Bekijk de voedingswaardetabel van karnemelk per portie van 150 gram.

Voedingswaarde												
product	energie	energie	water	eiwit	kooolh.	suikers	vet	verz.	e.o.v	m.o.v	choles.	vezels
eenheid per 150 g	kcal	kJ	g	g	g	g	g	g	g	g	mg	g
karnemelk, ongesuikerd	48	200	136,5	3,6	6,8	6,8	0,6	0,5	0,2	0,0	1,5	0,0

Figuur 2.3

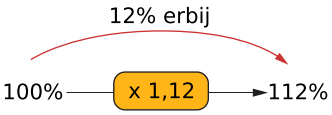
a Voor hoeveel procent bestaat deze karnemelk uit water?

b Hoeveel procent vet bevat de karnemelk?

Voorbeeld 3

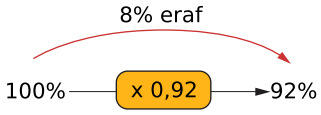
Bij het werken met procenten gaat het vaak om:

1. Percentage erbij: Een winkelier koopt zijn artikelen voor een bepaalde inkoopprijs. Hij wil ze verkopen voor een verkoopprijs die bijvoorbeeld 12% hoger ligt. Hij moet dan bij elk artikel 12% van de inkoopprijs optellen, ofwel de inkoopprijs met $1 + 0{,}12 = 1{,}12$ vermenigvuldigen.



Figuur 2.4

2. Percentage eraf: Een winkelier doet bepaalde artikelen in de uitverkoop. Van alle verkoopprijzen gaat bijvoorbeeld 8% af, ofwel hij moet de inkoopprijs met $1 - 0{,}08 = 0{,}92$ vermenigvuldigen.



Figuur 2.5

Wil je weten met hoeveel procent een hoeveelheid gestegen of gedaald is? Als bijvoorbeeld de temperatuur van water van 45 graden naar 65 graden stijgt, is de stijging $65 - 45 = 20$ graden. Dat is een stijging van $\frac{20}{45} = 0{,}444 = 44{,}4\%$.

Opgave 8

Bereken de nieuwe prijs of het nieuwe bedrag.

a Je koopt een fiets van € 650,00 en krijgt 12,5% korting.

b De contributie van de tafeltennisclub is € 120,00 per jaar en wordt met 5% verhoogd.

c Sinds 1960 is de prijs van benzine met ongeveer 180% gestegen. Toen kostte 1 liter benzine € 0,54.

Opgave 9

Je haalt van een bedrag eerst 10% af en doet er dan weer 10% van het nieuwe bedrag bij. Laat met een berekening zien of je weer hetzelfde bedrag hebt gekregen.

Oefenen

Opgave 10

Bereken het percentage.

a Hoeveel procent is $\frac{1}{10}$ deel?

b Hoeveel procent is 5 van de 20?

c Hoeveel procent is € 3,50 van € 21,00? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

d Een bedrag neemt af van € 125,00 naar € 100,00. Hoeveel procent is de korting?

e Een bedrag neemt toe van € 100,00 naar € 125,00. Hoeveel procent is de toename?

Opgave 11

Bereken het bedrag.

a Hoeveel is 4% van € 1000,00?

b Een bedrag van € 1,34 wordt met 12% verhoogd. Bereken de nieuwe prijs.

c Een bedrag van € 24,65 wordt met 28% verlaagd. Bereken de nieuwe prijs.

d Een bedrag is met 10% verhoogd en is nu € 127,50. Bereken de oude prijs.

e Een bedrag is met 24% verlaagd en is nu € 40,80. Bereken de oude prijs.

Opgave 12

Bereken.

a Je krijgt $\frac{2}{7}$ deel van € 140,00. Hoeveel procent is dat? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

b Een trui is afgeprijsd van € 39,00 voor € 34,50. Hoeveel procent is de korting? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Een telefoonabonnement is duurder geworden, van € 15,00 naar € 18,00. Hoeveel procent is het duurder geworden?

Opgave 13

Het water van de Rijn verdeelt zich als het Nederland binnenkomt over meerdere rivieren. Eerst gaat 65% van het water naar de Waal en 35% naar het Pannerdensch Kanaal. Dat kanaal splitst zich vlak voor Arnhem, waarbij 60% van het water naar de Nederrijn stroomt en 40% naar de IJssel.

a Hoeveel procent van het Rijnwater stroomt door de IJssel?

b In het Ruhrgebied in Duitsland wordt het water van de Rijn vervuild doordat er een bepaalde hoeveelheid kleurstof wordt geloosd. Onderzoekers schatten dat 640 kilogram van die kleurstof in de IJssel terecht is gekomen. Hoeveel kilogram kleurstof is er geloosd?

Opgave 14

Marianne is met haar vriendin Anneke aan het winkelen. Op een gegeven moment komen ze langs een winkel met aanbiedingen. Daar stormen ze meteen naar binnen.

a Marianne ziet een trui van € 49,98. Wat gaat die trui kosten met deze korting?

b Anneke koopt twee spijkerbroeken met een winkelprijs van elk € 51,75. Wat betaalt ze daarvoor?

Marianne ziet een blouse waarop 20% korting staat. De winkelprijs is € 33,50 en ze moet er € 27,00 voor betalen.

Figuur 2.6

c Klopt het kortingspercentage wel?

Opgave 15

Je koopt een fiets van € 650,00 voor € 600,00. Hoeveel procent korting krijg je dan?

a Bereken dit percentage door eerst de korting in euro's te berekenen.

b Bereken dit percentage door rechtstreeks met de bedragen 600 en 650 te rekenen.

Toepassen

Btw is de afkorting voor *belasting toegevoegde waarde*. Die belasting betaal je meestal bij het kopen van een product of dienst. De belastingdienst maakt onderscheid tussen luxe artikelen (21% btw) en basisartikelen (6% btw) zoals brood.

Je zus koopt een elektrische scooter. De winkelier verkoopt deze voor € 2250,00. Dit is de prijs zonder btw (dat heet exclusief btw). Hij moet 21% btw rekenen: de scooter kost daarom 21% meer. Hij kost dan: $1{,}21 \times 2250{,}00 = 2722{,}50$ euro inclusief btw.

Meestal zet de winkelier de prijs al meteen inclusief btw op het artikel. Je koopt een fiets en je betaalt € 900,00 inclusief 21% btw. Hoeveel btw heb je dan betaald?

De winkelier heeft de verkoopprijs berekend door de prijs zonder btw te vermenigvuldigen met 1,21.
De prijs zonder btw krijg je dus terug door te delen door 1,21:
$\frac{900}{1{,}21} \approx 743{,}80$ euro.
De btw is: 900 − 743,80 = 156,20 euro.

Je kunt ook met een verhoudingstabel via 1 rekenen.

Denk erom dat je nu *niet* 21% van 900 kunt uitrekenen en dat van de 900 aftrekken, want de € 900,00 is het bedrag dat tot stand komt *nadat* er 21% bij opgeteld is. Je moet dan 900 op 121% stellen.

Opgave 16

Bekijk de rekenvoorbeelden met btw hierboven.

Voor een fiets betaal je € 650,00, exclusief 21% btw.

a Hoeveel betaal je voor deze fiets inclusief btw?

Voor een koelkast betaal je € 677,60, inclusief 21% btw.

b Hoeveel euro bedraagt de btw?

c Hoeveel kost deze koelkast zonder btw?

Opgave 17

In de horeca bestaat ook het lage btw-tarief van 6%.
Dat tarief geldt voor het leveren van voedsel en (niet-alcoholische) dranken.
Je eet in een restaurant een maaltijdsalade met een glas bubbelwater. Dat kost je € 8,75 inclusief btw.

Hoeveel bedraagt de prijs exclusief btw?

Testen

Opgave 18

Bij een loterij worden 750 loten verkocht.
Er zijn twee eerste prijzen van € 35,00, drie tweede prijzen van € 25,00 en vier derde prijzen van € 5,00.
15% van de inkomsten wordt uitgekeerd aan prijzen.

a Wat kost een lot? Rond af op 10 cent.

b Hoeveel promille van de inkomsten wordt er aan derde prijzen uitbetaald?

Opgave 19

Je kunt in de uitverkoop sneakers kopen voor € 125,00 met 10% korting of voor € 150,00 met 21% korting.
Hoeveel procent prijsverschil hebben - na aftrek van de korting - de duurste sneakers ten opzichte van de goedkoopste?

2.4 Machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen macht, grondtal, exponent, machtsverheffen;
- rekenen met machten in de juiste rekenvolgorde.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen met de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met breuken.

Verkennen

Opgave V1

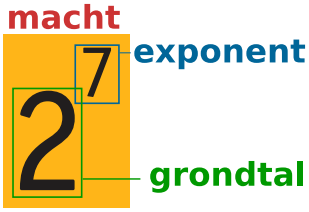
Als je een A4-blaadje dubbelvouwt, krijg je twee lagen papier.
Als je het blad nog een keer dubbelvouwt, krijg je vier lagen papier.
Hoeveel lagen papier krijg je als je het blad tien keer hebt dubbelgevouwen?

Uitleg

Je krijgt een kwadraat als je een getal met zichzelf vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 = 3^2$.

Je krijgt een macht als je met steeds hetzelfde getal vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst machtig groot: $3^5 = 243$.

Je spreekt van machtsverheffen en je zegt '3 tot de macht 5', of kortweg '3 tot de vijfde'. 3^5 is een macht met grondtal 3 en exponent 5.
Een kwadraat zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.



Figuur 2.1

Je kunt ook de machten berekenen van een breuk: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

Je kunt ook de machten berekenen van negatieve getallen. Let op de rekenvolgorde: $-17^3 = -17 \cdot 17 \cdot 17 = -4913$ en $(-17)^3 = -17 \cdot -17 \cdot -17 = -4913$

Verder zijn er rekenregels:

- machten vermenigvuldigen dan exponenten optellen:
  $10^4 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$;
- machten delen dan exponenten aftrekken:
  $10^5 / 10^3 = (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) / (10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^2$;
- machten van machten dan exponenten vermenigvuldigen:
  $\left(10^3\right)^4 = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{12}$;
- grondtal niet 0 en exponent wel: $10^0 = 1$;
- negatieve exponenten kunnen ook voorkomen:
  $10^3 / 10^5 = (10 \cdot 10 \cdot 10) / (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$;
- machten gaan in een berekening voor vermenigvuldigen en delen.

Het samennemen of korter schrijven van machten heet herleiden.

Opgave 1

Bereken de machten.

a 1^{12}

b $3{,}5^{3}$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

d $\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$

Opgave 2

a Bereken 3^{4}.

b Wat betekent $(-3)^{4}$? Wat is de uitkomst?

c Wat betekent -3^{4}? Wat is de uitkomst?

Opgave 3

Bereken.

a $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

b $\left(2\frac{2}{3}\right)^{3}$

c $\left(\frac{2}{7}\right)^{0}$

d $-2 \cdot (-3)^{2}$

Opgave 4

Herleid de machten. Je hoeft ze niet te berekenen.

a $3^{95} \cdot 3^{114}$

b $\frac{3^{114}}{3^{95}}$

c $\left(3^{12}\right)^{5}$

d $\frac{\left(3^{15}\right)^{10}}{3^{50} \cdot 3^{100}}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je krijgt een **macht** als je met steeds hetzelfde getal vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.

Je spreekt van **machtsverheffen** en je zegt '3 tot de macht 5', of kortweg '3 tot de vijfde'. 3^5 is een macht met **grondtal** 3 en **exponent** 5.
Een **kwadraat** zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.

Figuur 2.2

Rekenregels om machten te **herleiden**:

- machten vermenigvuldigen dan exponenten optellen: $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$;
- machten delen dan exponenten aftrekken: $10^5 / 10^3 = 10^2$;
- machten van machten dan exponenten vermenigvuldigen: $(10^3)^4 = 10^{12}$;
- grondtal niet 0 en exponent wel: $10^0 = 1$;
- negatieve exponenten kunnen ook voorkomen: $10^3 / 10^5 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$;
- machten gaan in een berekening voor vermenigvuldigen en delen.

Voorbeeld 1

Bij het rekenen moet je machten berekenen voor vermenigvuldigen en delen.

Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst. Hier zie je een voorbeeld van hoe je dit kunt toepassen.

$2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$

$= 2 \cdot 16 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 32 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 32 + 6 - 4$
$= 34$

Let goed op mintekens en haakjes: $(-17)^4 = -17 \cdot -17 \cdot -17 \cdot -17 = 83521$, maar $-17^4 = -17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = -83521$.

Opgave 5

Let op de rekenvolgorde en bereken.

a $4 \cdot 2^5 - \frac{400}{2^4}$

b $\frac{(2^3+3^2)^2}{17} - 2^2$

c $\left(2 \cdot \frac{1}{2^3}\right)^3$

Opgave 6

Bereken.

a $500 - -5^3$

b $500 - (-5)^3$

c $500 + -5^4$

d $500 + (-5)^4$

Voorbeeld 2

Soms kun je uitdrukkingen met machten berekenen door eerst te herleiden

Bereken: $\frac{17^{304} \cdot 17^{98}}{(17^{100})^4}$

Antwoord

$\frac{17^{304} \cdot 17^{98}}{(17^{100})^4} = \frac{17^{402}}{17^{400}} = 17^2 = 289$

Opgave 7

Bereken.

a $\frac{13^{240}}{(13^{10})^4 \cdot 13^{200}}$

b $\frac{4^{99}}{2^{150} \cdot (-2^5)^{10}}$

Opgave 8

Reken je met getallen in de technische notatie dan werk je met machten.

a Een raket wordt afgeschoten met een snelheid van $42 \cdot 10^3$ km/h richting de maan.
Hij moet een afstand afleggen van ongeveer $1{,}20 \cdot 10^6$ km.
Hoe lang is de raket onderweg?

b Er zitten ongeveer $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomen in 12 gram ^{12}C (koolstof).
Hoeveel gram weegt 1 atoom van deze koolstof? Geef je antwoord in drie significante cijfers in de technische notatie.

Oefenen

Opgave 9

Bereken.

a 4^5

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

d $\left(1\frac{3}{5}\right)^3$

e $(-2)^6$

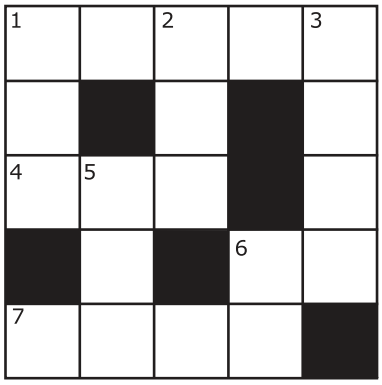
f $-2^4 \cdot 3^3$

Opgave 10

Vul de kruisgetallenpuzzel in.

Horizontaal		Verticaal	
1	$(6^2)^3$	1	$2^4 \cdot 5^2 + 1$
4	$3^2 \cdot (2^2)^2$	2	$\left((2 \cdot 3)^2\right) \cdot (20 - 1)$
6	$\frac{3^7}{3^5} \cdot 10$	3	$2 \cdot 5^5$
7	$2 \cdot 10^3 + 2$	5	$10 \cdot \left(\frac{7^5}{7^3} - 1\right)$
		6	$(2^3)^2 \cdot 3 - 10^2$

Tabel 2.1



Opgave 11

Herleid de machten. Je hoeft ze niet te berekenen.

a $2^{16} \cdot (2^{10})^3$

b $\frac{4 \cdot 2^{26}}{2^{20}}$

c $\frac{2^{14} \cdot 2^{26}}{(2^{20})^2}$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan eentwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon. 1 AE $\approx 150 \cdot 10^6$ km.

Figuur 2.3

a Hoeveel AE is 1 km?

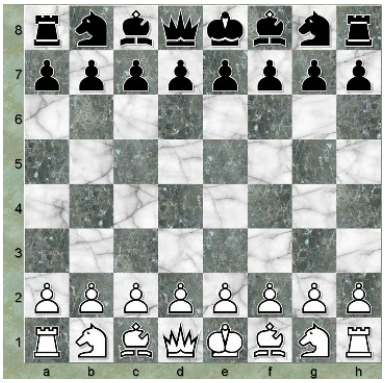
b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?

c Pluto bevindt zich ongeveer $5{,}9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?

d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $300 \cdot 10^6$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?

Toepassen

Sissah Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah Ben Dahir zei: "Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken."
De koning lachte en antwoordde: "Is dat echt alles dat je wilt hebben?" en hij gaf opdracht het graan uit te betalen. Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 2.4

Opgave 14

Bekijk het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen op pagina 89**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

e Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen op pagina 89**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?

b Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

c Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Testen

Opgave 16

Bereken uit het hoofd.

a 2^7

b $(-2)^7$

c -2^7

d $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

e Bereken de macht met grondtal 3 en exponent 6.

Opgave 17

Bereken.

a $-4 \cdot 2^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$

b $-2 \cdot (-4)^4$

c $\left(\frac{2}{4}\right)^3 \cdot 3 + 2^6$

d $-4^4 + 3^5 \cdot 2^2$

Opgave 18

Herleid de volgende machten. Je hoeft ze niet uit te rekenen.

a $\frac{(9^{20})^4}{3^2 \cdot 9^{16}}$

b $6^{16} \cdot 6^{12}$

c $\left(4^{17}\right)^4$

d $12^{14} \cdot \frac{12^{80}}{12^{56}}$

2.5 Wortels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen wortel en hogere machtswortel en deze berekenen/benaderen;
- wortelvormen herleiden.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen, breuken en machten met de juiste rekenvolgorde;
- oppervlakte van een vierkant en inhoud van een kubus berekenen.

Verkennen

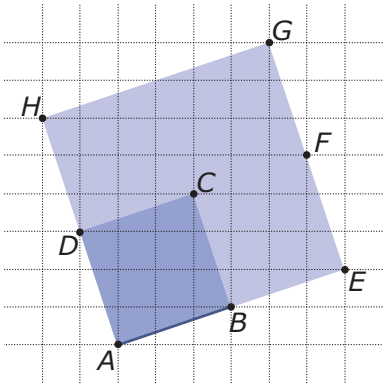
Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.
Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.
Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?



Figuur 2.1

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

d Laat ook zien, dat $2 \cdot \left(2\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.
Derdemachts worteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

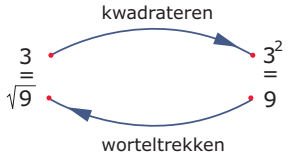
Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Je schrijft:

$\sqrt{9} = 3$



Figuur 2.2

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.
Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Bijvoorbeeld:

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$
- $\sqrt{6} \,/\, \sqrt{2} = \sqrt{6/2} = \sqrt{3}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derdemachts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierdemachts worteltrekken, enz.
Met hogere machtswortels kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Bijvoorbeeld is:

$\sqrt[3]{64} = 4$ omdat $4^3 = 64$

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 92** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{-343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg op pagina 92** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

a Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

b $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

c $\frac{4 \cdot \sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met 'gewone' wortels. Toch is er een verschil.

a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

b $5\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

c $\frac{4 \cdot \sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

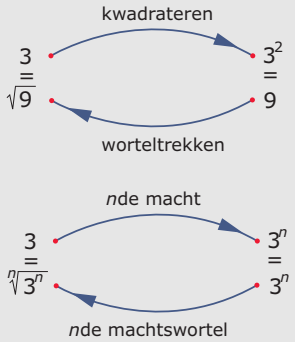
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
n-de-machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een *n*de macht. Zo geldt:

$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{7^3} = 7$



Figuur 2.3

Het rekenen met wortels gaat zo:

- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{7 \cdot 5}$ en $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7 \cdot 5}$
- $\sqrt{7} \,/\, \sqrt{5} = \sqrt{7/5}$ en $\sqrt[3]{7} \,/\, \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7/5}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.
- In de rekenvolgorde komen machten en wortels voor vermenigvuldigen en delen.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Voorbeeld 1

Bij het rekenen moet je deze rekenvolgorde hanteren:

- H: je berekent eerst wat er binnen de haakjes staat (of in de teller en noemer van een breuk);
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst.

Bereken nu $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$.

Antwoord

$2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3}$

$= 2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8}$

$= 8 + 6 - 4$

$= 10$

Opgave 4

Let op de rekenvolgorde en bereken.

a $4 \cdot 2^5 - \frac{400}{\sqrt{16}}$

b $\frac{(2^3+3^2)^2}{17} - \sqrt[3]{64}$

c $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^3$

Voorbeeld 2

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels uitdrukkingen kunt herleiden.

- $2 \cdot \sqrt{10} + \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{10} + \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10}$
- $2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{15} = 6 \cdot \sqrt[3]{15}$
- $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$

Opgave 5

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2 op pagina 94** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt{30} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$

b $\left(\sqrt{5}\right)^5 - \sqrt{5}$

c $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

d $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$

Oefenen

Opgave 6

Bereken of benader de volgende wortels in drie decimalen nauwkeurig

a $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

b $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

c $\sqrt[3]{66}$

d $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

Opgave 7

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 8

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $3 \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

c $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

d $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 9

Bereken.

a $\left(\sqrt{81} - 4\right)^2 \Big/ \left(5^2 - \sqrt{6^2 + 8^2}\right)$

b $\sqrt[3]{10^2 / 2 + 4 \cdot 5 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}$

Opgave 10

Een balk heeft ribben van 4, 8 en 12 cm.

a Bereken de lengtes van alle mogelijke zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.
De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek. Als de beide rechthoekszijden 1 zijn, is de langste zijde $\sqrt{2}$.
Je berekent dit met de stelling van Pythagoras.
Die stelling zegt dat in elke rechthoekige driehoek de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de langste zijde: $a^2 + b^2 = c^2$ als a en b de rechthoekszijden zijn.

Figuur 2.4

De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde 1 is, dan is de langste zijde (ook wel de schuine zijde) 2 en de langste rechthoekszijde dus $\sqrt{3}$ (gebruik de stelling van Pythagoras).

Opgave 11

Bekijk de twee tekendriehoeken hierboven. Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van 1 eenheid heeft. Neem eerst een driehoek die dezelfde vorm heeft als de geodriehoek.

a Laat zien dat de langste zijde $\sqrt{2}$ cm is als de twee rechthoekszijden 1 cm zijn.

b Hoe lang is de langste zijde als de kortste zijden 16 cm zijn?

Neem nu de andere tekendriehoek.

c Laat zien hoe je de andere zijden berekent als de kortste zijde 1 cm is.

d Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?

e Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 6 cm is?

Opgave 12

Je kunt de stelling van Pythagoras ook toepassen in drie dimensies.

Een balk heeft ribben van 4, 8 en 12 cm.

a Bereken de lengtes van alle mogelijke zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Testen

Opgave 13

Bereken of benader in drie decimalen nauwkeurig.

a $\sqrt{144}$

b $\sqrt[3]{-216}$

c $\sqrt{125}$

d $\sqrt[3]{100}$

Opgave 14

Bereken.

a $(2^5 - 12) \big/ \left(\sqrt{64} - \sqrt{9}\right)$

b $\left(\sqrt{75} \big/ \sqrt{3} - 2\right)^4$

Opgave 15

Herleid.

a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{30} \big/ \sqrt{2}$

b $\sqrt{162} - \sqrt{32}$

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het rekenen met breuken, procenten, machten en wortels voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Rekenen II** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- breuk met teller en noemer — vereenvoudigen — gelijknamig maken en vergelijken
- rekenen met breuken
- procent, percentage — promille, promillage
- macht met grondtal en exponent — rekenen met machten
- wortel — hogere machtswortel — rekenen met wortels

Activiteitenlijst

- breuken vereenvoudigen — breuken vergelijken door gelijknamig maken — breuken omrekenen naar een decimaal getal;
- breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- rekenen met procenten — rekenen met promillages
- rekenen met machten en de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met (hogere machts)wortels en de juiste rekenvolgorde — wortelvormen herleiden.

Testen

Opgave 1

Bereken met de hand (dus zonder rekenmachine):

a $\frac{1}{4} + \frac{4}{15} = \ldots$

b $\frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \ldots$

c $2\frac{1}{4} + 1\frac{4}{15} = \ldots$

d $2\frac{1}{4} - 1\frac{4}{15} = \ldots$

e $\frac{1}{4} \times \frac{4}{15} = \ldots$

f $\frac{1}{4} / \frac{4}{15} = \ldots$

g $2\frac{1}{4} \times 1\frac{4}{15} = \ldots$

h $2\frac{1}{4} / 1\frac{4}{15} = \ldots$

Opgave 2

Van de scooters die uit een fabriek komen is $\frac{2}{3}$ deel rood. $\frac{5}{8}$ deel van de rode scooters is elektrisch, de rest loopt op benzine.

a Welke deel van alle scooters is rood en elektrisch?

Per dag verlaten er 960 scooters de fabriek.

b Hoeveel daarvan zijn rood en elektrisch?

De rode scooters die op benzine lopen worden in de fabriek gevuld met elk $2\frac{1}{3}$ liter benzine.

c Hoeveel liter benzine wordt er dus op één dag getankt?

In de grote benzinetank van de fabriek gaat 7000 liter.

d Hoeveel scooters kunnen ze daarmee van $2\frac{1}{3}$ liter benzine voorzien?

Opgave 3

Maak de volgende berekeningen kloppend door het juiste getal of de juiste getallen (soms een breuk) in te vullen:

a $\frac{3}{8} + \frac{\ldots}{12} = \frac{19}{24}$

b $1\frac{7}{8} - \ldots = \frac{3}{4}$

c $\frac{7}{12} \cdot \frac{\ldots}{13} = \frac{14}{39}$

d $\frac{3}{5} / \ldots = 10$

Opgave 4

Een winkelier geeft op Lego wel 40% korting, omdat de oude voorraad weg moet om ruimte te maken voor de nieuwste series.

a Hoeveel kost de brandweerkazerne van € 78,50 dan nog?

b De brandweerauto kost met korting nog € 21,30. Hoeveel kostte hij zonder korting?

Opgave 5

Aanbiedingen!

a Een leren bureaustoel van € 295,00 kun je met korting kopen voor € 200,00. Hoeveel procent korting krijg je dan?

b Een pak hagelslag van 250 gram kost € 1,75. De fabrikant doet een aanbieding: 100 gram meer voor dezelfde prijs. Hoeveel korting krijg je dan eigenlijk?

Opgave 6

Bereken (gebruik alleen waar nodig je rekenmachine om het antwoord in twee decimalen nauwkeurig te geven):

a 7^2

b $1{,}5^2$

c $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

d $\sqrt{6{,}25}$

e $\sqrt{\frac{4}{81}}$

f $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

g $\sqrt{70}$

h $\left(3\sqrt{6}\right)^2$

Opgave 7

Maak de volgende berekeningen, geef steeds exacte antwoorden.

a 7^4

b 5^0

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

d $1{,}6^3$

e $\sqrt{2 \cdot 2^2 + 17}$

f $\left(5\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)^2$

g $\frac{6 \cdot 3^2}{6 - 3^2}$

h $5^{1+\sqrt{25}} \big/ 25 - 5$

Opgave 8

Schrijf als macht van 7:

a $7 \cdot 7^{140}$

b $7^{141} \big/ 7^{15}$

c $\left(7^{70}\right)^7$

d $7^5 + 42 \cdot 7^4$

e $\frac{3 \cdot 7^{115}}{1029}$

f $\frac{8 \cdot 7^{200}}{7^{201} + 7^{200}}$

Toepassen

Er zijn nogal wat praktijksituaties waarin je moet rekenen met breuken en/of procenten. Hier zie je er enkele.

Ook zie je hieronder een manier om wortels te benaderen uit de tijd dat er nog geen elektronische rekenmachines bestonden.

Opgave 9: Behangplaksel

In een receptenboek uit 1936 staat dit recept voor behangplaksel (dl staat voor deel of delen).

Rijstebloem 4 dl
Krijt (zeer fijn) 2 dl
Caseïne 1 dl

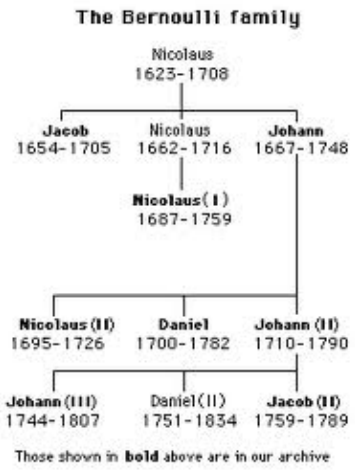
Aluin in poeder $\frac{1}{2}$ dl Men kan het mengsel direct met heet water tot een bruikbare pap aanroeren. Beter lost men de caseïne met iets ammoniak op als vroeger aangegeven en mengt deze oplossing met de gekookte rijstemeelpap. Verder is een pap van zuivere tarwebloem zeer bruikbaar. Hiertoe mengt men de tarwebloem met koud water tot een dun papje aan en giet dit mengsel juist als bij stijfsel in een voldoende hoeveelheid kokend water.

a Rijstebloem koop je in pakken van 1 kg. Hoeveel moet je van de andere bestanddelen inkopen als je 1 pak rijstebloem tot behangplaksel wilt verwerken?

b Met 1 kg behangplaksel kun je 20 m^2 muur behangen. Hoeveel van elk van deze ingrediënten moet je kopen om 35 m^2 muur te kunnen behangen?

Opgave 10: Stamboom

De Zwitserse familie Bernoulli heeft een flink aantal bekende wiskundigen voortgebracht, allemaal mannen. Je ziet hier een deel van de mannelijke lijn van hun familiestamboom. De namen van de bekende wiskundigen zijn vet gedrukt. In het algemeen komen iemand's erfelijke eigenschappen voor de helft van de vader en voor de helft van de moeder. Bekijk nu Johann III Bernoulli.



Figuur 2.1

a Hoe groot is het deel dat zijn overgrootvader van vaders kant aan erfelijke eigenschappen heeft bijgedragen?

b Jakob en Johann Bernoulli waren de eerste bekende wiskundigen uit de familie. Als je aanneemt dat goed zijn in wiskunde erfelijk is, voor welk deel heeft Johann III dan zijn wiskundige capaciteiten geërfd?

c Kun je op grond van deze stamboom aannemen dat wiskundige kwaliteiten erfelijk zijn?

Opgave 11: Dwergspitsmuis

De dwergspitsmuis is het kleinste zoogdier van Nederland. Toch eet het diertje naar verhouding 40 keer zoveel als een volwassen olifant. Het eet elke dag zijn eigen gewicht aan insecten op.

De dwergspitsmuis is een insectenetend zoogdiertje met een gewicht tussen de 2,4 en 2,6 gram. Het diertje leeft het liefst zo diep mogelijk onder de grond in gangen en holen die andere dieren gegraven hebben. De dwergspitsmuis heeft een heel ander levensritme dan de mens: hij slaapt 3 uur en is dan 3 uur wakker en actief, daarna slaapt hij weer 3 uur, enzovoorts. Hij heeft dus maar een dag van 6 uur. Een dwergspitsmuis van 1 jaar is van middelbare leeftijd; het dier wordt hoogstens zo'n 15 maanden oud.

Een olifant weegt gemiddeld zo'n 4000 kg. In een dierentuin eet zo'n olifant per dag 20 kg hooi, 15 kg gras, 10 kg krachtvoer, 45 kg takken, 5 kg brood en 5 kg gemengd groenvoer.

a Hoe lang schat je deze dwergspitsmuis als je zijn staart niet meerekent?

b Reken na of de dwergspitsmuis naar verhouding 40 keer zoveel eet als de olifant.

c Voor een dwergspitsmuis duurt een 'dag' 6 uur. Hoe lang is voor de mens één 'muizenjaar'?

d Hoe lang is voor deze muis één mensenjaar?

e Hoe oud wordt de dwergspitsmuis in 'muizenjaren'?

Opgave 12: Toegestane afwijkingen bij producten

Op bijvoorbeeld een pak suiker wordt het gewicht aangeven als: 1 kg ℮.
Deze ℮ geeft aan dat het gewicht van dit pak suiker wel niet precies 1 kg zal zijn, maar wel ligt binnen de grenzen die de Europese Unie heeft vastgesteld.
Regelmatig worden er door ambtenaren in opdracht van de E.U. controles uitgevoerd om na te gaan of het gewicht binnen de juiste grenzen ligt. Voor 1 kg suiker is de toegestane afwijking van het gewicht 1,5%.

a Tussen welke grenzen mag het gewicht van dit pak suiker zitten?

b Zoek minstens vijf verschillende producten waarop dit teken voorkomt en maak een lijst met het toegestane gewicht (of volume) van elk van die producten.

Opgave 13: Wortels benaderen

Voor het benaderen van wortels bestaan verschillende technieken. Deze gaat vrij snel:
- Stap 1: Doe een gok.
- Stap 2: Deel het getal waarvan je de wortel wilt benaderen door je gok.
- Stap 3: Bereken het gemiddelde van het getal dat je bij stap 2 hebt gevonden en je gok.

Je hebt nu een nieuwe gok en daarmee herhaal je de stappen 2 en 3 tot je de gewenste benadering hebt gevonden.

a Probeer deze techniek uit en laat zien dat $\sqrt{12} \approx 3{,}464$ in drie decimalen nauwkeurig.

b Benader op dezelfde manier $\sqrt{40} \approx 6{,}324$ in drie decimalen nauwkeurig.

c Geef een verklaring voor deze methode met behulp de oppervlakte van rechthoeken.

d Deze methode is in feite een algoritme om wortels in een gewenst aantal decimalen te benaderen en kun je daarom programmeren. Zoek uit hoe je dit kunt doen.

3

Algebra I

3.1 Wat is een formule? 104
3.2 Variabelen optellen/aftrekken 112
3.3 Variabelen vermenigvuldigen 120
3.4 Haakjes wegwerken 128
3.5 Som, verschil, product delen 137
3.6 Vergelijkingen 145
3.7 Totaalbeeld 156

3.1 Wat is een formule?

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Voorkennis

- tabellen en grafieken maken bij woordformules;
- waarden aflezen uit grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Met de regel van 72 bereken je in hoeveel jaar je geld zich verdubbelt:

Deel het rentepercentage per jaar op 72 en de uitkomst is ongeveer het aantal jaren waarin je geld zich verdubbelt.

Dus bij 4% rente per jaar verdubbelt je geld zich in 18 jaar want $\frac{72}{4} = 18$.

Wil je weten hoeveel rente (koerswinst, rente, dividend) je moet maken om je verjaardagscadeau van € 1000,= te verdubbelen in 8 jaar? Deel 72 door 8 en je vindt: 9%.

Het rentepercentage per jaar staat niet van tevoren vast. Noem het bijvoorbeeld r.

a Welke berekening moet je dan doen om de *verdubbelingstijd* te berekenen?

b Waarom noem je r een 'variabele'?

c Is *verdubbelingstijd* ook een variabele?

d Je kunt ook voor *verdubbelingstijd* een letter nemen, bijvoorbeeld t.
Hoe ziet je rekenformule er dan uit?

e Hoe groot is t als $r = 2{,}5\%$?

f Hoe groot moet r zijn als je wilt dat je kapitaal in 10 jaar verdubbelt?

Uitleg

Figuur 3.1

Gordijnen hang je in plooien. Daarom is de breedte van een gordijn altijd meer dan de breedte van het raam waar het voor komt te hangen. Meestal neem je de totale breedte van het gordijn ongeveer 1,5 keer de raambreedte.

Zoiets heet een **vuistregel**. Een vuistregel is een berekening of een manier van werken die vooral op ervaring is gebaseerd. Als een vuistregel een berekening beschrijft kun je hem in formulevorm geven:

gordijnbreedte = 1,5× *raambreedte*

Of korter: $g = 1{,}5 \times r$

Maar dan moet je goed weten wat g en r betekenen: g is de totale breedte van het gordijn in meter en r is de breedte van het raam in meter.
Voor een raam met een breedte van 8 m heb je dan $1{,}5 \times 8 = 12$ m aan gordijnbreedte nodig. Je vult het getal 8 in de formule in. Dat heet 'substitueren', je substitueert 8 voor r.
Koop je gordijnen in stroken van 1 m breedte dan heb je 12 stroken nodig. Hoe lang die stroken moeten zijn hangt af van de hoogte van het raam...

Opgave 1

Bekijk de vuistregel in de uitleg.

a Welke formule hoort er bij deze vuistregel? Noem de gordijnbreedte g en de raambreedte r, net als in de tekst.

b Maak hierbij een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

r in m	0	2	4	6	8
g in m					

Tabel 3.1

c Waarom noem je r recht evenredig met g?

Je hebt een kamerraam met een breedte van 6,42 en een hoogte van 2,35 m. Je wilt gordijnen kopen die bestaan uit stroken met een breedte van 90 cm.

d Hoeveel van die stroken koop je en hoeveel m^2 stof is dat?

Opgave 2

Voor de oppervlakte van een cirkel geldt de formule $A = \pi \times r^2$. Hierin is r de lengte van de straal in m en A de oppervlakte.

a Waarom is dit geen vuistregel?

b Maak hierbij een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

r in m	0	2	4	6	8
A in m					

Tabel 3.2

c Waarom is A niet recht evenredig met r?

Je hebt een ronde tafel met een diameter van 1,50 m. Je wilt een rond tafelkleed dat aan alle kanten 20 cm moet oversteken.

d Uit hoeveel m^2 stof bestaat dit tafelkleed?

Opgave 3

Soms wordt wel beweerd dat iemands ideale gewicht in kg te berekenen is door van de lengte van die persoon in cm 100 af te trekken.

a Waarom is dit een vuistregel?

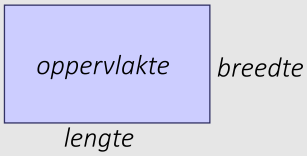
b Hoe groot is het ideale gewicht van iemand die 1,78 m lang is?

c Schrijf een zo kort mogelijke formule op bij deze vuistregel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een berekening waarin variabelen voorkomen en een isgelijkteken.
Een bekend voorbeeld is *oppervlakte (rechthoek)* = *lengte* × *breedte*.
De **variabelen** zijn *lengte*, *breedte* en *oppervlakte*.
Als je voor twee ervan een getal kiest, kun je de derde uitrekenen.



Figuur 3.2

Meestal kort je de variabelen af tot letter: b voor *breedte*, l voor *lengte* en A voor *oppervlakte (rechthoek)* (de A komt van 'area', Engels voor oppervlakte).
De formule hierboven wordt dan: $A = l \times b$.

Omdat het keerteken op de letter x lijkt, schrijf je het als $\cdot$.

De formule hierboven wordt dan: $A = l \cdot b$.

En als dat niet tot misverstanden leidt, laat je het keerteken meestal weg.

Als bijvoorbeeld $l = 10$, dan wordt de formule $A = 10 \cdot b$ of $A = 10b$.
In dit geval is A **afhankelijk** van b.
De formule geeft dan een **verband tussen twee variabelen** weer.
Je kunt er een **tabel** bij maken door voor b getallen in te vullen en daarmee de waarden van A uit te rekenen. Dit heet **substitueren**, je substitueert voor b telkens een ander getal.
En bij die tabel kun je weer een grafiek maken met A op de verticale as.

Voorbeeld 1

Een behanger weet uit ervaring dat hij in een uur ongeveer 12 m^2 kan behangen.
Zijn uurprijs bedraagt € 45,=.

Wanneer een klant hem vraagt om een prijsopgave te doen, dan schat hij eerst het aantal m^2 dat hij zou moeten behangen en dan berekent hij zo de arbeidskosten:

arbeidskosten = *aantal* m^2 $/ 12 \cdot 45$

Dit is een vuistregel. De behanger zal dus altijd zeggen dat het uiteindelijke bedrag daar in de buurt zal liggen. Want het aantal m^2 is nog niet precies bekend, dus het aantal uren dat hij werkt ook niet. En bovendien komen er ook nog de kosten voor de verf bij.

Schrijf deze formule zo kort mogelijk en schat zijn arbeidskosten als hij 650 m^2 moet behangen.

Antwoord

De formule kun je zo schrijven $K = a/12 \cdot 45 = a \cdot \frac{45}{12} = a \cdot 3{,}75 = 3{,}75a$.

Dus het kortst als $K = 3{,}75a$.

De arbeidskosten bij 650 m^2 bereken je door dit getal voor a te substitueren.
Je krijgt dan $K = 3{,}75 \cdot 650 = 2437{,}50$ euro.

Opgave 4

Bekijk de formule voor de arbeidskosten van de behanger in **Voorbeeld 1 op pagina 106**. Behalve arbeidskosten zijn er ook materiaalkosten, een bedrag per m^2 afhankelijk van de kwaliteit van het behang. En de behanger rekent voorrijkosten van € 35,00 per klus.

a Deze behanger heeft een klus waarbij hij 240 m^2 muur moet behangen met behang van € 15,50 per m^2. Hoeveel moet hij hiervoor rekenen?

b Welke formule kun je opschrijven voor de totale kosten TK in euro voor het behangen van a m^2 met behang dat € 15,50 per m^2 kost? Maak je formule zo eenvoudig mogelijk.

c Welke formule kun je opschrijven voor de totale kosten TK in euro voor het behangen van a m^2 met behang dat p euro per m^2 kost? Maak je formule zo eenvoudig mogelijk.

Opgave 5

Een MBO-afdeling heeft een kopieerapparaat voor de leerlingen. De huurprijs is € 320,00 per maand en de kosten voor een zwart/wit kopie bedragen € 0,04 en voor een kleurenkopie zijn ze € 0,12 per stuk.

a Noem de totale maandelijkse kosten voor dit apparaat TK, het aantal zwart/wit kopieën z en het aantal kleurenkopieën k. Schrijf een bijpassende formule op.

b Hoeveel bedragen de totale kosten per maand als er 1200 zwart/wit en 300 kleurenkopieën zijn gemaakt?

c Er worden ongeveer 4 keer zoveel zwart/wit kopieën gemaakt als kleurenkopieën. Hoeveel is in dat geval de gemiddelde prijs van een kopie?

De school gaat uit van gemiddelde kosten van € 0,06 per kopie. Er wordt geen verschil gemaakt tussen zwart/wit en kleur.

d Met welke formule kun je dan de maandelijkse kosten per kopie K beschrijven afhankelijk van het aantal kopieën a?

e Er worden in februari 1325 kopieën gemaakt met dit apparaat. Hoeveel bedragen dan de maandelijkse kosten per kopie?

Voorbeeld 2

Om de remweg van een personenauto te berekenen wordt soms van de volgende vuistregel gebruik gemaakt:

Als de snelheid van de auto v km/uur is, dan vind je de remweg R in meters door

- de snelheid door 10 te delen;
- wat daar uitkomt met zichzelf te vermenigvuldigen;
- en tenslotte $\frac{3}{4}$ deel te nemen van wat je hebt gevonden.

Je berekent dus eerst $\frac{v}{10}$ en daarna $\frac{v}{10} \cdot \frac{v}{10}$ en tenslotte wordt: $R = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^2}{100}$.
Dit is dezelfde vuistregel in formulevorm.

Je noemt dit een vuistregel omdat het maar een benadering geeft van de werkelijke remweg. Die hangt namelijk ook van de omstandigheden af: is het wegdek nat of droog, hoe snel reageert de bestuurder, etc. Bovendien kloppen de eenheden links en rechts van het isgelijkteken niet met elkaar.

Opgave 6

Bekijk de vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto afhankelijk van zijn snelheid.

a Over welke twee variabelen gaat het hier en welke eenheden horen er bij?

b Een automobilist rijdt 120 km/uur als hij plotseling moet remmen. Hoe lang is zijn remweg?

c De stopafstand is de afstand die de auto nog aflegt vanaf het moment dat de automobilist in de gaten krijgt dat hij moet remmen tot het moment dat de auto stil staat. Is de stopafstand groter of kleiner dan de remweg? En waarom?

Opgave 7

Bekijk de vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto afhankelijk van zijn snelheid.

a Maak een tabel bij de gegeven formule.
Welke variabele is de afhankelijk variabele?

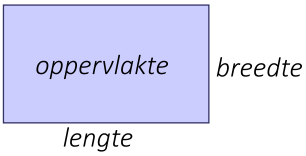
b Teken een grafiek van R afhankelijk van v.
Welke variabele komt op de verticale as?

c Bepaal met behulp van de grafiek bij welke snelheid de remweg meer dan 50 m wordt.

Oefenen

Opgave 8

Je ziet hier hoe de oppervlakte van een rechthoek kan worden berekend met de formule $A = l \cdot b$.



Figuur 3.3

Hierin is:

- A de oppervlakte in m^2
- l de lengte in m
- b de breedte in m

Neem in deze opgave aan dat $b = 6$ m.

a Welke formule kun je nu opschrijven voor A afhankelijk van l?

b Hoe groot is A als $l = 15$ m?

c Maak een tabel en een grafiek bij deze formule.
Welke variabele moet op de verticale as en waarom?

d Bij welke lengte is $A = 25$ m^2? Antwoord in twee decimalen.

Opgave 9

De oppervlakte van een rechthoek kan worden berekend met de formule $A = l \cdot b$.

Hierin is:

- A de oppervlakte in m^2
- l de lengte in m
- b de breedte in m

Neem in deze opgave aan dat $A = 60$ m^2.

a Welke formule kun je nu opschrijven voor A afhankelijk van l?

b Hoe groot is b als $l = 15$ m?

c Waarom is nu niet duidelijk welke variabele op de verticale as moet?

d Maak een tabel en een grafiek bij deze formule. Kies je getallen zo, dat je gehele uitkomsten krijgt.

Opgave 10

Je ziet hier een dunne cilindervormige kaars met een lengte van 30 cm.
Als de kaars wordt aangestoken brandt hij gelijkmatig op.
Elk uur wordt hij ongeveer 2,4 cm korter.

Figuur 3.4

a Welke formule kun je nu opschrijven voor de kaarslengte L in cm afhankelijk van de tijd t in uren na het aansteken?

b Hoe lang is de kaars na 3 uur brandtijd?

c Maak een tabel en een grafiek bij deze formule, laat t lopen vanaf $t = 0$ (het moment dat de kaars wordt aangestoken) tot $t = 12$.

d Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Opgave 11

Een docent berekent het cijfer c voor een toets vanuit de punten p die een leerling heeft gescoord. De docent gebruikt deze formule: $c = \frac{p}{60} \cdot 9 + 1$.

a Wat is je cijfer als je veertig punten hebt?

b Waarom kun je voor deze toets maximaal zestig punten halen?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een 5,5 of hoger krijgt. Reken dat na met de formule.

Opgave 12

Je betaalt € 9,95 voor het online maken van een fotoboek. Voor elke foto die je toevoegt betaal je € 0,15 bij.

a Hoeveel betaal je voor een fotoboek met 30 foto's?

b Noem het aantal foto's x en stel een formule op voor de kosten K van het fotoboek in euro.

c Hoeveel betaal je per foto voor een fotoboek van 35 foto's?

d Stel een formule op voor de kosten k per foto in euro, afhankelijk van x.

e Zal k ooit minder worden dan € 0,20? Licht je antwoord toe.

Opgave 13

Alle kubussen hebben dezelfde vorm.
Noem de lengte van een ribbe van een kubus r.

a Welke formule geldt dan voor de inhoud V?

b Welke formule geldt voor de oppervlakte A van de kubus?

c Teken de grafieken van V en van A afhankelijk van r in één figuur.

d Vanaf welke waarde van r is de inhoud altijd een groter getal dan de oppervlakte?

Toepassen

Er bestaan ook in de gezondheidszorg de nodige formules.

Figuur 3.5

Je *BMR* (*Basal Metabolic Rate* of Basale Stofwisselingssnelheid) is het aantal calorieën dat je lichaam verbrandt om de normale lichaamsfuncties uit te kunnen voeren. Bij het rekenen met *BMR* wordt lichaamsactiviteit (zoals lopen, fietsen, enzovoort) niet meeberekend. Je *BMR* verbruikt tweederde van je dagelijkse caloriebehoefte. De *BMR* verschilt van persoon tot persoon, afhankelijk van gewicht, lengte en leeftijd. Maar ook erfelijke factoren spelen een rol.

Om de *BMR* te berekenen, zijn er voor volwassenen de formules van Harris en Benedict (uit 1919):

- *BMR* mannen = 66 + 13,7× *gewicht* +5× *lengte* −6,8× *leeftijd*
- *BMR* vrouwen = 655 + 9,6× *gewicht* +1,8× *lengte* −4,7× *leeftijd*

Hierin is *gewicht* in kg, *lengte* in centimeters en *leeftijd* in jaren.

Opgave 14

Bekijk hierboven de formules van Harris en Benedict.

a Bereken de *BMR* van een volwassen man van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Hoe groot is de totale dagelijkse caloriebehoefte van deze man?

b Bereken de *BMR* van een volwassen vrouw van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Wat is de totale dagelijkse caloriebehoefte van deze vrouw?

c Kun je het verschil tussen beide antwoorden verklaren?

Iemand's lengte is een vaststaand gegeven, dat verandert in de loop van je leven bijna niet.
Neem iemand van 30 jaar oud met een lengte van 1,80 m. Het gewicht van deze persoon bepaalt de *BMR*.

d Schrijf de formule voor de mannen en die voor de vrouwen die aan deze voorwaarden voldoen zo kort mogelijk op.

e Teken bij beide formules die je bij d hebt gevonden een grafiek. Hoe zie je in de grafieken dat de mannen een hogere *BMR* hebben dan vrouwen?

Opgave 15

Voor volwassenen is de *BMI* (Body Mass Index, een index voor het gewicht in verhouding tot de lichaamslengte) een getal waaraan je kunt zien of je overgewicht hebt of niet. Dat wordt zo berekend:

$BMI = \frac{G}{l^2}$

Hierin is l de lengte in meter en G het gewicht in kg.
Bij een *BMI* tussen de 18,5 en 25 heb je een gezond gewicht.

a Kun je bij deze formule een grafiek tekenen?

b Hoeveel bedraagt de BMI van een volwassene met een lengte van 180 cm en een gewicht van 80 kg?

c Meestal is de lengte van een persoon een vast gegeven, maar zijn of haar gewicht niet. Neem bijvoorbeeld een volwassen persoon met een lengte van 180 cm. Welke formule geldt voor de BMI van deze persoon?

d Teken een bijpassende grafiek.
Maak eerst een tabel met voor het gewicht de waarden 50,60,70,80,90,100.

e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke gewichten horen daarbij?

f Als iemand een gewicht van 90 kg heeft, dan denk je al snel aan iemand met overgewicht.
Maar dat hoeft niet. Welke formule voor de BMI geldt voor mensen van 90 kg?

g Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor lengte de waarden 1,5; 1,6; 1,7...2,2.

h Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht.
Welke lengtes horen daarbij?

Testen

Opgave 16

In Duitsland kent het schoolsysteem de cijfers 1 tot en met 6 bij beoordelingen. In tegenstelling tot in Nederland is 1 daar het hoogste cijfer. Van 4 tot en met 1 heb je een voldoende. Als je een 5 of een 6 scoort, heb je een onvoldoende. Een docent in Duitsland berekent het cijfer c van een toets voor een leerling die p punten heeft gescoord met de volgende formule:

$c = 6 - \frac{p}{70} \cdot 5$

a Welk cijfer krijgt een Duitse leerling die 42 punten heeft gescoord?

b Waarom kun je voor deze toets maximaal 70 punten scoren?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een voldoende krijgt. Reken het na met de formule.

Opgave 17

Van een serie rechthoeken is de lengte twee keer zo groot als de breedte.

a Welke formule kun je opstellen voor de oppervlakte A van deze rechthoeken afhankelijk van de breedte b?

b Teken een grafiek van A afhankelijk van b.
Neem voor b alle waarden vanaf 0 tot en met 10 cm.

c Bepaal in mm nauwkeurig de waarde van b waarbij een oppervlakte hoort van 100 cm^2.

3.2 Variabelen optellen/aftrekken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken.

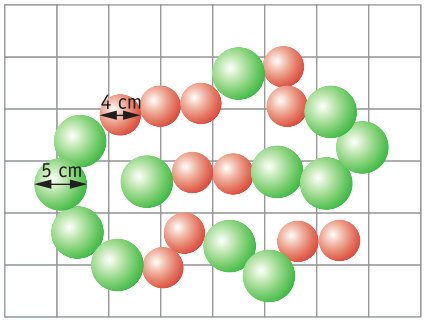
Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Verkennen

Opgave V1

Een kralenketting bestaat uit groene en rode kralen. De rode kralen hebben een diameter van 4 cm en de groene kralen hebben een diameter van 5 cm.



Figuur 3.1

a Iemand bepaalt zo de lengte van de kralenketting: $5+4+4+5+...$

Is dit een handige methode? Bereken zo de lengte van de kralenketting.

b Iemand anders berekent de lengte van de kralenketting door het aantal rode kralen met 4 te vermenigvuldigen en het aantal groene kralen met 5 te vermenigvuldigen en beide antwoorden op te tellen.

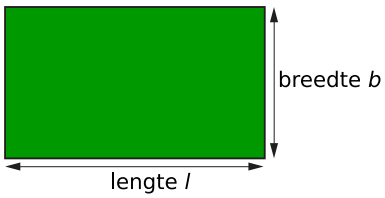
Hoe kun je deze berekening als formule kort opschrijven?

c Je krijgt een doos met kralen met daarin 42 groene kralen en 35 rode kralen.

Hoe lang is de langste ketting die je hiermee kunt maken?

Uitleg

De formule voor de omtrek van een rechthoek kun je schrijven als: $P = l + l + b + b$, waarbij de variabelen l de lengte, b de breedte en P de omtrek van de rechthoek voorstellen. Deze formule kun je korter schrijven, dat noem je herleiden. Hier kun je de uitdrukking $l+l+b+b$ herleiden tot $2 \cdot l + 2 \cdot b$, nog korter $2l + 2b$.



Figuur 3.2

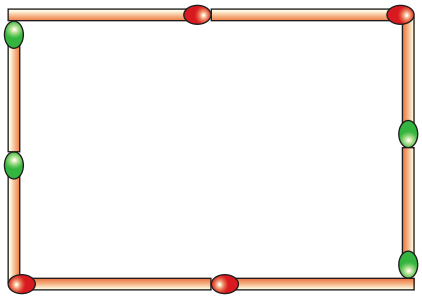
$2l$ en $2b$ noem je de termen van de uitdrukking.
De formule wordt zo $P = 2l + 2b$.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen:

- $a + a = 2 \cdot a = 2a$ en $2a + 3a = 2 \cdot a + 3 \cdot a = a + a + a + a + a = 5a$,
  maar $2a + 2b$ kan niet korter; die twee termen zijn niet van dezelfde soort.
- $5a - 2a = a + a + a + a + a - a - a = 3a$
- $a + b = b + a$.
  Bij aftrekken mag dit alleen als je het minteken meeneemt: $4 - 3 = -3 + 4$ of met variabelen $a - b = -b + a$.
- $1a$ schrijf je korter als a, net zoals $-1a = -a$.

Opgave 1

Je ziet een rechthoek gelegd van twee soorten lucifers. Noem de lengte van de kortste lucifer k en die van de langste lucifer l.



Figuur 3.3

a Welke formule geldt voor de omtrek P van de rechthoek? Schrijf de formule zo kort mogelijk op.

b Moet je ook nog iets afspreken over de gebruikte eenheden van de verschillende variabelen in de formule?

Opgave 2

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

A. $P = 3a + 2b$ kun je niet herleiden.
B. $P = 2a + 3b - 3b$ kun je herleiden tot $P = 2a$.
C. $P = 4b - 5b + 3a$ kun je herleiden tot $P = 3a + b$.
D. $P = a + 6a$ kun je herleiden tot $P = 7a$.
E. $P = -3q + 7q$ kun je herleiden tot $P = 4q$.
F. $P = -3b - -2b$ kun je herleiden tot $P = -b$.
G. $P = a + a + b + b + a + a - b - b$ kun je herleiden tot $P = 4a$.

Opgave 3

Herleid.

a $4a + 2a$

b $3d + 2t$

c $a + a + 3a$

d $-2a + 3b + 4a + 7b$

e $2b + 3a + b + -2a + b$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een formule zoals $P = 3x + 5y + 2x - x$ bestaat uit vier **termen**, waarvan er drie gelijksoortig zijn.

Je kunt de **uitdrukking** $3x + 5y + 2x - x$ **herleiden** door **gelijksoortige termen** samen te nemen: $3x + 2x - 1x + 5y = 4x + 5y$.

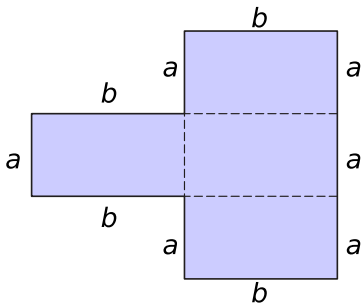
De formule is dan herleid tot: $P = 4x + 5y$.

Andere voorbeelden van herleiden zijn:

- $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$
- $2a + 3a = 2 \cdot a + 3 \cdot a = a + a + a + a + a = 5a$.
- $2a + 3b$ kun je niet herleiden want er zijn geen gelijksoortige termen.
- $a + b = b + a$ en $a - b = -b + a$.
- $1a = a$ en $-1a = -a$.
- $0a = 0$.

Voorbeeld 1

De omtrek van de figuur wordt voorgesteld door de letter P. De verschillende zijden van de figuur hebben de lengte a of de lengte b, behalve de zijde die drie keer de lengte van a is.



Figuur 3.4

Er geldt: $P = a + b + a + b + 3a + b + a + b$

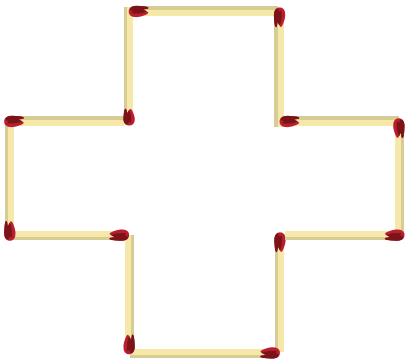
Met behulp van de eigenschappen van optellen kun je dit schrijven als: $P = a + a + a + 3a + b + b + b + b$

En dus herleiden tot: $P = 6a + 4b$

$P = 6a + 4b$ kun je niet korter schrijven.

Opgave 4

Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l. Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.



Figuur 3.5

a Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.

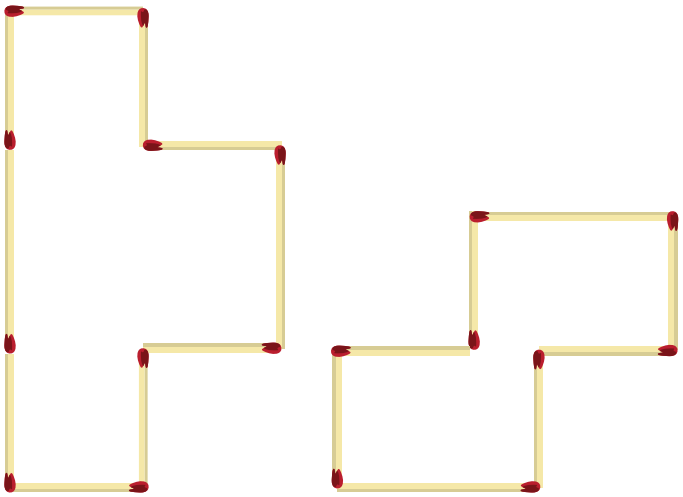
b Bereken P als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm met behulp van je formule.

c Geef een zo kort mogelijke formule voor de breedte B van de figuur.

d Stel, de omtrek van de figuur is 26 cm. De lengte van de korte lucifer is gelijk aan 2 cm. Wat is dan de lengte van de lange lucifer?

Opgave 5

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek. Noem de lengte van de korte lucifer k en de lengte van de lange lucifer l.



I II

Figuur 3.6

Voorbeeld 2

Iemand verkoopt telefoonhoesjes en oordopjes op de markt. Een telefoonhoesje verkoopt ze voor € 7,50 en een oordopje voor € 5,00 per stuk.

Ze heeft hierbij de volgende formule bedacht:

$R = 7{,}50h + 5{,}00a$

Waarbij R staat voor de opbrengst in euro's, h voor het aantal verkochte telefoonhoesjes en a voor het aantal verkochte oordopjes.

Als ze 15 telefoonhoesjes en 25 oordopjes verkoopt, heeft ze een opbrengst van € 237,50.

Opgave 6

Bekijk het.

a Kun je de formule die de verkoopster heeft bedacht, herleiden?

b Laat met een berekening zien hoe je aan de opbrengst van € 237,50 komt.

c Hoe groot is de opbrengst als ze twaalf telefoonhoesjes en achttien oordopjes verkoopt?

Een andere marktkoopman verkoopt ook telefoonhoesjes en oordopjes. Hij verkoopt een telefoonhoesje voor € 10,00 en een oordop voor € 3,50.

d Welke formule voor de opbrengst hoort hierbij?

e Als beide marktkooplui allebei tien telefoonhoesjes en twintig oordopjes verkopen, wie heeft dan de grootste opbrengst?

Opgave 7

Bij een telefoonabonnement hoort de formule $K = 0{,}06t + 15$, waarbij K de kosten in euro's zijn per maand en t het aantal belminuten per maand.

Door een actie van de telefoonmaatschappij krijg je per belminuut € 0,02 korting. Daarnaast krijg je nog eens € 5,00 korting per maand.

a Stel een formule op voor de nieuwe belkosten.

b Stel dat je 120 minuten gebeld hebt in een maand. Hoeveel euro spaar je uit met het nieuwe tarief?

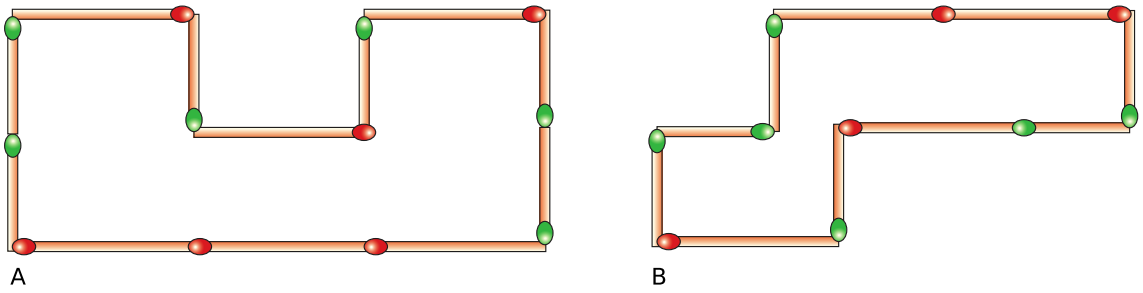
c Stel dat je niet € 5,00 korting krijgt, maar € 7,00 en dat je niet € 0,02 per belminuut korting krijgt, maar € 0,01. Hoe ziet de formule er dan uit?

d Stel dat je 220 minuten in een maand belt en dat je mag kiezen tussen de eerste korting en de tweede korting. Welke korting neem je dan?

Oefenen

Opgave 8

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek. De lengte van de korte lucifer is p en die van de lange is r.



Figuur 3.7

Opgave 9

Herleid.

a $2b + l + b + 4l + 3b$

b $3k + 2k + l + 4l + k$

c $150a + 120b + 22a + 3a + 55b$

d $m + 8n + 4n + 9p$

Opgave 10

Herleid.

a $4p + 6q - 3p + 12q$

b $-3p - 4p + 12q + 11p$

c $15a + 3b - 12a + b - a$

d $x \cdot 5 + 4y - 4x$

e $p + 4q + 2p - 2q$

f $3a + 4b - 6a + 8c$

Opgave 11

Iemand werkt bij een boer als aardbeienplukster. Ze krijgt € 3,00 per uur en voor elke gevulde mand krijgt ze € 1,50. Hierbij kun je de volgende formule opstellen: $L = 3{,}00 \cdot u + 1{,}50 \cdot a$.

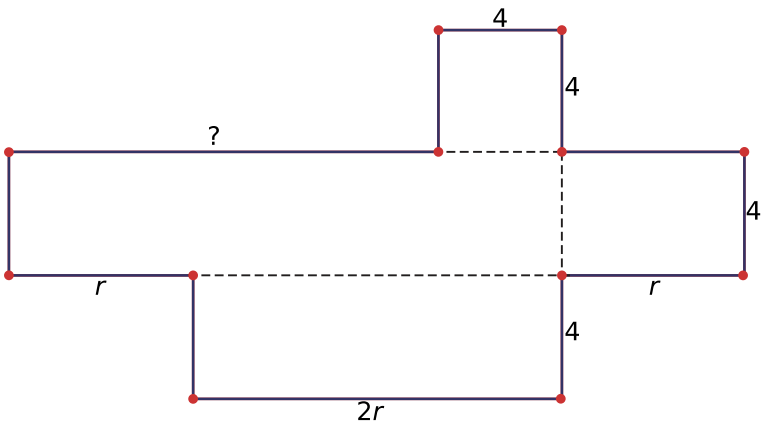
a Wat stellen de variabelen in de formule voor?

b Waarom mag je de formule ook schrijven als $L = 1{,}50a + 3{,}00u$?

c Deze plukster werkt op een dag zeven uur en ze krijgt vijftien manden vol. Wat is haar loon op die dag?

Opgave 12

Bekijk de figuur.



Figuur 3.8

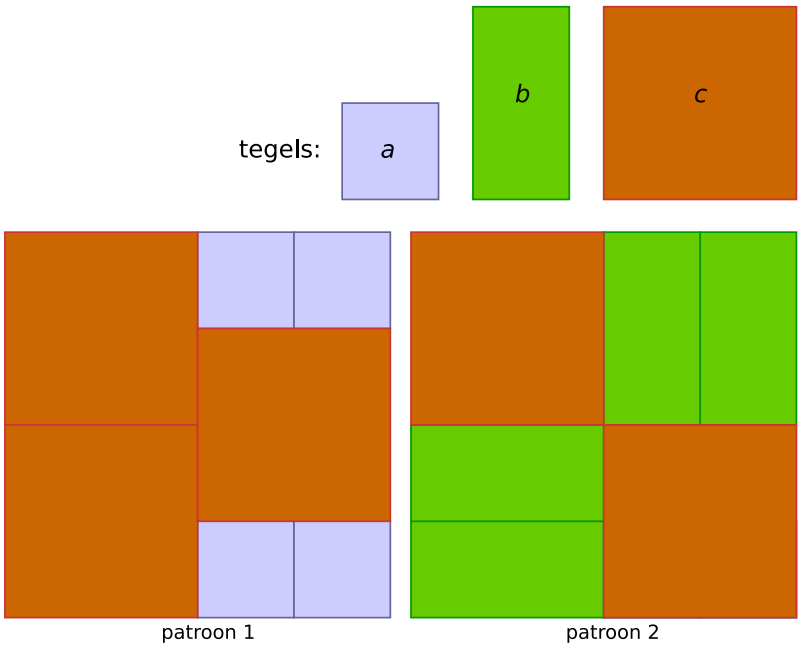
a Hoe groot is de lengte van het lijnstuk bij het vraagteken?

b Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.

c Neem $r = 6$ cm. Hoe groot is dan de omtrek van de figuur?

Opgave 13

Een tuindersbedrijf maakt tegelpatronen voor terrassen. Daarvoor gebruiken ze drie typen tegels. De oppervlakte van tegel 1 is a, van tegel 2 b en van tegel 3 c. In de figuren zie je twee tegelpatronen die het bedrijf maakt.



Figuur 3.9

a Maak een formule voor oppervlakte O van tegelpatroon 1 en tegelpatroon 2.

Om het werk te versnellen, maakt het bedrijf grotere tegelpatronen door samenstellingen te maken van patroon 1 en patroon 2. Een samenstelling ziet er als volgt uit:

patroon 1	patroon 2	patroon 1
patroon 2	patroon 1	patroon 2
patroon 1	patroon 2	patroon 1

Tabel 3.1

b Maak een formule voor de oppervlakte van dit samengestelde tegelpatroon.

Toepassen

Het herleiden van uitdrukkingen pas je bijvoorbeeld toe als je formules moet optellen of aftrekken.

Een voor de hand liggend voorbeeld is het berekenen van winst door inkomsten en uitgaven van elkaar af te halen.

Een voorbeeld daarvan is de winkelier die een kopieermachine huurt om zijn klanten in staat te stellen kopieën te maken. Hij vraagt € 0,15 per kopie.
Maar het huren en het onderhoud van het apparaat kost met € 125,00 per maand en de kosten voor elke kopie bedragen € 0,06.
Je kunt bij deze situatie een formule opstellen voor de kosten K per maand afhankelijk van het aantal kopieën q dat er wordt gemaakt. Ook kun je een formule opstellen voor de inkomsten R per maand afhankelijk van q.
De winst W bereken je dan uit $W = R - K$.

Opgave 14

Bekijk hierboven de situatie rond de kopieermachine in een winkel.

a Stel een formule op voor de inkomsten per maand van de winkelier.

b Stel ook een formule op voor de totale kosten per maand.

c Stel nu een formule op voor de maandelijkse winst door inkomsten en kosten van elkaar af te trekken. Herleid je formule tot een zo eenvoudig mogelijke vorm.

d Maak een figuur met daarin alle drie de grafieken van R, K en W.

e Vanaf welk aantal kopieën per maand maakt deze winkelier winst op zijn kopieermachine?

Opgave 15

Volgens het CBS waren er in Nederland in 2017 ongeveer 4,32 miljoen koopwoningen en ongeveer 3,27 miljoen huurwoningen.

In de periode 2012 - 2017 zijn er 28000 koopwoningen per jaar bijgekomen tegenover 30000 huurwoningen per jaar.

Neem aan dat die jaarlijkse groei zo door gaat en dat n het aantal jaren na 2017 voorstelt.

a Welke formule kun je opstellen voor het aantal koopwoningen K (in duizendtallen) afhankelijk van n?

b Welke formule kun je opstellen voor het aantal huurwoningen H (in duizendtallen) afhankelijk van n?

c Stel een formule op voor het totaal aantal woningen W (in duizendtallen) afhankelijk van n.

d Je kunt ook een formule opstellen voor het verschil V (in duizendtallen) van het aantal koopwoningen en het aantal huurwoningen. Stel zo'n formule op.

e Hoe zie je aan deze laatste formule dat het aantal huurwoningen op deze manier het aantal koopwoningen inhaalt?

Testen

Opgave 16

Herleid

a $2a + 3a$

b $-2b + 4b - b$

c $17q - 20 + 15q + 21 + 2q$

d $3k - 6 - 4k + 5$

e $2{,}5s + 5s - 7{,}5s$

f $3x - 6y + 8x + 2y - 7z$

Opgave 17

Je brengt folders en kranten rond. Voor de folders krijg je een vast bedrag van € 6,00 plus voor elke rondgebrachte folder 5 cent. Voor elke rondgebrachte krant krijg je 10 cent.

Hierbij kun je de volgende formule voor het weekloon opstellen: $W = 6 + 0{,}05a + 0{,}10b$.

a Waar staan de letters W, a en b in de formule voor?

b Waarom kun je deze formule ook schrijven als $W = 0{,}05a + 0{,}10b + 6$?

c Hoeveel bedraagt het weekloon als je per week 250 folders en 240 kranten rondbrengt?

3.3 Variabelen vermenigvuldigen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door factoren te vermenigvuldigen.

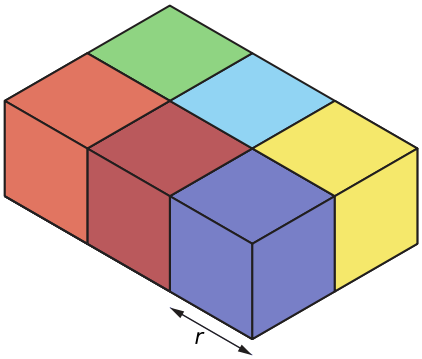
Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken.

Verkennen

Opgave V1

In de afbeelding zie je een balk die bestaat uit zes kubussen. Iedere kubus heeft zijden van r cm.



Figuur 3.1

a Maak een formule waarbij je de inhoud van één kubus kunt berekenen. Noem de inhoud I en de zijden r.

b Maak nu een formule waarbij je de inhoud van de gehele balk berekent. Noem de inhoud weer I en gebruik r, de lengte van de zijden van een kubus.

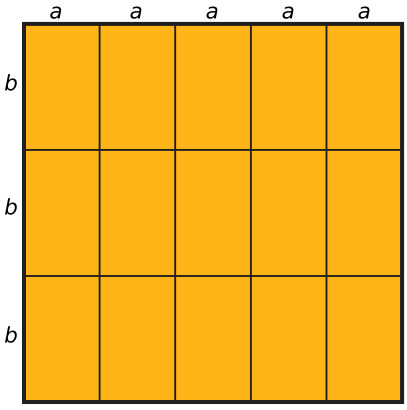
c Ook de oppervlakte van de balk kun je uitdrukken in r. Hoe groot is de oppervlakte van een zijvlak van een kubus?

d Hoe groot is de oppervlakte van de bovenkant van de balk? En de voorkant? En de zijkant?

e Maak een berekening van de oppervlakte van de gehele balk, uitgedrukt in r. Vergeet niet de zijkanten mee te tellen die je niet ziet. Geef de oppervlakte van de balk aan met O.

Uitleg

In de figuur zie je drie rijen met rechthoeken met breedte a en lengte (of hoogte) b. Elke rechthoek heeft dus een oppervlakte van $a \cdot b = ab$.



Figuur 3.2

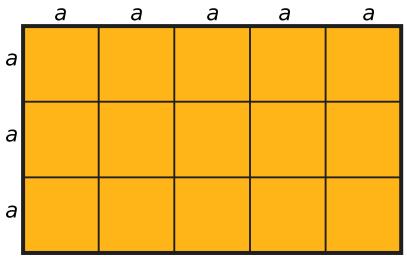
Je kunt dit ook schrijven als $b \cdot a$, dus $a \cdot b = b \cdot a$.
Je vermenigvuldigt beide variabelen; de volgorde maakt daarbij niet uit.

Voor de oppervlakte A van de gehele figuur geldt:

- gewoon lengte maal breedte: $A = 5a \cdot 3b$;
- losse rechthoeken samennemen: $A = 15 \cdot ab$.

Dus $5a \cdot 3b = 5 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 5 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 15 \cdot ab = 15ab$.

Als je vierkanten met een oppervlakte van $a \cdot a = a^2$ stapelt, zoals in de rechthoek in de tweede figuur, dan zie je $5a \cdot 3a = 5 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 15a^2$.



Figuur 3.3

Je kunt van ingewikkelder figuren de oppervlakte bepalen door de oppervlakte van (halve) rechthoeken op te tellen.
Heb je bijvoorbeeld een figuur die bestaat uit twee vierkanten met een oppervlakte van a^2 en drie rechthoeken met een oppervlakte van ab, dan wordt de totale oppervlakte: $a^2 + a^2 + ab + ab + ab = 2a^2 + 3ab$.
Ook nu kun je gelijksoortige termen optellen.

Opgave 1

Je hebt een rechthoek met een lengte van $6p$ en een breedte van $4q$.

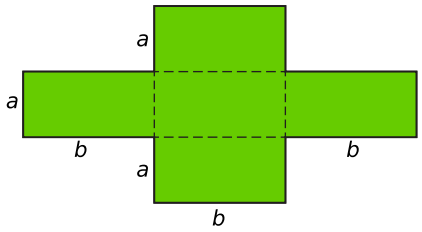
a Op welke twee manieren kun je de oppervlakte A hiervan beschrijven?

Je hebt een rechthoek met een lengte van $6p$ en een breedte van $4p$.

b Op welke twee manieren kun je de oppervlakte A hiervan beschrijven?

Opgave 2

Stel een zo kort mogelijke formule op voor de omtrek P en de oppervlakte A van de figuur.



Figuur 3.4

Opgave 3

Herleid.

a $3ab + 4ab$

b $2xy - 4yx + 7xy$

c $-3ab + 4a^2 - 2ab$

d $2x^2 + 5xy - x^2$

Opgave 4

Herleid.

a $P = 5p + 3p + 2q + p + 6q$

b $A = p^2 + 5pq + p^2 + qp$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt **variabelen vermenigvuldigen**:

- $a \cdot b = ab$
- Vaak gebruik je de wisseleigenschap: $a \cdot b = b \cdot a$, dus $ab = ba$.
- $2a \cdot 3b = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$
- $2a \cdot 3a = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$
- $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

In bijvoorbeeld $2a \cdot 3b$ heten $2a$ en $3b$ de **factoren** van de vermenigvuldiging.

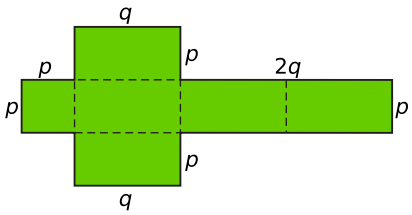
Weer kun je de gelijksoortige termen optellen of aftrekken:

- $3ab + b^2 + 4ab + b^2 = 3ab + 4ab + b^2 + b^2 = 7ab + 2b^2$
- $-4ab + 3ac - 5ac + 3ab = -4ab + 3ab + 3ac - 5ac = -ab - 2ac$
- $(2a)^3 - 2a^2 \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3 - 2a^3 = 6a^3$

Voorbeeld 1

Deze figuur bestaat uit vijf rechthoeken en een vierkant.

Geef een formule voor de oppervlakte A van de figuur.



Figuur 3.5

Antwoord

Voor de oppervlakte A geldt:
$A = p \cdot p + 3 \cdot p \cdot q + p \cdot 2q = p^2 + 3pq + 2pq = p^2 + 5pq$

Opgave 5

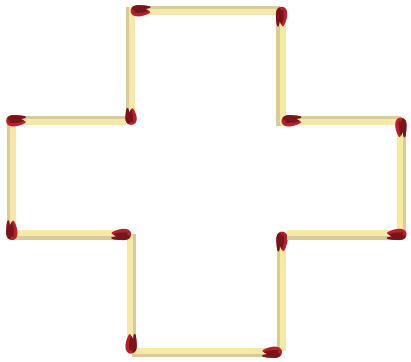
Bekijk de formule voor de figuur uit het voorbeeld.

a Leg uit hoe je aan de formule voor de oppervlakte kunt komen.

b Neem $p = 5$ en $q = 3$ en bereken de oppervlakte A. Controleer je antwoord met behulp van de figuur.

Opgave 6

Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l. Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.


Figuur 3.6

a Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.

b Bereken A als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm met behulp van je formule.

Voorbeeld 2

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen met variabelen erin.

- $4ab + 2ba = 4ab + 2ab = 6ab$
- $-2t^2 + 3t + t^2 = -2t^2 + t^2 + 3t = -t^2 + 3t$
- $2y \cdot 7y = 2 \cdot 7 \cdot y \cdot y = 14y^2$
- $5z \cdot z^3 = 5 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z = 5z^4$
- $-4c^2 \cdot -6c^3 = -4 \cdot c \cdot c \cdot -6 \cdot c \cdot c \cdot c = 24 \cdot c^5$
- $(-x)^2 \cdot x^3 = -x \cdot -x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

Opgave 7

Herleid of schrijf: ‘Kan niet korter.’

a $ab + ba$

b $3a - 2a^2$

c $4a + a^2 - 2a$

d $a + 4ab$

e $a^2 - 2a^2 - ab + 3a$

Opgave 8

Herleid.

a $3x \cdot 4x^2$

b $-2x^2 + 3x \cdot x + 5x$

c $(-z)^3 \cdot -5z^2$

d $b^2 \cdot b^3 \cdot b$

Opgave 9

Herleid.

a $4p + 6q - 3p + 12q$

b $-3p - 4p + 12q + 11p$

c $15a + 3b - 12a + b - a$

d $x \cdot 5 + 4y - 4x$

e $x \cdot x + 4x + 2x \cdot x - 2x$

f $3u \cdot v - 2v \cdot u + u$

Voorbeeld 3

Van een balk is de lengte vier keer de breedte en de hoogte twee keer de breedte. Noem de breedte van de balk x. Dus:
breedte $= x$
lengte $= 4x$
hoogte $= 2x$

Geef formules voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.

Antwoord

inhoud balk = *lengte* · *breedte* · *hoogte*
Als je invult wat je weet, krijg je:
$I = 4x \cdot x \cdot 2x$

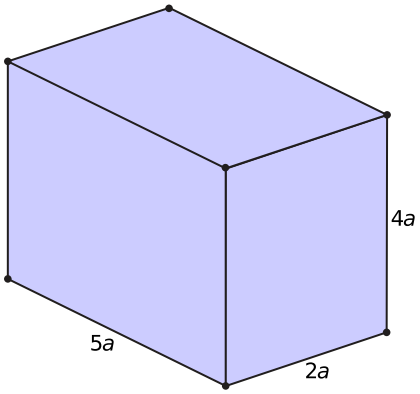
Dit kun je korter opschrijven als:
$I = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 8x^3$

De oppervlakte van de balk vind je door de oppervlakte van alle grensvlakken op te tellen:

$A = 2 \cdot x \cdot 4x + 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 4x = 8x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 38x^2$.

Opgave 10

Stel formules op voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.



Figuur 3.7

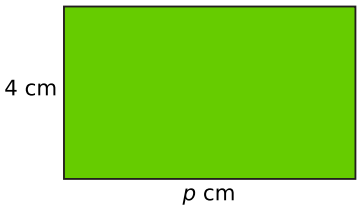
Oefenen

Opgave 11

Van een rechthoek is de lengte p en de breedte 4.

a Geef een formule voor de oppervlakte A van deze rechthoek.

b Hoe groot is A als $p = 3$?



Figuur 3.8

Opgave 12

Herleid.

a $ab + 2ab$

b $10xy - 7xy$

c $nm + nm + 2nm$

d $5df - 10df + 7df$

Opgave 13

Herleid.

a $5a \cdot 4a^2$

b $-3p \cdot 2p$

c $3x^4 \cdot (-x)^2$

d $g^2 \cdot 2g \cdot 3g$

Opgave 14

Herleid. Als je het niet korter kunt schrijven, neem je de uitdrukking over.

a $pt + 3tp - 5p$

b $x^2 + x^2$

c $v^2 + 3v$

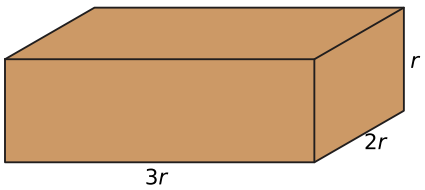
d $4u^2 - 2u^2$

e $8z^4 \cdot (-z)^2$

f $8x - 8 \cdot x \cdot (-2x) - 16x^2$

Opgave 15

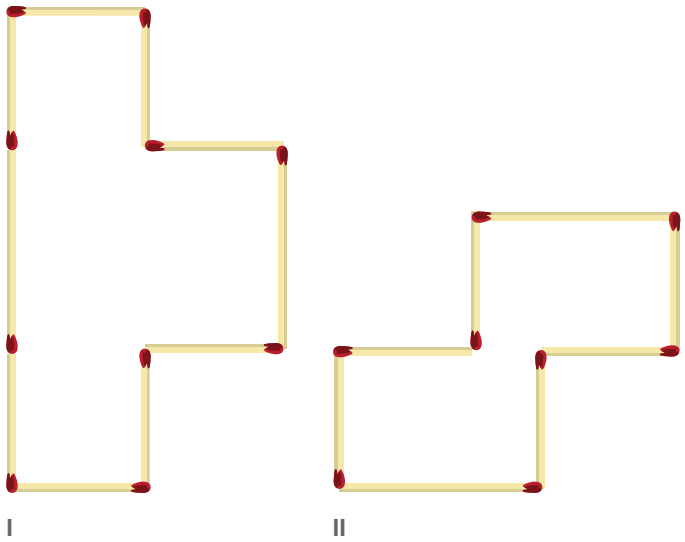
Stel een formule op voor de inhoud I en de oppervlakte A van deze balk.



Figuur 3.9

Opgave 16

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de oppervlakte. Noem de lengte van de korte lucifer k en de lengte van de lange lucifer l.



Figuur 3.10

Toepassen

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem.
Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton.
Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x, beide in cm.
Voor het verband tussen h en x geldt de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

Opgave 17

Bekijk hierboven de beschrijving van een bepaald type verpakkingsdoosje.

a Leid zelf de formule die in de tekst wordt gegeven af.

b De verpakkingsmachine laat een maximale breedte van 8 cm toe.
Bepaal de waarde van h bij $x = 8$.

Opgave 18

Bekijk de oppervlakteformule van het doosje hagelslag nog eens.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van het doosje?

b Hoeveel cm^3 hagelslag gaat er in het doosje met de maximale breedte van 8 cm?

Testen

Opgave 19

Herleid.

a $m = 2 \cdot 5t$

b $y = 2x \cdot 3x$

c $s = d \cdot 2d \cdot 3 \cdot 5d$

d $y = -2x^4 \cdot 4x$

e $s = 5x \cdot 3x + 2(-x)^2$

f $c = 5a \cdot 3b + 12ab - b$

Opgave 20

a Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakten van de driehoek, het vierkant en de rechthoek.

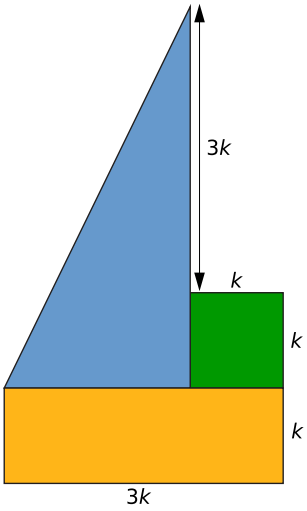
b Hoe groot is de oppervlakte van de gehele figuur als $k = 2$?

c Geef formules voor de oppervlakte van de rechthoek en het vierkant.

d Doe hetzelfde voor de driehoek.

e Geef de formule voor de oppervlakte A van de hele figuur. Schrijf de formule zo kort mogelijk.

f Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakte met behulp van de formule van de gehele figuur. Klopt dit met jouw antwoord bij opgave b?



Figuur 3.11

3.4 Haakjes wegwerken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden door haakjes weg te werken.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen.

Verkennen

Opgave V1

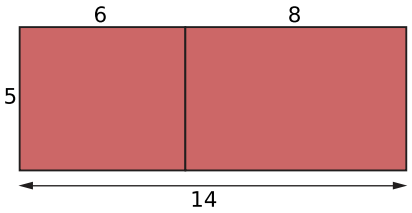
Een rol behang is 60 cm breed. De hoogte van de kamer is l cm. Om het behang aan de onderkant te kunnen bijsnijden maak je elke baan 10 cm langer dan de hoogte van de kamer.
Voor de oppervlakte van een baan behang geldt dus: $\textit{oppervlakte} = 60 \cdot (l + 10)$

a Leg uit waarom deze formule klopt.

b De kamer die je gaat behangen is 220 cm hoog. Hoe groot is de oppervlakte van een baan behang?

Uitleg 1

Van deze rechthoek kun je de oppervlakte op twee manieren berekenen.



Figuur 3.1

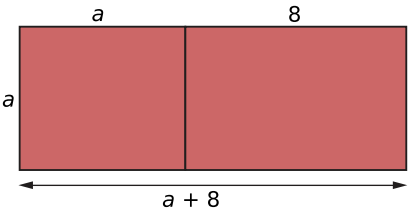
- $5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 30 + 40 = 70$
- $5 \cdot (6 + 8) = 5 \cdot 14 = 70$

Dus: $5 \cdot (6 + 8) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8$.

Het herleiden van een uitdrukking met haakjes naar een uitdrukking zonder haakjes noem je haakjes wegwerken.

Bij uitdrukkingen met haakjes en variabelen gaat dit net zo.

De oppervlakte van deze rechthoek is:



Figuur 3.2

- $5 \cdot a + 5 \cdot 8$
- $5 \cdot (a + 8)$

Blijkbaar is $5 \cdot (a + 8) = 5 \cdot a + 5 \cdot 8$.

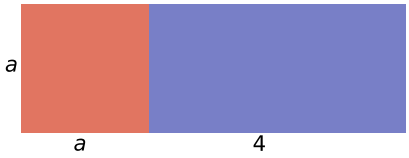
Ofwel: $5(a + 8) = 5a + 40$.

In het algemeen geldt:

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$

Opgave 1

Je ziet een rechthoek die verdeeld is in twee kleinere rechthoeken.



Figuur 3.3

a Hoe groot is de oppervlakte van de hele rechthoek?

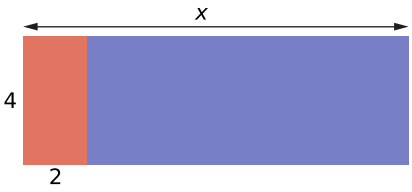
b Hoe groot is de oppervlakte van de rode rechthoek?

c Hoe groot is de oppervlakte van de blauwe rechthoek?

d Herleid door het wegwerken van de haakjes: $a(a + 4)$.

Opgave 2

Je ziet een rechthoek die verdeeld is in twee kleinere rechthoeken.



Figuur 3.4

a Hoe groot is de oppervlakte van de hele rechthoek?

b Hoe groot is de oppervlakte van de rode rechthoek?

c Geef de lengte van de blauwe rechthoek.

d Hoe groot is de oppervlakte van de blauwe rechthoek?

e Herleid door het wegwerken van de haakjes: $4(x - 2)$.

Opgave 3

Herleid.

a $6(a + 4)$

b $14(a - 5)$

c $-7(a - b)$

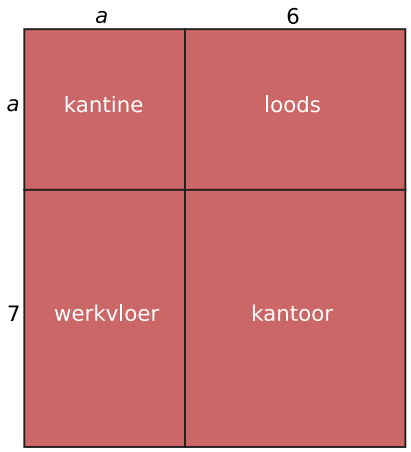
d $a(4 - d)$

e $(a + 6) \cdot 3$

f $a(a - 9)$

Uitleg 2

De totale oppervlakte van deze rechthoek kun je op twee manieren berekenen:



Figuur 3.5

- *oppervlakte totaal* $= a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7$
- *oppervlakte totaal* $= (a + 6) \cdot (a + 7)$

Dus: $(a + 6) \cdot (a + 7) = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7$.

Korter: $(a + 6)(a + 7) = a^2 + 6a + 7a + 42 = a^2 + 13a + 42$.

Ook een uitdrukking waarin twee stel haakjes voorkomen, kun je herleiden door de haakjes weg te werken.

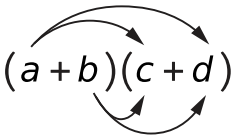
Vergeet niet om gelijksoortige termen samen te nemen.

In het algemeen geldt:

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Of korter:

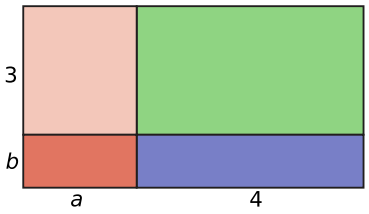
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$



Figuur 3.6

Opgave 4

Je ziet een rechthoek die verdeeld is in vier kleinere rechthoeken.



Figuur 3.7

a Geef de oppervlakte van elke kleinere rechthoek.

b Hoe groot is de lengte en de breedte van de hele rechthoek?

c Herleid door het wegwerken van de haakjes: $(a + 4)(b + 3)$.

Opgave 5

Herleid door het wegwerken van de haakjes.

a $(a + 3)(a + 4)$

b $(a + 3)(b + 5)$

c $(x + 2)(x - 1) = (x + 2)(x + -1)$

d $(z - 2)(z - 9) = (z + -2)(z + -9)$

Opgave 6

Herleid door het wegwerken van de haakjes.

a $(x + 5)(3x + 4)$

b $(6x - 3)(x - 7)$

c $(8 + 3x)(5 - 2y)$

d $(3 - 3x)(6 - 7x)$

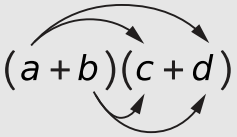
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms komen in uitdrukkingen haakjes voor.

Je kunt die **haakjes wegwerken** door te gebruiken:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  of korter: $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  of korter: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.



Figuur 3.8

Je kunt dit ook toepassen op aftrekkingen:

- $a \cdot (b - c) = a \cdot (b + \text{-}c) = a \cdot b + a \cdot \text{-}c = a \cdot b - a \cdot c$
  of korter: $a(b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (c - d) = (a + b) \cdot (c + \text{-}d) = a \cdot c + a \cdot \text{-}d + b \cdot c + b \cdot \text{-}d$
  of korter: $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen door het wegwerken van haakjes:

- $4(x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$
- $\text{-}5(2a + 7) = \text{-}5 \cdot 2a + \text{-}5 \cdot 7 = \text{-}10a - 35$
- $2z(8z - 2) = 2z \cdot 8z - 2z \cdot 2 = 16z^2 - 4z$
- $a(3 - b) = 3a - ab$
- $\text{-}2 + 6(b - 3) = \text{-}2 + 6b - 18 = 6b - 20$
- $5 - (4 - 2d) = 5 - 1 \cdot (4 - 2d) = 5 - 4 + 2d = 2d + 1$

Je ziet dat je eerst de haakjes wegwerkt en dan pas de gelijksoortige termen samenneemt.

Opgave 7

Herleid.

a $2(x + 3)$

b $a(a + 42)$

c $\text{-}p(q + 4)$

d $\text{-}6(4 - a)$

e $\text{-}6 + 7(a - 2)$

f $2b - 3(b - 4)$

Opgave 8

Herleid.

a $y = 3x + x$

b $p = 5q + 7q - 3q$

c $A = 12ab - 2a(4b + 6)$

d $K = 3(2m + 5) - 4(m - 7)$

Opgave 9

Iemand gaat een kamer behangen. Hij koopt daarvoor rollen behang die 52 cm breed zijn. De hoogte van de kamer is h (cm). Om er zeker van te zijn dat de banen niet te kort zijn, snijdt hij altijd 10 cm extra af. Bij de oppervlakte A (cm^2) van de banen behang hoort daarom de formule $A = 52 \cdot (h + 10)$.

a Herleid de formule door het wegwerken van de haakjes.

b Wat is de oppervlakte in m^2 van een baan die hij moet afsnijden, als de hoogte van de kamer 290 cm is?

c Wat is de oppervlakte in m^2 van een baan die hij moet afsnijden, als de hoogte van de kamer 2,4 m is?

Voorbeeld 2

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen door het wegwerken van de haakjes:

- $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$
- $(a - 4)(b + 4) = ab + 4a - 4b - 16$
- $(2x - 4)(3x + 6) = 6x^2 + 12x - 12x - 24 = 6x^2 - 24$
- $(2b - 3)(1 - a) = 2b - 2ab - 3 + 3a = 3a + 2b - 2ab - 3$

Opgave 10

Herleid.

a $(3 + a)(5 + b)$

b $(x - 12)(2 - x)$

c $(d - 3)(d + 3)$

d $(y - 7)(y + 5)$

e $(2a - 4)(3b - 6)$

f $(4 - 6z)(7 - z)$

Opgave 11

Herleid.

a $A = (2x + 3)(x + 4) - 12$

b $Z = (2a - 4)(2a - 3) - 4a^2$

c $Q = (z - 10)(z + 10) + 100$

d $R = (3p - 2)(6 - q) - 18p$

Opgave 12

Herleid.

a $K = 2x - 3y + 5x + 2x - 3y$

b $A = -3b^4 \cdot 5b^3$

c $R = 2pq + 4p(q + 3) - 1$

d $Z = 3 - 2(x - 3) + 5x + 7(2 + 3x)$

e $L = (a - 4)(b + 4) + 16$

Oefenen

Opgave 13

Herleid.

a $4(x + 3)$

b $-6(x + 2)$

c $(2 + d) \cdot 1{,}5$

d $b(1 - b)$

e $3r(r + 2)$

f $-k(k - 1)$

Opgave 14

Herleid.

a $(x + 5)(x + 2)$

b $(y + 1)(3y + 2)$

c $(a + 3)(a - 2)$

d $(p + 4)(p - 4)$

e $(2q - 5)(-q + 5)$

f $(7 + u)(4 - u)$

Opgave 15

Herleid.

a $x(2x + 7)$

b $(k + 3)k$

c $(v + 2)(v + v)$

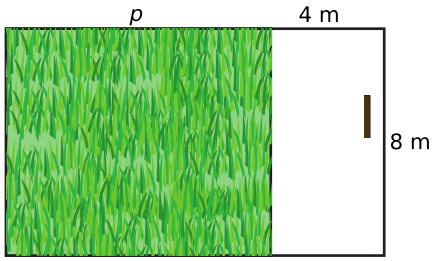
d $(a + b)(c + d)$

e $(2s + 3)(3s - 1)$

f $(-p - 1)(-2p - 3)$

Opgave 16

Elke heeft in haar tuin een terras gemaakt van 4 meter bij 8 meter. Ze houdt nog een flink stuk over voor het grasveld. De breedte van het grasveld is net als het terras 8 meter. De lengte is onbekend, en wordt aangegeven met p (meter).



Figuur 3.9

a De breedte van de tuin is 8 meter. Druk de lengte l (meter) van de hele tuin uit in p.

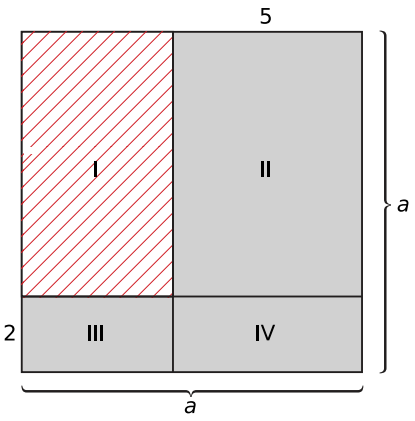
b Druk de oppervlakte van het grasveld uit in p.

c Druk de oppervlakte van de hele tuin uit in p.

d Bereken de oppervlakte van de tuin als $p = 12$ m.

Opgave 17

Gegeven is een vierkant van a bij a. Het vierkant is opgedeeld in vier delen. Druk de oppervlakte van het gearceerde deel uit in a.



Figuur 3.10

Opgave 18

Vul in.

a $6(a + ...) = ... + 18$

b $(2x + ...)(... + 5) = 6x^2 + 31x + 35$

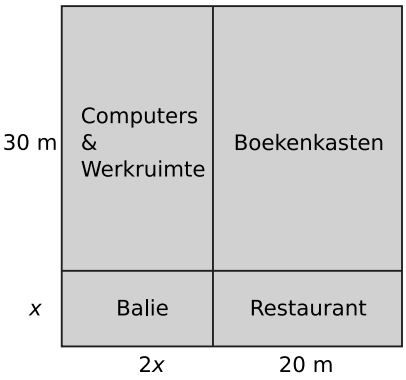
c $... \cdot (2 - ...) = -14 + 21p$

d $(... - 2a)(4b + 6) = ... + 16b - 12a + 24$

Toepassen

Een bibliotheek is opgedeeld in vier stukken: de balie, een restaurant, een werkruimte met computers en een ruimte waar alle boeken staan.

Eén van die afmetingen is nog onderwerp van discussie.
In het bovenaanzicht is die afmeting x genoemd.



Figuur 3.11

Opgave 19

Bekijk de indeling van de bibliotheek hierboven.

a Druk de oppervlakte van de hele bibliotheek uit in x. Schrijf je antwoord met en zonder haakjes.

b Waarom kan de oppervlakte van de bibliotheek nooit minder dan 600 m^2 zijn?

De oppervlakte van het restaurant is 160 m^2.

c Bereken x. Druk daarvoor eerst de oppervlakte van het restaurant uit in x en stel dat gelijk aan 160.

d Bereken hoe groot het deel van de bibliotheek is waarin de balie staat.

Testen

Opgave 20

Herleid

a $a(a-5)$

b $-3(4-2s)$

c $(d+1)(d+2)$

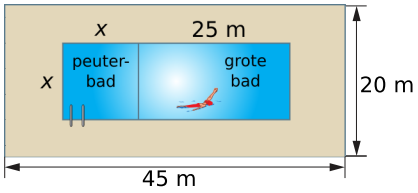
d $(a-3)(2b-7)$

e $(3x+5)(4-4x)$

f $2-3(2x-7)$

Opgave 21

In een stadspark wordt een zwembad aangelegd. Dit zwembad bestaat uit twee gedeelten: een vierkant peuterbad en een rechthoekig zwembad ernaast. Je ziet een ontwerp van het zwembad. Om het zwembad heen wordt een tegelpad aangelegd, daardoor krijgt het hele zwembadperceel een afmeting van 45 bij 20 meter. Het grote zwembad is 25 m lang en het peuterbad x (in meter).



Figuur 3.12

a Kies $x = 10$ meter en bereken de oppervlakte van het zwembad.

b Bereken nu de totale oppervlakte van het zwembadperceel (dus inclusief het tegelpad om het zwembad heen).

c Geef een formule voor de gehele oppervlakte A (in m^2) van het zwembad. Schrijf deze met en zonder haakjes.

d Geef een formule voor de oppervlakte B in m^2 van het tegelpad.

e Kies $x = 10$ en bereken de oppervlakte van het tegelpad in m^2 nauwkeurig.

3.5 Som, verschil, product delen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- uitdrukkingen en formules herleiden bij delen door een getal.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen en/of haakjes weg te werken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een rechthoek $ABCD$ met lengte l en breedte b.

Figuur 3.1

a Welke formule geldt voor de omtrek P van de rechthoek?

De halve omtrek krijg je door de totale omtrek door 2 te delen.

b Laat zien, dat dit klopt met de formule die je bij a hebt gevonden.

c Welke formule geldt voor de oppervlakte A van de rechthoek?

De halve oppervlakte krijg je door de totale oppervlakte door 2 te delen.

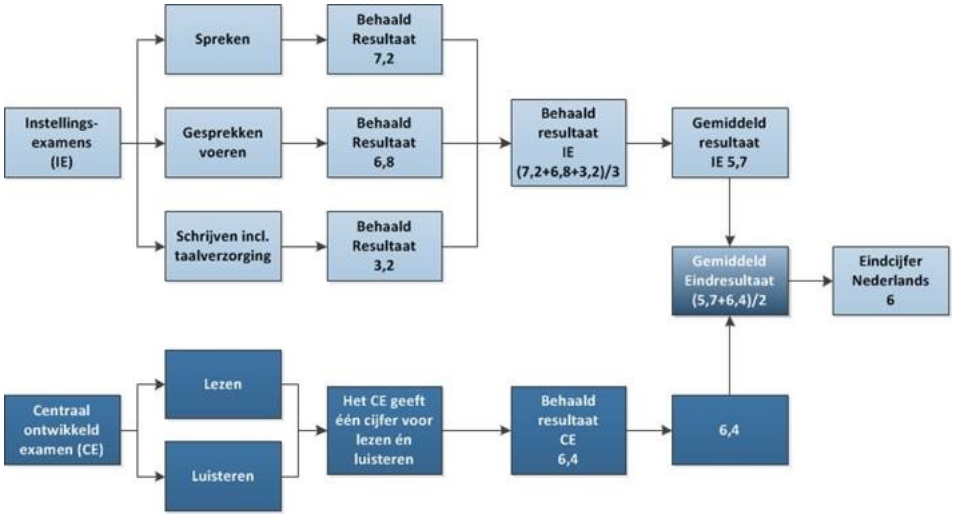
d Laat met de figuur zien, dat de halve oppervlakte gelijk is aan de halve lengte keer de breedte.

e Hoe ziet dit er met de formule bij c uit?

f Laat zien dat de halve oppervlakte van de rechthoek ook gelijk is aan de lengte keer de halve breedte.

Opgave V2

In het mbo worden bij Nederlands vijf vaardigheden geëxamineerd. De resultaten van deze vijf vaardigheden worden omgerekend naar één eindcijfer. Hierbij wordt het onderstaande schema gebruikt, waarin ook een getallenvoorbeeld is opgenomen. Deze formule geldt zowel voor taalniveau 2F als 3F. Het eindcijfer van Nederlands komt op de resultatenlijst die bij het succesvol doorlopen van de opleiding samen het diploma wordt uitgereikt.



Figuur 3.2

a Wat gaat er fout als er bij de berekening voor het eindcijfer van het instellingsexamen geen haakjes worden gebruikt? Wat zou in bovenstaand voorbeeld dan het gemiddelde resultaat IE worden, afgerond op één decimaal?

Hakan heeft voor zijn Centrale Examen Nederlands een 8,2 gescoord, voor Spreken een 7,6 en voor Gesprekken voeren een 7,4. Het examen Nederlands schrijven moet hij nog maken.

b Welk cijfer moet Hakan daarvoor minimaal behalen om een 8 als eindcijfer voor Nederlands op zijn resultatenlijst te krijgen? Schrijf je berekening met zoveel mogelijk tussenstappen op. Controleer je antwoord door zijn scores in bovenstaande formule in te vullen.

Uitleg

Van deze rechthoek kun je de halve omtrek op twee manieren berekenen:

Figuur 3.3

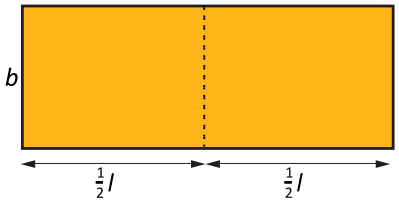
- $\frac{2l+2b}{2}$
- $l + b$

Dus: $\frac{2l+2b}{2} = \frac{2l}{2} + \frac{2b}{2} = l + b$.

Als je de som van twee termen door 2 deelt, moet je elke term door 2 delen.

Je kunt dit ook zo schrijven: $\frac{2l+2b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (2l + 2b) = \frac{1}{2} \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot 2b = l + b$.

Op dezelfde manier is een kwart van de omtrek: $\frac{2l+2b}{4} = \frac{2l}{4} + \frac{2b}{4} = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}b$.



Figuur 3.4

Voor de halve oppervlakte van deze rechthoek geldt:

- $\frac{l \cdot b}{2}$
- $\frac{1}{2}l \cdot b$

Blijkbaar is $\frac{l \cdot b}{2} = \frac{l}{2} \cdot b = \frac{1}{2}l \cdot b$.

Maar je kunt ook schrijven: $\frac{l \cdot b}{2} = l \cdot \frac{b}{2} = l \cdot \frac{1}{2}b$.

Als je een product door 2 deelt, deel je maar één van de factoren door 2.

Op dezelfde manier is een kwart van de oppervlakte: $\frac{l \cdot b}{4} = \frac{l}{4} \cdot b = \frac{1}{4}l \cdot b$ of $\frac{l \cdot b}{4} = l \cdot \frac{b}{4} = l \cdot \frac{1}{4}b$ of $\frac{l \cdot b}{4} = \frac{1}{4} \cdot l \cdot b$.

Opgave 1

Bekijk de bovenste rechthoek in de **Uitleg op pagina 138**.

a De omtrek van deze rechthoek is $P = 2l + 2b$.

Waarom is éénderde deel van deze omtrek niet $\frac{2}{3}l + 2b$?

b Welke formule geldt wel voor éénderde van de omtrek van deze rechthoek?

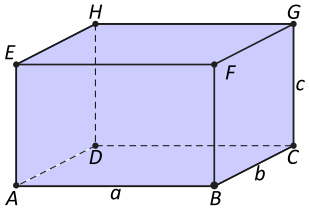
Voor de oppervlakte van deze rechthoek geldt $A = l \cdot b$.

c Laat door goede verdelingen van deze rechthoek zien, dat $\frac{l \cdot b}{3} = \frac{l}{3} \cdot b = l \cdot \frac{b}{3}$.

d Wat stelt $\frac{l}{3} \cdot \frac{b}{3}$ in dit verband voor?

Opgave 2

Hier en op het **werkblad** zie je een balk voor met lengte a, breedte b en hoogte c.



Figuur 3.5

a Wat stelt $l = 4a + 4b + 4c$ voor?

b Waarom is $\frac{4a+4b+4c}{4} = a + b + c$?

c Wat stelt $V = a \cdot b \cdot c$ voor?

d Leg met behulp van de figuur op het werkblad uit dat $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c$

e Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot c$?

f Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{4} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{4}$?

Opgave 3

Waar of niet waar?

a $\frac{a+4}{2} = \frac{1}{2}a + 2$

b $\frac{3p+q}{4} = \frac{3}{4}p + q$

c $\frac{2a \cdot 3b}{3} = \frac{2}{3}a \cdot b$

d $\frac{2a+3a \cdot b}{4} = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}b$

e $\frac{15+5pq}{10} = 1{,}5 + 0{,}5pq$

f $\frac{a(a-9)}{4} = \frac{1}{4}a(a-9)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wil je een som, een verschil, of een product nog door een getal delen.

- Als je een som of een verschil van meerdere termen door een getal deelt, dan moet je alle termen door dat getal delen: $\frac{a\pm b\pm c}{g} = \frac{1}{g} \cdot (a \pm b \pm c) = \frac{a}{g} \pm \frac{b}{g} \pm \frac{c}{g}$
- Als je een product van meerdere factoren door een getal deelt, dan moet je één van die factoren door dat getal delen: $\frac{a \cdot b \cdot c}{g} = \frac{1}{g} \cdot a \cdot b \cdot c = \frac{a}{g} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{g} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{g}$

Voorbeeld 1

Deel de uitdrukking $12a - 2b \cdot -4b^2$ door 8 en schrijf de uitkomst zo eenvoudig mogelijk.

Antwoord

$\frac{12a-2b\cdot-4b^2}{8} = \frac{12a+8b^3}{8} = \frac{12a}{8} + \frac{8b^3}{8} = 1{,}5a + b^3.$

Opgave 4

Voer de volgende delingen uit en schrijf de uitkomst zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{15-5\cdot p}{5}$

b $\frac{12a-5a\cdot 3b}{3}$

c $\frac{3a(b+3)}{6}$

d $\frac{a-6ab}{a}$

Opgave 5

Voor de oppervlakte A van een driehoek geldt de formule $A = \frac{b\cdot h}{2}$ waarin b de basis (een zijde) van de driehoek is en h de hoogte die loodrecht op die basis staat.

Je berekent dus de oppervlakte van een driehoek door de lengte van de basis en die van de hoogte te vermenigvuldigen en de uitkomst door 2 te delen.

a Waarom kun je de oppervlakte van een driehoek ook berekenen door de halve lengte van de basis met de hoogte te vermenigvuldigen?

b Welke andere manier om de oppervlakte van een driehoek te berekenen is er nog?

c Van een driehoek is basis $AB = 5$ cm en hoogte $CD = 3$ cm.
Laat zien dat alle drie de manieren om de oppervlakte te berekenen, inderdaad hetzelfde opleveren.

Opgave 6

Voor de bewegingsenergie E van een voorwerp met massa m dat met een snelheid v voortbeweegt, geldt $E = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Hierin is:
m de massa in kilogram
v de snelheid in meter/seconde
E de energie in Joule

a Bereken E als het voorwerp een massa heeft van 0,2 kg en beweegt met een snelheid van 50 m/s.

b Waarom kun je de gegeven formules ook schrijven als $E = \frac{1}{2}mv^2$?

c Laat met de gegevens uit a zien, dat deze tweede formule hetzelfde resultaat geeft.

Voorbeeld 2

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,=;
- de kosten per kopie: € 0,06 voor papier en inkt.

Bij welk aantal kopieën per maand komt de school uit de kosten als ze de leerlingen 10 cent per kopie laten betalen?

Antwoord

Je kunt dit probleem bijvoorbeeld oplossen door te kijken naar de kosten k in cent per kopie.

Die kosten bedragen $k = \frac{150+0{,}06 \cdot a}{a}$.

Je kunt bij deze formule een tabel maken, bijvoorbeeld met behulp van Excel.

Nu kun je de vraag beantwoorden.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 141**.

a Laat zien hoe je met de gegeven formule de kosten per kopie bij 1000 kopieën per maand berekent.

b Je kunt de gegeven formule ook anders schrijven door de deling uit te voeren. Welke formule krijg je dan?

c Aan de hand van de formule bij b kun je het probleem ook zonder Excel te gebruiken wel oplossen. Laat zien, hoe.

Opgave 8

Mark organiseert een festival en huurt een terrein. De kosten hiervoor bedragen € 3500,00 en daarbij komt nog € 2,50 aan kosten per persoon.

a Stel Mark vraagt geen entree. Wat kost het hem dan per gast wanneer hij 300 mensen uitnodigt?

b Stel de formule op voor de kosten K per gast, afhankelijk van het aantal gasten q.

c Stel Mark wil in totaal € 650,00 winst maken. Hij nodigt 400 mensen uit. Welk bedrag moet hij dan als entree vragen?

Oefenen

Opgave 9

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{a+b}{5}$

b $\frac{a \cdot b}{5}$

c $\frac{a \cdot b+c}{5}$

d $\frac{a(b+c)}{5}$

Opgave 10

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk en zonder haakjes.

a $\frac{(2x+12)(x+2)}{4}$

b $\frac{6a-6a \cdot 2b}{3}$

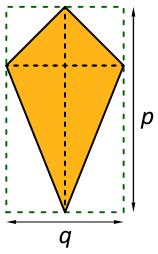
c $\frac{6a+3b(a-2)}{6}$

d $\frac{250-15 \cdot p}{p}$

Opgave 11

Je ziet hier een vlieger. Beide diagonalen staan loodrecht op elkaar.

Voor de oppervlakte A geldt $A = \frac{p \cdot q}{2}$.



Figuur 3.6

a Licht deze formule toe.

b Kun je de oppervlakte van deze vlieger ook schrijven als $A = \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$? Licht je antwoord toe.

c Hoe kun je deze formule anders schrijven?
Hoe kun je dit in de figuur aangeven?

Opgave 12

Je huurt één dag een busje omdat je op kamers gaat wonen en je spullen wilt verhuizen. De kosten zijn:

- € 40,= per dag;
- € 0,25 per gereden km.

Dat is nog exclusief de benzinekosten, je moet het busje afgetankt weer inleveren.

a Bereken de kosten per km k als je in totaal 180 km met dit busje rijdt.

Je stelt voor de kosten per km k deze formule op: $k = \frac{40+0{,}25 \cdot a}{a}$.
Hierin is a het totaal aantal gereden km met het busje.

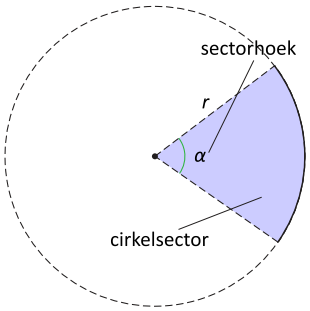
b Leg uit waarom deze formule juist is.

c Een vriend wil je helpen en zegt dat die formule kan worden geschreven als $k = \frac{40}{a} + 0{,}25$.
Heeft hij gelijk?

Opgave 13

Dit is een sector van een cirkel met straal r.
De sectorhoek is α.

Voor de oppervlakte A geldt $A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$.



Figuur 3.7

a Licht deze formule toe.

b Waarom is de formule $A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$ ook correct? Licht je antwoord toe.

c Laat ook met een getallenvoorbeeld zien dat beide formules dezelfde uitkomst geven.

Toepassen

De ANWB adviseert om bij het autorijden een afstand d (in meter) te bewaren die de helft is van je eigen snelheid v in km/h.

Gemiddeld is een auto 4 m lang. De afstand tussen de voorbumpers van twee auto's is dus $s = 4 + d$ m. Neem aan dat alle auto's zich aan het advies van de ANWB houden, 4 m lang zijn en dezelfde snelheid v hebben.

Hiermee kun je een formule opstellen voor de tijd die er dan zit tussen twee auto's die zich hieraan houden.

Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$.
En dus kun je een formule opstellen van het aantal auto's per minuut afhankelijk van de snelheid.

Figuur 3.8 bron: Wikipedia

Opgave 14

Bekijk de informatie hierboven.

a Geef de formule van d als functie van v.

b De tijd t in seconden tussen twee auto's is nu te berekenen met de formule: $t = \frac{3{,}6s}{v}$. Licht dit toe.

c Stel een formule op voor t als functie van v door formules uit a en b te combineren met $s = 4 + d$.

d Er wordt gereden met een snelheid van 100 km/uur.
Hoeveel tijd zit er tussen twee auto's?

Opgave 15

Het aantal auto's N dat per minuut een bepaald punt passeert, is: $N = \frac{60}{t}$.

a Schrijf de formule op van N als functie van v.

b Er passeert een stroom auto's met een snelheid van 100 km/uur. Hoeveel auto's per minuut komen er voorbij?

c Als er een constante stroom van 20 auto's per minuut voorbij komt, hoe hard wordt er dan gereden?

Testen

Opgave 16

Voer de delingen uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{a-5}{5}$

b $\frac{3a \cdot 8b}{4}$

c $\frac{6p-5p \cdot 6q}{3}$

d $\frac{a \cdot (2b-8)}{2}$

e $\frac{200+0{,}15a}{a}$

Opgave 17

Voor het vervoer van grotere spullen kun je een aanhangwagen huren. De kosten zijn:

- € 20,= per dag;
- € 0,10 per gereden km.

Je huurt de aanhanger voor één dag.

a Je rijdt die dag 120 km met de aanhanger. Hoeveel ben je daarvoor per gereden kilometer kwijt?

b Stel een formule op voor de kosten per km voor één dag deze aanhanger huren.

c Hoe meer km je rijdt, hoe lager de kosten per km worden. Laat zien, hoe je dit uit de formule kunt afleiden.

3.6 Vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking met één variabele;
- vergelijkingen met één variabele grafisch oplossen, eventueel met behulp van inklemmen;
- vergelijkingen met één variabele oplossen door vergelijkend rekenen, terugrekenen en/of de balansmethode.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken;
- uitdrukkingen en formules herleiden door termen op te tellen of af te trekken of factoren te vermenigvuldigen en/of haakjes weg te werken.

Verkennen

Opgave V1

Een rol behang is 60 cm breed. De hoogte van de kamer is l cm. Om het behang aan de onderkant te kunnen bijsnijden maak je elke baan 10 cm langer dan de hoogte van de kamer.
Voor de oppervlakte van een baan behang geldt dus: $oppervlakte = 60 \cdot (l + 10)$

a Leg uit waarom deze formule klopt.

b De kamer die je gaat behangen is 220 cm hoog. Hoe groot is de oppervlakte van een baan behang?

Uitleg 1

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?” is een vergelijking.

Noem het aantal kopieën per maand a en de vergelijking wordt:

$150 + 0{,}075a = 0{,}10a$

In een vergelijking zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. In deze vergelijking staan aan de linkerzijde van het isgelijkteken de kosten per maand en aan de rechterzijde de inkomsten per maand. Hij bevat één variabele: a.
Je zoekt de waarden van a die ervoor zorgen dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn, dat zijn de oplossingen van de vergelijking.
Deze vergelijking heeft één oplossing: $a = 6000$.
Ga maar na:

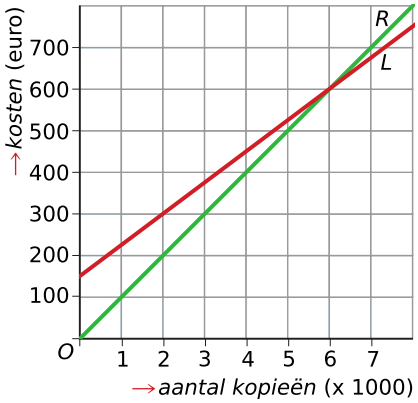
$150 + 0{,}075 \cdot 6000 = 0{,}10 \cdot 6000$

Maar hoe kom je aan die oplossing en waarom is er maar één?

Als je de oplossing niet meteen ziet, kun je er altijd uitkomen door getallen voor a in te vullen (te substitueren), net zolang tot je de juiste waarde voor a gevonden hebt.
Links van het isgelijkteken heb je: $L = 150 + 0{,}075a$ en rechts van het isgelijkteken heb je: $R = 0{,}10a$.
Maak daarbij een tabel.

a	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
L	150	225	300	375	450	525	600	675	750
R	0	100	200	300	400	500	600	700	800

Tabel 3.1



Figuur 3.1

In dit geval zit de oplossing meteen in de tabel: bij $a = 6000$ zijn L en R gelijk! Vaak moet je nog verder zoeken door de tabel te verfijnen.
Dan kun je ook een grafiek gebruiken: bij het snijpunt van L en R zijn beide gelijk. De waarde van a die daarbij hoort, kun je aflezen (vaak: schatten). Met behulp van nauwkeuriger tabellen rond het snijpunt kun je de waarden van a steeds nauwkeuriger bepalen. Dit proces heet inklemmen.

In dit geval zijn de grafieken van L en R rechte lijnen en is er maar één snijpunt, en dus precies één oplossing.

Opgave 1

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?

a Welke vergelijking hoort hierbij?

b Maak bij deze vergelijking een tabel en de bijhorende grafiek.

c Probeer zo nauwkeurig mogelijk uit de tabel en de grafiek af te lezen welke waarde van a de oplossing van de vergelijking geeft.

d De vergelijking is niet exact op te lossen met behulp van de grafiek. Waarom is dat in het geval van de kopieermachine ook niet echt nodig?

e Je kunt de uitkomst wel nauwkeuriger bepalen met behulp van een tabel en de methode van inklemmen. Kies waarden rond het getal 14700.

Uitleg 2

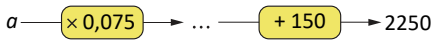
Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine € 2250,-?” is een vergelijking.

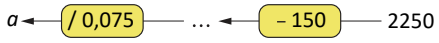
Noem het aantal kopieën per maand a en de vergelijking wordt:

$150 + 0{,}075a = 2250$

Een vergelijking als $150 + 0{,}075a = 2250$ kun je oplossen door te bekijken hoe je moet rekenen.
Het rekenschema is:



En dus kun je zo terugrekenen:



Dit betekent: $a = (2250 - 150)/0{,}075 = 28000$ kopieën.

Bij de vraag: "Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?" hoort de vergelijking:

$150 + 0{,}075a = 0{,}10a$

Deze vergelijking kun je niet oplossen door terugrekenen omdat de variabele aan beide zijden van het isgelijkteken voorkomt.

Nu kun je beter de balansmethode toepassen: voer aan beide zijden van het isgelijkteken dezelfde bewerking uit.
De oplossing gaat dan zo:

$$\begin{aligned} 150 + 0{,}075a &= 0{,}10a \\ 150 &= 0{,}025a \\ 0{,}025a &= 150 \\ a &= \frac{150}{0{,}025} = 6000 \end{aligned}$$

beide zijden $-0{,}075a$
beide zijden verwisselen
beide zijden delen door 0,025

Je ziet dat je dezelfde oplossing krijgt als bij **Uitleg 1 op pagina 145**.

Opgave 2

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine € 3200,-?

a Welke vergelijking hoort hier bij?

b Los deze vergelijking op met behulp van terugrekenen.

c Laat zien dat je deze vergelijking ook kunt oplossen met de balansmethode.

Opgave 3

Op school komt een nieuwe kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 220,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,085. De vraag is: vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Waarom kun je deze vergelijking niet oplossen door terugrekenen?

c Los deze vergelijking op met de balansmethode.

d Welk antwoord geef je op de vraag die aan het begin werd gesteld?

Opgave 4

Je ziet hier een viertal vergelijkingen.
Los ze op met behulp van terugrekenen of met behulp van de balansmethode.
Geef exacte antwoorden.

a $4p - 1500 = 275$

b $4p - 1500 = 300 - 2{,}5p$

c $4(p-5)^2 = 64.$

d $4\sqrt{p-5} = 64.$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **vergelijking** zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. De getallen voor die variabelen die beide zijden van het isgelijkteken gelijk maken heten de **oplossingen** van de vergelijking. Voor vergelijkingen met één variabele bestaan verschillende methoden om die oplossingen te vinden.

- De **inklemmethode** waarbij je systematisch naar de oplossing zoekt met behulp van steeds nauwkeuriger tabellen.
  Deze methode kun je goed gebruiken als je toch al grafieken hebt die je vergelijkt, of als de andere twee niet werken.
- De **terugrekenmethode** waarbij je eerst bedenkt welk rekenschema op de variabele kan worden toegepast. Vervolgens ga je alle rekenstappen vervangen door de terugrekenstappen.
  Deze methode is alleen bruikbaar als je ervoor kunt zorgen dat de variabele precies één keer voorkomt.
- De **balansmethode** waarbij je de vergelijking opvat als een balans in evenwicht. Je kunt dan aan beide zijden dezelfde bewerking uitvoeren zonder het evenwicht te verbreken. Zo maak je de vergelijking systematisch eenvoudiger.

terugrekenen	
+	−
×	/
$\square^2$	$\sqrt{}$

Figuur 3.2

Ook zijn er nog wel andere handigheden die je kunnen helpen bij het oplossen van vergelijkingen.
Een bekende manier is het opschrijven van een eenvoudige berekening die dezelfde structuur heeft als de vergelijking. Dit heet wel vergelijkend rekenen.

In de voorbeelden zie je hoe deze methoden worden toegepast.

Voorbeeld 1

Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.
Noem je de brandtijd in uren t, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

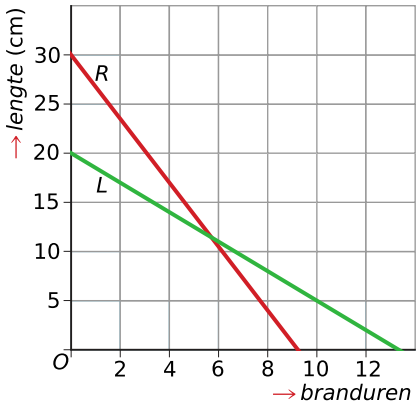
Bereken nu wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van t is deze vergelijking waar?

Antwoord

Maak een tabel en een grafiek bij $L = 20 - 1{,}50t$ en $R = 3 - 3{,}25t$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	20,00	18,50	17,00	15,50	14,00	12,50	11,00	9,50	8,00
R	30,00	26,75	23,50	20,25	17,00	13,75	10,50	7,25	4,00

Tabel 3.2



Figuur 3.3

Je ziet nu dat de oplossing tussen $t = 5$ en $x = 6$ zit. Je maakt dan een nieuwe tabel tussen 5 en 6 met t in één decimaal.

Nu vind je dat de oplossing tussen $t = 5{,}7$ en $t = 5{,}8$ zit. Op gehelen afgerond krijg je $t \approx 6$. De kaarsen zijn dus na ongeveer zes uur even lang.

Wil je het antwoord nog nauwkeuriger krijgen, dan maak je een tabel tussen 5,7 en 5,8 met t in twee decimalen. Je vindt dan de oplossing tussen $t = 5{,}71$ en $t = 5{,}72$. Op één decimaal nauwkeurig wordt je antwoord $t \approx 5{,}7$. De kaarsen zijn dus na ongeveer 5,7 uur even lang, dat is na 5 uur en 42 minuten (0,7 maal 60 minuten).

Wil je een nog nauwkeuriger antwoord, dan maak je een tabel tussen 5,71 en 5,72 met t in drie decimalen.

En zo kun je eindeloos doorgaan. Deze procedure heet inklemmen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 149** wordt de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ opgelost.

a Hoe kun je met behulp van de grafiek een eerste benadering van de oplossing aflezen?

b Maak nu zelf de tabel tussen $t = 5{,}7$ en $t = 5{,}8$ en bepaal de oplossing in één decimaal nauwkeurig.

c Bepaal nu je oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

d Bepaal tot slot je oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Twee schildersbedrijven adverteren met hun kosten. Ze beweren allebei heel goedkoop te zijn.

Schildersbedrijf A:
'Spotgoedkoop: voor maar € 30,00 per vierkante meter komen wij uw muur een nieuwe kleur geven.'

Schildersbedrijf B:
'Wij schilderen voor slechts € 28,95 per vierkante meter. Daar komt € 48,00 aan voorrijkosten bij.'

a Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Wanneer zijn beide schildersbedrijven even duur?"

b Los de vergelijking in één decimaal nauwkeurig op.

Voorbeeld 2

De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.

Na hoeveel uur is deze kaars nog 12 cm lang?

Antwoord

Voor de lengte van de kaars past de formule $L = 20 - 1{,}5t$ als t de tijd in uren en L de lengte in cm is.

De vraag kun je vertalen naar de vergelijking $20 - 1{,}5t = 12$.

Deze vergelijking kun je op meerdere manieren oplossen:

- Door vergelijkend rekenen:
  $20 - \ldots = 12$ betekent $\ldots = 8$, dus $1{,}5t = 8$.
  $1{,}5 \cdot \ldots = 8$ betekent $\ldots = 8/1{,}5$, dus $t = 8/1{,}5 \approx 5{,}33$ uur.
- Door een terugrekenschema te gebruiken:
  Vanuit de variabele moet je zo rekenen:
  t → [× -1,5] → ... → [+ 20] → 12
  En dus kun je zo terugrekenen:
  t ← [/ -1,5] ← ... ← [- 20] ← 12
  Dus is $t = (12 - 20) / -1{,}5 \approx 5{,}33$.
- Door de balansmethode te gebruiken:

$$\begin{aligned} 20 - 1{,}5t &= 12 \\ -1{,}5t &= -8 \\ t &= -8 / -1{,}5 \approx 5{,}33 \end{aligned}$$

beide zijden 20 aftrekken
beide zijden delen door - 1,5

Ook hier vind je $t \approx 5{,}33$ uur.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 150** hoe een vergelijking op drie manieren kan worden opgelost.

a Wat is kenmerkend voor een vergelijking waarbij dit kan?

Bekijk de vergelijking $0{,}2a^2 + 200 = 600$

b Laat zien dat deze vergelijking op alle drie de beschreven manieren kan worden opgelost.
Voer de drie oplossingsmethoden uit.

Bekijk de vergelijking $0{,}2(a - 20)^2 = 400$

c Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Bekijk de vergelijking $0{,}2\sqrt{a-20} = 4$

d Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op.
Gebruik de methode die je het handigst vindt.

a $15 \cdot (2x + 10) = 240$

b $0{,}01(x-4)^2 + 25 = 26$

c $15 + 2\sqrt{x} = 35$

d $\frac{60}{2x-4} = 3$

Voorbeeld 3

Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.
Noem je de brandtijd in uren t, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

Bereken nu wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van t is deze vergelijking waar?

Antwoord

De vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ kun je niet oplossen met terugrekenen.
Maar wel met de balansmethode:

$$\begin{aligned} 20 - 1{,}50t &= 30 - 3{,}25t \\ 20 + 1{,}75t &= 30 \\ 1{,}75t &= 10 \\ t &= \frac{10}{1{,}75} = \frac{40}{7} \approx 7{,}71 \end{aligned}$$

beide zijden $3{,}25t$ optellen
beide zijden 20 aftrekken
beide zijden door 1,75 delen

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 151** hoe je de balansmethode gebruikt om een vergelijking op te lossen.
Los nu zelf de vergelijkingen op.

a $7g + 6 = 5g + 15$

b $8g - 15 = 5g + 21$

c $8g - 15 = 5g$

d $12 - 4g = 6g + 2$

Opgave 10

Los de vergelijkingen op.

a $2g + 15 + 6g = 5 + 3g - 20$

b $6 + \frac{8g}{2} = 4 - 5g + 12 + g$

c $26 - a - 4a = 8a$

d $x + 6 - 0{,}5x = 3{,}4 + 0{,}1x$

Opgave 11

Neem een getal in je hoofd. Vermenigvuldig het getal met 4 en tel bij het antwoord 20 op. Trek hiervan twee keer het getal af en neem de helft van wat je nu hebt gevonden.
Als je me nu de uitkomst van deze berekening vertelt, weet ik het getal dat je had bedacht.

Hoe kan dat? Geef een duidelijke uitleg door de bijbehorende vergelijking op te stellen.

Oefenen

Opgave 12

Hoveniersbedrijf Jongman rekent voor het winterklaar maken van een tuin € 75,00 plus € 2,50 per m^2.

a Maak een formule bij het verband tussen de oppervlakte A van de tuin en de kosten K voor het winterklaar maken.

b Meneer Van Gils heeft zijn tuin laten opknappen. Hij krijgt een rekening van € 475,00. Welke vergelijking moet je oplossen om te weten hoe groot de tuin van meneer Van Gils is?

c Los deze vergelijking op met behulp van een tabel en een grafiek. Hoe groot is de tuin van meneer Van Gils? Geef je antwoord in m^2 nauwkeurig.

d Het concurrerende hoveniersbedrijf Green Garden rekent voor het winterklaar maken slechts € 25,00 en daarbij € 3,60 per m^2. Met welke vergelijking kun je berekenen bij hoeveel m^2 tuin beide bedrijven even duur zijn?

e Los deze vergelijking op met behulp van tabellen en een grafiek door in te klemmen. Geef je antwoord in gehele m^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Er is een verband tussen de lengte (in cm) van je voet en je schoenmaat: 'Vermenigvuldig de lengte van je voet met 1,5 en tel daar 2 bij op.' Neem voor je voetlengte L en de schoenmaat S.

a Beschrijf dit verband met een rekenschema.

b Stel een formule op bij het verband tussen L en S.

c Bereken je schoenmaat als je voet 26 cm lang is.

d Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Bij welke voetlengte heb je een schoenmaat van 36,5?"
Geef een terugrekenschema.

e Los deze vergelijking op door terug te rekenen.

Opgave 14

Voor een toets kun je maximaal 51 punten krijgen. Het cijfer wordt berekend met de formule $c = \frac{p}{51} \cdot 9 + 1$.
De c staat voor het cijfer en de p voor het aantal punten.

a Welke cijfer heb je als je 33 punten hebt behaald? Rond af op één decimaal.

b Maak een terugrekenschema bij deze formule.

c Jan Willem had een 6,5 voor de toets.
Welke vergelijking moet je oplossen om uit te rekenen hoeveel punten hij had? Los die vergelijking op.

d Welke formule hoort bij het terugrekenschema?
Controleer je formule met behulp van c.

Opgave 15

Los de vergelijkingen op.

a $12g + 3 = 7g + 18$

b $13 + 6g - 2 = 2 + 8g$

c $2(x - 12)^2 = 32$

d $-6p + 55 = 4(p - 5)$

e $-x + 7 = x - (11 + 3x)$

f $320 + 0{,}5g = 950 - 1{,}25g$

Opgave 16

Los de vergelijkingen op.

a $2(k + 5) = -4k$

b $0{,}1(a - 5)^2 = 5$

c $3(x + 1) - 2(x - 4) = 1$

d $0{,}5\sqrt{2x - 1} = 1$

Opgave 17

Mina en Yassin hebben beiden een moestuin. Beide moestuinen hebben dezelfde oppervlakte, maar andere afmetingen. Noem de standaard afmetingen x bij x bij meter. De moestuin van Mina is elf meter langer maar twee meter korter in de breedte. De moestuin van Yassin is vier meter langer en drie meter breder.

a Met welke formule kun je de oppervlakte van de moestuin van Yassin berekenen?

b Met welke formule kun je de oppervlakte van de moestuin van Mina berekenen?

c De oppervlaktes van de moestuinen van Mina en Yassin zijn even groot. Welke afmetingen hebben ze?

d Hoeveel m² is de oppervlakte van de moestuinen?

Toepassen

Figuur 3.4

Je ziet hier een leeg zuiver cilindervormig blik.

Dergelijke blikken worden gemaakt van metaal. De oppervlakte van het blik bepaalt hoeveel metaal je ervoor nodig hebt.

Noem de straal van de cirkelvormige bodem r cm en de hoogte van het blik h cm.

Voor de oppervlakte A van blik met deksel geldt dan (ongeveer):

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Deze formule kun je zelf afleiden.

Opgave 18

Bekijk de formule voor de oppervlakte van een cilindrisch blik.

a Leg uit hoe je deze formule zelf kunt afleiden.

Bekijk alleen blikken waarvan de hoogte en de diameter even groot zijn.

b Welke formule geldt voor de oppervlakte van zo'n blik?

c Hoe groot is de diameter van zo'n blik als de oppervlakte 500 cm^2 is? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 19

Bekijk de oppervlakteformule van het cilindrische blik nog eens.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van zo'n blik?

b Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van een blik met een hoogte van 10 cm en een inhoud van 1 L? Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.

Testen

Opgave 20

Een zwembad heeft een kortingskaart voor een jaar. Voor deze kortingskaart betaal je € 45,00, maar met deze kaart betaal je maar € 2,50 per keer zwemmen. Als je geen kortingskaart hebt, betaal je € 4,50 per keer zwemmen.

a Je wilt weten hoeveel keer je in een jaar moet gaan zwemmen om voordeliger uit te zijn met een kortingskaart.
Welke vergelijking past daar bij?

b Los deze vergelijking op.

Opgave 21

Los de volgende vergelijkingen op.

a $26 - 3{,}5x = 10$

b $26 - 3{,}5x = 10 + 2x$

c $3(x - 4)^2 = 300$

d $(k - 3)(k + 6) = k(k - 2)$

e $\frac{26}{3p+5} = 2$

3.7 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het het begin van het werken met formules voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra I** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- formule — variabele(n), afhankelijk variabele — substitueren — verband tussen twee variabelen, tabel, grafiek;
- variabelen optellen en aftrekken;
- variabelen vermenigvuldigen en delen;
- haakjes wegwerken;
- som en product delen;
- vergelijking — terugrekenen, vergelijkend rekenen, balansmethode.

Activiteitenlijst

- in een formule voor een variabele een getal substitueren — bij het verband tussen twee variabelen een tabel en een grafiek maken;
- variabelen optellen en aftrekken;
- variabelen vermenigvuldigen en delen;
- haakjes wegwerken;
- een som/verschil van meerdere termen delen door een getal — een product van meerdere termen delen door een getal;
- een vergelijking met één variabele oplossen door terugrekenen, vergelijkend rekenen, de balansmethode.

Testen

Opgave 1

Herleid.

a $2a + 4 + 3a + 7 + a$

b $-5a + 8a + 2b - 4b$

c $8ab + 3a - 4b + 5b - 6ab$

d $-8ab + 6b - 2ba - 3b + 5 - 3b$

e $a \cdot a + 5a - 3a^2 + a$

f $8a^2 - 3a \cdot 2a - 7a$

Opgave 2

Herleid.

a $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

b $2x^2 \cdot 5x^4$

c $-2x \cdot -x^{10}$

d $(-x)^2 \cdot 4x^5$

e $2x^9 \cdot -3y^7$

Opgave 3

Herleid.

a $2(3 + a)$

b $-c(5 + c)$

c $5(3x + 4)$

d $(z + 3)(z + 6)$

e $(2d - 4)(3d - 2)$

f $(4x + 3)(2y - 8)$

Opgave 4

Herleid.

a $A = 2 - 3(a - 6)$

b $R = 2(3 + p) - 7 - 8(2p + 4)$

c $T = (2x - 5)(2x + 5) + 25$

d $Q = (-3a - 2)(2b - 5) + 4b$

Opgave 5

Los op.

a $3 + 8x = 35$

b $7 - 2x = -23$

c $5x - 7x + 2 = 14$

d $5(3 - x) = 65$

e $-3(x - 10) = 21$

f $3(x - 10)^2 = 21$

Opgave 6

Herleid. Neem vervolgens $a = 3$ en bereken b.

a $2ab - 6a + 8b + 4ab = 8$

b $3a - 2(a + b) - 3b = 13$

Opgave 7

Ryan verkoopt op de markt twee soorten tijdschriften en boeken. Een tijdschrift verkoopt hij voor € 3,50 en een boek voor € 5,00. Hierbij kun je de formule $R = 3{,}50a + 5{,}00b$ opstellen.

a Wat stellen de variabelen in de formule voor?

b Hoeveel bedraagt Ryan's opbrengst als hij 50 tijdschriften en 35 boeken verkoopt?

c Ryan heeft op een dag 40 tijdschriften verkocht en heeft een opbrengst van € 250,00. Hoeveel boeken heeft hij die dag verkocht?

d Door waterschade geeft hij korting op de tijdschriften en de boeken. Voor het bepalen van de totale korting die hij gegeven heeft, gebruikt hij de formule $Q = 1{,}50a + 2{,}00b$. Geef een zo kort mogelijke formule voor de opbrengst R, waarbij de korting er al af is.

Toepassen

Opgave 8: Bioscoop

Een bioscoop heeft twee zalen waarin evenveel bezoekers kunnen. In de éne zaal zijn evenveel rijen als stoelen per rij. In de andere zaal zijn drie stoelen per rij minder, maar wel vier rijen meer. Hoeveel stoelen telt elke zaal?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking op door eerst de haakjes weg te werken.

c Geef antwoord op de aan het begin gestelde vraag.

Opgave 9: Leeftijdspuzzle

Theo en Saar zijn samen 38 jaar. Theo was vijf jaar geleden twee keer zo oud als Saar nu. Hoe oud zijn ze ieder?

a Neem eens aan dat Saar x jaar oud is. Hoe oud is Theo dan?

b Welke vergelijking kun je opstellen om de puzzel op te lossen?

c Los de vergelijking op om de leeftijden van Theo en Saar te bepalen.

4

Algebra 2

4.1 Formules met machten 160
4.2 Breuken met variabelen 168
4.3 Formules met breuken herleiden 174
4.4 Formules en ongelijkheden 182
4.5 Totaalbeeld 189

4.1 Formules met machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- formules met machten van variabelen herleiden, ook met delingen.

Voorkennis

- de begrippen variabele, formule, tabel en grafiek;
- bij een formule een tabel en een grafiek maken.

Verkennen

Opgave V1

Drie geostationaire satellieten boven de evenaar zijn, indien goed geplaatst, genoeg om de hele wereld te bedekken, met uitzondering van het poolgebied. Zo'n satelliet moet op een hoogte van $36 \cdot 10^3$ km boven het aardoppervlak zitten en net zo snel ronddraaien als het punt op het aardoppervlak waar het recht boven blijft. Dat punt doet over één omwenteling 24 uur. De straal van de aarde is ongeveer $6{,}4 \cdot 10^3$ km.

Figuur 4.1 bron: ESA

a Neem aan dat de baan van zo'n satelliet zuiver cirkelvormig is. Hoe lang is die baan? Geef je antwoord in km in de technische notatie met drie significante cijfers.

b Hoe snel beweegt deze satelliet in km/h? Geef je antwoord in km/h in de technische notatie met drie significante cijfers.

c Een Boeing 747 vliegt ongeveer met een snelheid van $900 = 9 \cdot 10^2$ km/uur.
Hoeveel keer zo snel vliegt de satelliet (hoewel hij steeds op hetzelfde punt boven het aardoppervlak blijft)?

De oppervlakte van een bol (zoals de aarde ongeveer is) bereken je met de formule $A = 4\pi \cdot r^2$, waarin r de straal van de bol is. De satelliet bestrijkt ongeveer $\frac{1}{3}$ deel van het aardoppervlak.

d Welke oppervlakte heeft het gebied dat de satelliet bestrijkt ongeveer? Geef je antwoord in km^2 in de technische notatie met drie significante cijfers.

Uitleg

Als je in formules hele grote of hele kleine getallen moet invullen, werk je met machten van 10.
Bijvoorbeeld als je de omtrek P en de oppervlakte A van een rechthoek gaat berekenen met lengte $l = 5{,}3 \cdot 10^6$ m en breedte $b = 940 \cdot 10^3$ m.

- $P = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2 \cdot 5{,}3 \cdot 10^6 + 2 \cdot 940 \cdot 10^3 =$
  $= 10{,}6 \cdot 10^6 + 1880 \cdot 10^3 = 10{,}6 \cdot 10^6 + 1{,}88 \cdot 10^6 = 12{,}48 \cdot 10^6$ m.
- $A = l \cdot b = 5{,}3 \cdot 10^6 \cdot 940 \cdot 10^3 =$
  $= 4982 \cdot 10^{6+3} = 4982 \cdot 10^9 \approx 4{,}98 \cdot 10^{12}$ m^2.
- Verder is de lengte $\frac{5{,}3 \cdot 10^6}{940 \cdot 10^3} \approx 0{,}0056 \cdot 10^{6-3} = 0{,}0056 \cdot 10^3 = 5{,}6$ keer zo groot dan de breedte.

Je ziet:

- Je kunt machten van 10 van dezelfde soort (met dezelfde exponent) optellen.
  Er geldt: $a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n$.
  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $a \cdot g^n + b \cdot g^n = (a + b) \cdot g^n$.
- Je kunt machten van 10 met gelijke of verschillende exponenten vermenigvuldigen.
  Er geldt: $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^m = a \cdot b \cdot 10^{n+m}$.
  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $a \cdot g^n \cdot b \cdot g^m = a \cdot b \cdot g^{n+m}$.
- Je kunt machten van 10 met gelijke of verschillende exponenten delen.

  Er geldt: $\frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^m} = \frac{a}{b} \cdot 10^{n-m}$.

  Dit geldt ook voor machten met andere grondtallen: $\frac{a \cdot g^n}{b \cdot g^m} = \frac{a}{b} \cdot g^{n-m}$.

Bij optellen en vermenigvuldigen van variabelen mag je de volgorde verwisselen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$. Dit heet de wisseleigenschap van optellen en vermenigvuldigen. Let op! Voor aftrekken en delen geldt de wisseleigenschap niet: $a - b \neq b - a$ en $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$.

Opgave 1

Voor een cilinder met diameter d en hoogte h geldt voor het volume V de formule $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$.

a Een koperen draad heeft een lengte van $1{,}2 \cdot 10^3$ m en een diameter van $21 \cdot 10^{-3}$ m.
Bereken de hoeveelheid koper die voor deze draad nodig is.

Van een grote cilindrische tank zijn diameter en hoogte gelijk, allebei $2{,}1 \cdot 10^3$ mm.
Je kunt het volume van deze tank berekenen door $d = 2{,}1 \cdot 10^3$ en $h = 2{,}1 \cdot 10^3$ beide in de formule in te vullen.

Maar je kunt ook eerst de formule herleiden tot $V = \frac{\pi}{4} d^3$.

b Laat zien, hoe je aan deze laatste formule komt.
Bereken vervolgens op beide manieren het volume van de tank.

Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 + \pi dh$.
Ga uit van dezelfde cilindervormige tank als bij b.

c Schrijf de formule voor de oppervlakte zo, dat A alleen in d is uitgedrukt.
Bereken daarna de totale oppervlakte van deze tank.

Opgave 2

In de uitleg zie je hoe je met machten moet rekenen als dezelfde variabelen herhaaldelijk met elkaar worden vermenigvuldigd of opgeteld.

a Schrijf $p^2 \cdot p^3$ korter.

b Schrijf $3p^3 + 5p^3 - 4p^3$ korter.

c Schrijf $3p^2 \cdot 5p^3$ korter.

d Schrijf $q + q^2 + 2q + 3q^2$ korter.

e Schrijf $\frac{8p^3}{2p}$ zo kort mogelijk.

f Schrijf $\frac{4a^2b^3}{-2a^2b}$ zo kort mogelijk.

Opgave 3

Herleid de volgende formules.

a $y = 2x^5 \cdot 3x + \left(2x^2\right)^3$

b $y = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 4\right)$

c $P = \frac{12q^2}{3q}$

d $A = (r+1)^2 + \frac{1}{2}r \cdot 4r$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt uitdrukkingen waarin machten voorkomen herleiden door deze **rekenregels voor machten** te gebruiken:

- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $a^p / a^q = a^{p-q}$
- $a^0 = 1$

Dit kun je gebruiken bij het werken met machten van 10.

Hiermee kun je ook formules herleiden waarin machten voorkomen.

Daarbij kun je ook gebruik maken van gelijksoortige termen samennemen en haakjes wegwerken.

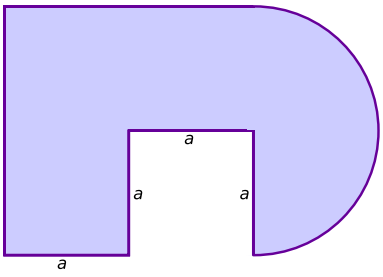
Je kunt hiermee formules zo eenvoudig mogelijk schrijven. Maar vooral bij het oplossen van vergelijkingen heb je dergelijke herleidingen nodig.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een staalplaat die bestaat uit een vierkant met daartegen een halve cirkel. Uit het vierkant is een kleiner vierkant weggesneden.

De oppervlakte van een cirkel met diameter d is $\frac{1}{4}\pi d^2$.

Laat zien dat voor de oppervlakte A van deze staalplaat geldt: $A \approx 4{,}57a^2$.
Bereken die oppervlakte als $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ mm.



Figuur 4.2

Antwoord

De oppervlakte van de staalplaat kun je zo berekenen:

- de halve cirkel heeft een diameter van $2a$, dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (2a)^2$;
- de rest van de figuur is een groot vierkant met zijden $2a$ waaruit een kleiner vierkant met zijden van a is weggesneden, zodat de oppervlakte $(2a)^2 - a^2$ is;
- de totale oppervlakte is $A = (2a)^2 - a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot (2a)^2$.

Dit kun je herleiden tot: $A = 4a^2 - a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 = \left(3 + \frac{1}{2}\pi\right)a^2 \approx 4{,}57a^2$.

Hierin vul je $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ in en je krijgt: $A = 4{,}57 \cdot \left(0{,}2 \cdot 10^3\right)^2 = 0{,}1828 \cdot 10^6 \approx 1{,}8 \cdot 10^5$ mm^2.

Opgave 4

Bekijk de staalplaat in **Voorbeeld 1 op pagina 162**.

a Voer het herleiden van de formule voor de oppervlakte zelf uit.

Voor de afwerking wordt om de staalplaat een kunststof rand gemaakt.

b Welke formule kun je voor de lengte L van die rand opstellen? Herleid je formule zo ver mogelijk.

c Bereken de lengte van de kunststof rand als $a = 0{,}2 \cdot 10^3$ mm.

Opgave 5

Werken met machten en gelijksoortige termen samennemen is belangrijk als je met formules werkt. Herleid de uitdrukkingen.

a $p^2 \cdot p^4$

b $3p^2 \cdot -6p^2$

c $3p^2 - 6p^2$

d $\frac{-6k \cdot 4k^3}{-2k^2}$

e $5b \cdot 4ab^3$

f $\left(3a^2b\right)^3$

Opgave 6

Hier zie je formules waarin machten voorkomen. Schrijf elk van die formules eerst zo eenvoudig mogelijk. Vul daarna $p = 2$ en $q = 3$ in elke formule in en bereken de waarde van K.

a $K = 4p \cdot 3p^2$

b $K = 3p^3q - p \cdot 2p^2q$

c $K = \frac{(2p)^4}{p^2 \cdot 2p}$

d $K = 2p \cdot 3q - 4p$

Voorbeeld 2

Je maakt een vierkante omlijsting door uit een gegeven vierkant en kleiner vierkant te zagen.
De omlijsting heeft overal een dikte van 3 cm en een oppervlakte van 444 cm^2.

Welke afmetingen heeft het grootste vierkant?

Antwoord

Noem de zijden van het grootste vierkant z cm.
Die van het kleinste vierkant zijn dan $z - 6$.

De oppervlaktes zijn dan $z \cdot z = z^2$ en $(z - 6) \cdot (z - 6) = (z - 6)^2$ cm^2.

Uit de gegevens volgt $z^2 - (z - 6)^2 = 444$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} z^2 - (z-6)^2 &= 444 && \text{haakjes wegwerken} \\ z^2 - (z^2 - 12z + 36) &= 444 && \text{herleiden} \\ 12z - 36 &= 444 && \text{beide zijden +36} \\ 12z &= 480 && \text{beide zijden delen door 12} \\ z &= 40 \end{aligned}$$

Het grootste vierkant heeft zijden van 40 cm.

Opgave 7

Los de vergelijkingen op.

a $x^2 - 121 = 0$

b $(x - 6)(x + 6) = 13$

c $(x + 60)(x - 2) = 2(29x + 12)$

Opgave 8

Bert heeft een tuin die 14 meter langer is dan hij breed is. Van de tuin van Bart is de breedte 2 meter minder dan de tuin van Bert, maar de lengte is 4 meter meer dan die van Berts tuin. Beide tuinen hebben een even grote oppervlakte. Je wilt weten hoe breed de tuin van Bert is.

a Maak een schets van beide tuinen. Kies x voor de breedte van Bert's tuin.

b Welke vergelijking kun je opstellen om de breedte van de tuin van Bert te berekenen?

c Los de vergelijking op.

d Hoe lang en hoe breed is de tuin van Bert?

Oefenen

Opgave 9

Herleid.

a $3k^3 \cdot 2k^2$

b $3k^3 + 2k^3$

c $3k^3 - 2k^3$

d $(3k^3)^2$

e $\frac{3k^3}{2k^3}$

f $\frac{3k^3}{2k}$

Opgave 10

Voor een cilinder met diameter d en hoogte h geldt voor het volume V de formule $V = \frac{\pi}{4}d^2h$ en voor de oppervlakte A de formule $A = 2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2 + \pi dh$.

Van een cilinder is de hoogte drie keer zo groot dan de diameter.

a Laat zien dat voor de inhoud van deze cilinder de formule $V \approx 2{,}36d^3$ geldt.

b Laat zien dat voor de oppervlakte van deze cilinder de formule $A \approx 11{,}00d^2$ geldt.

c Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder als de diameter $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ m is.

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

a $(p+3)^2 = 3(15+2p)$

b $2f(f+1) = (2f+1)(f-2)$

c $q^2(q^2-1) = (q^2-5)(q^2+5)$

d $(3s-1)(2s-7) = (7s+5)(s-4) - 22$

Opgave 12

Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

a $L = \left(15a^4b^2\right) \big/ \left(5(ab)^2\right)$

b $K = \left(12p^3 - 7p \cdot p^2\right) \big/ \left(5p^2\right)$

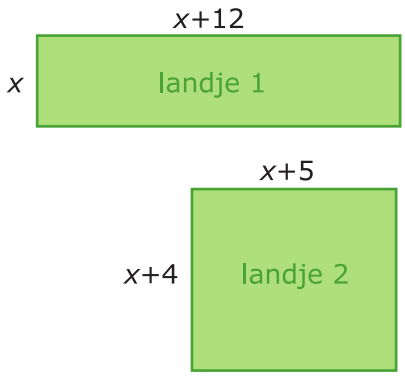
Opgave 13

De twee landjes hebben dezelfde oppervlakte.

a Welke vergelijking levert dit op?

b Los de vergelijking op.

c Welke oppervlakte hebben deze landjes?

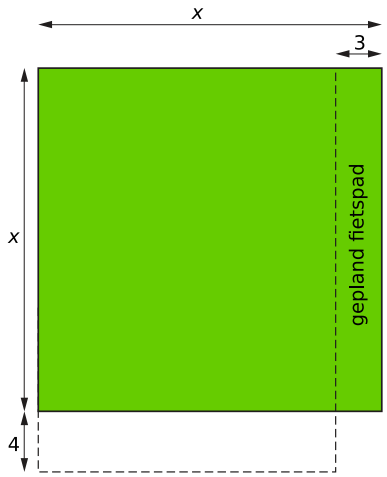


Figuur 4.3

Toepassen

Het land van boer Brandwijk is een vierkant van x bij x meter. Door de aanleg van een fietspad moet hij aan de oostkant een strook van drie meter afstaan. Hij wil er aan de zuidkant een strook van vier meter bij.

Levert hem dat extra land op?



Figuur 4.4

Opgave 14

Bekijk hierboven de situatie waarin boer Brandwijk terecht is gekomen.

a Welke oppervlakte heeft zijn land na de aanleg van het fietspad als hij zijn zin krijgt? Schrijf de uitdrukking met haakjes en zonder haakjes.

b Als zijn land oorspronkelijk honderd meter lang en breed was, hoeveel m² heeft hij er dan bij gekregen?

c Bij welke waarde van x is het land na de aanleg van het fietspad even groot als daarvoor?

Opgave 15

Los het volgende probleem op: ‘Een bioscoop heeft twee zalen, zaal 1 en zaal 2. In zaal 1 zijn er even veel stoelen per rij als er rijen zijn. Zaal 2 heeft vijf rijen meer, maar vier stoelen per rij minder. Beide zalen hebben evenveel stoelen, hoeveel?’

Testen

Opgave 16

Schrijf deze formules zo eenvoudig mogelijk. Werk ook de haakjes weg.

a $P = -2(2a + 4)(a - 8)$

b $K = 30p^4 \cdot q - 6p^3 \cdot 2pq$

c $y = \frac{3x \cdot (2x^3)^2 + x^3 \cdot x^4}{5x^3}$

Opgave 17

Los de vergelijkingen op.

a $(4a - 1)(2a + 1) = (7a - 5)(a + 1) + 13$

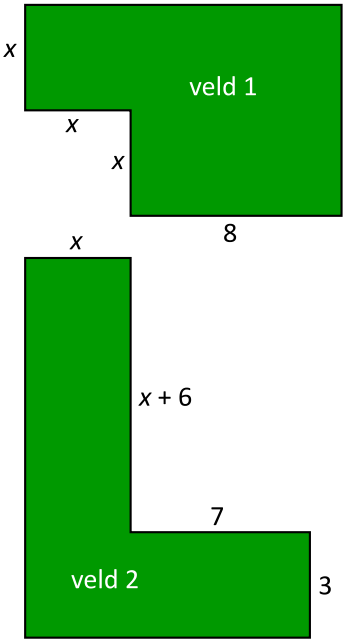
b $(2b - 2)(2b + 4) = 4b(b - 8)$

c $(c^2 + 4)^2 + 8 = (c^2 + 5)(c^2 + 4)$

Opgave 18

Bekijk deze schets van twee grasvelden. Alle hoeken zijn recht.

Beide velden hebben een even grote oppervlakte. Hoe groot is die oppervlakte?



Figuur 4.5

4.2 Breuken met variabelen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp
- breuken met variabelen vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis
- het begrip breuk (alleen met getallen), breuken vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- rekenen met breuken met getallen.

Verkennen

Opgave V1

Reken met de breuken $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het verschil van $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

e Kun je de voorgaande berekeningen ook uitvoeren met de breuken $\frac{3}{a}$ en $\frac{2}{b}$?

Uitleg

Je kunt al rekenen met breuken: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen, gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen moet je de tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a\cdot d}{b\cdot d}}{\frac{b\cdot c}{b\cdot d}}=\frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b\cdot d$ vermenigvuldigen)

  Omdat $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ kun je ook onthouden dat delen door een breuk als $\frac{c}{d}$ op hetzelfde neerkomt als vermenigvuldigen met het omgekeerde $\frac{d}{c}$ van die breuk.

Er is een maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b\neq 0$ en $d\neq 0$ en bij de deling geldt ook $c\neq 0$.

Soms is het voordat je met breuken gaat rekenen verstandig om ze eerst te vereenvoudigen.

Dat doe je door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 160** hoe je met breuken rekent als daar variabelen in voorkomen. Neem aan dat alle variabelen ongelijk zijn aan 0. Bereken.

a $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$

b $\frac{2}{p}-\frac{3}{q}$

c $\frac{2}{a}-\frac{1}{2}$

d $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$

Opgave 2

Bekijk in de uitleg hoe je met breuken rekent als daar variabelen in voorkomen. Neem aan dat alle variabelen ongelijk zijn aan 0. Bereken en vereenvoudig de breuken waar het nodig is.

a $\frac{p}{q}\Big/\frac{r}{s}$

b $\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}$

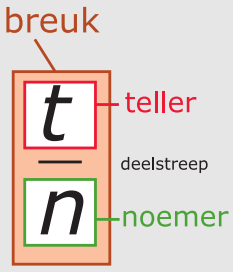
c $\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}$

d $\frac{2}{p}\Big/\frac{3}{q}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Breuken kun je vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.



Figuur 4.1

Het rekenen met **breuken met variabelen** gaat net als het rekenen van breuken met getallen:

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\pm\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je de tellers en noemers afzonderlijk:
  $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a\cdot d}{b\cdot d}}{\frac{b\cdot c}{b\cdot d}}=\frac{ad}{bc}$

  Of je gebruikt $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds gelden $b\neq 0$ en $d\neq 0$ en bij de deling geldt ook $c\neq 0$.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de breuken $\frac{3}{x}$ en $\frac{5}{2y}$ (met $x \neq 0$ en $y \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{3}{x} + \frac{5}{2y} = \frac{3 \cdot 2y}{x \cdot 2y} + \frac{5 \cdot x}{2y \cdot x} = \frac{6y}{2xy} + \frac{5x}{2xy} = \frac{5x+6y}{2xy}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{3}{x} \cdot \frac{5}{2y} = \frac{3 \cdot 5}{x \cdot 2y} = \frac{15}{2xy}$
- Delen: $\frac{3}{x} \Big/ \frac{5}{2y} = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{5}{2y}} = \frac{\frac{6y}{2xy}}{\frac{5x}{2xy}} = \frac{6y}{5x}$

Opgave 3

Werk met de breuken $\frac{3}{2a}$ en $\frac{5}{b}$.

a Trek de tweede breuk van de eerstgenoemde af.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 4

Werk met de breuken $\frac{1}{3}a$ en $\frac{1}{2a}$.

a Leg uit dat $\frac{1}{3}a = \frac{a}{3}$.

b Tel beide breuken bij elkaar op.

c Vermenigvuldig beide breuken.

d Deel de tweede breuk door de eerste.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de breuken $\frac{6a}{2a^3}$ en $\frac{5}{4a}$ (met $a \neq 0$).

1. Vermenigvuldig beide breuken: $\frac{6a}{2a^3} \cdot \frac{5}{4a}$
2. Trek de eerste breuk van de tweede af: $\frac{5}{4a} - \frac{6a}{2a^3}$

Antwoord

Voor beide berekeningen is het verstandig om vooraf de eerste breuk te vereenvoudigen:
$\frac{6a}{2a^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot a}{2 \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{3}{a^2}$

1. Vermenigvuldigen: $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{3 \cdot 5}{a^2 \cdot 4a} = \frac{15}{4a^3}$
2. Aftrekken: $\frac{5}{4a} - \frac{3}{a^2} = \frac{5 \cdot a}{4a \cdot a} - \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot a^2} = \frac{5a}{4a^2} - \frac{12}{4a^2} = \frac{5a-12}{4a^2}$

Opgave 5

Vereenvoudig de breuken (neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$).

a $\frac{6a}{8ab}$

b $\frac{5b}{15b^3}$

c $\frac{7a}{21}$

d $\frac{5a^2b}{ab}$

Opgave 6

Werk met de breuken $\frac{3x^2}{xy}$ en $\frac{xy}{4y}$.

a Trek de tweede breuk van de eerste af.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 7

Werk met de breuken $\frac{2pq}{4p}$ en $\frac{3p}{p^2}$.

a Tel beide breuken op.

b Vermenigvuldig beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

Oefenen

Opgave 8

Schrijf de breuken als één breuk en vereenvoudig.

a $\frac{300a}{650b} + \frac{450a}{50b}$

b $\frac{5p}{8q} \cdot \frac{4q}{3p} \cdot \frac{11p}{20q}$

c $\frac{32x}{25y} - \frac{3x+2}{40y}$

d $\frac{9t^4}{4t^3} \Big/ \frac{4t^2}{3t}$

e $\frac{6l}{15k} \cdot \frac{4l}{5k} + \frac{10k}{3l}$

Opgave 9

Schrijf de breuken als één breuk en vereenvoudig. Reken vervolgens p uit als je weet dat $q = 3$.

a $p = \frac{3}{q} + \frac{7}{2q} - \frac{3}{2q}$

b $p = \frac{5}{q} \cdot \frac{4q^2}{3} \cdot \frac{7}{4}$

c $p = \frac{4q}{5} \Big/ \frac{6}{7q}$

Opgave 10

Gegeven zijn de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{4a}{6a^2}$ met $a \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken het product van beide breuken.

c Deel de eerste breuk door de tweede.

d Bereken het verschil van het kwadraat van de eerste breuk en het kwadraat van de tweede breuk.

Opgave 11

Oefen het rekenen met breuken in het **Practicum**.

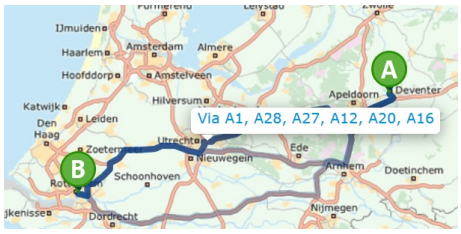
Toepassen

Je rijdt van Rotterdam naar Deventer en weer terug via dezelfde route.

De afgelegde afstand is 145 km.

Je gemiddelde snelheid op de heenreis is anders dan die op de terugreis.

Hoe bereken je de gemiddelde snelheid over de hele reis?



Figuur 4.2

Opgave 12

Je wilt het hierboven geschetste probleem oplossen.

a Probeer eerst zelf een oplossing te vinden.

Als je niet zelf een rekenmethode hebt kunnen vinden, probeer dan met behulp van de volgende opdrachten er uit te komen.

b Kies voor de gemiddelde snelweg op de heenreis v_1.
Hoe lang doe je dan over de heenreis?

c Hoe lang doe je over de totale reis heen en terug? Herleid je formule tot één breuk.

d Je weet nu hoe lang je over de 290 km heen en terug doet.
Bereken hieruit de gemiddelde snelheid. (Stel er een formule voor op.)

e Controleer je antwoord door de gemiddelde snelheid te berekenen als de gemiddelde snelheid op de heenreis 90 km/uur was en die op de terugreis 70 km/uur.

Testen

Opgave 13

Schrijf deze formules zo eenvoudig mogelijk als één breuk.

a $P = \frac{2}{a} + \frac{3}{2a}$

b $K = \frac{3b}{2a} \Big/ \frac{5}{7a}$

Opgave 14

Gegeven zijn de breuken $\frac{4}{3p}$ en $\frac{p}{2}$.

a Trek de tweede breuk van de eerste af.

b Bereken het product van beide breuken.

4.3 Formules met breuken herleiden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met breuken in formules en vergelijkingen.

Voorkennis

- rekenen met breuken met variabelen;
- formules herleiden en vergelijkingen oplossen met de basismethoden.

Verkennen

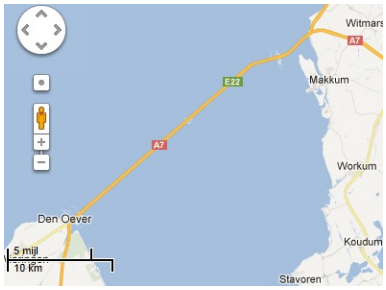
Opgave V1

Snelheid (gemiddelde snelheid) bereken je door de afgelegde afstand te delen door de tijd:

$v = \frac{s}{t}$

Hierin is:

- s de afgelegde afstand in km
- t de tijd in uur
- v de snelheid in km/uur



Figuur 4.1

a Leg uit waarom je deze formule ook kunt schrijven als $s = v \cdot t$.

De Afsluitdijk is 32 km lang. Je rijdt met een constante snelheid van 100 km/uur.

b Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Hoe lang doe je er over om de hele Afsluitdijk te rijden?"

c Geef het antwoord op de vraag bij b in minuten nauwkeurig.

d Je kunt de gegeven formule nog op een derde manier schrijven. Hoe?

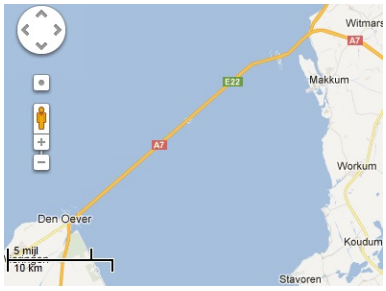
Uitleg

Snelheid (gemiddelde snelheid) bereken je door de afgelegde afstand te delen door de tijd:

$v = \frac{s}{t}$

Hierin is:

- s de afgelegde afstand in km
- t de tijd in uur
- v de snelheid in km/uur



Figuur 4.2

Een formule zoals $v = \frac{s}{t}$ kun je in drie vormen schrijven, afhankelijk van welke grootheid je wilt berekenen.

Daarbij werk je met de balansmethode: beide zijden van het isgelijkteken dezelfde bewerking uitvoeren.

- Beide zijden met t vermenigvuldigen: $v \cdot t = s$ ofwel $s = v \cdot t$.
  Dit is handig als je de afgelegde afstand s wilt berekenen.

- Nu beide zijden door v delen: $t = \frac{s}{v}$.
  Dit is handig als je de tijd t wilt berekenen.

Op deze manier kun je formules met breuken herleiden. Soms moet je eerst nog met die breuken rekenen, dat zie je in de voorbeelden.

Weet je twee van de drie variabelen, bijvoorbeeld $v = 100$ km/uur en $s = 32$ km (de lengte van de Afsluitdijk), dan kun je t berekenen. Het liefst gebruik je dan de vorm $t = \frac{s}{v} = \frac{32}{100} = 0{,}32$ uur.

Maar ook als je alleen de eerste vorm $v = \frac{s}{t}$ hebt, kun je t uitrekenen:

$$\begin{aligned} 100 &= \tfrac{32}{t} \\ 100 \cdot t &= 32 \\ t &= \tfrac{32}{100} = 0{,}32 \text{ uur} \end{aligned}$$

beide zijden $\times t$

beide zijden $/\,100$

Nu gebruik je de balansmethode om een vergelijking op te lossen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 174** wat de grootheden s, t en v voorstellen en welk verband er tussen bestaat.

Je rijdt met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur over een afstand van 180 km.

a Je gebruikt $v = \frac{s}{t}$ om uit te rekenen hoe lang je over deze rit doet. Laat zien hoe.

b Je kunt de formule bij a ook herleiden naar andere vormen.
Welke vorm is het handigst als je de tijdsduur wilt uitrekenen?

Je rijdt 55 minuten met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur.

c Welke afstand leg je in die tijd af? Gebruik de handigste formule.

Opgave 2

Je rijdt met een constante snelheid een afstand van 180 km. Onderweg moet je 5 minuten stoppen om te tanken.

a Waarom geldt nu $t = \frac{180}{v} + \frac{1}{12}$?

b Hoe lang doe je over deze rit als je rijsnelheid 100 km/uur is? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

c Als je reistijd 1 uur en 50 minuten bedraagt, hoe groot is dan je snelheid geweest? Geef je antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

Onder de soortelijke massa ρ van een stof versta je de massa m in kg gedeeld door het volume V in m^3:
$\rho = \frac{m}{V}$.

a Eén dm^3 lood weegt 11,3 kg.
Hoeveel bedraagt de soortelijke massa van lood?

b Op welke twee andere manieren kun je deze formule schrijven?

c Gebruik de handigste formule om het gewicht van 12 dm^3 lood uit te rekenen.
Je weet de soortelijke massa.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In formules en vergelijkingen komen regelmatig delingen (breuken) voor.

Bij een formule als $v = \frac{s}{t}$ is v uitgedrukt in s en t.

Dat is handig als je v wilt berekenen.
Maar wil je s berekenen, dan kun je beter s **uitdrukken in** v en t.
Door met breuken te rekenen en/of de balansmethode te gebruiken kun je de formule of de vergelijking herleiden:

- $v = \frac{s}{t}$ kun je herleiden naar $s = v \cdot t$.
  In de tweede formule is s uitgedrukt in v en t.
- $v = \frac{s}{t}$ kun je ook herleiden naar $t = \frac{s}{v}$.
  Nu is t uitgedrukt in s en v.
- $p = \frac{1}{3}q + 4$ kun je herleiden naar $q = 3p - 12$.
  Eerst was p uitgedrukt in q.
  In de tweede formule is q uitgedrukt in p.

Denk er steeds om dat delen door 0 geen betekenis heeft.

Voorbeeld 1

In vergelijkingen kunnen ook breuken voorkomen. Om zulke vergelijkingen op te lossen is de balansmethode meestal het handigst. Je probeert dan, net als bij vergelijkingen zonder breuken, ervoor te zorgen dat de variabele alleen nog links van het isgelijkteken voorkomt.

Los op: $3 + \frac{126}{x} = 12$.

Antwoord

Met de balansmethode:

$3 + \frac{126}{x} = 12$ — beide zijden -3

$\frac{126}{x} = 9$ — beide zijden $\times x$

$126 = 9x$ — vergelijking andersom schrijven

$9x = 126$ — beide zijden $/9$

$x = \frac{126}{9} = 14$

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op.

a $\frac{60}{x} = 5$

b $\frac{x}{15} + 4 = 20$

c $\frac{p}{9} \cdot \frac{6}{5} = 2$

d $\frac{3}{g} + \frac{5}{2g} = 2$

Opgave 5

Druk in de volgende formules y uit in x

a $x \cdot y = 6$

b $2x + 4y = 15$

c $\frac{12}{y+3} = x$

d $x = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y}$

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{p}{4} + \frac{1}{12} = 2 - \frac{5}{6}p$

Antwoord

Gebruik ook nu de balansmethode:

$$\begin{aligned} \tfrac{p}{4} + \tfrac{1}{12} &= 2 - \tfrac{5}{6}p && \text{beide zijden } \times 12 \\ 3p + 1 &= 24 - 10p && \text{beide zijden } -1 \\ 3p &= 23 - 10p && \text{beide zijden } +10p \\ 13p &= 23 && \text{beide zijden } /13 \\ p &= \tfrac{23}{13} \end{aligned}$$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 177** zie je hoe je een vergelijking met breuken kunt oplossen met de balansmethode.

a Waarom wordt in de eerste stap aan beide zijden met 12 vermenigvuldigd?

b De tweede en de derde stap had je ook wel kunnen omwisselen. Laat zien hoe de oplossing er dan uitziet.

Opgave 7

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{1}{7}x + 4 = 3 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{5}{3}x - 4 = \frac{1}{4}x + 8$

c $\frac{1}{3}p + \frac{1}{4}p = p - \frac{5}{6}$

Voorbeeld 3

Er bestaan diverse temperatuurschalen. Onder andere het omrekenen van graden Celsius naar graden Fahrenheit.

Hiervoor bestaat de formule: $f = \frac{9}{5} \cdot c + 32$.

Hier is f het aantal °F en c het aantal °C.

Schrijf deze formule zo, dat c wordt uitgedrukt in f.

Antwoord

Gebruik ook nu de balansmethode:

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{9}{5} \cdot c + 32 \\ f - 32 &= \tfrac{9}{5} \cdot c \\ 5(f - 32) &= 9c \\ 5f - 160 &= 9c \\ c &= \tfrac{5f-160}{9} \end{aligned}$$

beide zijden −32

beide zijden ×5

haakjes wegwerken

beide zijden /9 en verwisselen

Deze laatste formule is nog te herleiden: $c = \frac{5f-160}{9} = \frac{5f}{9} - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$.

Dus uiteindelijk vind je $c = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3 op pagina 178** zie je hoe je de omrekenformule van graden Celsius naar graden Fahrenheit kunt herleiden tot de omrekenformule van graden Fahrenheit naar graden Celsius.

a Je kunt de formule $c = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$ weer herleiden naar de vorm waarin f wordt uitgedrukt in c.
Laat zien hoe.

b Hoeveel graden Fahrenheit is 100 °C?

c Hoeveel graden Celsius is 100 °F?

Opgave 9

a Wanneer een lichaam vrij valt over een hoogte van h m dan geldt voor de eindsnelheid v in m/s: $v^2 = 2gh$.
Hierin is g de gravitatieconstante.
Schrijf deze formule zo, dat h is uitgedrukt in v.

b Het aantal exemplaren q van een product dat je per maand kunt verkopen, hangt af van de prijs p in euro volgens de formule $q = 400 - 0{,}20p$.
Schrijf deze formule zo, dat p is uitgedrukt in q

c Gegeven is de formule $\frac{1}{3k} - \frac{1}{4k} = R$.
Schrijf deze formule zo, dat k wordt uitgedrukt in R.

Oefenen

Opgave 10

Volgens de wet van Ohm bestaat er in een draad waar elektrische stroom loopt een verband tussen de spanning U in Volt, de stroomsterkte I in Ampère en de weerstand R in Ohm. De wet van Ohm luidt: $U = I \cdot R$.

a Schrijf deze formule zo, dat I wordt uitgedrukt in U en R.

b Bereken de stroomsterkte bij een spanning van 12 V en een weerstand van 0,02 Ω.

Je wilt de weerstand van een stuk koperdraad berekenen. Je zet er daarom een spanning van 6 V op en meet de stroomsterkte met een ampèremeter. Je meet $I = 180$ A.

c Bereken de weerstand van dit stuk draad in drie significante cijfers.

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{k^2}{9} = 4$

b $\frac{3}{l} - 4 = 8$

c $\frac{1}{m} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{m} + 2$

d $\frac{11t}{3} - \frac{13}{5} = \frac{97}{5}$

e $\frac{1}{2h} + \frac{2}{h} = 1$

f $\frac{1}{2} \Big/ \frac{t}{4} = 6$

Opgave 12

Het aantal batterijen q van een bepaald type dat een fabrikant maandelijks verkoopt, hangt af van de prijs p (in euro) die hij er voor vraagt. De fabrikant gebruikt op grond van eerdere ervaringen deze formule als rekenmodel: $q = 1200 - 150p$.

a Hoeveel van deze batterijen verkoopt hij maandelijks volgens deze formule als hij € 2,20 per stuk rekent?

b Schrijf de gegeven formule zo, dat p is uitgedrukt in q.

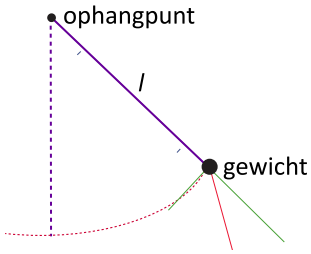
c De fabrikant wil niet minder dan 600 van deze batterijen per maand verkopen.
Welke prijs kan hij dan hoogstens vragen?

Opgave 13

Als je een gewicht aan een touw rustig heen en weer laat slingeren (het touw moet strak blijven, dus geen al te grote uitwijking), dan is de slingertijd T (in seconden) alleen afhankelijk van de lengte van het touw l (in meter). De slingertijd is de tijd die het duurt voor het gewicht om precies één keer heen en weer te slingeren.

Er geldt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Hierin is g de gravitatieconstante.



Figuur 4.3

a Je wilt de gravitatieconstante berekenen. Schrijf eerst de formule zo, dat g wordt uitgedrukt in T en l.

b Je hebt een touw van 1 m lengte met een gewicht er aan dat je rustig laat slingeren.
Je meet een trillingstijd van 2 s. Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

a Stel een formule op voor de kosten per folder k afhankelijk van het aantal folders a.

b Bereken bij hoeveel folders je onder de € 0,06 per folder uitkomt.

Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare auto op diesel zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een liter diesel is € 1,30 en je rijdt 26 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 1400,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 2200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

Opgave 15

In de tekst hierboven zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een auto op diesel. De kosten per km noem je k en het jaarlijkse aantal gereden km noem je a.

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

a Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

b Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Ga nu uit van een auto die op diesel rijdt.

c Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

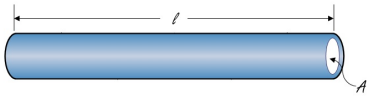
d Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Testen

Opgave 16

De weerstand die een elektrische stroom ondervindt in een koperdraad bereken je met de volgende formule:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$



Figuur 4.4

Hierin is:

- R de weerstand in ohm (Ω)
- ρ de soortelijke weerstand van het materiaal in ohm meter (Ωm)
- l de lengte in meter (m)
- A de doorsnede in vierkante meter (m^2)

a Schrijf de gegeven formule zo, dat ρ wordt uitgedrukt in de overige variabelen.

b Je hebt 1,5 m koperdraad met een diameter van 1,8 cm en een weerstand van $10{,}0 \cdot 10^{-6}$ Ω. Bereken de soortelijke weerstand van dit koper.

Opgave 17

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{5}{m} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{m} + 4$

b $\frac{11n}{4} + \frac{25}{7} = \frac{39}{7}$

c $\frac{18}{8p} + \frac{8}{3p} = 2$

4.4 Formules en ongelijkheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip ongelijkheid en ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- werken met breuken in formules en vergelijkingen;
- grafieken tekenen bij formules;
- formules herleiden en vergelijkingen oplossen met de basismethoden.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

b Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in uren t.
"Bij welke snelheid is de reistijd meer dan 15 minuten?"

c Laat zien, dat bij deze vraag de ongelijkheid $\frac{16}{v} + \frac{1}{12} > \frac{1}{4}$ hoort.

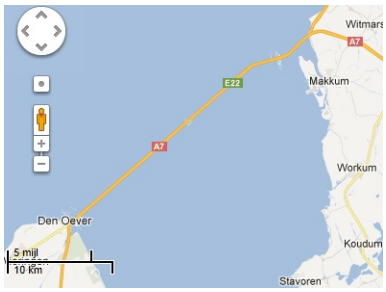
d Hoe los je deze ongelijkheid op?

Uitleg

Je rijdt weer op de Afsluitdijk, die 32 km lang is. Je stapt dit keer onderweg 5 minuten uit om van het uitzicht te genieten. Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (km/h), met 60 te vermenigvuldigen en ten slotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5$$

Bij deze formule kun je een bijbehorende grafiek tekenen.



Figuur 4.1

Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot, de grafiek loopt omhoog tot vlak bij de verticale as. Zo´n lijn waar de grafiek steeds dichter naartoe loopt heet een asymptoot.
Voor hele grote snelheden komt de reistijd in de buurt van de 5 minuten. Maar wanneer is de reistijd bijvoorbeeld langer dan 60 minuten?

Bekijk de applet

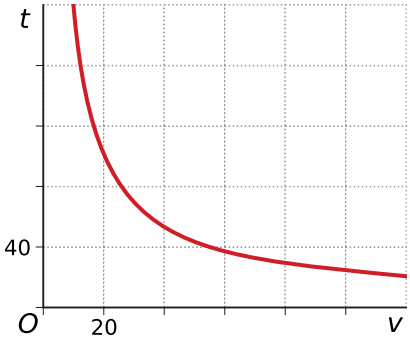
Daarbij hoort de ongelijkheid: $\frac{1920}{v} + 5 > 60$.

Om een ongelijkheid op te lossen bekijk je altijd de bijbehorende grafieken. In dit geval zijn dat de grafiek van $t = \frac{1920}{v} + 5$ en de lijn $t = 60$.

In het snijpunt van beide grafieken is $\frac{1920}{v} + 5 = 60$

De waarde van v die daarbij hoort bereken je: $v \approx 34{,}91$ km/uur.

Uit de grafiek lees je vervolgens de oplossing van de ongelijkheid af: $v \leq 34{,}9$ km/uur.



Figuur 4.2

Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken.

a Hoeveel minuten doe je over deze 32 km als je 80 km/h rijdt?

b Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?

c Teken zelf de grafiek van $t = \frac{1920}{v} + 5$. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 10, 20, ..., 120.

d Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

e Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg op pagina 182**.

Je wilt de ongelijkheid $\frac{1920}{v} + 5 > 60$ oplossen.

a Laat zien hoe je $\frac{1920}{v} + 5 = 60$ exact kunt oplossen.

b Lees vervolgens de juiste exacte oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af.

c Geef vervolgens je antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

Los de volgende ongelijkheden op.
Schets de bijbehorende grafieken en los de bijbehorende vergelijkingen exact op. Neem aan dat $x > 0$.

a $\frac{2}{x} + 3 < 7$

b $\frac{2}{x} + 3 \leq 15$

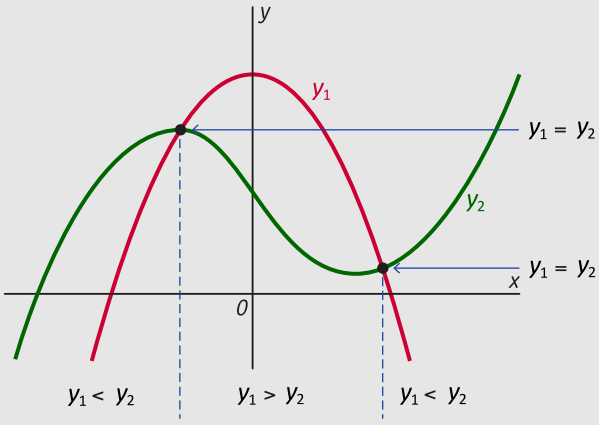
c $\frac{1}{x} < x$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $y_1 > y_2$, $y_1 \geq y_2$, $y_1 \leq y_2$ of $y_1 < y_2$ heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst maak je bij de formules voor y_1 en y_2 een grafiek. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bereken je de coördinaten van de snijpunten.
  Dat doe je door de vergelijking $y_1 = y_2$ op te lossen.
  Probeer dat altijd exact te doen, afronden doe je als daarom wordt gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let daarbij goed op de gewenste nauwkeurigheid!



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Maak een bijpassende formule van k afhankelijk van a en teken de grafiek. Je wilt niet meer dan € 0,06 per folder betalen. Hoeveel folders a moet je dan laten drukken?

Antwoord

Per folder betaal je in ieder geval € 0,04. Verder betaal je per folder $\frac{10}{a}$ euro.

In totaal dus $k = 0{,}04 + \frac{10}{a}$ euro per folder.

Om een goede bijpassende grafiek te maken moet je bedenken dat je veel folders wilt laten maken om de kosten per folder laag te houden. Misschien wel zo'n 1000 stuks. a komt op de horizontale as en laat je daarom bijvoorbeeld lopen vanaf 0 tot en met 1000. Voor 1000 folders betaal je € 0,05 per stuk, maar voor 100 folders betaal je € 0,14 per stuk. Maak zelf een goede tabel en grafiek.

Je moet vervolgens oplossen $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$. Dat kun je doen met behulp van de grafiek en inklemmen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen. Daarna los je de hyperbolische ongelijkheid $0{,}04 + \frac{10}{a} > 0{,}06$ op.

Opgave 4

Bekijk welk probleem er in **Voorbeeld 1 op pagina 184** aan de orde wordt gesteld.

a Maak een tabel (in drie decimalen nauwkeurig) en een grafiek bij de formule.

b Je wilt weten bij welk aantal folders a geldt $k < 0{,}06$. Welke waarde voor a levert precies 0,06 op? En wat wordt dus je antwoord?

In **Voorbeeld 1 op pagina 184** staat dat je het antwoord bij b ook kunt vinden door te redeneren.

c Leg uit hoe je dan de vergelijking $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$ oplost.

Opgave 5

Bij de productie van verf is er sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort) die niet van het geproduceerde aantal liter verf afhangen. Bij het berekenen van de prijs die de fabrikant per liter verf gaat berekenen moet hij ook met deze vaste kosten rekening houden. Neem aan dat die vaste kosten € 32000,00 bedragen. De productiekosten per liter bedragen € 5,60.

a Stel een formule op voor de totale kosten per liter (K in euro/liter) afhankelijk van het aantal geproduceerde liters a.

b Bereken hiermee de totale kosten per liter bij een productie van 10000 liter van deze verf.

c Bij welke waarde van a worden de totale kosten per liter kleiner dan € 6,00?

Voorbeeld 2

Los op: $\frac{1}{x} \leq x^3$. Neem aan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = x^3$ in één figuur.

Gebruik ook vervolgens de balansmethode:

$\frac{1}{x} = x^3$

$x^4 = 1$ — beide zijden $\times x$ en omwisselen

$x = 1$ en/of $x = -1$ — beide zijden vierde machtswortel trekken

Uit de grafieken lees je de oplossing af: $-1 \leq x < 0$ en/of $x \geq 1$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 185** zie je hoe je een ongelijkheid kunt oplossen met grafieken en de balansmethode.

a Maak zelf de grafieken van $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = x^3$.

b Leg uit hoe je aan de oplossing van de ongelijkheid komt.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\frac{1}{x} > x^3$ op.

Opgave 7

Los de ongelijkheden op.

a $\frac{1}{6}x + 2 \leq 4 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{3}{p} + 15 \geq 17$

c $x^2 \geq \frac{8}{x}$

Oefenen

Opgave 8

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie K en het aantal kopieën a.

a Welke formule geldt voor K afhankelijk van a?

b Teken een grafiek bij deze formule.

c Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

Opgave 9

Je wilt de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ oplossen.

a Teken de grafieken van $y_1 = \frac{4}{x} + 2$ en $y_2 = x + 1$ in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van x.

b Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.

c Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.

d Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ op in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Los de volgende ongelijkheden op. Neem aan dat x alleen positieve waarden heeft.

a $\frac{2400}{x} + 3{,}6 < 6{,}8$

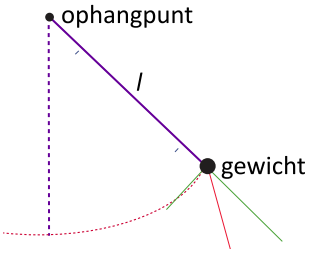
b $200 + \frac{50}{x} \geq 450$

c $\frac{x-15}{300} - 0{,}5 > 0{,}8$

d $\frac{800}{x-5} \geq 50$

Opgave 11

Als je een gewicht aan een touw rustig heen en weer laat slingeren (het touw moet strak blijven, dus geen al te grote uitwijking), dan is de slingertijd T (in seconden) alleen afhankelijk van de lengte van het touw l (in meter). De slingertijd is de tijd die het duurt voor het gewicht om precies één keer heen en weer te slingeren.



Figuur 4.4

Er geldt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Hierin is $g \approx 9{,}81$ de gravitatieconstante.

Je ziet dat de trillingstijd iets langzamer is dan 1 seconde.
Hoe lang moet het touw dan minstens zijn in cm nauwkeurig?

Opgave 12

Van een bepaald type rechthoekige verpakkingsdozen zijn lengte en breedte hetzelfde, maar is de hoogte de helft van de lengte.

Welke afmetingen moeten deze dozen hebben om er tot maximaal 0,25 m^3 ruimte in te hebben?

Toepassen

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a.

De grootste massa m die deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $m = \frac{120000}{a}$

Hierin is m in kg en a in meters.

Figuur 4.5

Opgave 13

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los de bijbehorende vergelijking op.

c Op welke afstand van de kraan kan een massa van 6 ton dus nog hangen?

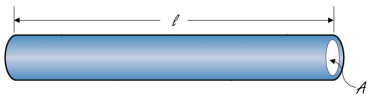
d Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Welke massa mag die stapel stenen hoogstens hebben?

Testen

Opgave 14

De weerstand die een elektrische stroom ondervindt in een koperdraad bereken je met de volgende formule:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$



Figuur 4.6

Hierin is:

- R de weerstand in ohm (Ω)
- ρ de soortelijke weerstand van het materiaal in ohm meter (Ωm)
- l de lengte in meter (m)
- A de doorsnede in vierkante meter (m^2)

De soortelijke weerstand van koper is $17 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

a Hoe groot moet de doorsnede van de koperdraad zijn om in 1 m koperdraad een weerstand van meer dan 10 Ω te krijgen?

b Welke diameter heeft zo'n koperdraad?

Opgave 15

Los de volgende ongelijkheden op.

a $\frac{8}{m} + 15 < 20$

b $\frac{11n}{4} + \frac{25}{7} \geq \frac{39}{7}$

c $\frac{18}{x} > 2x$

4.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het begin van het werken met formules voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra 2** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- macht — rekenregels voor machten;
- breuken met variabelen;
- uitdrukken in;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- de rekenregels voor machten toepassen bij het herleiden van uitdrukkingen;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen;
- formules herleiden tot de éne variabele is uitgedrukt in de andere, ook formules met breuken;
- ongelijkheden (ook met breuken erin) systematisch oplossen.

Testen

Opgave 1

Herleid.

a $4(6+3p)+2(p-4)$

b $3(a-5)(a+12)$

c $\frac{8b^4}{3b^3} \Big/ \frac{6b^2}{4b}$

d $2(x-8)-(3-x)$

e $4k\left(k^2+2k\right)-2k^2(3k-3)$

f $\frac{5t}{3r} \cdot \frac{4r}{7t} - \frac{r}{7t}$

Opgave 2

Los deze vergelijkingen exact op.

a $2(k-3)=6$

b $-x(x+3)=(x+5)(7-x)$

c $\frac{1}{3}p+\frac{5}{6}=\frac{p}{2}$

d $4(3q+25)=(q+6)^2$

e $\frac{3}{2y} + \frac{6}{5} = \frac{2}{y}$

f $8\left(1 + \frac{1}{m}\right) = 12$

Opgave 3

Gegeven zijn de breuken $\frac{3}{2a}$ en $\frac{4}{a}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Trek de eerste breuk van de tweede af.

c Bereken het product van beide breuken.

d Deel de eerste breuk door de tweede.

Opgave 4

Van een gewelf in de vorm van een halve bol is het volume $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ waarin r de straal in meter is.

a De diameter van dit gewelf is $d = 2r$.
Schrijf de formule zo, dat V wordt uitgedrukt in d.

b Als je wilt berekenen welke diameter zo'n koepelgewelf moet krijgen als je een bepaald volume V wilt hebben, dan kun je deze formule beter herleiden naar een vorm waarin d is uitgedrukt in V. Laat zien hoe dit gaat.

c Welke diameter heeft zo'n koepelgewelf als het volume erbinnen 2 m^3 is? (Geef je antwoord in cm nauwkeurig.)

Opgave 5

Je wilt de ongelijkheid $x^3 > 6 - x$ oplossen.

a Teken eerst de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6 - x$ in één figuur.

b Bepaal door inklemmen alle snijpunten van beide grafieken in twee decimalen nauwkeurig.

c Los de ongelijkheid op.

Opgave 6

Een school huurt voor € 2500,00 per jaar een kopieermachine voor de leerlingen. Om de kosten te dekken moeten de leerlingen een bepaald bedrag per kopie betalen.

De school heeft uitgerekend dat elke kopie aan papier en inkt € 0,05 kost. Die € 0,05 komt extra bij het bedrag dat de leerlingen per kopie moeten betalen. a is het aantal kopieën per jaar.

a Stel een formule op voor het bedrag B dat een leerling per kopie moet betalen afhankelijk van a.

b Teken een bijpassende grafiek voor 0 tot en met 50000 kopieën.

c Hoeveel kopieën per jaar moeten er worden gemaakt om met een prijs voor de leerlingen van € 0,20 per kopie uit de kosten te komen?

Toepassen

Opgave 7: Schaal van Richter

De kracht van een aardbeving wordt gemeten op de schaal van Richter. Een kracht van 6 op de schaal van Richter is al een behoorlijke aardschok. Maar die kracht neemt snel af als je verder van het centrum van de aardbeving af bent. Stel dat voor de kracht k van een bepaalde aardbeving geldt:

$k = 1 + \frac{100}{r^2+20}$

Hierin is r de afstand in km vanaf het centrum van de beving.

a Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving in het centrum?

b Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving op 5 km van het centrum?

c Bij welk getal op de schaal van Richter is er geen sprake van een aardbeving? Leg uit hoe je aan dit antwoord komt.

d Teken een grafiek van k afhankelijk van r. Neem voor r getallen van 0 tot en met 0.

e Als $k < 1{,}1$ is de aardbeving niet voelbaar. Bepaal hoeveel km je daarvoor minstens van het centrum af moet zitten.

5

Talstelsels en logica

5.1 Binaire getallen 194
5.2 Binair rekenen 200
5.3 Het hexadecimale stelsel 206
5.4 Logische schakelingen 212
5.5 Totaalbeeld 219

5.1 Binaire getallen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het binaire stelsel gebruiken;
- binaire getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd;
- binaire getallen optellen en vermenigvuldigen.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- werken met machten van 2 en van 10.

Verkennen

Opgave V1

Binaire getallen kennen maar twee cijfers: 0 en 1.
Hier zie je de eerste binaire getallen.

decimaal getal	binair getal
0	0
1	1
2	10
3	11

Tabel 5.1

a Wat stelt het binaire getal 100 dan voor?

b Hoe zou je het gewone (dus decimale) getal 5 weergeven als binair getal?

Het decimale stelsel is gebaseerd op het getal 10:
$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$.

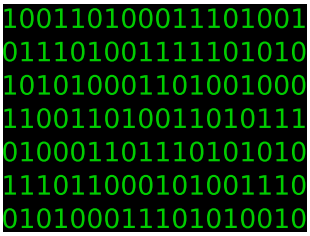
c Op welk getal is het binaire stelsel gebaseerd?

d Welk decimale getal is het binaire getal 11010 dus?

e Wat is het nut van dergelijke binaire getallen, denk je?

Uitleg

Stel je voor dat je alleen de twee cijfers 0 en 1 kunt gebruiken (zoals dat voor machines zoals computers het geval is). Je zegt dan dat je werkt in het binaire stelsel, met binaire getallen. Hoe zien nu de ‘gewone’ (decimale) getallen waarmee je rekent (“to compute” is Engels voor “rekenen”) er binair uit?



Figuur 5.1

Je begint natuurlijk systematisch:

- 0 := 0
- 1 := 1
- 2 := 10
- 3 := 11
- 4 := 100
- 5 := 101
- 6 := 110
- 7 := 111
- 8 := 1000

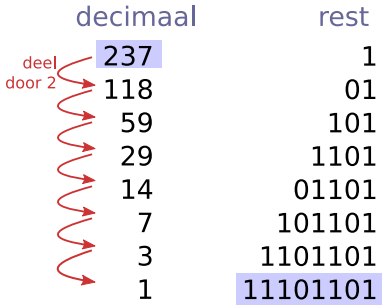
Binaire getallen bestaan uit machten van 2, net zoals decimale getallen uit machten van 10. Zo is:

$7 = 2^2 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 := 111$

en:

$12 = 2^3 + 2^2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 := 1100$

Om snel te bepalen wat bijvoorbeeld 237 als binair getal wordt ga je gewoon steeds de rest (0 of 1) opschrijven bij delen door 2. Je ziet dat hiernaast.



Figuur 5.2

En inderdaad:

$11101101 := 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 237$

Je schrijft dan: $11101101_2 = 237_{10}$.

Ofwel 11101101 binair is gelijk 237 decimaal.

Opgave 1

Schrijf de volgende binaire getallen als decimale getallen.

a 11101

b 100001

c 101010

d 10010010

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 194** zie je hoe je van een decimaal getal een binair getal maakt.

Schrijf de volgende decimale getallen als binaire getallen en controleer je antwoord.

a 112

b 1075

c 2000

d 12345

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In het **binaire stelsel** noteer je getallen alleen met de symbolen 0 en 1. Je spreekt van bits. Het **binaire getal** 1011011 bijvoorbeeld komt overeen met

$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Dus: $1011011_2 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91_{10}$

Het omrekenen van een decimaal getal naar een binair getal doe je door steeds door 2 te delen en de rest (altijd 0 of 1) op te schrijven.

Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

Bekijk de voorbeelden om te zien hoe dit je dit gebruikt.

Voorbeeld 1

Neem de binaire getallen 11101 en 101110.

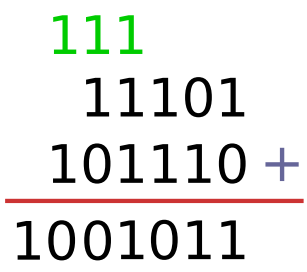
Tel beide getallen binair bij elkaar op.

Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

Antwoord

De binaire optelling zie je hiernaast.
Uitkomst: $11101_2 + 101110_2 = 1001011_2$

Controle: $11101_2 = 29_{10}$ en $101110_2 = 46_{10}$.
$29_{10} + 46_{10} = 75_{10}$.
En tenslotte $1001011_2 = 75_{10}$.



Figuur 5.3

Opgave 3

In het **Voorbeeld 1 op pagina 196** zie je hoe je twee binaire getallen optelt.

a Voer deze optelling zelf uit.

b Voer ook de controle zelf uit. Laat zien, hoe het omrekenen van binair naar decimaal in zijn werk gaat.

Opgave 4

Voer de volgende optellingen binair uit. En controleer ze met een decimale optelling.

a $1001_2 + 10101_2$

b $11101010_2 + 1001101_2$

Je wilt 211 + 43 door een computer laten uitrekenen. De computer kan alleen binair rekenen.

c Laat zien, hoe dan de optelling gaat.

Voorbeeld 2

Neem de binaire getallen 101 en 1010.

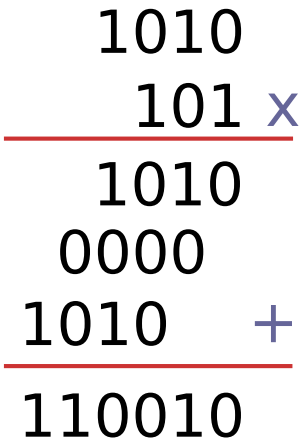
Vermenigvuldig beide getallen binair.

Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

Antwoord

De binaire vermenigvuldiging zie je hiernaast.
Uitkomst: $1010_2 \times 101_2 = 110010_2$

Controle: $1010_2 = 10_{10}$ en $101_2 = 5_{10}$.
$10_{10} \times 5_{10} = 50_{10}$.
En tenslotte $110010_2 = 50_{10}$.



Figuur 5.4

Opgave 5

In het **Voorbeeld 2 op pagina 196** zie je hoe je twee binaire getallen vermenigvuldigt.

a Voer deze vermenigvuldiging zelf uit.

b Voer ook de controle zelf uit. Laat zien, hoe het omrekenen van binair naar decimaal in zijn werk gaat.

Opgave 6

Voer de volgende vermenigvuldigingen binair uit. En controleer ze met een decimale vermenigvuldiging.

a $10101_2 \cdot 1001_2$

b $1111_2 \cdot 11101_2$

Je wilt $211 \cdot 43$ door een computer laten uitrekenen. De computer kan alleen binair rekenen.

c Laat zien, hoe dan de optelling gaat.

Oefenen

Opgave 7

Gegeven zijn de binaire getallen $a = 11001101$ en $b = 111010$.

a Bereken $a + b$.

b Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

c Bereken $a \cdot b$.

d Controleer je antwoord bij c door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

Opgave 8

Gegeven de getallen 1053 en 317.

a Zet deze getallen om naar het binaire stelsel.

b Tel beide op als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Vermenigvuldig beide als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

Opgave 9

Bereken en geef het antwoord als binair getal.

a $1010_2 + 13_{10}$

b $1010_2 + 1010_{10}$

c $113_{10} \cdot 1010_2$

d $31_{10} \cdot 11010_2$

Opgave 10

Je kunt binaire getallen natuurlijk ook van elkaar aftrekken. Dat werkt net zo als in het decimale stelsel, soms moet je 'lenen'.

a Bereken $11010_2 - 101_2$ en controleer je antwoord met het decimale stelsel.

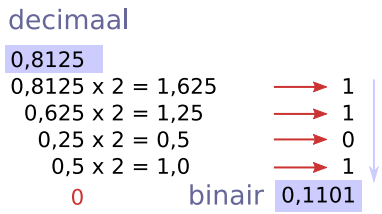
b Bereken $11010_2 - 111_2$ en controleer je antwoord met het decimale stelsel.

c Welk probleem doet zich voor als je $101_2 - 11010_2$ wilt uitrekenen?

Toepassen

Er bestaan ook in het binaire stelsel **getallen met cijfers achter de komma**.
Eigenlijk werkt dat net als met gewone gehele getallen, maar nu zijn de exponenten van de machten van 2 negatief.

Bijvoorbeeld: $0{,}1101_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$.
En dit wordt:
$0{,}1101_2 = 0_{10} + 0{,}5_{10} + 0{,}25_{10} + 0_{10} + 0{,}0625_{10} = 0{,}8125_{10}$.



Figuur 5.5

Het omrekenen van een decimaal getal met een komma erin naar een binair getal gaat voor de uitdrukking achter de komma nu niet door delen door 2, maar vermenigvuldigen met 2. In de figuur zie je hoe dat gaat.

Opgave 11

Bekijk hoe je getallen met een komma erin kunt omzetten naar binaire getallen en omgekeerd.
Reken deze binaire kommagetallen om naar decimale getallen.

a 0,101

b 11,1101

c 101101,101

Omgekeerd kun je ook decimale getallen met een komma omzetten naar binaire getallen.
Doe dit met de volgende getallen:

d 0,625

e 8,125

f Welk probleem doet zich voor als je bijvoorbeeld $0{,}1_{10}$ wilt omrekenen naar een binair getal?

Opgave 12

En nu ga je rekenen met binaire getallen met en zonder komma erin.
Voer de volgende berekeningen uit en controleer het antwoord met behulp van het decimale stelsel.

a 0,101 + 11,1101

b 0,101 · 11,1101

c 11,1101 – 0,101

Testen

Opgave 13

Gegeven zijn de binaire getallen $a = 110101$ en $b = 11101$.

a Bereken $a + b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $a \cdot b$.

Opgave 14

Gegeven de decimale getallen 153 en 67.

a Zet deze getallen om naar het binaire stelsel.

b Tel beide op als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Vermenigvuldig beide als binaire getallen. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

5.2 Binair rekenen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het binaire stelsel gebruiken met een vast aantal bits;
- binaire getallen aftrekken en delen.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- het begrip binair getal en decimale getallen omzetten naar binaire getallen en omgekeerd;
- binaire getallen optellen en vermenigvuldigen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt binaire getallen optellen en vermenigvuldigen (dat is herhaald optellen).
Maar kun je ze ook van elkaar aftrekken en op elkaar delen?
Ga er van uit, dat getallen die alleen uit nullen en énen bestaan, binair zijn.

a Bereken 1110000 – 1110. Controleer je antwoord door decimaal rekenen.

b Welk probleem krijg je bij 1110 – 1110000?

c Bereken 1110000/1110. Controleer je antwoord door decimaal rekenen.

Uitleg

Bij het aftrekken van twee binaire getallen loop je aan tegen het probleem dat er geen negatiefteken is, dus 0 – 1 =???
Hoe maak je het negatieve getal bij bijvoorbeeld 186. In het tientallig stelsel heb je het dan over - 186, want 186 + - 186 = 0. Maar hoe maak je - 186 in het binaire stelsel?

Om dit probleem op te lossen wordt het aantal tekens, in computertaal het aantal bits (een bit is een ‘binary digit’), beperkt tot 8, of 16, of 32, of 64. Nadeel daarvan is dat je hiermee het aantal getallen dat je kunt maken, beperkt.

Stel je een 8-bits beperking voor.
Het getal $186_{10} = 10111010_2$ is zo’n 8-bits getal.
Het bijbehorende negatieve getal is -186_{10} en moet opgeteld bij 186_{10} weer 0 opleveren.
Nu kun je in een 8-bits systeem zeggen 0 = 100000000, want die voorste 1 is de negende bit en die wordt niet ‘gezien’.
Verwissel in 10111010 de nullen in énen en omgekeerd en tel er 1 bij op, dan krijg je het getal 01000101 + 1 = 01000110.
Dit heet het binaire complement van het (binaire) getal 10111010.
En opgeteld zijn ze samen 10111010 + 01000110 = (1)00000000 = 0.
De overdracht naar de negende bit laat je weg omdat je hebt afgesproken in 8-bits te werken, vandaar dat die tussen haakjes staat. Een getal en zijn binaire complement zijn samen 0. Het binaire complement heeft dezelfde rol als het negatieve getal in het decimale stelsel.

Als je nu $186_{10} - 150_{10}$ binair wilt berekenen, doe je $186_{10} + -150_{10}$.
En $150_{10} - 186_{10} = 150_{10} + -186_{10}$.
En delen is herhaald aftrekken...

Opgave 1

Je werkt in een 8-bits systeem.

a Hoeveel gehele getallen groter of gelijk 0 kun je dan maken?

b Waarom zullen er meestal systemen worden gebruikt met meer bits?

c Geef de binaire versie van 150_{10} en -150_{10}.

d Controleer dat ook binair geldt dat $150_{10} + -150_{10} = 0_{10}$.

e Bereken binair: $186_{10} - 150_{10}$.

f Bereken binair: $150_{10} - 186_{10}$.

Opgave 2

Bereken in een 8-bits binair systeem:

a 1010 – 111.

b 111 – 1010.

c 11011001 – 00010101.

d 00010101–11011001.

Opgave 3

Het delen van twee binaire getallen gaat net als het met de hand delen van twee decimale getallen. Werk weer in een 8-bits systeem.

a Bereken 1000001/1101.
Controleer je antwoord door beide getallen eerst te vertalen naar decimale getallen.

b Hoe zou je 1101/1000001 berekenen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

Bij aftrekken en delen werk je binnen een systeem met een vast aantal bits en het **binaire complement** van een getal. Dat is het getal de je krijgt door de nullen in énen en omgekeerd de énen in nullen te verwisselen en daar 1 bij op te tellen.

- Omdat $a - b = a + -b$ tel je a en het complement van b op.
- Bij de deling a/b trek je b zo vaak mogelijk af van a. Al die aftrekkingen zet je om in optellen van het complement van b.

In de voorbeelden zie je hoe dit in zijn werk gaat.

Voorbeeld 1

Reken 417_{10} en 38_{10} om naar hun binaire vorm en bereken $417_{10} - 38_{10}$ en $38_{10} - 417_{10}$.
Ga uit van een 16-bits binair stelsel.

Antwoord

Je moet beide getallen schrijven als optelling van machten van 2.
Dat bereik je door steeds door 2 te delen en de rest op te schrijven:

$417_{10} = 0000000110100001$

$38_{10} = 0000000000100110$

Het binaire complement van 38 is:

$1111111111011001 + 1 = 1111111111011010$

En dus wordt $417_{10} - 38_{10}$:

0000000110100001
1111111111011010+
(1)0000000101111011

Ga na dat dit in decimale notatie inderdaad 379_{10} is.

En zo gaat 38 – 417:

0000000000100110
1111111001011111+
(0)1111111010000101

En dit is het binaire complement van $0000000101111011 = 379_{10}$.

En dus: $(0)1111111010000101 = -379_{10}$.

Je ziet dat de voorste (eigenlijk de 17e bit die niet wordt gebruikt) wel moet worden bijgehouden om te bepalen of het getal positief (als het een 1 betreft) of negatief (als het een 0 betreft) is.

Opgave 4

Zet de getallen om naar een 16-bits binair stelsel en bereken.

a $336_{10} - 123_{10}$

b $123_{10} - 336_{10}$

c $35_{10} - (46_{10} + 19_{10})$

Opgave 5

Bereken (indien mogelijk) in een 8-bits binair stelsel:

a 00100100 + 01111011

b 00100100 – 01111011

c 01111011 – 00100100

d 00100100 · 01111011

Voorbeeld 2

Reken 227_{10} en 38_{10} om naar een binaire vorm en bereken $227_{10}/38_{10}$.
Ga uit van een 8-bits binair stelsel.

Antwoord

Ga na:

$227_{10} = 11100011$

$38_{10} = 00100110$

Nu is een deling niets anders dan zoveel mogelijk keer (in dit geval) 38_{10} van de 227_{10} aftrekken en kijken wat je nog over houdt. Denk daarbij om het feit dat het binair stelsel werkt met machten van $2_{10} = 10_2$.

00100110 kan (om te beginnen) 100 keer van 11100011 af.
Omdat $100 \cdot 00100110 = 10011000$, houd je over:
$11100011 - 10011000 = 11100011 + 01101000 = (1)01001011$.

Vervolgens kan 00100110 nog 1 keer (10 keer gaat niet) van 01001011 af:
$01001011 - 00100110 = 01001011 + 11011010 = (1)00100101$.

Nu kun je een apparaat opdracht geven (programmeren heet dat) om de uitkomst (100 + 1+ de rest) op te schrijven als $11110111/00100110 = 00000101$ rest 00100101.

Je kunt ook op dezelfde manier door blijven delen, alleen moet er dan een scheidingsteken komen, net zoals de decimale komma (vaak decimale punt) in het decimale stelsel.

Decimale controle: $227_{10}/38_{10} = 5_{10}$ met rest 37_{10}.
Ga na, dat dit met het binaire antwoord overeen komt.

Opgave 6

a Voer zelf de berekeningen in het **Voorbeeld 2 op pagina 203** uit.

b Reken 186_{10} en 13_{10} om naar een binaire vorm en bereken $186_{10}/13_{10}$.
Ga uit van een 8-bits binair stelsel en geef je antwoord op de manier van het **Voorbeeld 2 op pagina 203**.

Opgave 7

Bereken $1010111/00001101$.
Controleer je antwoord door rekenen in het decimale stelsel.

Oefenen

Opgave 8

Gegeven zijn de getallen $a = 11001101$ en $b = 101001$ in een 8-bits binar stelsel.

a Bereken $a - b$. Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

b Bereken $b - a$. Controleer je antwoord door de getallen om te rekenen naar decimale getallen.

c Bereken a/b.

Opgave 9

Je werkt in een 16-bits binair stelsel.

a Hoe groot is het grootste getal dat je daarin kunt maken?
Geef dit getal in binaire en in decimale vorm.

b Hoe ziet het binaire complement van dit grootste getal er uit?

c Laat met een binaire berekening zien dat de optelling van de getallen bij a en b inderdaad op 0 uitkomt.

Opgave 10

Bereken binair in een 8-bits systeem:

a $\frac{156_{10}}{6_{10}+7_{10}}$

b $15_{10} \cdot \left(\frac{11}{3}\right)_{10}$

Opgave 11

Delingen komen vaak niet uit. Bereken de volgende delingen binair in een 8-bits systeem en geef het antwoord met rest. Controleer je antwoord met het decimale stelsel.

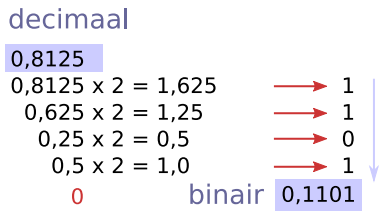
a 11010/101

b 11011010/111

Toepassen

Er bestaan ook in het binaire stelsel **getallen met cijfers achter de komma**.
Eigenlijk werkt dat net als met gewone gehele getallen, maar nu zijn de exponenten van de machten van 2 negatief.

Bijvoorbeeld: $0{,}1101_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$.
En dit wordt:
$0{,}1101_2 = 0_{10} + 0{,}5_{10} + 0{,}25_{10} + 0_{10} + 0{,}0625_{10} = 0{,}8125_{10}$.



Figuur 5.1

Het omrekenen van een decimaal getal met een komma erin naar een binair getal gaat voor de uitdrukking achter de komma nu niet door delen door 2, maar vermenigvuldigen met 2. In de figuur zie je hoe dat gaat. Als het goed is heb je dit al bij ‘Binaire getallen’ een paar keer gedaan.

Opgave 12

Nu ga je rekenen met binaire getallen met en zonder komma erin en in een 8-bits systeem.

Je wilt 11,1101 – 0,101 berekenen.

a Hoe geef je beide getallen in het 8-bits systeem weer?

b Voer nu de berekening uit. Controleer je antwoord decimaal.

Nu wil je 10,1101/0,101 berekenen.

c Voer deze berekening uit.

Opgave 13

Je hebt al eerder gezien dat niet alle decimale breuken binair zijn weer te geven als je met een vast aantal bits werkt.

a Laat zien, dat $0{,}6_{10} = 0{,}100110011001..._2$.

b Waarom kun je $0{,}6_{10}$ niet als een eindig binair kommagetal weergeven en $0{,}75_{10}$ wel?

c Is $0{,}1_{10}$ in een 24-bits binair systeem weer te geven?

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de getallen $a = 110101$, $b = 11101$ en $c = 1010111$ in een 8-bits binair stelsel.

a Bereken $a - b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken c/b.

Opgave 15

Gegeven de decimale getallen 153 en 67.
Je gaat ze van elkaar aftrekken en op elkaar delen in een 8-bits binair stelsel.

a Bereken $153 - 67$. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $153/67$. Geef het antwoord met rest. Controleer je antwoord in het decimale stelsel.

5.3 Het hexadecimale stelsel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het hexadecimale stelsel gebruiken;
- hexadecimale getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd;
- hexadecimale getallen omrekenen naar binaire getallen en omgekeerd.

Voorkennis

- het begrip decimaal getal en rekenen met decimale getallen;
- het begrip binair getal en decimale getallen omzetten naar binaire getallen en omgekeerd.

Verkennen

Opgave V1

Het decimale stelsel is gebaseerd op machten van 10, het binaire stelsel op machten van 2. Nu ga je kennismaken met het hexadecimale stelsel, gebaseerd op machten van 16.

a Hoeveel symbolen heb je er dus voor nodig?

Een hexadecimaal getal geef je weer met de cijfers 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 en de eerste letters van het alfabet.

b Kan $ab70cd$ een hexadecimaal getal zijn?
En $13f8g$?

c Welk decimaal getal stelt $a0f3_{16}$ voor?

Uitleg

Het binaire talstelsel kent alleen de cijfers 0 en 1 en is gebaseerd op machten van 2. Maar getallen bestaan al snel uit heel veel nullen en énen en lezen daarom nogal moeilijk. Om leesfouten te voorkomen zijn er talstelsels bedacht die zijn gebaseerd op machten van $2^3 = 8$ of machten van $2^4 = 16$.

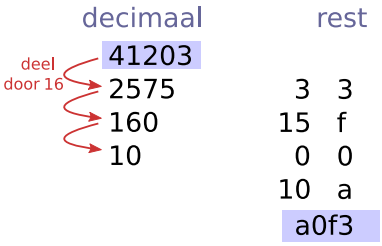
Het talstelsel gebaseerd op machten van 16 heet het hexadecimale stelsel.
Er zijn dan 16 symbolen nodig:
$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f$.
Het symbool a is de decimale 10 en de binaire 1010.

Het getal $a0f3_{16}$ is daarom:
$a0f3_{16} = 3\cdot16^0+15\cdot16^1+0\cdot16^2+10\cdot16^3 = 41203_{10}$.

decimaal getal	binair getal	hexadecimaal getal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	a
11	1011	b
12	1100	c
13	1101	d
14	1110	e
15	1111	f

Tabel 5.1

Omrekenen van decimaal naar hexadecimaal gaat met behulp van delen door 16 en dan steeds de rest opschrijven. Hier zie je hoe het decimale getal 41203 op die manier geschreven wordt als het hexadecimale getal $a0f3$.



Figuur 5.1

In de tabel kun je zien dat het omrekenen van hexadecimaal naar binair (en omgekeerd) erg eenvoudig is.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 206** wat een hexadecimaal getal is.

a Reken $13b5_{16}$ om naar een decimaal getal.

b Laat zien dat $1103_{16} \neq 1103_{10}$.

c Reken 1103_{10} om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 2

Vergelijk het binaire stelsel met het hexadecimale stelsel in de tabel in de **Uitleg op pagina 206**.

a Leg uit, dat $13b5_{16} = 0001001110110101_2$.
(De eerste drie nullen kunnen eigenlijk weg.)

b Controleer dat zowel het hexadecimale getal als het binaire getal 5045_{10} opleveren.

c Hoe kun je 1011011001_2 omzetten naar een hexadecimaal getal?

d Controleer je antwoord bij c door beide getallen om te zetten naar hetzelfde decimale getal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **hexadecimale talstelsel** is gebaseerd op machten van 16. Er zijn dan ook 16 symbolen nodig om een getal te maken, namelijk 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f.

Het getal $5c06_{16}$ is in het decimale stelsel:
$5c06_{16} = 5 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 23558_{10}$.

Verder omrekenen gaat zo:

- Van decimaal naar hexadecimaal:
  Deel het getal door 16 en schrijf de uitkomst met rest op.
  Herhaal deze procedure tot je onder de 16 uitkomt.
  De resten vormen het hexadecimale getal.
- Van hexadecimaal naar binair:
  Vervang elk teken door de bijbehorende 4-bits binaire code.
  Laat eventueel de voorste nullen weg.
- Van binair naar hexadecimaal:
  Deel het getal van rechts naar links op in 4-bits tekens, voeg vooraan extra nullen toe indien nodig.
  Vervang elk 4-bits teken door zijn hexadecimale teken.

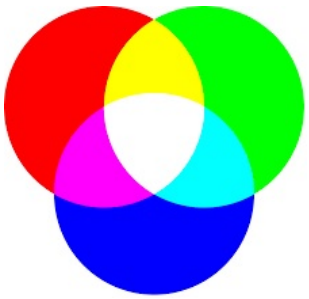
In de voorbeelden zie je hoe dit in zijn werk gaat.

Voorbeeld 1

In html (hypertext markup language, de 'taal' van het internet) wordt wel de RGB-kleurcode gebruikt (Rood|Groen|Blauw). Een RGB-kleurcode is bijvoorbeeld FF.B5.18. Zo'n code bestaat uit drie hexadecimale getallen van twee tekens.

In tekenprogramma's worden vaak de decimale varianten van zo'n code gebruikt.

Welke decimale code hoort er bij FF.B5.18?



Figuur 5.2 RGB

Antwoord

$FF = ff_{16} = 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 255_{10}$

$B5 = b5_{16} = 11 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 181_{10}$

$18 = 18_{16} = 1 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 24_{10}$

Dus $ff.b5.18$ wordt 255.181.24.
Dit is de oranje-achtige kleur in het math4all-logo.

Opgave 3

Bekijk de hexadecimale RGB-kleurcode in het **Voorbeeld 1 op pagina 208**.

a Bereken de decimale variant van 66.99.CC (een soort lichtblauw).

b Een soort rood is in de decimale RGB-code 204.51.51.
Bepaal de bijbehorende hexadecimale code.

c Hoeveel verschillende kleurcodes bevat het RGB-systeem?

Opgave 4

Reken om:

a $aa04f_{16}$ naar een decimaal getal.

b 65034_{10} naar een hexadecimaal getal.

Voorbeeld 2

In een 16-bits binair stelsel kun je alleen de getallen 0 tot en met 65535 maken.

Dit laatste getal 65535_{10} ziet er dan zo uit: $65535_{10} = 1111111111111111_2$.

Zo'n binair getal kun je eigenlijk nauwelijks lezen, je hoeft maar een ééntje te vergeten en je hebt iets heel anders. Daarom geef je dit liever weer in het hexadecimale stelsel, want heen en weer rekenen tussen binair en hexadecimaal is erg eenvoudig: elke 4-bits combinatie van nullen en énen heeft een bijpassend hexadecimaal teken.

Hoe ziet 1111111111111111_2 er hexadecimaal uit?

Antwoord

Verdeel het binaire getal in blokjes van 4 bits van rechts naar links:

$1111111111111111_2 = 1111.1111.1111.1111_2$

Vervang elk 4-bits blokje door het bijpassende hexadecimale teken:

$1111111111111111_2 = 1111.1111.1111.1111_2 = ffff_{16}$

En dat leest veel gemakkelijker.

Controle: $ffff_{16} = 65535_{10}$.

Opgave 5

Bekijk in het **Voorbeeld 2 op pagina 209** hoe je omrekent van een binair getal naar een hexadecimaal getal.

a Controleer dat $ffff_{16} = 65535_{10}$.

b Reken 1100100100_2 om naar een hexadecimaal getal.

c Reken $3d0f_{16}$ om naar een binair getal.

Opgave 6

Alle getallen in een 16-bits binair stelsel kun je hexadecimaal weergeven met maximaal 4 tekens.

a Leg uit, waarom dat zo is.

In een 32-bits binair stelsel kun je 4 . 294 . 967 . 296 getallen maken.

b Laat zien, dat dit klopt.

c Reken $10001001101011011110000100000111_2$ om naar een hexadecimaal getal.

Oefenen

Opgave 7

Reken de volgende hexadecimale getallen om naar decimale getallen.

a $1a0b$

b $1200f$

c $cafe$

Opgave 8

Reken de volgende decimale getallen om naar hexadecimale getallen.

a 4096.

b 14096.

c 104096.

Opgave 9

Grote binaire getallen bestaan uit veel nullen en/of énen. Een fout is dan zo gemaakt. Daarom worden ze vaak hexadecimaal weergegeven.

a Reken $10111110111110010011010_2$ om naar een hexadecimaal getal.

b Reken $79cf0_{16}$ om naar een binair getal.

Opgave 10

Bij het coderen van teksten zodat ze leesbaar zijn op het internet, wordt onder andere voor letters, cijfers en andere symbolen Unicode gebruikt. De Unicode voor bijvoorbeeld het kleinerteken is U+003C. En de Unicode voor de Griekse α is U+03B1.

Het getal achter het plusteken is hexadecimaal.
Maar deze zijn om te rekenen naar decimale nummers.

a Welk decimale nummer hoort bij U+003C?

b Welk decimale nummer heeft de α in Unicode?

c Welk teken heeft in Unicode het decimale nummer 8658?

Toepassen

Internet Protocol versie 6 (IPv6) is versie 6 van het internetprotocol voor het gebruik van internet-adressen. Het is de opvolger van IPv4 en is de tweede versie van het internetprotocol die in gebruik is genomen. (De tussenliggende versie IPv5 was een experimentele aanvulling op IPv4, maar deze werd nooit geïmplementeerd.) IPv6 is op 14 juli 2017 in werking getreden.

```
2001:0db8:85a3:0000:1319:8a2e:0370:7344
```

Figuur 5.3 Bron: Wikipedia

IPv6-adressen zijn 128 bits lang en worden normaal geschreven als 8 groepen van 4 hexadecimale tekens, gescheiden door dubbele punten.

Opgave 11

Lees in **Toepassen op pagina 210** hoe IPv6 in elkaar zit.

a Waarom wordt het hexadecimale stelsel gebruikt, denk je?
En niet bijvoorbeeld het decimale stelsel of het binaire stelsel.

b IPv4 bestond uit 32 bits, IPv6 bestaat uit 128 bits.
Hoeveel internetadressen kon je met IPv4 maken? En nu met IPv6?

Opgave 12

Bekijk het internetadres in **Toepassen op pagina 210**.

a Waaraan kun je zien dat het uit 128 bits bestaat?

b Schrijf het gegeven IP-adres in binaire vorm.

Testen

Opgave 13

a Reken $a0bf13_{16}$ om naar een decimaal getal.

b Reken 16000_{10} om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 14

a Reken $11011111001101100100110 10_2$ om naar een hexadecimaal getal.

b Reken $a0bf13_{16}$ om naar een binair getal.

5.4 Logische schakelingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat in de digitale regeltechniek een logische poort is;
- de werking van de logische poorten ‘en’, ‘of’, ‘niet’ en de bijbehorende waarheidstabellen;
- het resultaat van een schakeling van logische poorten weergeven middels een waarheidstabel.

Voorkennis

- een beetje logisch redeneren.

Verkennen

Opgave V1

Een machine maakt een bepaald product P vanuit twee componenten A en B.
Alleen als beide componenten worden aangevoerd gaat de machine aan de slag.

a Werkt deze machine als component A niet meer in voorraad is?

Als een component op voorraad is krijgt het de aanduiding 1, als het niet op voorraad is de aanduiding 0. Hetzelfde geldt voor product P: als het wordt gemaakt krijgt het de aanduiding 1, anders 0.

b Vul de tabel in.

c Waarom wordt deze manier van P produceren wel een EN-poort genoemd?

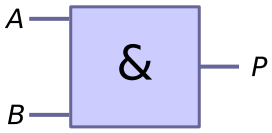
A	B	P
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Tabel 5.1

Uitleg 1

Een machine maakt een bepaald product P vanuit twee componenten A en B.
Alleen als beide componenten worden aangevoerd gaat de machine aan de slag.

Dit wordt binnen de machine digitaal geregeld. Er is sprake van een logische poort. Je ziet hiernaast hoe deze poort symbolisch wordt weergegeven in het IEC-systeem (IEC betekent International Electrotechnical Commission).



Figuur 5.1

Elke component en het eindproduct kent binnen zo'n digitale schakeling twee standen: 0 of 1. De werking van de poort kan dan zo worden weergegeven in een waarheidstabel.

Hier betekent 0 dat een component niet beschikbaar is of dat het eindproduct P niet wordt gemaakt. De tabel laat zien dat P alleen wordt gemaakt als A én B beschikbaar zijn. Daarom heet zo'n logische poort een EN-poort.

Je ziet, dat je de resultaten voor P ook kunt krijgen door de waarden voor A en B te vermenigvuldigen. Daarom schrijf je voor de EN-poort wel $A \cdot B = P$.

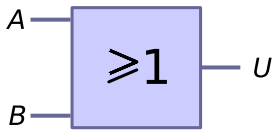
Er bestaan meerdere logische poorten. De belangrijkste zijn de NIET-poort en de OF-poort.

A	B	P
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 5.2

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg 1 op pagina 212** wat een logische EN-poort is.
Hiernaast zie je het IEC-symbool van een logische OF-poort.



Figuur 5.2

Stel je voor dat er precies twee toegangswegen A en B naar een automatisch openende uitgang U leiden. De uitgang moet opengaan op het moment dat er op één van beide of op beide toegangswegen mensen zijn.

a Maak een bijpassende waarheidstabel. Gebruik weer 0 voor geen mensen en voor niet opengaan en 1 voor wel mensen en wel opengaan.

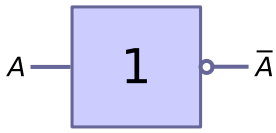
b Waarom wordt dit een OF-poort genoemd?

c De werking van deze poort wordt wel aangeduid met $A + B = U$.
Wat klopt hier rekentechnisch wel en wat klopt er niet?

d Waarom staat er ≥ 1 op het symbool?

Opgave 2

De eenvoudigste logische poort is wel een 'aan/uit-schakelaar'
Daarbij hoort de NIET-poort. Je ziet hier het IEC-symbool.
De schakelaar verandert A in niet-A, ofwel $\overline{A}$.



Figuur 5.3

a Nu is de waarheidstabel wat kleiner. Laat dat zien.

b Waarom zou er een 1 op het IEC-symbool staan?

c Wat gebeurt er als je een OF-poort laat volgen door een NIET-poort?
Maak een waarheidstabel.

d Wat betekent $\overline{A} + B$?
Maak een waarheidstabel.

Uitleg 2

Je hebt gezien dat er bij digitale schakelingen logische poorten worden gebruikt. Je spreekt van 'logische functies'.
Je kent de EN-functie, de OF-functie en de NIET-functie.
Maar je kunt die ook combineren tot logische schakelingen.
Daarbij maak je gebruik van 'schakelalgebra', het rekenen met schakelfuncties. Vaak gebruik je er waarheidstabellen bij.

		EN	OF	NIET	NIET
A	B	$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Tabel 5.3

Bekijk het overzicht van de basisschakelfuncties.

De schakelfunctie $U = A + \overline{A} \cdot B$ (dus A OF NIET(A) EN B) is een combinatie ervan.
Je kunt de werking daarvan achterhalen door een waarheidstabel te maken.

Ook kun je met behulp van waarheidstabellen soms schakelingen vereenvoudigen: $\overline{A} \cdot B + A \cdot B + B = B$.

Bij het werken met dergelijke combinaties geldt de rekenvolgorde: eerst NIET, dan EN en vervolgens OF.
Verder zijn er rekenregels als $A \cdot B = B \cdot A$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.
Met waarheidstabellen kun je deze rekenregels voor schakelfuncties laten zien.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg 2 op pagina 213**. Let vooral goed op de rekenvolgorde bij schakelfuncties.

a Maak een waarheidstabel bij de schakelfunctie $U = A + \overline{A} \cdot B$.

b Laat met een waarheidstabel zien, dat $\overline{A} \cdot B + A \cdot B + B = B$.

c Laat met waarheidstabellen zien, dat $A \cdot B = B \cdot A$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.

Opgave 4

Onderzoek met behulp van waarheidstabellen of je de volgende schakelfuncties korter kunt schrijven.

a $U = A + A$

b $U = A \cdot 1 + A \cdot 0$

c $U = A + \overline{A}$

d $U = A + A \cdot B$

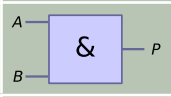
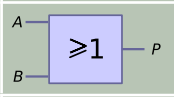
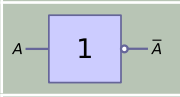
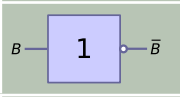
e $U = A \cdot (A + B)$

f $U = (A \cdot B) \cdot \left(\overline{A} \cdot B\right)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In de digitale regelkunde wordt gebruik gemaakt van **logische functies**, met name de EN-functie, de OF-functie en de NIET-functie. Je ziet hier bij elk van die poorten de bijbehorende **waarheidstabel** en het IEC-symbool.

		EN	OF	NIET	NIET
					
A	B	$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Tabel 5.4

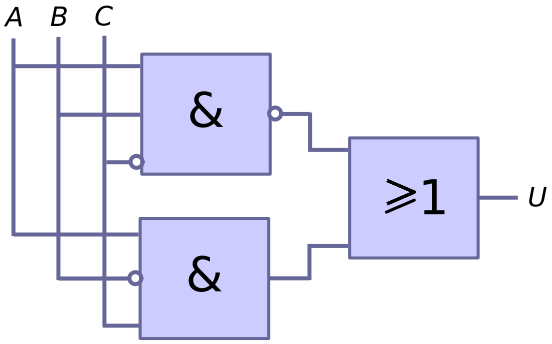
Bij het werken met dergelijke combinaties geldt de rekenvolgorde: eerst NIET, dan EN en vervolgens OF. Verder zijn er de rekenregels van De Morgan:

- $A + B = B + A$ en $A \cdot B = B \cdot A$.
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ en $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ en $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.

Met behulp van waarheidstabellen kun je deze regels van De Morgan controleren.
Verder gebruik je die om samengestelde schakelfuncties te vereenvoudigen en/of de werking ervan te begrijpen.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een schakeling.



Figuur 5.4

Welke schakelfunctie hoort bij deze schakeling?
Stel ook de bijbehorende waarheidstabel op.

Antwoord

Denk er om dat die kleine rondjes voor NIET staan!

Je krijgt: $U = \overline{A \cdot B \cdot \overline{C}} + A \cdot \overline{B} \cdot C$.

Ga na, dat de waarheidstabel wordt:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cdot B$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$\overline{A \cdot B \cdot \overline{C}}$	$A \cdot \overline{B}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	U
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1

Tabel 5.5

Opgave 5

Bekijk het schakelschema in het **Voorbeeld 1 op pagina 215**.

a Stel zelf - zonder naar het voorbeeld te kijken - de bijbehorende schakelfunctie op.

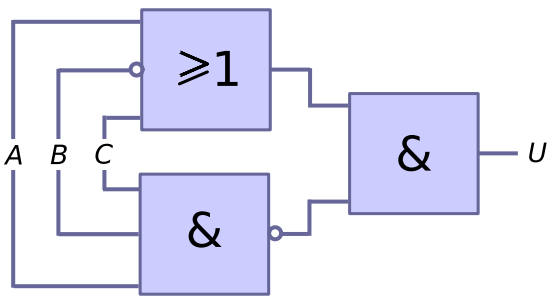
b Waarom heeft de waarheidstabel acht rijen?

c Maak zelf de bijbehorende waarheidstabel.

d Wanneer is er geen uitgangssignaal?

Opgave 6

Bekijk deze schakeling.



Figuur 5.5

a Welke schakelfunctie hoort bij deze schakeling?

b Stel de bijbehorende waarheidstabel op.

Voorbeeld 2

Gegeven is de schakelfunctie $U = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

Teken deze schakeling met behulp van de IEC-symbolen.
ook zien, dat de schakeling is te vereenvoudigen.

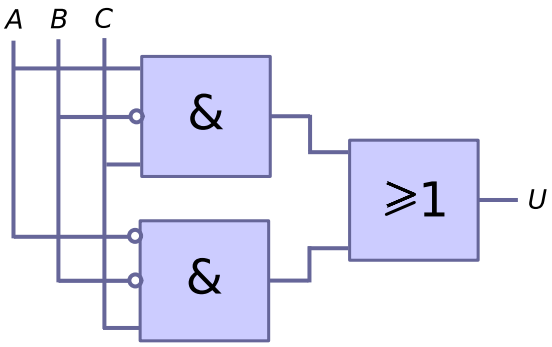
Antwoord

Hiernaast zie je de tekening van de schakeling.
Loop hem zelf na.

Volgens de regels van De Morgan is:

$U = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C =$
$= \left(A + \overline{A}\right) \cdot \overline{B} \cdot C = 1 \cdot \overline{B} \cdot C = \overline{B} \cdot C.$

Met een waarheidstabel kun je nagaan dat dit klopt.



Figuur 5.6

Opgave 7

Bekijk de schakelfunctie in het **Voorbeeld 2 op pagina 216**.

a Maak zelf de tekening van de schakelfunctie zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Ga met behulp van een waarheidstabel na, dat de vereenvoudiging klopt.

Oefenen

Opgave 8

Maak bij de volgende schakelfuncties waarheidstabellen. Denk om de rekenvolgorde!

a $U = \overline{A} \cdot B + B$

b $U = A + B \cdot A + B$

c $U = (A + B) \cdot (A + B)$

Opgave 9

Probeer de volgende schakelfuncties korter te schrijven.
Controleer je antwoorden met waarheidstabellen.

a $U = A \cdot A.$

b $U = A \cdot \overline{A}.$

c $U = A + \overline{A}.$

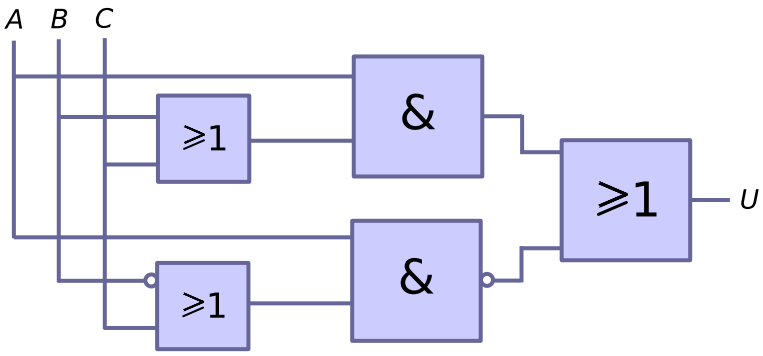
d $V = A \cdot B + \overline{A} \cdot B.$

e $V = \overline{A \cdot \overline{B}}.$

f $W = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}.$

Opgave 10

Een binaire schakeling is gegeven door de figuur hieronder.



Figuur 5.7

a Schrijf de bijbehorende schakelfunctie op.

b Maak een bijpassende waarheidstabel.

Opgave 11

Gegeven is de schakelfunctie $U = A \cdot B + A \cdot C + \overline{A} \cdot (B + C)$.

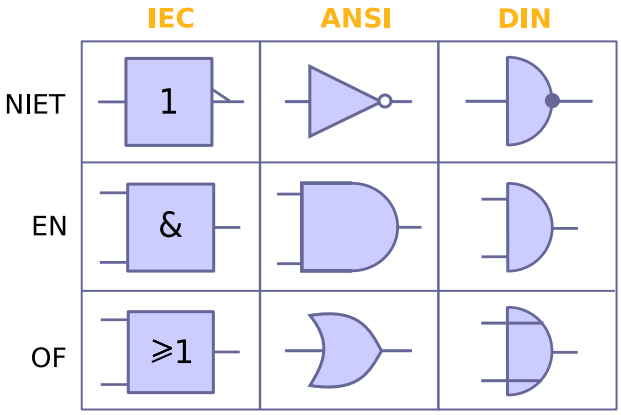
a Teken het schakelschema bij deze schakelfunctie. Gebruik de IEC-symbolen voor logische poorten.

b Vereenvoudig deze schakelfunctie.

c Hoe ziet het vereenvoudigde schakelschema er uit?

Toepassen

Er bestaan meerdere symbolen voor logische poorten.
Tot nu toe zijn steeds IEC-symbolen gebruikt (IEC betekent International Electrotechnical Commission). Je ziet trouwens dat het NIET-symbool iets afwijkt van het symbool dat in de **Theorie op pagina 214** staat.
Maar je hebt ook het Noord-Amerikaanse ANSI-systeem (ANSI betekent American National Standards Institute) en het Duitse DIN-systeem (DIN betekent Deutsches Institut für Normung).
In de figuur zie je de bijbehorende tekens van de basissymbolen (volgens Wikipedia).

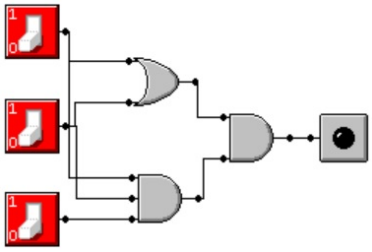


Figuur 5.8

In de praktijk zul je ze wellicht allemaal wel tegenkomen.

Opgave 12

Bekijk de drie versies van symbolen voor de logische basisfuncties in **Toepassen op pagina 217**. Bekijk ook de schakeling in de figuur hiernaast. Hij is gemaakt met MM-Logic (het gratis oefenpakket Multi Media Logic). Er zijn drie ingangsschakelaars A, B en C en er is een lampje L als uitgangssignaal.



Figuur 5.9

a Welk symbolensysteem is er gebruikt?

b Schrijf de bijpassende schakelfunctie L op.

c Omschrijf in woorden wat deze schakelfunctie doet.

Opgave 13

Hieronder worden twee praktijksituaties beschreven.
Maak er een schakelfunctie bij, teken de schakeling met behulp van één van de symbolensystemen en maak er een waarheidstabel bij.

a De hotelschakeling is een schakeling waarmee je onderaan een trap het licht aan kunt doen en dit dan bovenaan weer uit kunt doen en omgekeerd.

b Een afgesloten vat bevat een vloeistof die wordt verhit. Als de temperatuur te hoog wordt, moet er een signaal afgaan en een klep openen. Als het vloeistofniveau te laag wordt en tegelijk de klep nog open staat, moet het signaal ook afgaan.

Testen

Opgave 14

Maak bij de volgende schakelfuncties waarheidstabellen. Probeer ze waar mogelijk korter te schrijven.

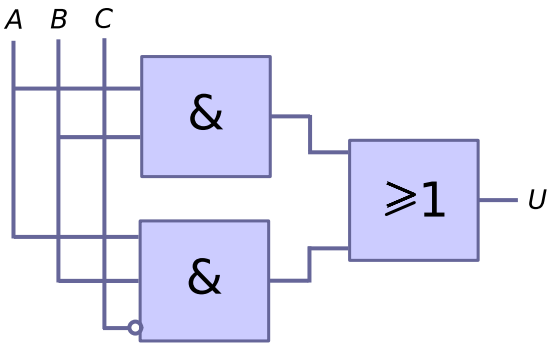
a $U = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$

b $U = A + \overline{B} + A \cdot B$

c $U = (A + B + C) \cdot ((A + B) \cdot C)$

Opgave 15

Een binaire schakeling is gegeven door de figuur hiernaast.



Figuur 5.10

a Schrijf de bijbehorende schakelfunctie op.

b Maak een bijpassende waarheidstabel.

5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met binaire en hexadecimale getallen voorbij gekomen. Ook heb je de beginselen van binaire schakelfuncties gezien.

Je hebt nu alle theorie van **Talstelsels en logica** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- binair stelsel — binair getal;
- binair complement;
- hexadecimaal stelsel — hexadecimaal getal;
- logische poort — logische functie, (binaire) schakelfunctie — EN-, OF-, NIET-schakelfunctie — waarheidstabel.

Activiteitenlijst

- binaire getallen omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd — binaire getallen optellen en vermenigvuldigen;
- optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met binaire getallen;
- hexadecimale getallen, binaire getallen en decimale getallen naar elkaar omrekenen;
- schakelingen waarin EN-, OF- en/of NIET-functies voorkomen interpreteren en er een waarheidstabel bij maken — de rekenregels van De Morgan gebruiken.

Testen

Opgave 1

Je werkt in een 16-bits binair stelsel.
$a = 11101100$ en $b = 101111$.

a Bereken $a + b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

b Bereken $b - a$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

c Bereken $a \cdot b$ en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

d Bereken a/b met een rest en controleer je antwoord in het decimale stelsel.

Opgave 2

Bereken binair en controleer decimaal:

a $1326_{10} + 110011_2$

b $1326_{10}/110011_2$

Opgave 3

Gegeven het hexadecimale getal $12cf3$.

a Reken dit getal om naar een binair getal.

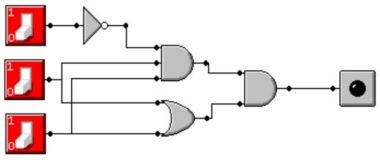
b Reken dit getal om naar een decimaal getal.

Gegeven het decimale getal 100546.

c Reken dit getal om naar een hexadecimaal getal.

Opgave 4

Gegeven is deze schakeling gemaakt in MM Logic.
Noem de schakelaars van boven naar beneden A, B en C en het lampje L.



Figuur 5.1

a Schrijf een bijpassende schakelfunctie op.

b Maak een bijbehorende waarheidstabel.

c Wanneer gaat het lampje branden?

d Hoe kun je deze schakeling eenvoudiger maken?

Opgave 5

Gegeven zijn de logische functies A en B. Laat zien, dat.

a $A \cdot B + \overline{A} \cdot B = B$

b $(A + B) \cdot \left(A + \overline{B}\right) = A$

Toepassen

Opgave 6: Het achttallig stelsel

In de eerste jaren van de computer werd er veel met het achttallig (of het octale) stelsel gewerkt.
Daarin bestaan alleen de cijfers 0,1,2,3,4,5,6,7.

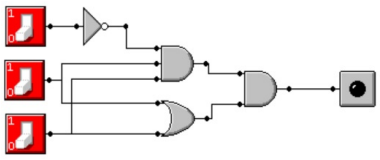
a Laat zien, hoe je het octale getal 5137 omrekent naar een decimaal getal.

b Laat zien, hoe je het decimale getal 1000 omrekent naar het achttallig stelsel.

c Geef de cijfers van het octale stelsel weer in het binaire stelsel.
Hoe kun je gemakkelijk van octaal naar binair omrekenen? En omgekeerd?

Opgave 7: Multi Media Logic

Via **deze hyperlink** kun je het open source computerprogramma 'Multi Media Logic' downloaden. Daarmee kun je binaire schakelingen maken zoals die hiernaast. Bestudeer de werking van dit programma.



Figuur 5.2

a Maak deze schakeling in MM-Logic. De schakelaars zijn van boven naar beneden A, B en C en het lampje is L.
Ga na, dat het lampje gaat branden als B en C tegelijk op 1 staan.

b Maak een schakeling bij de schakelfunctie $L = (A + B + C) \cdot \overline{A \cdot B \cdot C}$.
Onderzoek wanneer het lampje gaat branden en laat zien dat dit ook uit de waarheidstabel volgt.

c Werk met iemand samen en geef elkaar schakelfuncties op om te maken in MM-Logic. Voorspel dan de werking van je schakeling met behulp van een waarheidstabel.

6

Lineaire functies

6.1 Recht evenredig 222
6.2 Lineaire functies 228
6.3 Het hellingsgetal 234
6.4 Lineaire vergelijkingen 241
6.5 Totaalbeeld 248

6.1 Recht evenredig

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een recht evenredig verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) recht evenredig verband een passende formule opstellen;
- de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met recht evenredige verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.

Figuur 6.1

a Je koopt in Denemarken iets dat 350 DKK kost. Hoeveel euro is dat?

b Als iets in Denemarken twee keer zo duur wordt, is dat omgerekend in euro dan ook zo?

c "Het aantal euro is recht evenredig met het aantal Deense Kronen."
Wat wordt met deze uitspraak bedoeld?

d Schrijf een formule op die het verband aangeeft tussen de kosten in euro (E) en die in Deense Kronen (D).

e Voordat je naar Denemarken op vakantie gaat wil je Deense Kronen aanschaffen voor 500 euro. Hoeveel DKK krijg je als je geen bijkomende kosten hoeft te betalen?

Uitleg

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.

Figuur 6.2

Dit biljet van 50 DKK heeft een waarde van $50 \cdot 0{,}13 = 6{,}50$ euro.
Je berekent de waarde E in euro van een aantal Deens Kronen D met de formule $E = 0{,}13 \cdot D$.

De variabele E is recht evenredig met de variabele D, omdat een verdubbeling van een waarde van de éne variabele ook leidt tot een verdubbeling van de bijbehorende waarde van de andere variabele. Het getal 0,13, de constante waar je steeds mee vermenigvuldigt, heet de evenredigheidsconstante.

Bij zo'n recht evenredig verband kun je gemakkelijk een tabel en een grafiek maken. De grafiek wordt een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 222**.

a Hoeveel euro bedraagt de waarde van 1250 DKK?

b Hoeveel DKK is € 1000,= waard?

c Laat met een voorbeeld zien dat E verdubbelt als D verdubbelt.

d Als D drie keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met E? Laat dit zien met een berekening.

e Hier zijn E en D recht evenredig. Teken een bijpassende grafiek.

f Hoe kun je aan de grafiek zien dat het hier om een recht evenredig verband gaat?

g Als je in Nederland Deense Kronen koopt bij een bank, betaal je ook transactiekosten. Waarom is in dat geval het aantal DKK niet recht evenredig met het te betalen bedrag in euro?

Opgave 2

Een kopie maken met een kopieermachine kost € 0,125 per velletje.

a Hoeveel ben je kwijt als je in een jaar tijd 1750 kopieën maakt?

b Met welke formule kun je de kosten K in euro afhankelijk van het aantal kopieën a weergeven?

c Zijn deze twee variabelen recht evenredig met elkaar? Waarom?

d Maak een tabel en teken de grafiek bij deze formule.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

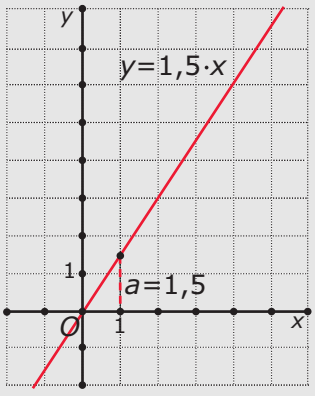
Bekijk de applet: Recht evenredig

Een variabele y is **recht evenredig** met variabele x als een verdubbeling van x ook een verdubbeling van y tot gevolg heeft. De bijbehorende formule heeft dan de vorm

$y = a \cdot x$ met a een willekeurig reëel getal.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn die door de oorsprong gaat.

- a heet de **evenredigheidsconstante**.
- a bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt. Als a positief is, stijgt de lijn, is a negatief dan daalt de lijn. Daarom wordt a ook wel eens het **hellingsgetal** genoemd of de **richtingscoëfficiënt**.



Figuur 6.3

Omgekeerd hoort ook bij elke rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel een **recht evenredig verband** tussen x en y.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Recht evenredig

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$. Van welk van beide formules kun je met deze applet de grafiek maken? Bij welk van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?

Antwoord

Door $a = 2$ te kiezen maak je de grafiek van $y_1 = 2x$.
De grafiek van $y_2 = 2x + 3$ kun je niet maken want die grafiek gaat niet door $(0,0)$, omdat bij $x = 0$ de uitkomst $y = 3$ hoort.
Alleen bij $y_1 = 2x$ is sprake van een recht evenredig verband omdat de grafiek daarvan wel een rechte lijn door $(0,0)$ is.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 224**.

a Maak de grafiek van $y_1 = 2x$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y_1 = 2x$ door $(0,0)$ gaat?

c De formule $y_2 = 2x + 3$ beschrijft geen recht evenredig verband. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat een verdubbeling van de waarde van x geen verdubbeling van de waarde van y oplevert bij deze formule.

d Teken de grafieken van $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$ in één figuur.

e Hoe kun je aan de grafiek van $y_2 = 2x + 3$ zien dat er in dit geval geen sprake is van een recht evenredig verband?

Opgave 4

Welke van de volgende formules beschrijven een recht evenredig verband? Licht je antwoord toe en geef in dat geval de evenredigheidsconstante. (Lees eventueel eerst in de **Theorie op pagina 223** na wat je daaronder verstaat.)

- $y_1 = x$
- $y_2 = -0{,}5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = \frac{1}{x}$
- $y_5 = x^2$
- $y_6 = 0$

Voorbeeld 2

Een schaatser schaatst met een constante snelheid van Sneek naar Leeuwarden. Na 14 minuten heeft hij 5 kilometer afgelegd. Geef een formule voor de tijd t die hij onderweg is (in minuten) afhankelijk van de afgelegde afstand s in km.

Antwoord

De schaatser doet over elke km $14/5 = 2{,}8$ minuten. Over s km doet hij $2{,}8 \cdot s$ minuten, dus $t = 2{,}8 \cdot s$ minuten. Dit is de gevraagde formule.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 224**.

a Welke twee variabelen zijn hier recht evenredig met elkaar? En waarom?

Je kunt de formule ook vinden door uit te gaan van $t = a \cdot s$ en dan a uit te rekenen door de gegeven waarden van t en s in te vullen.

b Bereken a.

Leeuwarden en Sneek liggen 26,4 kilometer uit elkaar.

c Hoe lang doet de schaatser over deze tocht?

d Hoe lang duurt het voordat de schaatser de Elfstedentocht (200 km) heeft afgelegd als zijn gemiddelde snelheid gelijk is aan de constante snelheid tussen Leeuwarden en Sneek?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 224** nog eens. Je kunt ook een formule maken van de vorm $s = a \cdot t$.

a In de natuurkunde wordt vaak de letter v gebruikt om de snelheid aan te geven.
Waarom stelt nu de evenredigheidsconstante a de snelheid voor? In welke eenheden?

b Bereken nu opnieuw de waarde van a. Hoe ziet de formule er nu uit?

Je kunt de formule die je in deze opgave hebt gevonden ook afleiden uit die van de vorige opgave.

c Laat zien hoe dat gaat.

Oefenen

Opgave 7

In Zwitserland wordt met de Zwitserse Frank (SFr) betaald. De omrekenkoers is op zeker moment: 1 SFr = 0,83 euro.

Figuur 6.4

a Je bent in Zwitserland op vakantie en je koopt een souvenir voor SFr.34,50. Hoeveel euro kost dit souvenir?

b Met welke formule kun je omrekenen van SFr naar euro? Noem het aantal SFr z en het aantal euro e.

c Als een ander souvenir anderhalf keer zo duur is in SFr, hoeveel keer zo duur is het dan in euro?

Voordat je op vakantie ging heb je waarschijnlijk Zwitserse Franks gekocht bij een bank in Nederland. Die bank rekent voor de aankoop van SFr nog € 5,00 aan kosten. Wel gebruiken ze dezelfde wisselkoers.

d Hoeveel kosten je SFr.250,00?

e Is bij een aankoop van SFr in de situatie beschreven bij d het aantal euro dat je betaalt recht evenredig met het aantal gekochte SFr? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

De variabele y is recht evenredig met de variabele x. De bijbehorende evenredigheidsconstante is 5,8.

a Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x?

b Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

c Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y. Toon dit aan.

Opgave 9

Van een cirkel is de omtrek P recht evenredig met de diameter d. De bijbehorende evenredigheidsconstante wordt π genoemd.

a Welke formule geldt dus voor de omtrek van een cirkel?

b Is de omtrek van een cirkel ook recht evenredig met de straal r? Welke formule geldt er voor P afhankelijk van r?

c Is de oppervlakte A van een cirkel ook recht evenredig met de diameter? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Alexandra krijgt van oma een spaarvarken. Ze doet er elke week € 5,= in, voor het eerst één week nadat zij het heeft gekregen. Haar jongere zusje Clarabella krijgt precies drie jaar later net zo'n spaarvarken. Zij doet er elke week € 8,= in, ook voor het eerst één week nadat zij het heeft gekregen. Clarabella vraagt zich af wanneer ze evenveel geld in het spaarvarken zal hebben als haar zus als die zo door gaat.

a Vanaf het moment dat Clarabella begint te sparen, is het geld in haar spaarvarken recht evenredig met het aantal weken dat ze spaart. Waarom is Alexandra's spaargeld niet recht evenredig met het aantal weken na het moment waarop Clarabella begint te sparen?

b Beantwoord Clarabella's vraag met behulp van een berekening.

Opgave 11

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x? Stel in dat geval een passende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de oorsprong en door $(12{,}39)$.

b De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten $(4{,}12)$ en $(12{,}39)$.

c De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten $(10{,}\text{-}6)$ en $(15{,}\text{-}9)$.

d De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt $(10; 0{,}5)$.

e De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt $(10; 0{,}5)$.

Toepassen

Naast de temperatuurschaal van Celsius (die wij meestal gebruiken) bestaan er nog andere **temperatuurschalen**, waaronder:

- De temperatuurschaal van Fahrenheit (die nog gebruikt wordt in Amerika).
  Je krijgt het aantal graden Fahrenheit door het aantal graden Celsius te delen door 10, de uitkomst te vermenigvuldigen met 18 en vervolgens nog 32 erbij te tellen.
- De temperatuurschaal van Réamur.
  Je krijgt het aantal graden Réamur door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.

Opgave 12

Hierboven worden verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C, die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R.

a Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_F.

b Leid ook een omrekenformule af van T_F naar T_C.

c Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_R.

d Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_R naar T_C.

e Welke van deze drie temperatuurschalen zijn recht evenredig?

Opgave 13

Hierboven worden drie verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C, die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R.

a Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_F naar T_R.

b Leid ook een omrekenformule af van T_R naar T_F.

Testen

Opgave 14

De variabele y is recht evenredig met de variabele x. De bijbehorende evenredigheidsconstante is 0,35.

a Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x?

b Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

c Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y. Toon dit aan.

Opgave 15

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x? Stel in dat geval een passende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door $(4{,}10)$ en door $(6{,}15)$.

b De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt $(2{,}6)$.

c De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt $(2{,}6)$.

6.2 Lineaire functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) lineair verband een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen;
- werken met recht evenredige verbanden.

Verkennen

Opgave V1

In het deel van de atmosfeer waarin het menselijk leven plaats vindt daalt de luchttemperatuur elke km dat je hoger komt gemiddeld met ongeveer 6,5 °C. Onder bepaalde weersomstandigheden kan met de formule $T = 25 - 0{,}0065h$ temperatuur T in graden celsius op een hoogte van h meter worden berekend. Dat is handig voor bijvoorbeeld bergbeklimmers, dan weten ze welke temperaturen ze tijdens de klim kunnen verwachten.

a Hoe ziet de grafiek van T afhankelijk van h er uit?

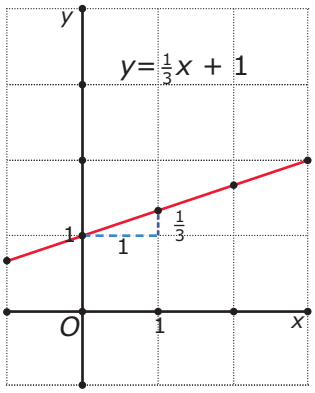
b Is er sprake van een recht evenredig verband tussen T en h? Waarom?

c Bereken de temperatuur op 7500 meter hoogte.

d Op welke hoogte komt de temperatuur voor het eerst onder het vriespunt?

Uitleg

De grafiek bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ is een rechte lijn.
Want als je begint met de uitkomst voor $x = 0$ te berekenen ($y = 1$), dan wordt daarna elke keer dat je de x-waarde met 1 verhoogt, de y-waarde met $\frac{1}{3}$ verhoogd. En als je de x-waarde met 1 verlaagt, dan wordt de y-waarde met $\frac{1}{3}$ verlaagd. Dat getal $\frac{1}{3}$ is de coëfficiënt van x en bepaalt de richting van de lijn. Het is de richtingscoëfficiënt of ook wel het hellingsgetal van de lijn.



Figuur 6.1

Bij een formule die in de vorm $y = \ldots$ (met op de stippeltjes een uitdrukking met alleen x als variabele) staat, zeg je dat y een lineaire functie is van x.

Door in de formule $x = 0$ in te vullen vind je het snijpunt van de grafiek met de y-as.

Voor het snijpunt van de grafiek met de x-as moet je $\frac{1}{3}x + 1 = 0$ oplossen. Dat geeft $x = -3$, dus het snijpunt met de x-as is $(-3{,}0)$.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 228**.

a Leg uit hoe je bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ snel een grafiek kunt tekenen.

b Teken snel een grafiek bij de formule $y = -0{,}25x + 4$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

c Teken snel een grafiek bij de formule $y = 4x - 6$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

d Teken snel een grafiek bij de formule $y = 5 - x$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

e Hoe kun je aan de richtingscoëfficiënt zien of de grafiek daalt of stijgt?

f Hoe ziet de grafiek er uit als de richtingscoëfficiënt 0 is? Geef een voorbeeld van een formule waarin dit zo is.

Opgave 2

Gegeven is de lineaire functie $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

a Welk punt op de y-as ligt op de grafiek van deze functie? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn?

b Teken de grafiek van deze functie.

c Bereken het snijpunt met de x-as van deze grafiek.

d Voor welke waarde van x geldt $y = 30$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire functie

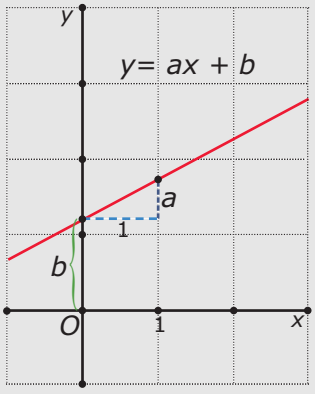
Een variabele y is een **lineaire functie** van x als er een formule bijhoort van de vorm

$y = a \cdot x + b$

met a en b willekeurige reële getallen.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
De formule $y = a \cdot x + b$ is de **vergelijking van de lijn**.

De waarden van a en b kun je nog kiezen.



Figuur 6.2

- a heet de **richtingscoëfficiënt** of het **hellingsgetal** van de lijn. Dit getal geeft de toename of afname van y als x met 1 wordt verhoogd. a bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt.
- b bepaalt het snijpunt met de y-as, dat is $(0,b)$.

Bij elke rechte (niet verticale) lijn in een xy-assenstelsel hoort een **lineaire functie** die het verband tussen x en y beschrijft. Bij een verticale lijn kun je geen functie maken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven is de formule $y = 1{,}5x + 3$.
Omdat deze formule de vorm $y = a \cdot x + b$ heeft, is y een lineaire functie van x. De grafiek is een rechte lijn die je snel kunt tekenen omdat

- hij door het punt $(0,3)$ moet gaan;
- het hellingsgetal 1,5 is, wat betekent dat het vergroten van de x-waarde met 1 een toename van de y-waarde met 1,5 tot gevolg heeft.

Zo kun je gemakkelijk meer punten van de rechte lijn vinden en hem tekenen.
De formule heet ook wel de vergelijking van de lijn.

Door in de applet de waarden van a en b te veranderen, kun je van andere lineaire functies de grafiek maken.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 230**.

a Stel de juiste waarde van a en b in en maak de grafiek van de lijn met vergelijking $y = 2x + 1$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y = 2x + 1$ door $(0,1)$ gaat?

c Het punt $(100,201)$ ligt op deze lijn. Ga dat na en bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn het punt dat hoort bij $x = 101$.

Opgave 4

Teken de grafieken van de volgende lineaire functies. Controleer je antwoorden met behulp van de applet.

- $y_1 = x - 3$
- $y_2 = -0{,}5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 5 - 2x$
- $y_5 = 3$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven zijn de lineaire functies $y = 0{,}5x + b$. Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt $(3,5)$?

Antwoord

Vul $x = 3$ en $y = 5$ in de gegeven formule in. Je vindt: $5 = 0{,}5 \cdot 3 + b$.

Dit levert op: $b = 3{,}5$.

Opgave 5

Gegeven zijn de lineaire functies $y = ax + 6$.

Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(3,5)$?

Opgave 6

De functies $y = ax + 1$ hebben als grafiek een rechte lijn.

Voor welke waarden van a loopt de grafiek van zo'n functie evenwijdig met de lijn $y = 6 - 0{,}5x$?

Oefenen

Opgave 7

Vier lineaire functies zijn gegeven door de vergelijkingen $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -2x + 1$, $y_3 = 2x + 5$ en $y_4 = -0{,}5x + 5$.

a Teken de vier bijbehorende rechte lijnen in één assenstelsel.

b Bij welke van deze lineaire functies hoort een rechte lijn die evenwijdig loopt met die van $y_1 = 2x + 1$? Hoe kun je dat aan de formule zien?

c Wat valt op aan de twee lijnen die horen bij y_3 en y_4?

Opgave 8

In mijnen geldt als vuistregel dat de temperatuur 0,025 °C stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt. Op een bepaald moment is de buitentemperatuur bij de ingang van een mijnschacht vast op 20 °C.

Figuur 6.3 Black Diamond Mine

a Welke temperatuur verwacht je dan op een diepte van 300 meter?

b Stel bij de buitentemperatuur van 20 °C een formule op voor T (de temperatuur in de mijn in °C) afhankelijk van d (de diepte in meters).

c Een mijnwerker meet op dat moment een temperatuur van 34,3 °C. Hoe diep zit hij?

Op een ander tijdstip meet een mijnwerker die op 684 meter diepte zit een temperatuur 37,8 °C.

d Hoeveel bedraagt op dat tijdstip de buitentemperatuur?

Opgave 9

Een kaars met een lengte van 40 cm brandt elk uur nadat hij is aangestoken 0,125 cm op. De lengte l (in cm) van deze kaars hangt af van de brandtijd t (in uur).

a Welke formule geldt voor l afhankelijk van t? Waarom is hier sprake van een lineaire functie?

b Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?"?

c Los deze vergelijking op en geef antwoord op de bij b gestelde vraag.

Opgave 10

Door de formule $y = 2x + b$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Als $b = 5$ krijg je één van die functies. Teken de bijbehorende grafiek.

b Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?

c Voor welke waarde van b is $(12,0)$ het snijpunt van de grafiek met de x-as?

Opgave 11

Door de formule $y = ax + 10$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Door welk punt gaan alle grafieken van deze functies?

b Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?

c Voor welke waarde van a is zo'n functie evenwijdig met de lijn die hoort bij de formule $x + 2y = 4$?

Toepassen

Ieder huishouden verbruikt energie. Meestal betreft dat gas en elektra. De prijs daarvoor hangt natuurlijk af van de leverancier en bestaat uit twee gedeelten: een prijs voor het verbruik en een vaste leveringsprijs, die het vastrecht wordt genoemd. In huis heb je meters die het verbruik registreren. Hiernaast zie je een electriciteitsmeter.

Figuur 6.4 electriciteitsmeter

Bij een bepaalde energieleverancier betaal je bijvoorbeeld:

- voor het verbruik van gas:
  een vastrecht van € 45,00 per jaar en daar boven op € 0,38 per verbruikte m^3
- voor het verbruik van electriciteit:
  een vastrecht van € 52,00 per jaar en daar boven op € 0,07 per verbruikte kWh (kiloWattuur)

Opgave 12

a Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 1950 m^3 gas per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

b Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 4800 kWh electriciteit per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

c Leid uit de tekst een formule af voor de kosten K_g per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte m^3 gas g. Leid ook een formule af voor de kosten K_e per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte kWh electriciteit e.

Jordi woont op een studentenkamer en verbruikt jaarlijks ongeveer 430 m^3 gas en 1100 kWh electriciteit. Zijn vriendin Amira heeft een eigen appartement en verbruikt jaarlijks ongeveer 680 m^3 gas en 1600 kWh electriciteit. Jordi trekt bij Amira in. Hun gezamenlijk verbruik is nu ongeveer 760 m^3 gas en 1840 kWh electriciteit. Ze zijn allebei bij deze energieleverancier.

d Zijn ze nu goedkoper uit?

Opgave 13

Bij een bepaalde waterleidingmaatschappij betaal je € 1,20 per kubieke meter water. Daarnaast betaal je ook een bedrag voor vaste lasten zoals administratie en onderhoud van de leidingen. Die vaste lasten bedragen bij deze maatschappij € 40,00 per jaar.

a Je verbruikt per jaar a m^3 water. Waarom zijn de kosten voor het waterverbruik exclusief de vaste lasten recht evenredig met a?

b Welke formule geldt voor de totale jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K inclusief de vaste lasten?

c Iemand moet over 2010 voor het waterverbruik € 810,40 betalen. Hoeveel m^3 water heeft hij dat jaar verbruikt.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de lineaire functie met vergelijking $y = 0{,}25x + 4$.

a Welk punt op de y-as ligt op de grafiek van deze functie? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn?

b Teken de grafiek van deze functie.

c Bereken het snijpunt met de x-as van deze grafiek.

d Voor welke waarde van x geldt $y = 1000$?

e Van een andere lineaire functie loopt de grafiek evenwijdig met die van de gegeven functie. Die grafiek gaat door $(2{,}0)$. Welke formule hoort er bij die functie?

Opgave 15

Voor het verbruik van water betaalt elk huishouden een vast bedrag per jaar plus een prijs met verbruikte m^3 water. Bij een bepaalde aanbieder is het vaste bedrag € 45,= en moet je € 1,05 per m^3 betalen.

a Welke formule kun je hierbij opstellen voor de jaarlijkse kosten K bij een verbruik van a m^3?

b Hoeveel betaalt een huishouden aan deze aanbieder voor een verbruik van 120 m^3 water in een bepaald jaar?

c Als een bepaald huishouden € 200 moet betalen voor het waterverbruik in een bepaald jaar, hoeveel water hebben ze dan dat jaar verbruikt?

6.3 Het hellingsgetal

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen van een lineaire functie waarvan de grafiek door twee gegeven punten gaat.

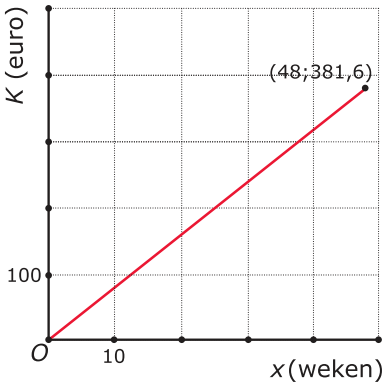
Voorkennis

- bij een (in woorden beschreven) lineair verband een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) herkennen;
- berekeningen met lineaire verbanden uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

In de gemeente Overdal wordt maximaal 48 weken per jaar het huisvuil opgehaald. In elke zwarte vuilcontainer zit een chip die er voor zorgt dat elke lediging geregistreerd wordt. De gemeente stuurt dan op het eind van het jaar een rekening. Als je iedere week de zwarte container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Hiernaast zie je een grafiek waarin de kosten zijn uitgezet tegen het aantal weken.



Figuur 6.1

a Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $K = a \cdot x$ waarin a een constante is. Waarom is dat?

b Bereken de waarde van de evenredigheidsconstante a die bij deze grafiek past.

Opgave V2

In de gemeente Vijfhouten worden de kosten voor het ophalen van de zwarte vuilcontainers anders berekend. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar, net als in Overdal, € 381,60 betalen.

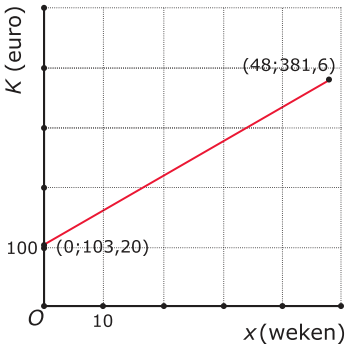
a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K in euro afhankelijk van het aantal weken x dat de zwarte container wordt geleegd.

b De grafiek is een rechte lijn, dus er hoort een formule bij van de vorm $K = a \cdot x + b$. Welke waarde heeft b?

c Hoe kun je de waarde van de richtingscoëfficiënt a bepalen?

Uitleg

In de gemeente Vijfhouten worden de zwarte vuilcontainers wekelijks en maximaal 48 keer per jaar opgehaald. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Deze grafiek laat het verband zien tussen het aantal keren x dat je de zwarte container laat legen en de kosten per jaar K.



Figuur 6.2

Bij deze grafiek hoort een lineaire functie van de vorm $K = ax + b$. Uit de gegevens volgt onmiddellijk $b = 103{,}20$. Maar hoe bepaal je nu de waarde van de richtingscoëfficiënt a?

Bekijk de twee gegeven punten van de grafiek $(0; 103{,}20)$ en $(48; 381{,}60)$. Het aantal weken x neemt tussen deze twee punten toe met $48 - 0 = 48$. Het te betalen bedrag K neem tussen deze twee punten toe met $381{,}60 - 103{,}20 = 278{,}40$. Per week is dat $278{,}\frac{40}{48} = 5{,}80$.

De toename per eenheid is het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn.

Kortweg: $a = \frac{381{,}60-103{,}20}{48-0} = 5{,}80$.

En de bij de grafiek passende lineaire functie is $K = 5{,}80x + 103{,}20$.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 235** zie je hoe je het hellingsgetal berekent als je van een rechte lijn twee punten weet.

In een andere gemeente wordt hetzelfde systeem gehanteerd als in de gemeente Vijfhouten, alleen met andere bedragen. Daar betaalt de familie Arends in 2011 € 277,50 en daarvoor hebben ze de zwarte container 34 keer laten legen. Hun buren hebben nog twee opgroeiende kinderen en moesten hun zwarte container 42 keer laten legen. Zij betaalden dat jaar € 327,50.

a Hoeveel keer extra werd de zwarte container van de buren geleegd?

b Hoeveel moesten de buren meer betalen?

c Hoeveel kost in deze gemeente dus het legen van de zwarte container per keer?

Ook in deze gemeente geldt een formule van de vorm $K = ax + b$.

d Welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt a?

e Door welke twee punten gaat de rechte lijn die bij deze formule hoort? Hoe kun je vanuit die twee punten in één keer de richtingscoëfficiënt berekenen?

f Je hebt nu gevonden dat de formule er uit ziet als $K = 6{,}25x + b$. Hoe vind je de waarde van b?

Opgave 2

De grafiek van een rechte lijn gaat door $A(3{,}5)$ en $B(7{,}11)$. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$.

a Hoeveel neemt de waarde van x toe tussen beide punten?

b Hoeveel neemt de waarde van y toe tussen beide punten?

c Hoeveel neemt de waarde van y toe als x met 1 wordt verhoogd?

Je hebt de waarde van de richtingscoëfficiënt a berekend.

d Hoe zie de formule er nu uit?

e Bereken de waarde van b.

f Schrijf tenslotte de complete formule op die bij deze lijn past.

g Kun je je antwoord nog controleren?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

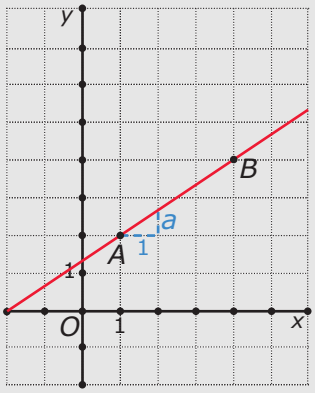
Bekijk de applet: Lijn door twee punten

De algemene formule voor een lineair verband is

$y = a \cdot x + b$ met a en b willekeurige reële getallen.

Het **hellingsgetal**, of de **richtingscoëfficiënt**, geeft aan hoeveel de y-waarde stijgt of daalt als de x-waarde met 1 toeneemt. Dit getal is in de algemene formule de a, de coëfficiënt van x.

- Als $a > 0$ dan is de lijn stijgend, als $a < 0$ dan is de lijn dalend.
- Als $a = 0$ dan is de lijn horizontaal, evenwijdig aan de x-as.
- Een verticale lijn heeft geen hellingsgetal.
- Twee **evenwijdige lijnen** hebben hetzelfde hellingsgetal.



Figuur 6.3

Zijn van een lineaire grafiek alleen twee punten bekend, dan kun je zelf een bijpassende formule opstellen. Je bepaalt dan eerst het hellingsgetal van de lijn door beide punten door te berekenen hoeveel de y-waarde toeneemt als de x-waarde met 1 toeneemt. (Dit kan alleen bij lijnen die niet verticaal lopen.)

Experimenteer met de applet. De punten A en B kun je verplaatsen. Je moet dan alleen vanuit de coördinaten van die punten de formule van de lijn door beide punten kunnen maken. Zet je de punten recht boven elkaar, dan zie je dat ook GeoGebra geen formule van de vorm $y = a \cdot x + b$ kan maken...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lijn door twee punten

Stel een vergelijking (formule) op bij de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$.

Antwoord

De vergelijking heeft de vorm $y = a \cdot x + b$ waarin a het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel y toeneemt bij een toename van x met 1. Dat kun je zo doen:

- Tussen de punten A en B neemt x toe met $4 - 1 = 3$.
- Tussen de punten A en B neemt y toe met $4 - 2 = 2$.
- Als x met 1 toeneemt, neemt y toe met $\frac{2}{3}$.

Nu je weet dat het hellingsgetal $a = \frac{2}{3}$, wordt je formule $y = \frac{2}{3}x + b$. De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van één van beide gegeven punten in de vergelijking in te vullen.
Ga na, dat je dezelfde vergelijking krijgt als in de applet. (Maar nu exact in breuken!)

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 236** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(5,7)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(1,0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(4,3)$.

e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-3,-3)$ en $B(4,1)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(2,0)$ en $B(0,3)$.

Opgave 4

Bij een lineaire functie hoort bij $x = -3$ de uitkomst -40 en bij $x = 2$ de uitkomst 10.

Stel de bijbehorende formule op.

Opgave 5

Bij het **Practicum** kun je telkens twee nieuwe lijnen maken door de vier gegeven punten te verplaatsen. Je ziet dan van beide lijnen de formule. Je kunt jezelf of elkaar oefenen door die na te rekenen. Je kunt ook lijnen met een gegeven formule maken door de punten op de juiste plek te zetten.

a Oefen met een medeleerling.

b Als je punt A recht onder punt $B(4,4)$ zet, is de lijn door beide punten evenwijdig aan de y-as. Welke formule hoort er bij zo'n lijn? Kun je dat verklaren?

c Bij welke lijnen horen formules van de vorm $y = b$? Kun je dat verklaren?

Voorbeeld 2

Een lijn k gaat door het punt $(1,20)$ en loopt evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = 2x+1$. Welke formule hoort bij lijn k?

Antwoord

Omdat de lijnen l en k evenwijdig zijn, hebben ze dezelfde richtingscoëfficiënt. De formule bij lijn k heeft dus de vorm $y = 2x + b$.

De juiste waarde van b bepaal je door de coördinaten van het gegeven punt van k in de vergelijking in te vullen: $20 = 2 \cdot 1 + b$ geeft $b = 18$.

De gevraagde formule is $y = 2x + 18$.

Opgave 6

Lijn k gaat door het punt $(2,24)$ en is evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = -x$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Opgave 7

Lijn k gaat door het punt $(-3,20)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $(4,5)$ en $(12,15)$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Oefenen

Opgave 8

De **Chinese munteenheid** is de yuan. Je weet wel dat er iets meer dan acht yuan in een euro gaan, maar de preciese koers schommelt nogal. Bovendien rekent een bank in China als je euro's inwisselt voor yuan waarschijnlijk nog bepaalde omrekenkosten. Op zekere dag betaal je in Beijing voor 100 yuan € 85,00 en later betaal je voor 50 yuan € 43,75. Ga er van uit dat de wisselkoers niet is veranderd intussen.

a Hoeveel euro kost elke yuan?

b Hoeveel bankkosten betaal je elke keer als je yuan koopt?

Het bedrag E in euro dat je betaalt voor Y yuan kun je met een lineaire formule berekenen. Ga uit van een constante wisselkoers.

c Stel die formule op.

d Hoeveel kosten je 250,00 yuan?

Opgave 9

Stel in de volgende gevallen een formule op bij de beschreven lijn.

a De lijn heeft een hellingsgetal van 4 en gaat door het punt $(0,6)$.

b De lijn gaat door de punten $A(0,31)$ en $B(2,15)$.

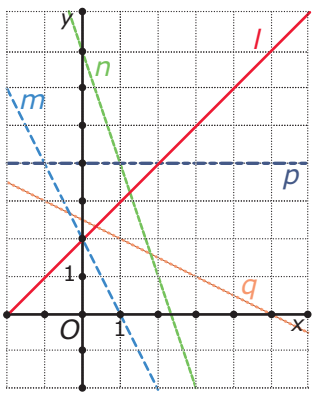
c De lijn gaat door de punten $A(6,2)$ en $B(12,-1)$.

d De lijn gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(7,0)$.

Opgave 10

Bekijk de rechte lijnen in de grafiek. Elke rechte lijn is de grafiek van een lineaire functie.

Geef de bijbehorende formules.



Figuur 6.4

Opgave 11

De tabel laat zien hoe een kaars opbrandt. Op een aantal tijdstippen is de lengte van de kaars gemeten in halve cm nauwkeurig. Teken je hierbij een grafiek dan lijken de punten op een rechte lijn te liggen. Het lijkt er daarom op dat L een lineaire functie is van t. Maar hoe weet je dat zeker?

tijdstip t in uur	0	3	5	9
lengte L in cm	43	38,5	35,5	29,5

Tabel 6.1

a Neem aan dat L een lineaire functie is van t en stel met behulp van de eerste twee gegevens uit de tabel een daarbij passende formule op.

b Ga na, dat ook de andere twee gegevens in de tabel aan de gevonden formule voldoen.

c Waarom kun je nu wel zeggen dat de gegevens in de tabel bij een lineaire functie horen, maar kun je nog steeds niet zeggen dat L een lineaire functie is van t?

Opgave 12

In een binnenvaartschip wordt grind gestort. Bij een lading van 200 ton is de diepgang 2,25 m en bij een lading van 600 ton is de diepgang 3,75 m. Bij een diepgang van 5,25 m is het schip volgeladen.

De diepgang D van dit schip in m is een lineaire functie van het gewicht van de lading L in ton.

a Stel een daarbij passende formule op.

b Welke diepgang heeft het lege schip?

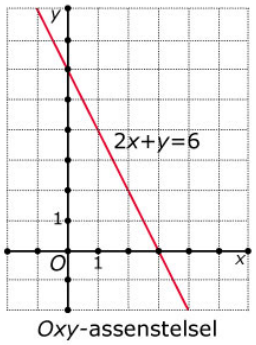
Het schip moet door een vaargeul met een diepte van 5 m. Voor de veiligheid moet er minstens 1 m water onder het schip overblijven.

c Hoeveel ton grind mag dit schip maximaal laden? Rond je antwoord af op gehele tonnen.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het opstellen van een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of drie punten op een rechte lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn, of lijnen loodrecht op elkaar staan.



Oxy-assenstelsel

Figuur 6.5

Opgave 13: Drie punten op één lijn

Hierboven kun je lezen wat de vergelijking van een lijn is.

Je wilt onderzoeken of de drie punten $O(0,0)$, $A(30,12)$ en $B(50,19)$ op één lijn liggen.

a Stel een vergelijking op van de lijn door O en A.

b Onderzoek nu of B op deze lijn ligt.

c Onderzoek of de punten A, B en $C(90,33)$ op één lijn liggen.

Opgave 14: Evenwijdige en loodrechte lijnen

Je weet dat lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt evenwijdig zijn. Dat betekent dat je kunt nagaan of een figuur een parallellogram is door hem in een assenstelsel te plaatsen en na te gaan of er bij de lijnen door de hoekpunten sprake is van gelijke richtingscoëfficiënten.

Neem bijvoorbeeld vierhoek $ABCD$ met $A(10,20)$, $B(16,23)$, $C(12,30)$ en $D(18,33)$.

a Laat met behulp van richtingscoëfficiënten zien dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn.

b Om aan te tonen dat deze vierhoek een parallellogram is, moet je nu laten zien dat ook het andere paar zijden evenwijdig is. Laat zien hoe je dat doet.

Stel je nu eens voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt 3 die door $A(0,2)$ gaat.

c Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,5)$?

d Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90°. Teken de beeldpunten van A en B en teken de lijn door die beeldpunten.

e Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn door beide beeldpunten?

Als een lijn l als richtingscoëfficiënt p heeft, dan heeft de lijn die loodrecht staat op l als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{p}$.

f Neem de lijn l met vergelijking $y = -0{,}5x + 3$. Stel een vergelijking op van de lijn door $(1,5)$ en loodrecht op l.

g Je kunt het opstellen van een vergelijking van een lijn loodrecht op een andere lijn oefenen met de applet in het **Practicum**. Doe dit samen met een medeleerling; geef elkaar opgaven op.

Testen

Opgave 15

Stel in de volgende gevallen een formule op voor de bijbehorende lineaire functie.

a De grafiek is een rechte lijn door $(0,12)$ en $(36,0)$.

b De grafiek is een rechte lijn door $(5,40)$ en is evenwijdig met de rechte lijn met formule $y = 0{,}25x$.

Opgave 16

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.
Je wilt weten hoeveel de lege kabelhaspel weegt.

a Stel daartoe een formule op van de lineaire functie van het gewicht G in kg afhankelijk van het aantal meter a kabel op de haspel.

b Bereken nu hoeveel een lege kabelhaspel weegt.

6.4 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt van twee lineaire functies berekenen;
- lineaire vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Voorkennis

- bij een (in woorden beschreven) lineaire functie een passende formule opstellen;
- het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) berekenen en daarmee de formule van een lineaire functie opstellen;
- berekeningen met lineaire functies uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

Je staat op een viaduct boven de snelweg. Auto *A* rijdt er met een snelheid van 105 km/h onder door. Auto *B* rijdt er 5 minuten later met een snelheid van 115 km/h onder door.

a Na hoeveel tijd heeft auto *B* auto *A* ingehaald?

b Misschien kon je bij a geen oplossing vinden, misschien ook wel.
Een aanpak van zo'n probleem is het invoeren van variabelen en het opstellen van vergelijkingen. Welke vergelijkingen bijvoorbeeld?

Opgave V2

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Je wilt hun leeftijden in 2006 weten. Hier zie je hoe je dit kunt aanpakken met behulp van lineaire verbanden.

a Laat x de leeftijd van Bob in 2006 zijn en y die van Jeroen in 2006. Welke formule kun je dan maken?

b Bedenk welke leeftijden Bob en Jeroen in 2010 hebben. Maak ook een formule voor de situatie in 2010.

c Beide formules kun je herleiden tot een vorm waarin y een functie van x is. Laat dat zien.

d Hoe kun je nu hun leeftijden in 2006 bepalen?

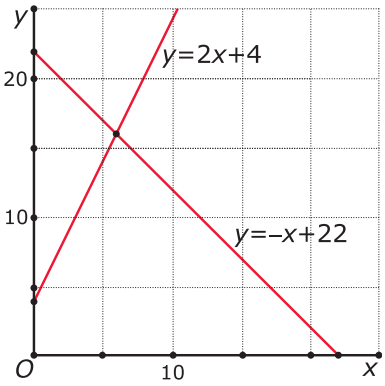
e Vergelijk jouw oplossing bij de voorgaande opgave (als je die hebt gevonden) met de aanpak in deze opgave. Beschrijf voor- en nadelen van beide manieren van werken.

Uitleg

Je hebt bij een bepaald probleem twee vergelijkingen gevonden zoals:
$y = -x + 22$
en
$y = 2x + 4$.

Je wilt de waarden van x en misschien ook y berekenen die aan beide vergelijkingen voldoen.

Je kunt daar grafieken bij tekenen zoals die hiernaast. Het punt dat aan beide formules voldoet is het snijpunt van beide grafieken. Omdat in dat punt de y-waarden van beide formules gelijk zijn, kun je het uitrekenen door $-x + 22 = 2x + 4$ op te lossen.
Deze lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode, zie. Ga na dat je $x = 6$ vindt. Door invullen van deze x-waarde in één van beide lineaire functies vind je ook de gewenste y-waarde. Het snijpunt van beide grafieken is $(6,16)$.



Figuur 6.1

En daarmee kun je antwoord geven op de vraag die werd gesteld.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 242** zie je hoe je het snijpunt berekent van de grafieken bij twee lineaire formules.

a Bereken zelf het snijpunt van $y = -x + 22$ en $y = 2x + 4$.

b Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = -x + 12$ en $y = x + 13$.

c Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 6x - 1$ en $y = 3x + 3$.

d Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 2x$ en $y = 3$.

Opgave 2

Je wilt het volgende probleem oplossen.

De afstand van Deventer naar Amersfoort over de snelweg A1 is 70 km. De éne automobilist rijdt met een constante snelheid van 100 km/uur van Amersfoort naar Deventer. Een andere automobilist start op hetzelfde moment in Deventer en rijdt 120 km/uur. Op welke afstand vanaf Amersfoort gerekend, passeren ze elkaar?

a Probeer het probleem op te lossen.

Je kunt dit probleem oplossen met een lineaire vergelijking. Noem de tijd die ze onderweg zijn t uur en de afstand tot Amersfoort die ze hebben afgelegd s km.

b Welke twee lineaire formules kun je opstellen?

c Los het probleem verder op.

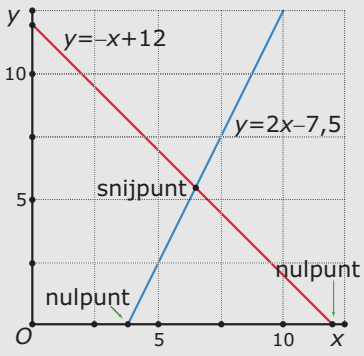
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je een probleem kunt 'vertalen' naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een **lineair model** hebt gemaakt. Vaak gaat het dan om het berekenen van een **snijpunt** van de grafieken bij twee formules.
Het snijpunt van de grafieken bij lineaire formules zoals $y = -x + 12$ en $y = 2x - 7{,}5$ is als volgt uit te rekenen:

- Je stelt beide formules aan elkaar gelijk: $-x + 12 = 2x - 7{,}5$.
- Deze **lineaire vergelijking** los je op met de balansmethode. Je vindt: $x = 6{,}5$.
- De bijbehorende waarde van y vind je door de gevonden x-waarde in één van beide formules te substitueren.

Je krijgt als snijpunt van beide lijnen $(6{,}5; 5{,}5)$.



Figuur 6.2

Ook een **nulpunt**, dus het snijpunt van de grafiek met de x as, van een lineaire formule is op te sporen door een vergelijking op te lossen. Het nulpunt van de formule $y = 2x - 7{,}5$ vind je door $2x - 7{,}5 = 0$ op te lossen. Dit geeft $x = 3{,}75$, dus het nulpunt is $(3{,}75; 0)$.

Voorbeeld 1

Bereken het snijpunt van de lijn l door $(2,0)$ en $(3,4)$ en de lijn k door $(2,1)$ en $(4,0)$.

Antwoord

Stel eerst bijbehorende lineaire formules op.

- Bij lijn l vind je de formule $y = 4x - 8$.
- Bij lijn k vind je de formule $y = -0{,}5x + 2$.

Voor het snijpunt geldt $4x - 8 = -0{,}5x + 2$.

Met de balansmethode vind je $x = \frac{20}{9}$. Het snijpunt wordt na invullen van deze x-waarde $\left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Opgave 3

In de **Theorie op pagina 243** kun je nalezen hoe je het snijpunt van de grafieken van twee lineaire formules berekent. Ook wordt besproken wat het nulpunt van een lineaire functie is en hoe je dit berekent.

a Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 243** hoe het snijpunt van twee lineaire functies wordt berekend. Voer zelf de complete berekening uit en ga na, dat je hetzelfde krijgt.

b Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,5)$ en $(6,2)$ en de lijn k met bijbehorende formule $y = 0{,}4x - 2$.

c Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,0)$ en $(2,1)$ en de lijn m door $(0,4)$ en $(4,0)$.

Opgave 4

Twee kaarsen branden gelijkmatig op, hun lengte L in cm is een lineaire functie van de brandtijd t in uren. Op $t = 0$ heeft kaars I een lengte van 35 cm en kaars II een lengte van 42 cm. 8 uur later zijn beide kaarsen nog 20 cm lang.

Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de tijdstippen waarop deze kaarsen zijn opgebrand? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een goed voorbeeld van het werken met een lineair model is de keuze tussen een auto met een benzinemotor of een dieselmotor. Dat komt omdat er sprake is van twee soorten kosten per jaar, namelijk vaste kosten (voor het kopen van de auto, de verzekering en de wegenbelasting en het onderhoud) en brandstofkosten afhankelijk van het aantal gereden km per jaar.
Iemand maakt de volgende schatting:

- Rijden in een benzineauto kost ongeveer € 3000 per jaar en dan heb je nog jaarlijks de verzekering en de wegenbelasting, samen zo'n € 500 per jaar. De brandstofkosten zijn ongeveer € 1,80 per liter en je rijdt ongeveer 1 op 12, dus met 1 liter benzine rijdt je 12 km.
- Rijden in een dieselauto kost ongeveer € 4000 per jaar en dan heb je nog jaarlijks de verzekering en de wegenbelasting, samen zo'n € 750 per jaar. De brandstofkosten zijn ongeveer € 1,20 per liter en je rijdt ongeveer 1 op 20, dus met 1 liter diesel rijdt je 20 km.

Hierbij kan hij twee formules opstellen voor de kosten K als functie van het aantal jaarlijks gereden kilometers a. Laat zien hoe dat gaat en bereken bij welk aantal gereden km per jaar het rijden op diesel voordeliger is.

Antwoord

Leidt zelf af dat uit de gegevens volgt:

- Voor de benzineauto: $K = 3500 + 0{,}15a$.
- Voor de dieselauto: $K = 4750 + 0{,}06a$.

Je kunt nu narekenen dat je volgens deze schatting bij ongeveer 13900 km per jaar voordeliger uit bent met het rijden op diesel.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 244** zie je hoe iemand een lineair model opstelt bij de vraag wat voordeliger is, rijden op benzine of op diesel.

a Laat zien hoe je uit zijn aannames de formule voor de jaarlijkse kosten van de benzineauto kunt afleiden.

b Doe hetzelfde voor de jaarlijkse kosten van de dieselauto.

c Bereken bij welk aantal jaarlijks gereden km de kosten voor de benzineauto even hoog zijn als voor de dieselauto. Laat zien dat het antwoord overeen komt met dat in het voorbeeld.

Opgave 6

Als een ondernemer een nieuw product op de markt brengt, dan maakt hij kosten. Die kosten kun je vaak grofweg in twee categorieën verdelen:

- vaste kosten voor het ontwikkelen van het product en het opzetten van een productielijn en een magazijn;
- variabele kosten die afhangen van het aantal van die producten dat hij maakt, bijvoorbeeld materiaalkosten, loonkosten, en dergelijke.

Stel je voor dat een bedrijf een nieuwe lamp op de markt wil brengen. De vaste kosten zijn becijferd op € 350.000. De kosten per geproduceerde lamp bedragen € 6,50. Het bedrijf gaat deze lampen verkopen voor € 11,50 per stuk.

a Noem het aantal verkochte lampen q. Welke formule kun je dan opstellen voor de totale kosten TK?

b Welke formule kun je opstellen voor de totale opbrengst TO?

c Bij beide formules horen rechte lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen economen wel het 'break-even point'. Bereken dit punt. Waarom heeft het die naam?

Opgave 7

Voor een muziekuitvoering zijn 300 kaartjes verkocht. Kinderen betalen € 2,00 en volwassenen € 3,00. De totale inkomsten zijn in totaal € 787,00.

a Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Welke twee lineaire formules kun je dan afleiden?

b Schrijf deze formules zo, dat k een functie is van v.

c Bij beide lineaire functies horen rechte lijnen. Bereken het snijpunt van deze twee lijnen.

d Hoeveel kaartjes van elke soort zijn er verkocht?

Oefenen

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y_1 = \frac{1}{4}x$ en $y_2 = 2x + 5$.

a Teken de grafieken van beide functies in één figuur en geef daarin het snijpunt en alle nulpunten aan.

b Bereken het exacte snijpunt van beide grafieken.

Opgave 9

De lijn k gaat door $(5,0)$ en $(1,1)$. De lijn l gaat door $(0,5)$ en $(3,0)$.

a Stel bij deze lijnen passende lineaire formules op.

b Bereken het exacte snijpunt van beide lijnen.

Opgave 10

Een bedrijf brengt een nieuwe keukenmachine op de markt. Deze keukenmachine gaat € 124,50 kosten. Om het apparaat te kunnen produceren heeft het bedrijf kosten gemaakt. Het ontwikkelen van het apparaat en het inrichten van een productielijn hebben € 310.000,00 gekost. Verder kost elk apparaat het bedrijf aan materiaal en loonkosten € 82,00.

a Stel een formule op voor de totale kosten TK voor de productie van x van die keukenmachines.

b Stel ook een formule op voor de totale opbrengst TO van de verkoop van x van die keukenmachines.

c Hoeveel keukenmachines moet het bedrijf minstens verkopen om winst te kunnen maken?

Opgave 11

Een vrachtauto weegt volgeladen met 6,5 m^3 zand 14,5 ton. Nadat de chauffeur 2,5 m^3 zand heeft bezorgd, weegt de vrachtauto met zand nog 10,75 ton.

Hoeveel weegt de lege vrachtauto?

Opgave 12

Een zebra ziet op 150 m afstand een cheetah (jachtluipaard) en vlucht met een topsnelheid van 72 km/h. De cheetah zet de achtervolging in met zijn topsnelheid van 108 km/h.

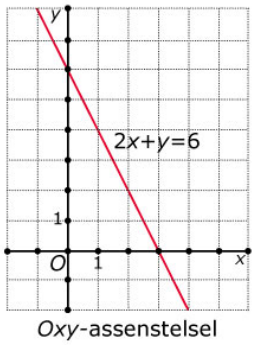
a Welke twee formules voor de afstand s (in m) afhankelijk van de tijd t (in s) kun je dan afleiden?

b Bereken nu met behulp van de twee gevonden formules na hoeveel tijd de cheetah de zebra heeft ingehaald.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het berekenen van snijpunten van lijnen. En je kunt al vergelijkingen van lijnen opstellen. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of lijnen door hetzelfde punt gaan, of punten op dezelfde lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn of loodrecht op elkaar staan.

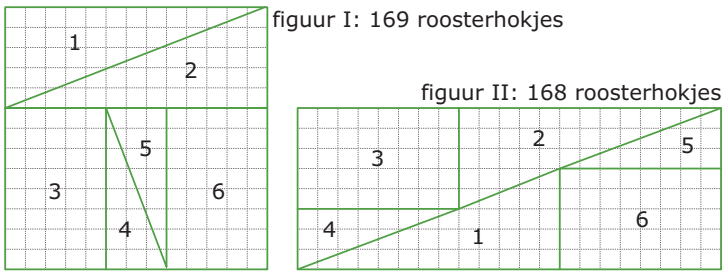


Oxy-assenstelsel

Figuur 6.3

Opgave 13: Ontbrekend roosterhokje

Hier zie je een klassieke puzzel waarbij kennis van lijnen en hun hellingsgetallen handig kan zijn. Bekijk de figuren I en II. Ze lijken te zijn samengesteld uit dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee rechthoeken. Toch is de oppervlakte van de figuur I gelijk aan 169 en die van figuur II gelijk aan 168. Hoe kan dat?



Figuur 6.4

a Controleer eerst dat de beide gegeven oppervlaktes inderdaad kloppen.

b En, weet je waar de fout zit?

Opgave 14: Door één punt?

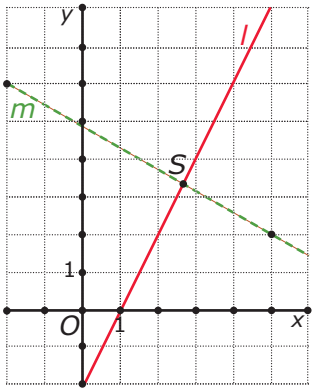
Onderzoek of deze drie lijnen door één punt gaan:

- Lijn k door (0,0) en (5,3).
- Lijn l door (0,6) en (11,12).
- Lijn m door (-7,-6) en (6,2).

Testen

Opgave 15

Je ziet hier twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$.



Figuur 6.5

a Van lijn m zijn twee roosterpunten gegeven. Van welke lineaire functie is deze lijn de grafiek?

b Bereken het snijpunt S van beide lijnen.

c Bereken het exacte nulpunt van de grafiek m.

d Stel een formule op voor de lijn die evenwijdig loopt met l en door het punt $(5,2)$ gaat.

Opgave 16

Een autoverhuurbedrijf verhuurt een Toyota voor € 75,00 per week. De benzinekosten worden geschat op € 0,12 per kilometer. Het bedrijf verhuurt ook een Renault voor € 100,00 per week. De benzinekosten van de Renault zijn ongeveer € 0,10 per kilometer.

a Je wilt de Toyota voor een week huren en je hebt € 125,00. Hoeveel kilometer kun je dan rijden? Beantwoord dezelfde vraag voor de Renault.

b Geef formules voor de kosten per week van de Toyota en de Renault, afhankelijk van het aantal gereden kilometers.

c Bereken vanaf welk aantal kilometer de Renault goedkoper is.

6.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met formules heb je al leren werken. In dit onderwerp is het begrip lineaire functie ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (lineaire) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- recht evenredig — evenredigheidsconstante
- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- vergelijking van een lijn
- lineaire vergelijking

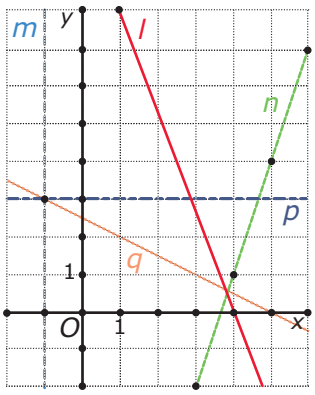
Activiteitenlijst

- een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en de grafiek ervan tekenen;
- een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en de grafiek ervan tekenen;
- formule, vergelijking opstellen van een lijn door twee gegeven punten;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren — lineaire vergelijkingen oplossen.

Testen

Opgave 1

Hier zie je enkele lijnen getekend. De meeste rechte lijnen zijn de grafiek van een lineaire functie.



Figuur 6.1

a Welke van de getekende rechte lijnen is dat niet? En waarom niet?

b Bij lijn n kun je gemakkelijk de richtingscoëfficiënt aflezen. Stel een vergelijking op bij deze lijn.

c Stel ook een formule op bij de lijn l.

d Welke formule hoort er bij lijn p?

Opgave 2

In de figuur bij de vorige **Opgave 1 op pagina 248** zie je enkele lijnen getekend. Bij de meeste rechte lijnen heb je een vergelijking opgesteld.

a Bereken het exacte snijpunt van de lijnen l en n.

b Lijn q gaat door het snijpunt van de lijnen m en p en door het punt $(5,0)$. Onderzoek of de lijnen q, l en n door één punt gaan.

c Bereken de exacte coördinaten van het nulpunt van de lineaire functie die bij lijn n hoort.

Opgave 3

Gegeven zijn de lineaire formules $x - 3y = 9$ en $4x + 2y = 9$.

a Laat zien dat beide formules te herleiden zijn tot lineaire functies van x.

b De lijn p is evenwijdig met de grafiek van $x - 3y = 9$ en gaat door het punt $(3; 5)$. Welke lineaire functie past er bij lijn p?

Opgave 4

De jaarlijkse kosten K (in euro) voor het rijden met een auto met benzinemotor bestaan uit:

- Brandstofkosten B (in euro).
- Onderhoud (in euro).
- Overige vaste kosten voor afschrijving, APK-keuring, wegenbelasting en verzekering (in euro).

Mevrouw Jansen heeft een auto die ze voor haar werk gebruikt. Gemiddeld verbruikt haar auto 8 liter benzine per 100 gereden kilometer en is de benzineprijs € 1,75 per liter. a is het aantal gereden km per jaar.

a Leg uit waarom bij deze gegevens de brandstofkosten voor mw. Jansen recht evenredig zijn met het aantal gereden km per jaar.

b Stel een formule op voor B afhankelijk van a.

In de totale autokosten K moeten ook de overige kosten worden verwerkt. Mw. Jansen schat de onderhoudskosten op € 0,01 per km. En de overige vaste kosten op € 2500,= per jaar.

c Stel nu een formule op voor K afhankelijk van a.

d Waarom is K niet recht evenredig met a?

Van haar werkgever krijgt Mw Jansen een kilometervergoeding van € 0,19 per werkkilometer.

e Bereken bij welke aantallen gereden kilometer per jaar mw. Jansen geld over houdt van haar kilometervergoeding.

Opgave 5

In de zeventiger jaren van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. (Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro). In het Westland werd als volgt betaald:

- bij een jaarverbruik tot 600 m^3 gas : vaste kosten € 21,= per jaar en daarbij € 0,13 per verbruikte m^3 gas;
- bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3 gas : vaste kosten € 48,= per jaar en daarbij € 0,08 per verbruikte m^3 gas.

a Teken een grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1500 m^3.

De grafiek van K valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten K een lineaire functie van a, de hoeveelheid verbruikte m^3 gas.

b Geef voor elk van die lineaire functies een formule.

c Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden, dus onnodig extra gas verbruiken. Waarom deed hij dat?

d Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het onnodig meer gas verbruiken toch een besparing op?

e Welke prijsmaatregelen kon het gasbedrijf nemen om onnodig gas verbruiken te voorkomen?

Toepassen

Opgave 6: Snelkookpan

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,70	1,94
temperatuur T (in °C)	100	105	110	115	120

Tabel 6.1

Figuur 6.2

Teken je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel, dan kun je daar bij redelijk goede benadering een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat die lijn door $(1{,}100)$. Bij de tabel past dan een lineaire functie van de vorm $T = ap + b$. De rechte lijn gaat ook ongeveer door bijvoorbeeld $(1{,}50; 110)$.

a Stel zelf de gegeven formule voor T als functie van p op. Welke eenheden worden er gebruikt?

b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?

c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150 °C bereiken?

Opgave 7: Uitzetting van een metalen staaf

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ gebruikt, waarin l de lengte (in m) van de staaf na het verhitten met ΔT K (kelvin) is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

a Wat stelt l_0 voor?

Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$.
Ga uit van een ijzeren staaf met $l_0 = 0{,}5$ m bij kamertemperatuur (293 K).

b Hoe lang is deze staaf als hij tot 373 K wordt verhit?

c Met hoeveel K moet je deze staaf verhitten om hem 1 mm langer dan l_0 te laten worden?

7

Kwadratische functies

7.1 Kwadratische functies 252
7.2 Ontbinden in factoren 260
7.3 De abc-formule 269
7.4 Handig oplossen 277
7.5 Totaalbeeld 284

7.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratisch verband tussen twee variabelen herkennen aan de standaardformule $y = a(x - p)^2 + q$;
- top en symmetrieas kunnen aflezen uit de standaardformule van een kwadratische functie en dan een tabel maken;
- de grafiek van een kwadratische functie in de standaardvorm tekenen;
- het maximum of minimum van een kwadratische functie vanuit de standaardvorm bepalen;
- nulpunten van een kwadratische functie berekenen door terugrekenen vanuit de standaardformule.

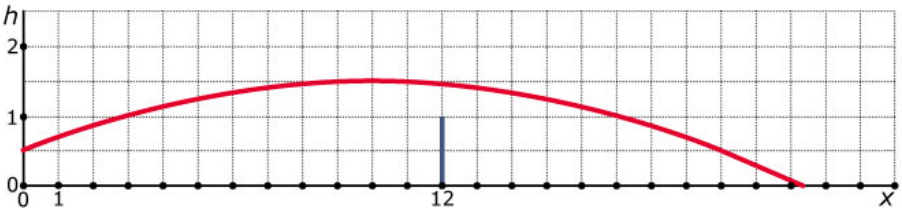
Voorkennis

- het begrip variabele en de basisbewerkingen met getallen en variabelen uitvoeren, met name met kwadraten en wortels;
- haakjes wegwerken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen waarin een kwadraat voorkomt.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: tennisbal



Figuur 7.1

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog. De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule

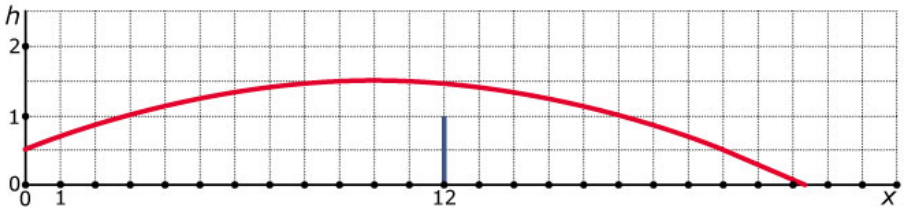
$h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$

Hierin stelt h de hoogte van de bal boven het tennisveld en is x de afstand van de monding van het tenniskanon tot het punt recht onder de bal.

Hoe hoog komt de tennisbal maximaal?

Uitleg

Bekijk de applet: tennisbal



Figuur 7.2

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog. De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule:

$h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$

Deze formule is van de vorm $h = \ldots$ en dus is h een functie van x. In dit geval is er sprake van een kwadratische functie. Hieronder zie je de bijbehorende tabel.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
h	0,50	0,86	1,14	1,34	1,46	1,50	1,46	1,34	1,14	0,86	0,50	0,06	-0,46
toename		0,36	0,28	0,20	0,12	0,04	-0,04	-0,12	-0,20	-0,28	-0,36	-0,44	-0,52

Tabel 7.1

Je ziet dat de toename van de hoogte van de tennisbal steeds wat minder wordt. Hoeveel minder is moeilijk in te schatten. Op het eerste gezicht lijkt er geen regelmaat in de rij van de toenames te zitten. Maar als je de verandering van de toenames bekijkt is deze constant. Toeval of geen toeval?

De grafiek hierboven is een deel van een **parabool**. Je ziet dat het hoogste punt de coördinaten $(10; 1{,}5)$ is. Dit noem je de **top** van de parabool. De top ligt op de **symmetrieas** van de parabool. In dit geval is het de lijn $x = 10$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 253** de baan van een tennisbal die wordt afgeschoten door een tenniskanon. De formule die de baan van de bal beschrijft is gegeven.

a Waarom hoort deze formule bij een kwadratische functie?

b Bereken zelf de hoogte van de tennisbal als $x = 3$.

c Je ziet dat er ook een rij is gemaakt van de toenames van de hoogte telkens als x met 2 wordt verhoogd. Maak zelf een rij met de verandering van die toenames.

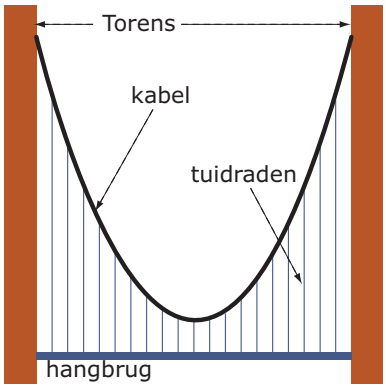
d De top van de parabool kun je uit de tabel aflezen. Maar je kunt hem ook direct uit de formule afleiden. Ga na hoe.

Opgave 2

Een hangbrug is met tuidraden opgehangen aan twee kabels die zijn bevestigd aan twee grote pilaren aan weerszijden van de brug. De kabels hangen dan in de vorm van een parabool. Een mogelijke formule voor zo'n parabool is

$h = 0{,}01 \cdot (a - 70)^2 + 16$

Hierin is h de hoogte van een punt op de kabel boven het wegdek van de brug en a de afstand in meters tot de linker toren.



Figuur 7.3

a Hoe hoog boven het wegdek zit de kabel aan de linker toren vast?

b Maak een tabel met voor a de waarden 0, 10, 20, enzovoorts. Maak ook een rij met afnames en een rij met de verandering van de afnames. Wat valt op bij die laatste rij?

c Hoe groot is de afstand tussen beide torens?

d Welk punt is de top van de parabool? Hoe hoog zit de kabel daar boven het wegdek?

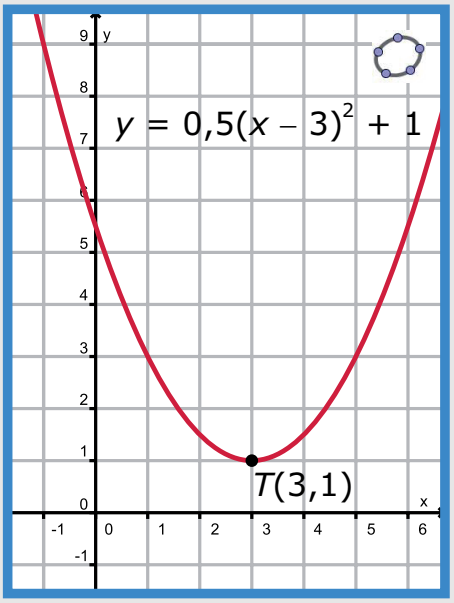
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een **kwadratische functie** hoort een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ met $a \neq 0$. De bijbehorende grafiek is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$.

- Als $a > 0$ heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van q voor $x = p$.
- Als $a < 0$ heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van q voor $x = p$.



Figuur 7.4

En maximum of een minimum noem je een **uiterste waarde** of ook wel een **extreme waarde** van een functie.

Als je in een bijbehorende tabel de waarden van x met vaste stappen laat toenemen, dan kun je een kwadratisch verband herkennen aan de symmetrie in de tabel. Verder kun je de **nulpunten** (de x-waarden waarbij $y = 0$) van een kwadratische functie berekenen door $a(x - p)^2 - q = 0$ op te lossen met de balansmethode. Terugrekenen vanuit een kwadraat doe je door worteltrekken, daarbij krijg je vaak twee oplossingen die de plaats van de snijpunten van de parabool met de x-as aangeven.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = (x - 1)^2 + 3$.

Bepaal de extreme waarde van deze kwadratische functie en teken de bijbehorende parabool.

Antwoord

De top van de parabool kun je uit de formule aflezen: $T(1,3)$. De parabool heeft daarom de lijn $x = 1$ als symmetrieas en je ziet dat het een dalparabool is.
De extreme waarde is daarom een minimum van 3 voor $x = 1$.

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken en de grafiek tekenen.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 255**.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van deze functie een dalparabool is?

b Waarom is het belangrijk om eerst de symmetrieas te weten voor je een tabel maakt?

c Hier zie je een geschikte tabel voor deze parabool. Maak hem af en teken de parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

Tabel 7.2

d Maak een extra rij in deze tabel met daarin de toenames van de y-waarden voor elke stap. En maak ook een extra rij met de verandering van die afnames.

e Is de verandering van de afnames constant?

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies de extreme waarde en de symmetrieas. Vermeld ook welke soort parabool het betreft. Gebruik eventueel de applet in de **Theorie op pagina 254**.

a $y = -(x + 1)^2 - 4$

b $y = 2(x - 4)^2 + 1$

c $y = -0{,}01\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + 2$

Opgave 5

Gegeven is de formule $y = (2x - 4)^2 + 3$.

a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $y = 4(x - 2)^2 + 3$.

b Deze formule hoort dus ook bij een kwadratische functie. Welke uiterste waarde en welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = (x - 1)^2 - 3$.

Bereken de snijpunten van de bijbehorende parabool met beide coördinaatassen.

Antwoord

Het snijpunt met de y-as kun je berekenen door $x = 0$ in te vullen: $y = (0 - 1)^2 - 3 = -2$.
Het snijpunt met de y-as is dus $(0,-2)$.

Met de x-as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door $y = 0$ te nemen.
Dat geeft de vergelijking $(x - 1)^2 - 3 = 0$.
Deze vergelijking kun je oplossen met de balansmethode.
Er zijn twee mogelijke oplossingen, want bij terugrekenen vanuit kwadraat krijg je een positief en een negatief antwoord.

$$
\begin{aligned}
(x - 1)^2 - 3 &= 0 \\
(x - 1)^2 &= 3 \qquad \text{beide zijden 3 aftrekken} \\
x - 1 &= \sqrt{3} \vee x - 1 = -\sqrt{3} \qquad \text{worteltrekken} \\
x &= 1 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{3} \qquad \text{beide zijden +1}
\end{aligned}
$$

Het teken $\vee$ lees je als en/of. Beide antwoorden zijn correct.

Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven. Als dat wordt gevraagd kun je ze benaderen in bijvoorbeeld één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 256** hoe je bij een kwadratische functie de snijpunten van de bijbehorende parabool met de beide coördinaatassen kun opstellen.

a Lees de gevraagde punten uit de figuur af.

b Voer zelf de berekening van de snijpunten met de x-as uit zonder naar **Voorbeeld 2 op pagina 256** te kijken. Schrijf hun exacte coördinaten op.

c Laat zien dat beide snijpunten met de x-as evenver van de symmetrieas van de parabool liggen.

d Geef een benadering van de snijpunten met de x-as in twee decimalen nauwkeurig. Ga na dat ze passen bij wat je uit de figuur hebt afgelezen.

Opgave 7

Een kwadratische functie is gegeven door de formule $y = -4(x - 8{,}5)^2 + 5$.

a Bereken van de bijbehorende parabool het snijpunt met de y-as.

b Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met de x-as.

Oefenen

Opgave 8

Van een kwadratische functie is de formule $y = -0{,}5(x - 6)^2 + 10$.
De bijbehorende grafiek is een bergparabool.

a Waarom is de bijbehorende grafiek een bergparabool? Welk punt is de top van die parabool?

b Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie?

c Maak een geschikte tabel en teken de parabool. Zorg er voor dat de top in ieder geval duidelijk in beeld is.

d Bereken de nulpunten van deze functie.

Opgave 9

Bepaal van elk van de volgende kwadratische functies de extreme waarde.

a $y = (x + 5)^2 + 7$

b $y = -2(x - 12)^2 + 45$

c $y = \left(x + \sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{3}$

d $y = 5{,}5 - 3(x - 2)^2$

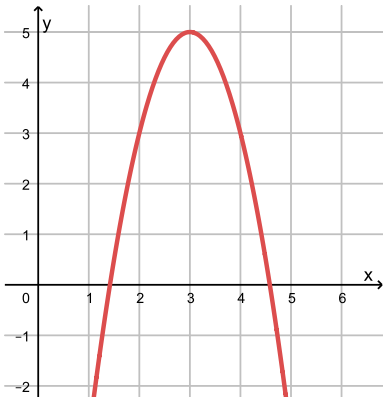
Opgave 10

Je ziet hier een parabool. De bijbehorende formule is
$y = -2(x - 3)^2 + 5$.

a Bepaal de top van deze parabool en bereken het snijpunt met de y-as.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x-as.

c Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van deze parabool met de x-as.



Figuur 7.5

Opgave 11

Gegeven is een parabool met formule $y = -0{,}5(x - 10)^2 + 40$ en een lijn met vergelijking $y = a$.

a Bereken de snijpunten van deze parabool met de beide coördinaatassen.

b Voor welke waarde van a heeft de lijn precies één snijpunt met de parabool?

c Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool twee snijpunten?

d Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Toepassen

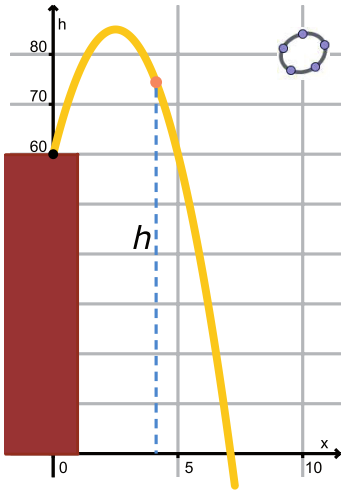
Parabolen komen in de natuur regelmatig voor. Wel moet je daarbij vaak uitgaan van ideale omstandigheden die in de praktijk niet precies gelden. Voorbeelden zijn:

- de baan van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt);
- de hoogte van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt) afhankelijk van de tijd;
- de boog die de kabels van een hangbrug maken als die brug met behulp van zogenaamde tuidraden aan de kabels is opgehangen.

Afhankelijk van de omstandigheden (de kracht waarmee het voorwerp wordt afgeschoten, de afmetingen van de hangbrug) kun je bij die parabolen formules maken waarmee je dan weer berekeningen kunt uitvoeren.

Opgave 12

In een experiment wordt vanaf een 50 meter hoge toren een tennisbal afgeschoten die uiteindelijk zal neerkomen op het plein voor deze toren. De baan die de kogel volgt wordt gefilmd en met behulp van een computerprogramma wordt de baan van de bal berekend. De hoogte van de tennisbal boven de grond wordt bij benadering gegeven voor de formule $h = -4(x - 2{,}5)^2 + 85$, waarin h de hoogte van de bal boven de begane grond in meters en x de afstand van het punt op de grond recht onder de plaats van afschieten en het punt op de grond recht onder de bal is. Ook x is in m.



Figuur 7.6

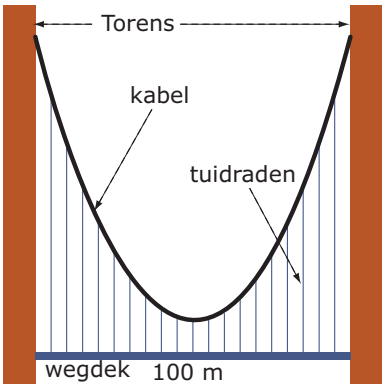
a Waaraan kun je zien dat deze tennisbal nogal steil omhoog wordt geschoten?

b Hoe hoog boven de grond komt deze tennisbal maximaal?

c Hoeveel m vanaf het punt op de grond recht onder het afschietpunt komt de bal weer op de grond?

Opgave 13

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens op 100 m boven het wegdek. De kortste van de 19 tuidraden is 10 m lang.
Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de x-as samenvalt met het wegdek en de y-as over de kortste tuidraad loopt. Neem aan dat de eenheden op beide assen in 1 m zijn. De formule van de bijbehorende kwadratische functie is dan $y = \frac{9}{250}x^2 + 10$.



Figuur 7.7

a Ga na dat de parabool bij deze formule past bij de tekening van de hangbrug.

b Hoe lang is de negentiende tuidraad gezien vanaf de linker toren?

Testen

Opgave 14

Gegeven is de kwadratische functie $y = -0{,}05(x - 6)^2 + 2$.

a Bepaal de maximale waarde van deze functie. Waarom is hier van een maximum sprake?

b Teken de grafiek van y afhankelijk van x.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool die de grafiek van deze functie is met beide assen.

d Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van deze functie met de lijn $y = 0{,}2$.

7.2 Ontbinden in factoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische functie herkennen aan de formules $y = a(x - m)(x - n)$ en $y = ax^2 + bx + c$;
- nulpunten en top van een kwadratische functie berekenen door ontbinden in factoren.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ berekenen;
- haakjes wegwerken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen waarin een kwadraat voorkomt.

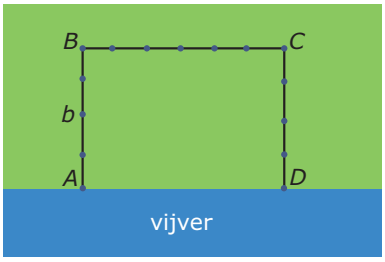
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: weiland tegen vijver

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie figuur hieronder. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?

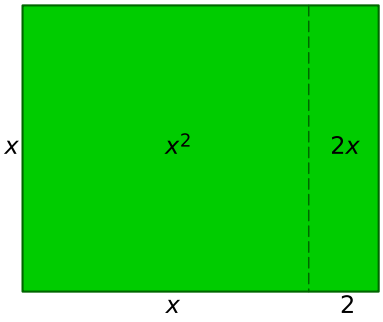


Figuur 7.1

Uitleg 1

Een kwadratisch verband kan ook de vorm $y = x^2 + 2x$ hebben, bijvoorbeeld als de haakjes zijn weggewerkt. Maar ook dan wil je de nulpunten kunnen berekenen, dus $x^2 + 2x = 0$ oplossen.

In de figuur zie je dat $x^2 + 2x = x \cdot (x + 2)$.
Je hebt zo van een optelling van twee termen een vermenigvuldiging gemaakt. De vergelijking wordt daardoor $x \cdot (x + 2) = 0$. En van zo'n vergelijking kun je bijna meteen de oplossingen zien.



Figuur 7.2

De uitkomst van het vermenigvuldigen van twee getallen kan namelijk alleen maar 0 zijn als één van die twee getallen zelf 0 is of beide getallen 0 zijn.
Voor $x \cdot (x + 2) = 0$ betekent dit dus: $x = 0$ of $x + 2 = 0$ of beide zijn 0.

Kortweg: $x \cdot (x + 2) = 0$ geeft $x = 0$ en/of $x + 2 = 0$.
Omdat voor 'en/of' het teken $\vee$ wordt gebruikt, kan het zelfs nog korter:
$x \cdot (x + 2) = 0$ geeft $x = 0 \vee x + 2 = 0$.

De vergelijking $x + 2 = 0$ levert $x = -2$ op.
En de oorspronkelijke vergelijking heeft daarmee de oplossing $x = 0 \vee x = -2$.
Dat zijn twee waarden voor x die beide de gegeven vergelijking waar maken.

De gebruikte techniek heet een factor buiten haakjes halen.

Opgave 1

In de **Uitleg 1 op pagina 260** zie je hoe de vergelijking $x^2 + 2x = 0$ kan worden opgelost. Je haalt dan een x buiten haakjes. De volgende vergelijkingen kun je ook op die manier oplossen. Laat zien hoe.

a $x^2 + 6x = 0$

b $x^2 - 13x = 0$

c $x^2 = 3x$

d $5x - x^2 = 0$

Opgave 2

Los de vergelijkingen op door een factor buiten haakjes te halen.

a $2x^2 - 5x = 0$

b $8x = -3x^2$

c $0{,}01x^2 - x = 0$

d $x(x - 3) = 4x$

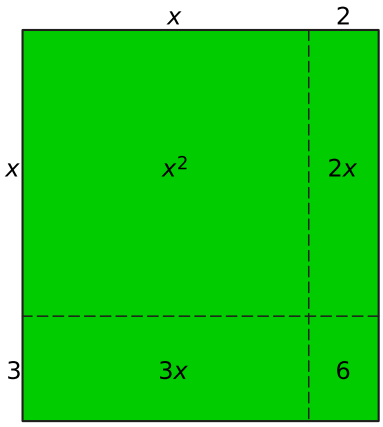
Uitleg 2

De nulpunten van een kwadratische functie als $y = x^2 + 5x + 6$ kun je vinden door $x^2 + 5x + 6 = 0$ op te lossen.

In de figuur zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 2)$.
Immers $3 + 2 = 5$ en $3 \cdot 2 = 6$. Je hebt zo van een optelling van drie termen een vermenigvuldiging van twee factoren gemaakt. De vergelijking wordt daardoor $(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$. En van zo'n vergelijking kun je bijna meteen de oplossingen zien.

$(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$ betekent namelijk: $x + 3 = 0$ of $x + 2 = 0$ of beide zijn 0.

Kortweg:
$(x + 3) \cdot (x + 2) = 0$ is gelijkwaardig met $x + 3 = 0 \vee x + 2 = 0$.



Figuur 7.3

De vergelijking $x + 3 = 0$ levert $x = -3$ op.
En de vergelijking $x + 2 = 0$ levert $x = -2$ op.
De oorspronkelijke vergelijking heeft daarmee de oplossing $x = -3 \vee x = -2$.
Dat zijn twee waarden voor x die beide de gegeven vergelijking waar maken.

De gebruikte techniek heet de somproductmethode, omdat de twee waarden 3 en 2 kunnen worden gevonden uit het feit dat hun som $3 + 2 = 5$ is en hun product $3 \cdot 2 = 6$ is.

Als je een factor buiten haakjes haalt of de som- en productmethode gebruikt, noem je dat ontbinden in factoren. Dat is een manier om sommige vergelijkingen snel op te lossen. Maar dan moet het ontbinden in factoren wel kunnen. En dat is lang niet altijd het geval.

Opgave 3

In de **Uitleg 2 op pagina 261** zie je hoe de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$ wordt opgelost zonder een kwadraat af te splitsen. Er wordt een figuur gebruikt. Maar je kunt de som- en productmethode ook toepassen zonder een figuur te maken.

a Werk in de uitdrukking $(x + 3)(x + 2)$ de haakjes weg en herleid hem zover mogelijk.

b Wat valt je op aan het getal voor de x als je de haakjes hebt weggewerkt? En wat valt op aan de term waar geen x in voorkomt?

c Maak een tabel van alle mogelijke combinaties van twee gehele getallen (ook negatieve) die als product 6 hebben.

d Hoe vind je met behulp van de tabel bij c de juiste ontbinding van $x^2 + 5x + 6$?

e Gebruik een vergelijkbare tabel om een ontbinding te vinden van $x^2 + 9x + 18$.

f Los op: $x^2 + 9x + 18 = 0$

Opgave 4

Los de vergelijkingen op door de som- en productmethode te gebruiken.

a $x^2 + 6x + 5 = 0$

b $x^2 + 19x + 84 = 0$

c $x^2 + 7x + 12 = 0$

d $x^2 + 7x + 10 = 0$

Opgave 5

Je kunt het ontbinden in factoren met de som- en productmethode ook toepassen als er negatieve getallen in je vergelijking voorkomen. Los daarmee de volgende vergelijkingen op.

a $x^2 - 5x + 6 = 0$

b $x^2 + 5x - 6 = 0$

c $x^2 - 5x - 6 = 0$

d $x^2 - 6x + 5 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

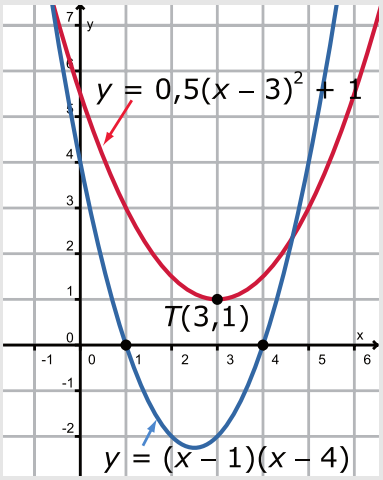
Bekijk de applet: kwadratische functie

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aannemen:

- $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ waarin (p,q) de **top** van de parabool is.
- $y = a(x - m)\,(x - n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

Dat het hier voor $a \neq 0$ bij alledrie om kwadratische functies gaat, wordt duidelijk als je bij de eerste twee vormen de haakjes uitwerkt. De hoogste macht van x die dan in de formule voorkomt is 2.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x-as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.



Figuur 7.4

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a(x - m)\,(x - n)$ kun je juist de nulpunten meteen zien: $(m,0)$ en $(n,0)$. De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een x-coördinaat heeft midden tussen m en n in.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ probeer je door **ontbinden in factoren** in de vorm te brengen waarin je de nulpunten meteen kunt zien. Dat lukt echter niet altijd...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: kwadratische functie

Bereken de nulpunten en het minimum van de kwadratische functie $y = 3x^2 + 8x$

Antwoord

Begin met de nulpunten: $3x^2 + 8x = 0$.

Beide termen bevatten een factor x.
Die kun je buiten haakjes halen: $x(3x + 8) = 0$.

Er blijft een product over waar 0 uit komt: $x \cdot (3x + 8) = 0$.

Omdat een product van twee getallen alleen 0 kan zijn als een van beide of beide getallen 0 zijn, kun je dit schrijven als $x = 0 \vee 3x + 8 = 0$. De gezochte oplossingen zijn daarom $x = 0$ en $x = -\frac{8}{3}$.
De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = -\frac{8}{3}$, dus de symmetrieas is $x = -\frac{4}{3}$.
Het minimum is $-\frac{16}{3}$ bij $x = -\frac{4}{3}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 1 op pagina 263** zie je hoe je de vergelijking $3x^2 + 8x = 0$ snel kunt oplossen.

a Waaraan zie je dat deze vergelijking kan worden opgelost door een x buiten haakjes te halen?

b Laat zien hoe je aan het antwoord komt.

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk op.

a $2x^2 - 13x = 0$

b $3x^2 = 71x$

c $x(x - 3) = 2x$

d $x^2 = 81$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: kwadratische functie

Gegeven is de kwadratische functie $y = x^2 - 4x - 5$.
Bereken de snijpunten met de assen en de top van de bijbehorende parabool.

Antwoord

Het snijpunt met de y-as kun je berekenen door $x = 0$ in te vullen:
$y = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$ geeft het punt $(0, -5)$.

Met de x-as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door $y = 0$ te nemen.
Dat geeft de vergelijking $x^2 - 4x - 5 = 0$.
Met de somproductmethode vind je:
$(x - 5)(x + 1) = 0$ en dus:
$x - 5 = 0 \vee x + 1 = 0$ zodat $x = 5 \vee x = -1$.
Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven.

De top van de parabool ligt op de symmetrieas: $x = \frac{5+-1}{2} = 2$.
De top is dus $(2, -9)$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2 op pagina 264** zie je hoe een vergelijking wordt opgelost met de somproductmethode.

a Waarom maak je bij de somproductmethode een tabel voor het product -5 en niet voor de som -4?

b Laat zien dat de ontbinding klopt door zelf die tabel te maken.

c Kun je de vergelijking $x^2 - 4x - 6 = 0$ oplossen door ontbinden in factoren?

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met de som- en productmethode.

a $x^2 + 6x + 8 = 0$

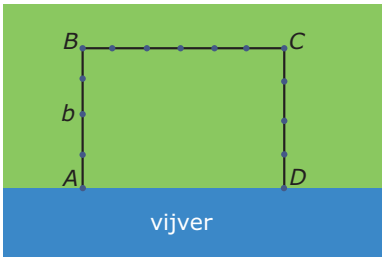
b $x^2 + 3x = 18$

c $x^2 + 15 = 8x$

d $x^2 - 16 = 0$

Voorbeeld 3

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een rechthoekig stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie figuur hiernaast. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB.
Bereken de maximale oppervlakte van dit weiland.



Figuur 7.5

Antwoord

Voor BC krijg je dan een lengte van $100 - 2b$.
Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$

Dit is een kwadratische functie met als grafiek een bergparabool.
De top van die parabool kun je berekenen vanuit de nulpunten.
Voor de nulpunten geldt: $b(100 - 2b) = 0$.
Dit levert na splitsen op: $b = 0 \vee b = 50$.
De symmetrieas zit daarom bij $b = 25$.
Het bijbehorende maximum is $y = 1250$ en dit is dus de maximale oppervlakte van het weiland in m^2.

Opgave 10

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 3 op pagina 265**.

a Waarom is de lengte van BC gelijk aan $100 - 2b$?

b De oppervlakte van het weiland wordt $A = 100b - 2b^2$.
Hoe zie je aan die formule dat er sprake is van een maximum?

c Voer zelf de berekening van de maximale oppervlakte uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

Oefenen

Opgave 11

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

a $x^2 - 27x = 0$

b $x^2 + 18x + 80 = 0$

c $x^2 + 3x = 10$

d $x^2 - 10x + 24 = 0$

e $x^2 = 5x + 14$

f $2x^2 = 7x$

Opgave 12

Van twee getallen is het verschil 17 en het product 168.

Bereken beide getallen.

Opgave 13

Los de vergelijkingen op, als dat mogelijk is door ontbinden in factoren.

a $2x^2 - 10x = 12$

b $x(x + 4) = 2x + 8$

c $(2x + 1)(x + 6) = 0$

d $(2x + 1)(x + 6) = 6$

e $(2x + 1)(x + 6) = 13x$

Opgave 14

Een parabolische boog is gegeven door de formule $y = -0{,}01x^2 + 2x$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x-as.

b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

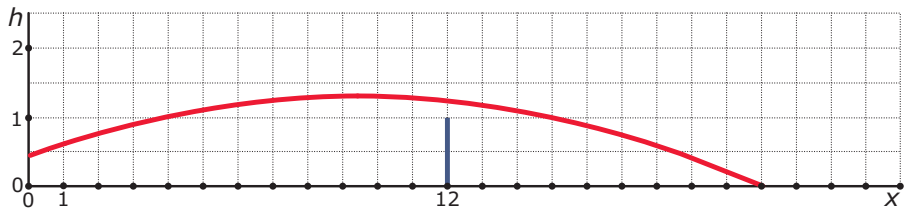
c Los de kwadratische vergelijking $-0{,}01x^2 + 2x = 19$ op.

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-0{,}01x^2 + 2x = 100$?

Opgave 15

Je ziet hier de baan van een tennisbal die door een tennisser op de baseline wordt geraakt en aan de andere kant van het net op de grond komt. Veronderstel dat de baan van de bal een zuivere parabool is. Er geldt:

$h = -0{,}01x^2 + 0{,}19x + 0{,}42$



Figuur 7.6

a Op welke hoogte wordt de bal boven de baseline geraakt?

b Na hoeveel m vanaf de baseline komt de bal (voor de andere baseline) weer op de grond?

c Waar zit het hoogste punt van de bal?

Toepassen

Ook in de economie komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Figuur 7.7

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.

prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Tabel 7.1

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p.
Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekend door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 16

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in **Toepassen op pagina 267**.

a Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.

b Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.

c Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan alsmaar stijgen?

d Waaraan zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waaraan zie je dat de opbrengst een maximum heeft?

e Bereken het maximum van R. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk opbrengst wil hebben?

f Is het verstandig om een zo groot mogelijk opbrengst te willen hebben?

Opgave 17

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijk opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

a Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?

Neem aan dat het maken van elke kop soep € 0,50 kost.

b Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)\,(340 - 2p)$.

c Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?

d Bereken het maximum van W. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk winst wil hebben?

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op de handigste wijze op.

a $x^2 = 16x$

b $x^2 = 16x + 17$

c $x^2 = 16x - 55$

d $(2x + 3)(x + 8) = 19x$

Opgave 19

Een parabolische boog is gegeven door de formule $y = -0{,}04x^2 + 4x$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x-as.

b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

c Los de kwadratische vergelijking $-0{,}04x^2 + 4x = 36$ op.

7.3 De abc-formule

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische vergelijking oplossen met de abc-formule.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie berekenen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen (balansmethode) en/of ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x + 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 7 = 0$ oplossen.

Kun je deze vergelijking exact oplossen?

Uitleg

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Soms kun je een kwadratische vergelijking oplossen, bijvoorbeeld door ontbinden of door terugrekenen. Maar dat lukt lang niet altijd. Wiskundigen hebben zich al honderden jaren geleden over dit probleem gebogen. Ze hebben de ‘abc-formule’ gevonden:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $a \neq 0$.

Als je nu $x^2 + 6x + 7 = 0$ wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af $a = 1$, $b = 6$ en $c = 7$. Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$x = \frac{-6+\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1} \vee x = \frac{-6-\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}$

ofwel:

$x = \frac{-6+\sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6-\sqrt{8}}{2}$

Het is handiger om de vorm $b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat afzonderlijk te berekenen. Je noemt deze uitdrukking de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 269** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

a Los zelf de vergelijking $x^2 + 6x + 7 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

b Vergelijk je antwoord met dat in de **Uitleg op pagina 269**. Komen ze overeen?

c Geef benaderingen van beide x-waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

In **Opgave V1 op pagina 269** werd de oplossing van $x^2 + 6x + 8 = 0$ gevraagd.

d Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de abc-formule. Ga na, dat je oplossing overeen komt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

e Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?

f Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

a $x^2 + 12x + 4 = 0$

b $2x^2 + 5x - 10 = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 17 - 10x$

e $2x^2 + 16 = -12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Opgave 3

Bekijk in de **Uitleg op pagina 269** wat de discriminant van een kwadratische vergelijking is.

Bekijk de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

a Bereken de discriminant van deze vergelijking.

b Bereken vervolgens de oplossing.

c Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$.

d Bereken eerst de discriminant. Leg uit dat je aan de discriminant kunt zien dat de oplossing van de vergelijking maar één waarde heeft. Bereken vervolgens die éne oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.

e Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

a $2x^2 + 5x - 20 = 0$

b $11 + 3x^2 = 9x$

c $3x^2 = 4x - 1$

d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe $ax^2 + bx + c = 0$ in algemene zin oplossen. Je schrijft die formule daartoe eerst in de vorm $a(x - p)^2 + q = 0$ waarin (p,q) de top van de parabool is.

Die top ga je eerst berekenen. Daartoe bepaal je de symmetrieas. Deze lijn is de middelloodlijn tussen twee punten op gelijke hoogte op de parabool, bijvoorbeeld op hoogte $y = c$. Die twee punten bereken je dus uit $ax^2 + bx + c = c$, ofwel $ax^2 + bx = 0$. Dit geeft $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$. De symmetrieas is daarom $x = -\frac{b}{2a}$. Dit invullen levert de top op: $T\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Dus moet je oplossen

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$. Dit geeft $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Worteltrekken:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

En nu een beetje herleiden:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ te berekenen.

- Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D = 0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D < 0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip 'quadratic formula' in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $(x - 2)(x - 3) = 3$ op.

Antwoord

Haakjes uitwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking $x^2 - 5x + 3 = 0$ op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

Lees af: $a = 1$, $b = -5$ en $c = 3$.

En dus is $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$. De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is $x = \frac{--5 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 272** hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst!

a Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?

b Laat zien, dat je door haakjes uitwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.

c Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?

d Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

a $3x^2 + 4 = 7$

b $(x + 1)(2x - 1) = 4$

c $4x = x^2 + 7$

d $(x + 3)^2 = 4$

e $(2x + 4)^2 = 32x$

f $(2x + 4)^2 = 32$

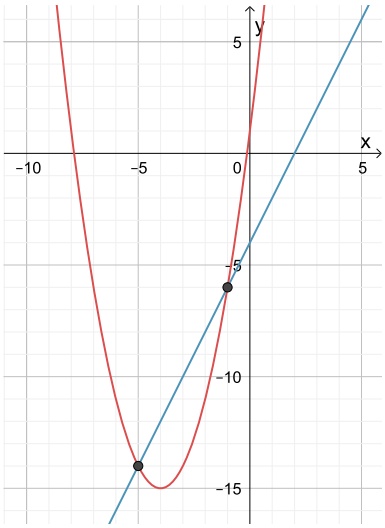
Opgave 7

De oppervlakte van een rechthoek is 23,6 cm^2 en zijn breedte is 3,10 cm korter dan zijn lengte.

Bereken de afmetingen van deze rechthoek in drie significante cijfers.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn een kwadratische functie met formule $y_1 = x^2+8x+1$ en een lineaire functie met formule $y_2 = 2x - 4$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.



Figuur 7.1

Antwoord

In de snijpunten geldt $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit $x^2 + 6x + 5 = 0$ lees je af: $a = 1$, $b = 6$ en $c = 5$.

De oplossing is $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. En dus vind je $x = -5 \vee x = -1$.

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten (-5,-14) en (-1,-6) oplevert.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 273** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

a In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de somproductmethode. Laat dat zien.

b Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?

c Als je de twee x-waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y-waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.

d Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

Opgave 9

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x + 2)(x - 3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.

Opgave 10

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2 op pagina 273** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x + 1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

a Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?

b Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?

c Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 11

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a $x^2 + 5x + 1 = 0$

b $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c $-5x^2 - 7x = 1$

d $x(2x + 3) = 3$

e $x(2x + 3) = 3x$

f $x(2x + 3) = 0$

g $(x + 3)(x - 5) = 2$

h $(x + 3)(x - 5) = 0$

i $(2x + 5)^2 = 5$

Opgave 12

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

a $2x^2 + 5x - 1 = 0$

b $5x^2 - x = 1$

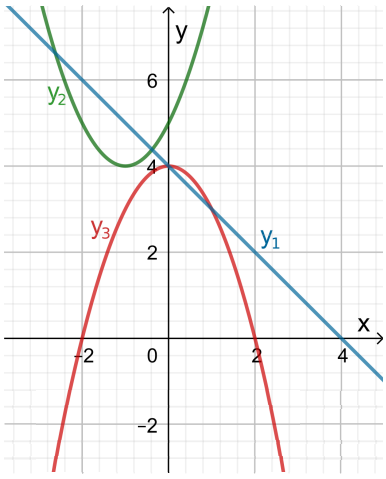
c $-2x^2 + 6x = 18$

d $(1 - 2x)^2 = 12$

e $(x - 1)^2 + 4 = 0$

Opgave 13

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.
Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.



Figuur 7.2

a $y_1 = y_3$

b $y_1 = y_2$

c $y_2 = y_3$

d $y_3 = 0$

e $y_2 = 0$

f $y_2 = 4$

Opgave 14

Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.

b $y_1 = (x - 10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

Opgave 15

Bereken de diameter van een massieve cilinder met een hoogte van 82,0 cm en een totale oppervlakte van 2,0 m^2.

De oppervlakte A van een cilinder met diameter d en hoogte h is: $A = \pi dh + 0{,}5\pi d^2$.

Opgave 16

Oefen nu het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via het **Practicum**.

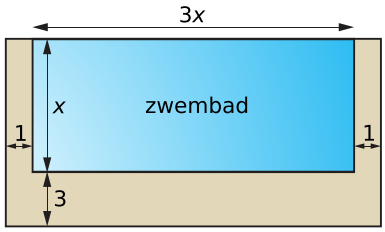
Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Kwadratische vergelijkingen komen veel voor in situaties waarin het over oppervlakte gaat.
Dat is niet zo vreemd: 'kwadraat' is eigenlijk een ander woord voor 'vierkant'.
Hier zie je twee situaties die over oppervlakte gaan en waarin kwadratische vergelijkingen voorkomen.

Opgave 17

Annemie heeft een zwembad in haar tuin. De lengte van haar zwembad is drie keer zo lang als de breedte. Aan een lange kant van het zwembad staan bomen, dat laat ze zo. Aan de andere drie kanten laat ze tegels leggen. Aan de twee korte kanten van het zwembad komen de tegels 1 m breed te liggen, en aan de lange kant komen de tegels 3 m breed te liggen zodat ze daar ligstoelen neer kan zetten.



Figuur 7.3

De oppervlakte van het zwembad met de tegels erbij wordt anderhalf keer de oppervlakte van het zwembad zonder tegels.

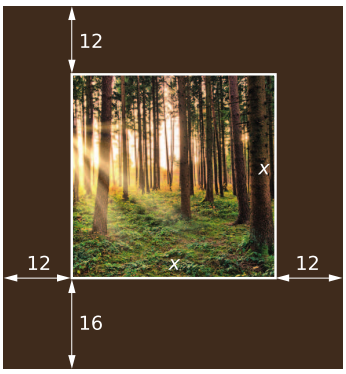
Bereken de afmetingen van het zwembad in meters op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Om een vierkante foto komt een brede rechthoekige lijst. De breedte van de lijst aan de onderkant van de foto is 16 cm. Aan de andere drie kanten is de lijst 12 cm breed. De foto met lijst krijgt daardoor een twee keer zo grote oppervlakte dan de foto zonder lijst heeft.

a Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van de foto met lijst. Noem de lengte en de breedte van de foto x.

b Bereken de waarde van x in mm nauwkeurig.



Figuur 7.4

Opgave 19

Op een groot terrein wordt voor een tennisclub een aantal tennisvelden aangelegd. Voor elk van die velden is 950 m^2 nodig, hoewel elk tennisveld 24 bij 11 m is. Dat komt door een overal even brede looprand om elk veld.

Hoe breed wordt die looprand?

Testen

Opgave 20

Los de volgende vergelijkingen op de handigste wijze op. Gebruik de abc-formule alleen als dat nodig is.

a $3x^2 = 16x$

b $x^2 = 8x + 17$

c $x(2x - 3) = 6x - 9$

d $2x(6 - x) = 12x - 16$

e $(2x + 3)(x + 8) = 24$

Opgave 21

De parabolische baan van een afgeschoten voorwerp is gegeven door de formule $y = -0{,}04x^2 + 4x + 8$

Hierin is:

- y de hoogte van het voorwerp boven de grond in m
- x de afstand over de grond tot recht onder het voorwerp in m

Het voorwerp wordt afgeschoten bij $x = 0$.

a Na hoeveel m komt het voorwerp weer op de grond?

b Hoe hoog komt het voorwerp maximaal?

c Tussen welke waarden van x is $y > 90$?

7.4 Handig oplossen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische vergelijking of ongelijkheid handig oplossen;
- de top van een parabool snel bepalen.

Voorkennis

- nulpunten, symmetrieas en top van een kwadratische functie berekenen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren en/of de abc-formule.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ oplossen.

Doe dit op zoveel mogelijk verschillende manieren. Welke manier is het handigst?

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$.

Hoe bereken je de top van de bijbehorende parabool?

Uitleg

Bekijk de applet: kwadratische functie

Een kwadratische functie is gegeven door $y = 2x^2 - 6x - 1$.
De grafiek is een dalparabool waarvan je snel de top wilt weten. Dat doe je door de nulpunten te bepalen met de abc-formule:

$2x^2 - 6x - 1 = 0$ geeft $x = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{4}$.

Dus je krijgt $x = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{44}}{4}$ en $x = \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{44}}{4}$.

De symmetrieas is daarom $x = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

Dat is direct uit de abc-formule af te lezen: bij een kwadratische functie als $y = ax^2 + bx + c$ zit de symmetrieas altijd bij $x = -\frac{b}{2a}$, want de nulpunten zijn $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Belangrijk is vooral dat dit ook geldt als er helemaal geen nulpunten zijn omdat de discriminant negatief is.

Bij het oplossen van de vergelijking die nodig is om de nulpunten te berekenen is de abc-formule vaak handig. Maar zeker niet altijd, je zult ook regelmatig werken met ontbinden in factoren en terugrekenen. En er zijn nog meer handige methoden.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 277** hoe je snel de top van een parabool bepaalt.
Gegeven is de kwadratische functie $y = 2x^2 + 4x + 5$.

a Bepaal de top van de bijbehorende parabool.

b Leg uit hoe je aan de top van deze parabool kunt zien dat de kwadratische functie geen nulpunten heeft.

c Hoe kun je aan de parabool zien dat de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 5$ twee oplossingen heeft?

d Los de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 5$ zo handig mogelijk op.

e Los de vergelijking $2x^2 + 4x + 5 = 21$ zo handig mogelijk op.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk op.

a $x^2 + 12x + 4 = 0$

b $2x^2 + 5x = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 18 - 9x$

e $2x^2 + 16 = 12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke kwadratische functie van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ heeft een symmetrieas $x = -\frac{b}{2a}$.

Dat is tevens de ***x*-waarde van de top**.
Je vindt de top door deze x-waarde in te vullen in de formule.

Dat komt omdat de nulpunten $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ zijn en de symmetrieas daar midden tussendoor gaat.
Dit geldt ook als er helemaal geen nulpunten zijn omdat de discriminant negatief is.

Je kunt met die top eenvoudig vaststellen of er nulpunten zijn:

- Als $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
  Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
  Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
  Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.
- Als $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
  Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
  Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
  Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.

Voorbeeld 1

Bereken de top van de paraboolboog die wordt gegeven door de formule $y = -2x^2 + 16x + 2$ en teken deze boog.
x is de horizontale afstand in m recht onder een punt van deze boog,
y is de hoogte in m boven de grond ($y = 0$) in m.

Antwoord

De gegeven formule heeft de vorm $y = ax^2 + bx + c$ met $a = -2$, $b = 16$ en $c = 2$.

De symmetrieas van zo'n parabool heeft vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.

In dit geval is die symmetrieas dus $x = -\frac{16}{2 \cdot -2} = 4$.

De top van de parabool is daarom $(4,34)$.

Nu kun je een tabel maken rondom $x = 4$ en de parabool tekenen.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 279** zie je hoe je de top van een bergparabool kunt vinden.

a Reken zelf de coördinaten van de top van deze parabool na.

b Maak een geschikte tabel en teken deze parabool.

c Bereken in cm nauwkeurig hoe ver de twee punten waarvoor $y = 0$ uit elkaar liggen.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies het maximum of het minimum.
Ga vervolgens na of er nulpunten zijn en zo ja, bereken die zo handig mogelijk.

a $y = 3x^2 - 15x$

b $y = 2x^2 - 8x + 16$

c $y = -0{,}1x^2 - 4x + 1$

d $y = x^2 - 8x + 16$

Opgave 5

Een kogelstootster stoot haar kogel volgens een mooie parabolische baan. Die baan is door haar coach gefilmd en hij heeft er een formule van op laten stellen. Bij deze baan past de formule $h = -0{,}026x^2 + 0{,}52x + 1{,}80$. Hierin is h de hoogte van het midden van de kogel boven een punt op de grond dat x m verwijderd is van het punt recht onder het midden van de kogel op het moment van loslaten.

a Op welke hoogte werd de kogel losgelaten?

b Bereken het hoogste punt van de baan van de kogel.

c Teken zelf de volledige baan van deze kogel in een assenstelsel. Schat daarmee de afstand die deze kogelstootster haalt.

Voorbeeld 2

De hoogte h in meter van een massa die verticaal omhoog wordt geschoten bedraagt na t seconden:

$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- v_0 de beginsnelheid van 30 m/s
- $g \approx 9{,}81$ m/s^2 de gravitatieconstante

Hoe hoog komt deze massa maximaal en hoe lang is de hoogte meer dan 16 m?

Antwoord

Er geldt: $h = 30t - 4{,}905t^2$.

Hoewel de werkelijke baan van de massa niet parabolisch is, is de grafiek van h als functie van t dit wel.

De symmetrieas van die bergparabool is $t = -\frac{30}{-9{,}81} \approx 3{,}06$ s.
De maximale hoogte is dus $h \approx 45{,}87$ m.

De hoogte van deze massa is 16 m als $30t - 4{,}905t^2 = 16$, of $4{,}905t^2 - 30t + 16 = 0$.
Dit los je het handigst op met de abc-formule.
Je vindt $t \approx 5{,}53 \vee t \approx 0{,}59$.

Dus de massa zit ongeveer 4,9 seconde boven de 16 m.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 280**.

a Waarom is de baan van de gegeven kwadratische functie een parabool, terwijl de massa alleen loodrecht omhoog en weer naar beneden gaat?

b Reken de maximale hoogte zelf na.

c Hoe lang zit de massa boven de 30 m? (Antwoord in tienden van seconden.)

Opgave 7

Stel je voor dat iemand van een hoog gebouw een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg s (in meter) en de snelheid v (in meter per seconde) af van de tijd t (in seconden) volgens de formules $s = 4{,}9t^2$ en $v = 9{,}8t$.

a Geef een formule voor de hoogte h van het steentje boven de grond als functie van t.

b Bereken het tijdstip waarop het steentje op de grond komt op één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord in km/h.

Oefenen

Opgave 8

Je ziet hier een aantal kwadratische formules. Bereken telkens de top van de bijbehorende parabool en ga na of er nulpunten zijn.
Zo ja, bereken die nulpunten op een zo handig mogelijke manier.

a $y = 2x^2 + 5x$

b $y = -0{,}4(x - 10)^2 + 16$

c $y = x(x - 4) + 20$

d $y = 0{,}2x^2 - 5x - 10$

e $y = 3(x - 5)(2x - 6)$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $(2x - 3)(x - 1) = 3$

b $(2x - 3)(x - 1) = 0$

c $(s - 3)^2 + 5 = 0$

d $4(s + 1)^2 - 7 = 2$

e $t - (t - 1)^2 = -4$

f $(x - 2)^2 = (4 - 3x)^2$

Opgave 10

Je ziet hier de beroemde hangbrug de Golden Gate Bridge in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

Figuur 7.1

De afstand tussen beide torens is 1280 m. En de afstand van het wegdek tot de bovenkant van de torens is ongeveer 152 m.

Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule:

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x de afstand tot het midden van de torens en y de hoogte van de staalkabels boven het wegdek, beide in meters.

Ga ervan uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

a Er zijn twee even lange tuidraden die 615 m uit elkaar aan de brug zijn bevestigd. Hoe lang zijn die tuidraden?

b Er zijn twee tuidraden die 111,2 m lang zijn. Hoe ver zitten die twee tuidraden uit elkaar aan de brug bevestigd? Bepaal het antwoord door een bijpassende vergelijking op de lossen.

Opgave 11

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

a Maak de grafiek van h.

b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten?

c Bereken na hoeveel seconden de vuurpijl weer op diezelfde hoogte is.

d Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?

e Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?

f Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Deze twee portieken zijn ontworpen door een architect die hoorde tot de Amsterdamse School. Er wordt beweerd dat ze een mooie paraboolvorm hebben. Je zou die vorm van de rand van het metselwerk langs beide kozijnen moeten kunnen beschrijven met formules. Neem je in het midden tussen beide portieken een verticale h-as en verder de horizontale x-as precies over de stoep, dan vind je $h_1 = -5x^2 + 11x - 2{,}85$ en $h_2 = -5x^2 - 11x - 2{,}85$.

Figuur 7.2

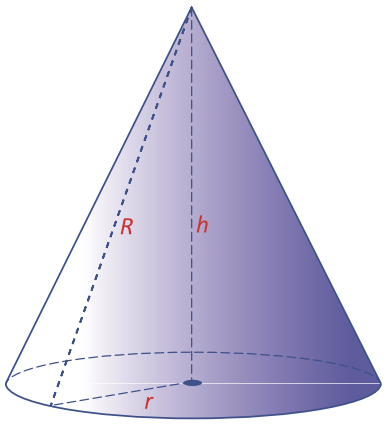
a Van welke hoogte van de kozijnen is daarbij uitgegaan?

b Hoe breed is dan de opening van elk portiek op de grond?

c Teken beide portieken als deze formules kloppen. Is er werkelijk sprake van een paraboolvorm?

Toepassen

Je ziet hier een rechte kegel (de hoogte zit loodrecht boven het middelpunt van de grondcirkel).
r is de straal van het grondvlak (een cirkel);
h is de hoogte (afstand van het midden van het grondvlak tot de top);
R is de 'lengte' van de buitenmantel gemeten vanaf de top tot de grondcirkel.



Figuur 7.3

Voor zo'n kegel geldt:

- het volume V is $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- de oppervlakte A is $A = \pi r^2 + \pi rR$

Je ziet, dat met de oppervlakte in dit geval de totale buitenoppervlakte wordt bedoeld, inclusief de grondcirkel.

Opgave 13

De totale buitenoppervlakte van een massieve kegel is 486,2 cm^2 en de lengte van de mantel is 15,3 cm.

Bereken de diameter van de grondcirkel.

Opgave 14

Een glazen vaas heeft de vorm van een omgekeerde kegel waar een iets kleinere omgekeerde kegel uit is gehaald. De binnendiameter is bovenaan gemeten 1,4 cm kleiner dan de buitendiameter. De hoogte van de buitenste kegel is 40 cm en die van de binnenste kegel is 38 cm. De gebruikte hoeveelheid glas is 4,16 cm^3.

Figuur 7.4

a Bereken de binnendiameter en de buitendiameter van de vaas in mm nauwkeurig.

b Bereken hoeveel cm^3 water er maximaal in de vaas gaat.

Testen

Opgave 15

Los op.

a $x - x^2 = 0{,}25$

b $x(x + 4) = 2x + 8$

c $2x(x - 4) = 3 - 8x$

d $0{,}01x^2 - x = 0$

Opgave 16

Tussen de woonkamer en de keuken van Jan en Mascha zit een parabolische boog volgens de formule: $h = -2{,}5x^2 + 4{,}5x$. Hierin is h de hoogte van de boog in meters en x de horizontale afstand gemeten vanaf linksonderaan de boog.

Bij een verhuizing moet er een kast door de boog getild worden. De kast is 0,5 m diep, en zowel 1,80 m hoog als 1,80 m breed.

Controleer met een berekening of de kast door de boog kan.

7.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met formules heb je al leren werken. In dit onderwerp is het begrip kwadratische functie in een drietal formulevormen ingevoerd. Het oplossen van kwadratische vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen (met terugrekenen, ontbinden in factoren en de abc-formule) is voorbij gekomen. En je hebt geleerd snel de top van de parabool die de grafiek van een kwadratische functie is te bepalen.

Je hebt nu alle theorie van **Kwadratische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwadratische functie — parabool, top en nulpunten
- ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — somproductmethode
- de abc-formule — de discriminant
- formule voor de symmetrieas van een parabool

Activiteitenlijst

- een kwadratische functie herkennen aan de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ en de grafiek ervan tekenen door de top af te lezen en een geschikte tabel te maken — nulpunten berekenen;
- de nulpunten van de kwadratische functie $y = a(x - m)(x - n)$ aflezen — nulpunten berekenen door ontbinden in factoren;
- de abc-formule gebruiken om nulpunten te berekenen van een kwadratische functie van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ — de discriminant gebruiken;
- de top van een parabool snel berekenen vanuit de formule $y = ax^2 + bx + c$ — handig kwadratische vergelijkingen oplossen.

Testen

Opgave 1

De brug over de rivier de Tyne in het noordoosten van Engeland wordt vaak als voorbeeld genoemd voor een parabolische boog, een boog in de vorm van een parabool. Uitgaande van een assenstelsel waarin de y-as langs de verticale rechterwand van de linkertoren ligt en de x over de bovenkant van het horizontale wegdek ligt, zou dit op grond van afstand tussen beide torens en de plaats van de top van de parabool de bijbehorende formule

$y = -0{,}0084(x - 81)^2 + 33$

moeten zijn. In deze opgave ga je uit van deze formule.

Figuur 7.1

a Hoeveel meter zit de top van de parabool boven het wegdek?

b Hoeveel meter is de afstand tussen beide torens?

c Op hoeveel meter onder het wegdek zit de parabool aan de torens bevestigd?

d Hoeveel meter zit er tussen de punten die de parabool met de bovenkant van het wegdek gemeen heeft? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven zijn de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

a Bereken de snijpunten van de parabool met de x-as.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van beide functies.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef daarna de eindantwoorden exact of (waar nodig) in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + 3x = 4$

b $2x^2 + 15x = 36$

c $3x^2 = 48$

d $(2x - 4)(x - 3) = 12$

e $(2x - 4)(x - 3) = 0$

f $(x - 4)^2 + x^2 = 40$

g $16 - (3 - x)^2 = 0$

h $2x^2 = x + 8$

Opgave 4

Een boer heeft een stuk land dat zuiver rechthoekig is en aan de twee lange zijden en aan één van de twee korte zijden omgeven is door een boswal van 5 m breed. Alleen aan de kant van de weg zit geen boswal, maar een sloot voor de afwatering. Het stuk land is twee keer zo lang als het breed is.
Als deze boer de boswal volledig bij zijn land trekt, wordt de oppervlakte precies twee keer zo groot.

Bereken de afmetingen van het stuk land als de boswal nog intact is. Gebruik daarbij een vergelijking en rond je antwoord af op dm nauwkeurig.

Opgave 5

De geitenfokvereniging van Oldeberkoop wil bij een reisbureau een busreis boeken naar Zwitserland, een bekend geitenland in Europa. Die reis kost elk van de 40 leden van die vereniging € 600,=. Omdat het reisbureau echter een bus voor 54 personen moet inzetten, melden zij de geitenfokkers dat elke extra passagier waarvoor zij kunnen zorgen voor elke deelnemer aan de reis een korting van € 10,= betekent.

Onderzoek of dit voor het reisbureau gunstig is. Bij welk aantal deelnemers is de opbrengst voor het reisbureau zo hoog mogelijk?

Opgave 6

Een balk steekt loodrecht op de muur naar buiten. Het punt waar hij de muur verlaat is het steunpunt van deze balk.

Het buigmoment M in een bepaald punt van een balk is $M = \frac{1}{2} \cdot 3x(20 - x)$ waarin x de afstand is tot het steunpunt in meter.

Bereken de waarden van x waarbij het buigmoment 50 Nm (newtonmeter) bedraagt.

Toepassen

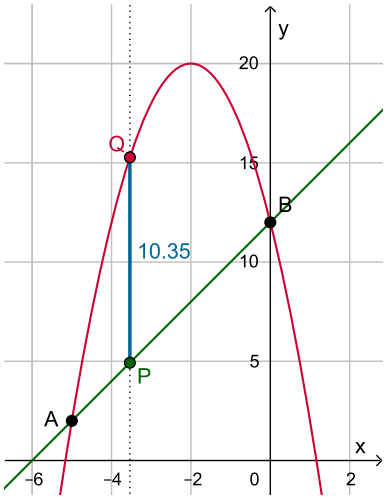
Bekijk de applet: kwadratische functie

Je ziet hier de grafieken van de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

Je ziet hier in de figuur een lijnstuk PQ dat evenwijdig is aan de verticale as en waarvan punt P op de grafiek van de lineaire functie en punt Q op de grafiek van de kwadratische functie ligt. De x-coördinaat van de punten P en Q is een getal tussen -5 en 0.

Als je het punt Q verplaatst dan wordt de lengte van het lijnstuk PQ langer of korter. Met de applet kun je uitzoeken voor welke waarde van x de lengte van dit lijnstuk maximaal is.

Maar je kunt dit ook exact berekenen...



Figuur 7.2

Opgave 7: Maximale lengte

Tussen de grafieken van de functies die je hierboven ziet bevindt zich lijnstuk PQ.

De lengte van dit lijnstuk kan variëren, je wilt de maximale lengte weten, want de minimale lengte is 0.

a Waarom is het minimum van de lengte van het daar beschreven lijnstuk 0?

b Noem de x-waarde van beide punten p. Welke coördinaten hebben P en Q dan?

c Leg uit dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan $L = -2p^2 - 10p$.

d De grafiek van L als functie van p is een bergparabool. Bereken het maximum van die functie.

Opgave 8: Maximale lengte van een lijnstuk tussen twee parabolen

Gegeven zijn de kwadratische functies met formules $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = x^2 - 2x$. Op de grafiek van y_1 ligt het punt P waarvan de x-coördinaat tussen -1 en 2 ligt. Op de grafiek van y_2 ligt het punt Q met dezelfde x-coördinaat als punt P. Het lijnstuk PQ verbindt beide punten.

a Maak een schets van deze situatie. (Of - nog mooier - teken deze situatie in GeoGebra.)

b Als je punt P varieert, verandert ook de lengte van lijnstuk PQ. Bereken de maximale lengte van dit lijnstuk.

8

Machten en wortels

8.1 Recht evenredig met een macht 288
8.2 Omgekeerd evenredig met een macht 297
8.3 Grafieken verschuiven en vervormen 307
8.4 Wortelfuncties en gebroken functies 315
8.5 Totaalbeeld 324

8.1 Recht evenredig met een macht

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met machtsfuncties met reële positieve exponenten;
- wortels weergeven als machten en omgekeerd machten met een gebroken exponent schrijven als wortels;
- de rekenregels voor machten gebruiken.

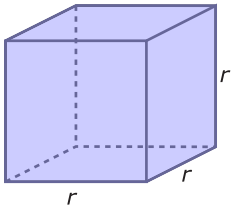
Voorkennis

- werken met lineaire en kwadratische functies;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

De soortelijke massa van een massief ijzeren kubus is 7,87 kg/dm^3.
Voor de massa van deze kubus geldt: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin r de lengte van een ribbe is in dm.



Figuur 8.1

a Waarom kun je zeggen dat de massa recht evenredig is met r^3?

b Waarom kun je niet zeggen dat de massa recht evenredig is met r?

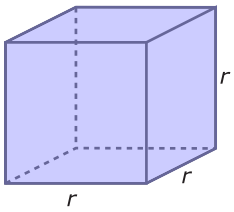
c Bereken de massa van zo'n kubus als $r = 5$ dm in kg nauwkeurig.

d Bereken de lengte van de ribben van zo'n kubus als hij een massa van 500 kg heeft. Geef je antwoord op één decimaal nauwkeurig in dm.

Uitleg

De inhoud van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$.

Dit is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derde macht worden verheven om de uitkomsten te vinden.



Figuur 8.2

De massa van een kubus m is recht evenredig met de derde macht van r.
De soortelijke massa van een massief ijzeren kubus is 7,87 kg/dm^3.
Voor het gewicht van deze kubus geldt: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, waarin r is uitgedrukt in dm.
Het getal 7,87 is de evenredigheidsconstante.

Als je de lengte van de ribben van een massief ijzeren kubus van 500 kg wilt uitrekenen, dan moet je oplossen:

$7{,}87 \cdot r^3 = 500$

Dat kun je doen door eerst beide zijden door 7,87 te delen: $r^3 = 63{,}532...$.

Vervolgens neem je de derdemachts wortel: $r = \sqrt[3]{63{,}532...} \approx 3{,}990 \approx 4{,}0$ dm.

Deze laatste stap kan ook anders.

Uit de rekenregel $(r^a)^b = r^{a \cdot b}$ volgt $\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$.

Dus kun je $r^3 = 63{,}532...$ oplossen door beide zijden tot de macht $\frac{1}{3}$ te verheffen:

$r = (63{,}532...)^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}990 \approx 4{,}0$ dm.

Je ziet dat $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

En dit geldt heel algemeen: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
En dat betekent dat we ook breuken als machten kunnen toelaten. In feite kan elk decimaal getal als exponent van een macht optreden.

Opgave 1

De inhoud van een kubus wordt beschreven met de formule: $I = r^3$.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

b Maak de ribben twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Waarom is de inhoud van een kubus wel recht evenredig met r^3, maar niet recht evenredig met r?

Bekijk de formule voor de massa van de massieve ijzeren kubus in de **Uitleg op pagina 288**.

d Bereken r bij een kubus met een massa van 200 kg.

e Laat zien dat je die formule kunt herleiden tot: $r \approx 0{,}50 \cdot m^{\frac{1}{3}}$.

f Bereken r met de formule $r \approx 0{,}50 \cdot m^{\frac{1}{3}}$ als de massa van de kubus 200 kg is.
Vind je hetzelfde antwoord als bij d?

Opgave 2

Ook het verband tussen de ribbe r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband.

a Waarom is de oppervlakte recht evenredig met r^2?
Waarom is de soortelijke massa van het materiaal waar de kubus van is gemaakt niet van belang?

b Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 4 cm.

c Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een 4 maal zo grote oppervlakte?

d Laat zien dat de formule bij a is te herleiden tot $r \approx 0{,}408A^{\frac{1}{2}}$.

e Bereken r met de formule $r \approx 0{,}408A^{\frac{1}{2}}$ als de oppervlakte van de kubus 150 cm^2 is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: machtsfuncties

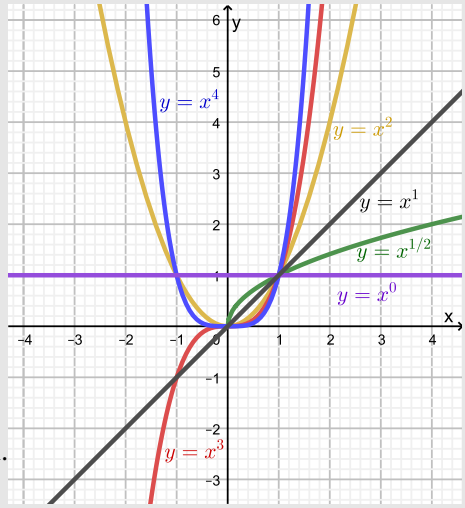
Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

Je kunt hier voorbeelden van grafieken van machtsfuncties bekijken. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$

Afhankelijk van de waarde van p heb je één of twee antwoorden.



Figuur 8.3

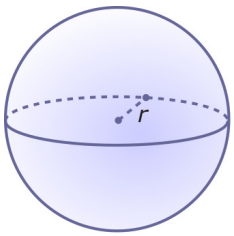
De **rekenregels voor machten** zijn:

- $x^0 = 1$
- $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$.
- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derde macht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Bereken de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000$ cm^3.



Figuur 8.4

Antwoord

Daarvoor moet je oplossen: $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$. En dus: $r^3 = 238{,}73...$

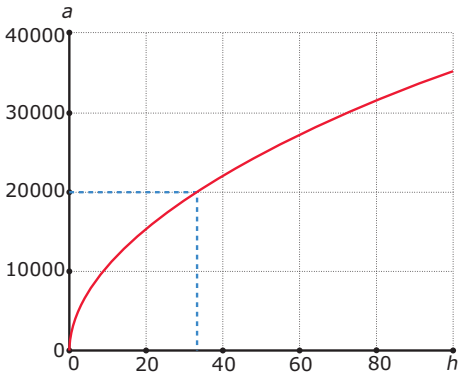
Je vindt: $r = \sqrt[3]{238{,}73...} = (238{,}73...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}2$ cm.

Het is ook mogelijk eerst de formule voor de inhoud van een bol zo om te rekenen, dat de straal wordt uitgedrukt in de inhoud. Dat gaat zo:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = I$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot I$$

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}}$$



Figuur 8.5

Je vindt: $r \approx 0{,}62 \cdot I^{\frac{1}{3}}$, dus r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$.
De evenredigheidsconstante is (ongeveer) 0,62.

Opgave 3

De formule voor de inhoud van een bol is: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

a I is recht evenredig met r^3. Bereken de evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

b r is recht evenredig met $I^{\frac{1}{3}}$. Laat zien dat de evenredigheidsconstante ongeveer 0,62 is

Opgave 4

Bij welke van de volgende formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

a $y = 2x$

b $y = 2x^4 + 5$

c $y = 5x^4$

d $y = -5x^4$

Voorbeeld 2

Met behulp van de rekenregels voor machten kun je functies met wortels herleiden tot machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot x^b$. Doe dit met de functies:

- $y = 2x\sqrt{x}$
- $y = \sqrt[4]{5x}$

Omgekeerd kun je machtsfuncties met gebroken exponenten herleiden tot functies met wortels. Doe dit met de functies:

- $y = 2x^{\frac{1}{3}}$
- $y = (3x)^{1\frac{1}{2}}$

Antwoord

Je vindt:

- $y = 2x\sqrt{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{1\frac{1}{2}}$
- $y = \sqrt[4]{5x} = (5x)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}50x^{\frac{1}{4}}$

En omgekeerd:

- $y = 2x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$
- $y = (3x)^{1\frac{1}{2}} = 3^{1\frac{1}{2}} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \approx 5{,}20x\sqrt{x}$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 291** zie je hoe functies met wortelvormen kunnen worden geschreven als machtsfuncties.
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

a $y = 3x^2\sqrt{x}$

b $y = 4\sqrt[3]{x^2}$

c $y = \sqrt[5]{4x^2}$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 291** zie je ook hoe je machtsfuncties kunt schrijven zonder gebroken exponenten.
Doe dit bij de volgende functies.

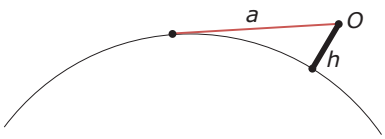
a $y = 4x^{\frac{1}{2}}$

b $y = (3x)^{\frac{1}{4}}$

c $y = 2{,}5x^{\frac{2}{3}}$

Voorbeeld 3

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand a (in meter) als functie van de hoogte h (in meter) geldt:
$a = 3572 \cdot \sqrt{h}$.



Figuur 8.6

Laat zien, dat a recht evenredig is met een macht van h.
Bereken de hoogte waarbij een kijkafstand van 20 km hoort.

Antwoord

Deze functie kun je schrijven als $a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$ m.

Dus is a recht evenredig met $h^{\frac{1}{2}}$ met een evenredigheidsconstante van 3572.

Bij een kijkafstand van 20 km hoort $a = 20000$ m.

Dan geldt: $3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 20000$.
Deze vergelijking kun je oplossen door delen door 3572 en vervolgens kwadrateren:

$h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$ m.

Opgave 7

Bekijk de formule voor de kijkafstand a (in meter) als functie van de hoogte h (in meter) in **Voorbeeld 3 op pagina 292**.

a Bereken hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

b Laat zien dat de gegeven formule is te herleiden tot $h \approx 7{,}84 \cdot 10^{-8} \cdot a^2$.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

c Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- aflezen uit de grafiek van $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$;
- in de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen;
- berekenen met de formule $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Oefenen

Opgave 8

Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

a $y = 4\sqrt{x^3}$

b $y = (0{,}4x)^3$

c $y = \sqrt[4]{3x^3}$

Opgave 9

Schrijf de volgende functies zonder gebroken exponenten.

a $y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

b $y = x^{\frac{3}{5}}$

c $y = (4x)^{\frac{1}{3}}$

Opgave 10

Gegeven is de machtsfunctie $y = 120x^5$.

a Bereken y als $x = 4$.

b Bereken voor welke waarde van x geldt $y = 20000$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende uitkomst dan vermenigvuldigd?

Opgave 11

Er is een verband tussen de snelheid v (in km/h) van een auto en de bijbehorende remweg s (in m). De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt.

Een vuistregel voor dit verband is: $s = \frac{v^2}{100} \cdot 0{,}75$.

a s is recht evenredig met een macht van v. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Beschrijf in woorden wat voor verband dit is.

d Geef commentaar op de volgende uitspraak: "Bij een zicht van 100 meter kun je twee maal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter."

Opgave 12

De slingertijd T (in s) van een massa die aan een touw heen en weer slingert wordt gegeven door:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

waarin L de lengte van het touw (in m) en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante is.

a Bereken de slingertijd als $L = 0{,}8$ m.

b Laat zien, dat je de formule kunt schrijven als $T \approx 2{,}01 \cdot L^{\frac{1}{2}}$.

c Bereken de lengte van het touw als de slingertijd 1 s bedraagt.

d Geef een formule voor L afhankelijk van T.

Opgave 13

Ga uit van een massieve ijzeren balk met ribben r, r en $10r$ in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,89 g/cm^3.

a Stel een formule op voor de massa m van de balk als functie van r.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A van de balk als functie van r.

c Laat zien dat $A \approx 2{,}28m^{\frac{2}{3}}$.

d Bereken de massa van zo'n balk als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Toepassen

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsmassa en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun massa zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh heeft een formule gevonden die het verband tussen massa en huidoppervlakte aangeeft: $H = c \cdot m^{\frac{2}{3}}$. Hierin is H de huidoppervlakte (in dm^2) en m de massa (in kg) van het dier.

Je ziet dat voor dit verschijnsel de huidoppervlakte rechtevenredig is met de 2/3-de macht van de lichaamsmassa. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de Meeh-coëfficiënt genoemd. In de tabel is voor een aantal diersoorten de Meeh-coëfficiënt gegeven.

diersoort	muis	rat	kat	konijn	schaap	varken	koe	paard	mens
c	9,0	9,1	10,0	9,8	8,4	9,0	9,0	10,0	11,2

Tabel 8.1

Voor elke diersoort kun je ook een grafiek tekenen. Je ziet dan dat het verband dat Meeh gevonden heeft vooral aangeeft dat hoe zwaarder een dier is, hoe groter het huidoppervlakte is. Dat is logisch, maar je ziet ook dat de huidoppervlakte minder snel toeneemt dan de massa: de stijging neemt af. Dat komt door de macht in de formule. Als je grafieken van twee diersoorten naast elkaar zet, kun je soorten vergelijken. Welke diersoort zal verhoudingsgewijs meer eten nodig hebben?

Opgave 14

De tabel met Meeh-coëfficiënten in **Toepassen op pagina 294** is ontstaan vanuit tabellen voor de huidoppervlakte H (in dm^2) en de massa m (in kg) van de diersoort. In deze tabel zie je vijftal waarden van m en H van Schotse Hooglanders, een soort koeien.

m (kg)	430	450	490	500	420
H (dm^2)	507	523	553	560	500

Tabel 8.2

a Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander.

b De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar was die koe?

c Als je deze formule omrekent zodat de lichaamsmassa uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

d Als de lichaamsmassa twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Opgave 15

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en de massa m. Ga uit van een massieve ijzeren bol, de soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Zoek de formules voor de inhoud van een bol met straal r en de oppervlakte van zo'n bol op.

b Welke formule geldt voor de massa m als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en m in gram.

c Door de formules voor de massa en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren vind je $A = c \cdot m^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c.

Testen

Opgave 16

Schrijf deze functies als machtsfuncties, dus in de vorm $y = ax^b$.

a $y = \frac{3}{7}\sqrt{x}$

b $y = \sqrt[3]{4x^2}$

Herleid deze functies tot een vorm zonder gebroken exponenten.

c $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

d $y = (4x)^{\frac{1}{2}}$

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

a Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r?

b Herleid deze formule tot $r \approx 0{,}54 \cdot V^{\frac{1}{3}}$.

c De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r.

d Laat zien dat $A \approx 5{,}54V^{\frac{2}{3}}$.

8.2 Omgekeerd evenredig met een macht

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met machtsfuncties met negatieve exponenten;
- breuken weergeven als machten en omgekeerd machten met een negatieve exponent schrijven als breuken;
- de rekenregels voor machten uitbreiden met negatieve exponenten.

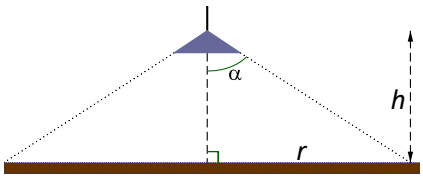
Voorkennis

- werken met lineaire, kwadratische functies en machtsfuncties met positieve exponent;
- de rekenregels voor machten gebruiken, inclusief die voor gebroken exponenten;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier hoe een kegelvormige lamp een cirkelvormig lichtschijnsel op een tafel werpt. De straal van deze cirkel is recht evenredig met de hoogte h van de lichtbron boven de tafel.



Figuur 8.1

a Waarom kun je zeggen dat de straal r van deze cirkel recht evenredig is met h?

De hoeveelheid licht die de lamp per seconde uitstraalt heet de lichtstroom Φ en wordt uitgedrukt in lumen, in lm. De verlichtingssterkte E op een oppervlak is het aantal lumen per m^2. Deze eenheid heet wel lux: 1 lux = 1 lm/m^2. Er geldt:

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

Hierin is:

- E de verlichtingssterkte in lux
- Φ de lichtstroom in lm (lumen)
- A de oppervlakte van de verlichte cirkel in m^2

Verder is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$, waarin c een constante is.

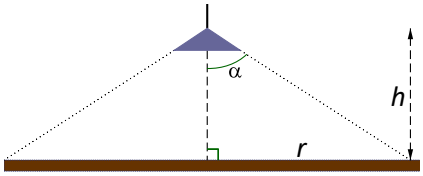
b Voor een bepaalde lamp geldt $\Phi = 600$ lm en $c = 1{,}5$.
Welke formule geldt voor E als functie van h?

c Wat kun je zeggen over de verlichtingssterkte E als h drie keer zo groot wordt?

d Waarom is nu E omgekeerd evenredig met h^2?

Uitleg

De hoeveelheid licht die de lamp per seconde uitstraalt heet de lichtstroom Φ en wordt uitgedrukt in lumen, in lm. De verlichtingssterkte E op een oppervlak is het aantal lumen per m^2.
Deze eenheid heet wel lux: 1 lux = 1 lm/m^2. Er geldt:



Figuur 8.2

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

Hierin is:

- E de verlichtingssterkte in lux
- Φ de lichtstroom in lm (lumen)
- A de oppervlakte van het verlichte deel in m^2

Bij een kegelvormige lamp is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$, waarin h (in m) de hoogte van de lamp boven het verlichte oppervlak en c een constante is.

Als bijvoorbeeld $\Phi = 600$ lm en $c = 1$ is:

$$E = \frac{\Phi}{c \cdot \pi \cdot h^2} = \frac{600}{\pi \cdot h^2} \approx \frac{191}{h^2}$$

Als h groter wordt, neemt E juist af (omdat je dan door een groter getal deelt).
Je zegt wel dat E omgekeerd evenredig is met het kwadraat van h, dus met h^2.
Bij een formule waarin de variabele (ook) in de noemer van een breuk zit heb je te maken met een gebroken functie.

Je kunt de formule echter (met de rekenregels voor machten) ook zo schrijven:

$$E = \frac{191}{h^2} = 191 \cdot \frac{1}{h^2} = 191 \cdot \frac{h^0}{h^2} = 191 \cdot h^{-2}$$

En dus is E ook recht evenredig met een macht van h, namelijk met h^{-2}.
Je kunt zo'n gebroken functie als machtsfunctie schrijven.

Bij dit soort functies heb je te maken met bijzonder gevallen: als h heel groot wordt, benadert E de waarde 0, maar E kan nooit echt 0 worden.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 298** de formule voor de verlichtingssterkte E op een tafel oppervlak. Ga uit van een lamp met een lichtstroom van $\Phi = 600$ lm.

a Waarom is het logisch dat E omgekeerd evenredig is met de oppervlakte A van het gebied dat wordt verlicht?

b Er wordt van een kegelvormige lichtbundel uitgegaan. Dan is $A = c \cdot \pi \cdot h^2$.
Er wordt gekozen voor $c = 1$. Wat zegt dit over de kegelvorm?

c Maak de grafiek van $E = \frac{191}{h^2}$. Neem alleen positieve waarden voor h.

d Bereken E als $h = 2{,}8$ m.

e Bij welke waarde van h is $E > 100$ lux?

f Herleid de formule $E = \frac{191}{h^2}$ tot h is uitgedrukt in E.
Laat zien dat ook hier van een machtsfunctie sprake is.

Opgave 2

Beschrijf de volgende verbanden met de termen ‘recht evenredig’ of ‘omgekeerd evenredig’. Schrijf bij omgekeerd evenredigheid ook de bijbehorende machtsfunctie op.

a $F = \frac{300}{r^2}$

b $P = 0{,}52 \cdot v^3$

c $s = 1{,}2 \cdot t$

d $t = \frac{60}{v}$

Opgave 3

De basisformule voor een omgekeerd evenredig verband is de functie: $y = \frac{c}{x^p}$, waarin p een willekeurig (positief) getal is.

a Bekijk de grafieken van deze functie voor $c = 1$, $p = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$ en voor $-10 \leq x \leq 10$.

b Bij welke waarde van x hebben deze functies geen uitkomst?
Wat is er dan met hun grafiek aan de hand?

c Neem aan dat je x oneindig groot (zowel positief als negatief) zou kunnen maken.
Wat is er dan met de grafiek aan de hand?

d Neem nu $c = 1$, $p = 0{,}5$ en bekijk de grafiek voor $-10 \leq x \leq 10$.
Waarom zijn er nu bij negatieve waarden van x geen uitkomsten?

e Laat zien, dat de formules bij deze functies te schrijven zijn als $y = c \cdot x^{-p}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

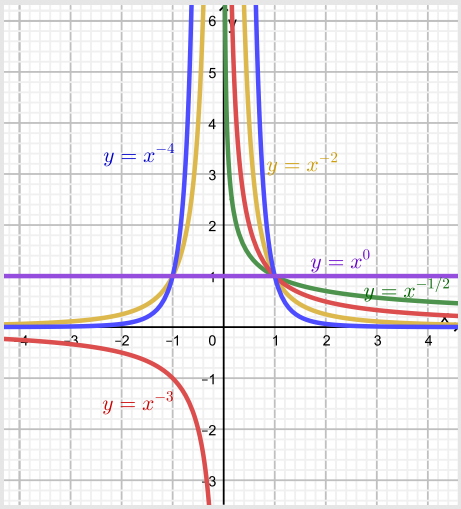
Bekijk de applet: machtsfuncties 2

Als y **omgekeerd evenredig met een macht** van x is, geldt $y = \frac{c}{x^p}$. De constante c is de **evenredigheidsconstante**. Je kunt deze functies als machtsfuncties schrijven: $y = c \cdot x^{-p}$.

Je kunt hier voorbeelden van grafieken van deze functies bekijken. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

Je ziet dat de grafieken in de buurt van $x = 0$ steeds dichter tegen de y-as gaan lopen, de y-as is een **verticale asymptoot** van de grafiek.

Je ziet dat de grafieken voor hele grote x-waarden (positief en soms ook negatief) steeds dichter tegen de x-as gaan lopen, de x-as is een **horizontale asymptoot** van de grafiek.



Figuur 8.3

Vanuit dergelijke functies kun je op meerdere manieren terugrekenen:

- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $c \cdot x^{-p} = y$ en dan delen door c en de omgekeerde macht gebruiken;
- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $x^p = \frac{c}{y}$ en dan de omgekeerde macht of de p-de machtswortel gebruiken.

Afhankelijk van de waarde van p heb je één of twee antwoorden.

Bij de **rekenregels voor machten** komt nog:

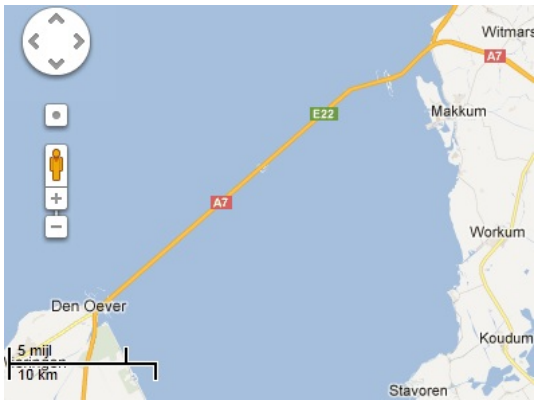
- $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

Voorbeeld 1

De afsluitdijk is 32 km lang. Stel dat je er met een constante snelheid v (in km/h) zou kunnen rijden, dan geldt voor de tijd t (in uur) die je er over doet:

$t = \frac{32}{v}$

Laat zien, dat t een machtsfunctie is van v en bepaal de bij de grafiek horende asymptoten.
Bereken de snelheid die je zou moeten hebben als je er 0,5 uur over doet.



Figuur 8.4

Antwoord

t is een machtsfunctie van v omdat $t = \frac{32}{v} = 32 \cdot \frac{1}{v^1} = 32 \cdot v^{-1}$.

Bekijk voor de asymptoten indien nodig de grafiek van de gegeven functie voor v-waarden vanaf 0.
Je ziet dat die grafiek voor v-waarden in de buurt van 0 steeds dichter bij de verticale as gaat lopen, de t-as is de verticale asymptoot.
Je ziet dat die grafiek voor hele grote v-waarden steeds dichter bij de horizontale as gaat lopen, de v-as is de horizontale asymptoot.

Om v te berekenen bij $t = 0{,}5$ moet je oplossen: $\frac{32}{v} = 0{,}5$.
Dit kan met de balansmethode: $32 = 0{,}5v$ en dus $v = 64$ km/h.

Je kunt dit ook oplossen vanuit de machtsfunctie: $32 \cdot v^{-1} = 0{,}5$ geeft $v^{-1} = \frac{0{,}5}{32} = 0{,}015625$ en $v = 0{,}015625^{\frac{1}{-1}} = 64$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 300**.

a Laat zien hoe je uit de rekenregel $\frac{v^a}{v^b} = v^{a-b}$ kunt afleiden dat $\frac{1}{v} = v^{-1}$.

b Maak zelf de grafiek van de gegeven functie.
Ga na, dat de asymptoten in je grafiek zichtbaar zijn.

c Hoe lang doe je over een rit over de Afsluitdijk als je constant 100 km/h kunt rijden?
Voer je berekening uit met de gegeven formule en ook met de machtsfunctie die erbij hoort. Geef je antwoord in minuten en seconden.

d Je legt de 32 km in 15 minuten af door met een constante snelheid te rijden.
Hoe hard heb je gereden? Laat dit zien door met beide vormen van de formule de bijbehorende vergelijking op te lossen.

Voorbeeld 2

Met behulp van de rekenregels voor machten kun je functies met breuken vaak herleiden tot machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot x^b$. Doe dit met de functies:

- $y = \frac{2}{x^3}$
- $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Omgekeerd kun je machtsfuncties met negatieve exponenten herleiden tot functies met breuken en soms ook wortels. Doe dit met de functies:

- $y = 5x^{-4}$
- $y = (2x)^{-\frac{1}{2}}$

Antwoord

Je vindt:

- $y = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$
- $y = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

En omgekeerd:

- $y = 5x^{-4} = 5 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{5}{x^4}$
- $y = (2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 301** zie je hoe functies met breuken kunnen worden geschreven als machtsfuncties.
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

a $y = \frac{3}{x^2}$

b $y = \frac{4}{x\sqrt{x}}$

c $y = \frac{1}{2x}$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 301** zie je ook hoe je machtsfuncties kunt schrijven zonder gebroken en/of negatieve exponenten.
Doe dit bij de volgende functies.

a $y = 4x^{-\frac{1}{2}}$

b $y = (3x)^{-1}$

c $y = 2{,}5x^{-2}$

Voorbeeld 3

De kracht die twee massa's m_1 en m_2 op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de zwaartekracht is

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Hierin is:

- F de zwaartekracht (in N)
- G de gravitatieconstante, $G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$
- m_1 en m_2 de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- r de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

Figuur 8.5

Gebruik de volgende gegevens en laat zien dat $F \approx 2{,}93 \cdot 10^{37} r^{-2}$ voor de aantrekkingskracht tussen de aarde en de maan.

De massa van de aarde is ongeveer $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg en de diameter is ongeveer 12 . 756 km.

De massa van de maan is ongeveer $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg en de diameter is ongeveer 3476 km.

Bereken de aantrekkingskracht tussen aarde en maan op het moment dat de kleinste afstand tussen een punt op het aardoppervlak en een punt op het maanoppervlak 363 . 000 km is.

Antwoord

Uit de gegevens volgt:

- $m_1 \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
- $m_2 \approx 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
- $r = \frac{12756}{2} + \frac{3476}{2} + 363000 = 371116$ km en dat is ongeveer $371 \cdot 10^6$ m

Dus $F \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{r^2} \approx \left(2{,}93 \cdot 10^{37}\right) \cdot \frac{1}{r^2} = 2{,}93 \cdot 10^{37} \cdot r^{-2}$.

De gevraagde aantrekkingskracht is $F \approx \frac{2{,}93 \cdot 10^{37}}{(371 \cdot 10^6)^2} \approx 2{,}13 \cdot 10^{20}$ N.

Opgave 7

Bekijk de formule voor de aantrekkingskracht F (in N) tussen twee massa's in **Voorbeeld 3 op pagina 302**.

a Leg uit, hoe je aan de waarde voor r komt.
Welke aanname moet je doen?

b Voer zelf de herleiding van de algemene formule tot machtsfunctie uit.

c De afstand van de aarde tot de maan verandert in de loop van een omwenteling van de maan om de aarde. Bij welke afstand tussen hun middelpunten is de zwaartekracht $2 \cdot 10^{20}$ N?

Je kunt de gegeven zwaartekrachtformule ook gebruiken voor het berekenen van de kracht die de aarde op objecten op zijn oppervlakte uitoefent.

d Laat zien dat voor een object met massa m_2 geldt $F \approx 9{,}80 \cdot m_2$ N.

Oefenen

Opgave 8

Schrijf de volgende functies in de vorm $y = ax^b$.

a $y = \frac{4}{x^3}$

b $y = \frac{1}{0{,}4x}$

c $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

Opgave 9

Schrijf de volgende functies zonder gebroken exponenten.

a $y = \frac{1}{2}x^{-2}$

b $y = (3x)^{-\frac{1}{4}}$

c $y = \left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$

Opgave 10

Gegeven is de machtsfunctie $y = 120x^{-3}$.

a Bereken y als $x = 2$.

b Bereken voor welke waarde van x geldt $y = 12000$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

c Als de waarde van x twee keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende uitkomst dan vermenigvuldigd?

d Licht toe dat y omgekeerd evenredig is met x^3.

e Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

Opgave 11

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{750}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro.

a Je ziet dat a omgekeerd evenredig is met p. Schrijf de formule zo, dat a recht evenredig is met een macht van p.

b Teken de grafiek van deze machtsfunctie voor prijzen tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 550 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 12

Ga uit van een massieve ijzeren balk met twee ribben van r cm en een derde ribbe van h cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3. Het gewicht van deze balk is 15,8 kg.

a Laat zien, dat h omgekeerd evenredig is met het kwadraat van r en stel een bijpassende formule op.

b Laat zien, dat r omgekeerd evenredig is met de wortel van h en stel een bijpassende formule op.

Opgave 13

Voor de elektrische weerstand R in een draad geldt de wet van Pouillet:

$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

Hierin is:

- R de weerstand in Ω (Ohm)
- l de lengte van de draad in m
- A de oppervlakte van de doorsnede in m^2
- ρ de soortelijke weerstand van het materiaal

a In welke eenheid druk je ρ uit?.

Neem aan dat de draad zuiver rond is, dan geldt $A = \frac{1}{4}\pi D^2$, waarin D de diameter (in m) van de draad is. Verder geldt voor koper dat $\rho \approx 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ωm is.

b Bereken de weerstand van een koperdraad met een diameter van 1 mm en een lengte van 5 m.

c Bereken de diameter van een koperdraad met een lengte van 5 m en een gemeten weerstand van 0,02 Ω.

d Laat voor een koperdraad met een lengte van 1 m zien, dat $R \approx 2{,}23 \cdot 10^{-8} \cdot D^{-2}$.

e Waarom kun je zeggen dat R recht evenredig is met de lengte l en omgekeerd evenredig is met het kwadraat de diameter D van de koperdraad?

Toepassen

Een bekende maat voor iemands gezondheid is de **bodymass index** (*BMI*), ook wel queteletindex (*QI*) genoemd. De *BMI* is een maat voor het al dan niet hebben van onder- of overgewicht. De bijbehorende formule is

$$BMI = \frac{m}{l^2}$$

Hierin is:

- m het lichaamsgewicht in kilogram
- l de lengte in meter
- BMI de bodymass index

BMI (kg/m²)	Classificering	Gezondheidsrisico
< 18,5	Ondergewicht	Gezondheidsrisico
20 - 25	Gezond gewicht	Gezond
25 - 30	Overgewicht	Nog geen verhoogd risico
30 - 35	Obesitas	Risico neemt toe
35 - 40	Ernstige obesitas	Verhoogde kans op lichamelijke risico's
40 >	Morbide obesitas	Risico op gezondheidsproblemen en ernstige ziektes door overgewicht stijgt aanzienlijk

Figuur 8.6

Bij een *BMI* vanaf 20 tot 25 heb je een normaal lichaamsgewicht.
In de tabel vind je meer gegevens.

Opgave 14

Bekijk de formule voor de bodymass index.

a Hoe kun je aan de formule zien, dat de *BMI* recht evenredig met het lichaamsgewicht (in kg) en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de lengte (in m) is?

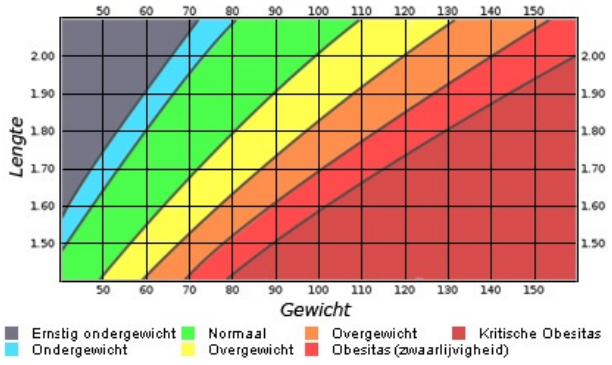
b Bereken jouw eigen *BMI*. In welke categorie val je?

c Stel je voor dat $l = 1{,}95$. Welke formule geeft het verband tussen *QI* en m? Maak de grafiek van *QI* als functie van m. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

d Stel je voor dat $G = 65$. Welke formule geeft het verband tussen *QI* en l? Maak de grafiek van *QI* als functie van l. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

e Stel je voor dat $QI = 20$. Welke formule geeft het verband tussen m en l? Maak de grafiek van m als functie van l. Kies geschikte afmetingen van het assenstelsel.

Je ziet hier de mogelijke waarden van de *BMI* weergegeven in grafieken.



Figuur 8.7

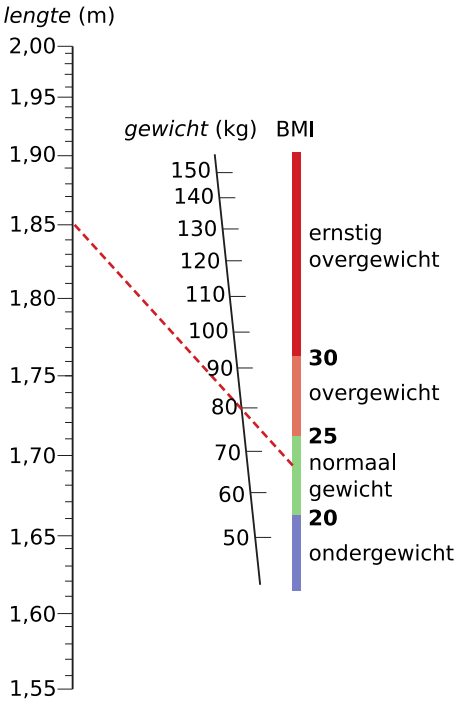
f Hoe zien de formules bij deze grafieken er uit?

Opgave 15

Je ziet hier een figuur waarmee je de *BMI* snel kunt bepalen.

a Welke *BMI* heeft iemand van 1,85 meter met een lichaamsgewicht van 80 kg?
Controleer de uitkomst met de formule.

b Hoe zwaar is iemand van 1,90 m met een normaal lichaamsgewicht?



Figuur 8.8

Testen

Opgave 16

Schrijf deze functies als machtsfuncties, dus in de vorm $y = ax^b$.

a $y = \frac{3}{x^2}$

b $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Herleid deze functies tot een vorm zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

c $y = \frac{2}{3}x^{-3}$

d $y = (4x)^{-\frac{1}{2}}$

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$. Hierin is d de diameter van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in cm. Je wilt blikken maken met een inhoud van $V = 1$ liter.

a Laat zien, dat h dan omgekeerd evenredig is met het kwadraat van d en geef de bijbehorende formule.

b Herschrijf deze formule tot een formule waarin h recht evenredig is met een macht van d. Bepaal de evenredigheidsconstante.

c Maak een grafiek bij deze formule en bepaal de twee asymptoten.

d Bereken de diameter als de hoogte van deze cilinder 10 cm is.

8.3 Grafieken verschuiven en vervormen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- in een formule herkennen uit welke machtsfunctie hij is ontstaan;
- aangeven door welke transformaties (verschuivingen of vermenigvuldigen) de grafiek uit die van de bijbehorende machtsfunctie kan ontstaan.

Voorkennis

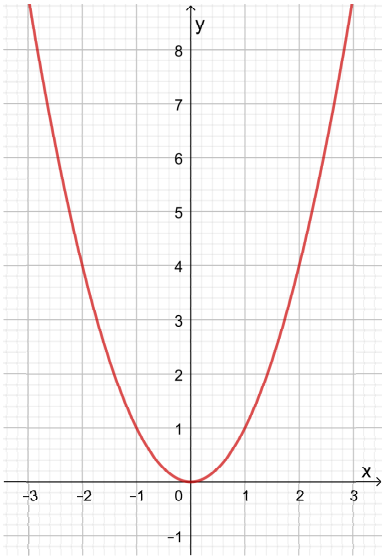
- werken met machtsfuncties met alle mogelijke exponenten;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Hier zie je de grafiek van $y = x^2$, min of meer de eenvoudigste machtsfunctie.
Alle kwadratische functies kunnen uit deze machtsfunctie ontstaan.
Je kunt die grafieken maken met een grafische rekenmachine of programma's als GeoGebra en Desmos.



Figuur 8.1

a Maak de grafiek van $y_2 = (x - 4)^2$.

Beschrijf hoe de grafiek van y_2 ontstaat uit die van $y = x^2$.

b Maak de grafiek van $y_2 = x^2 + 3$.

Beschrijf hoe de grafiek van y_2 ontstaat uit die van $y = x^2$.

c Maak de grafiek van $y_2 = 1{,}5 \cdot x^2$.

Beschrijf hoe de grafiek van y_2 ontstaat uit die van $y = x^2$.

d Maak de grafiek van $y_2 = (3 \cdot x)^2$.

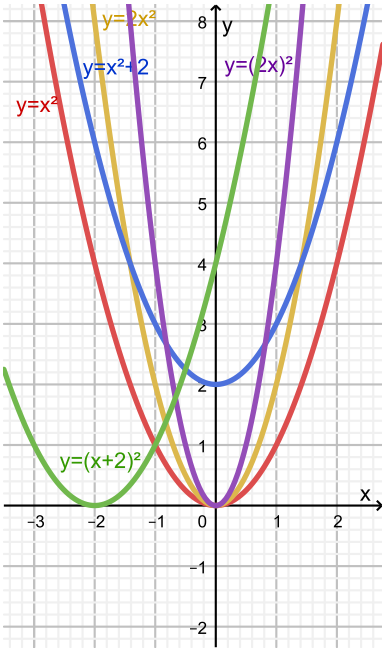
Beschrijf hoe de grafiek van y_2 ontstaat uit die van $y = x^2$.

e Maak de grafiek van $y_2 = 1{,}5(x - 4)^2 + 3$.

Beschrijf hoe de grafiek van y_2 ontstaat uit die van $y = x^2$.

Uitleg

Dit is de grafiek van de standaard machtsfunctie met macht 2, dus formule $y = x^2$.
Je ziet ook enkele vervormingen van de grafiek.
Door in de formule met een getal te vermenigvuldigen en/of op te tellen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Je verschuift of vermenigvuldigt de grafiek. Dat heet ook wel het transformeren van de grafiek.



Figuur 8.2

Je moet vier transformaties kunnen herkennen.

- De grafiek van $y_2 = x^2 + 2$ ontstaat door alle y-waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden hoger in de y-richting te liggen, de grafiek verschuift 2 in de y-richting.
- De grafiek van $y_3 = (x + 2)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links te liggen. Dit is hetzelfde als - 2 eenheden verschuiven in de x-richting.
- De grafiek van $y_4 = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y-waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zover van de x-as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen in de y-richting.
- De grafiek van $y_5 = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x-waarden met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zover van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de x-richting.

Soms moet je meerdere transformaties na elkaar doen, bijvoorbeeld bij $y = 0{,}5(x - 4)^2 + 2$ horen drie transformaties: eerst 4 verschuiven in de x-richting, dan met 0,5 vermenigvuldigen in de y-richting en tenslotte 2 omhoog schuiven (dus ook in de y-richting).

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door vervormen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn. Maak eventueel zelf hun grafieken in GeoGebra, Desmos, of met de grafische rekenmachine.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

b $y_3 = (x - 4)^2$

c $y_4 = x^2 + 3$

d $y_5 = (3x)^2$

Opgave 2

Ga uit van de standaard machtsfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 3 \cdot x^3$

b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$

c $y_4 = 2x^3 + 5$

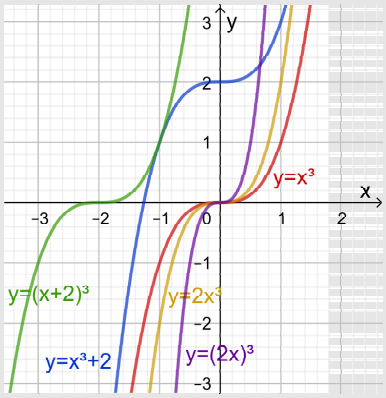
d $y_5 = 0{,}5(x - 1)^3 + 2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een standaard machtsfunctie zoals $y = x^3$ (de rode grafiek in de figuur).

- De blauwe grafiek $y = x^3 + 2$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de y-richting 2 eenheden te verschuiven.
- De groene grafiek $y = (x + 2)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de x-richting - 2 eenheden te verschuiven.
- De oranje grafiek $y = 2 \cdot x^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de y-richting met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De paarse grafiek $y = (2 \cdot x)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de x-richting met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.



Figuur 8.3

Dit zijn **transformaties van een grafiek**.

Door het optellen van een getal in de formule verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**.

Door het vermenigvuldigen met een getal in de formule wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging in de *x*-richting of de *y*-richting**. De eigenschappen van de getransformeerde functie kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.

Voorbeeld 1

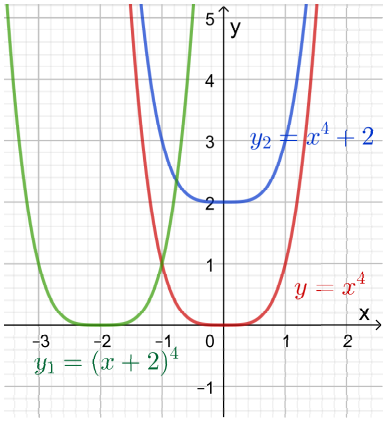
Bekijk de applet: Grafieken verschuiven

Gegeven is de standaardfunctie $y = x^4$.
De grafiek heeft top $(0,0)$.

De grafiek van $y_1 = (x + 2)^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door verschuiving van - 2 in de x-richting.

De grafiek van $y_2 = x^4 + 2$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door verschuiving van 2 in de y-richting.

De karakteristieken van de grafiek verschuiven mee.
De top verschuift bij y_1 naar $(-2,0)$.
De top verschuift bij y_2 naar $(0,2)$.



Figuur 8.4

Opgave 3

Neem als standaardfunctie $y = \sqrt{x}$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \sqrt{x-3}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

b Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \sqrt{x-3}+1$ uit die standaardfunctie ontstaan?

c De grafiek van de standaardfunctie heeft als startpunt $(0,0)$.
Welk startpunt heeft de grafiek van y_3?

Opgave 4

Neem als standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \frac{1}{(x+4)^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

b Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \frac{1}{(x+4)^2} - 2$ uit die standaardfunctie ontstaan?

c De grafiek van de standaardfunctie heeft beide assen als asymptoten.
Welke asymptoten heeft de grafiek van y_3?

Voorbeeld 2

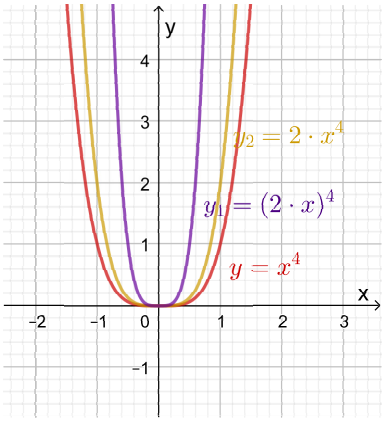
Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

Gegeven is de standaardfunctie $y = x^4$.
De grafiek heeft top $(0,0)$.

De grafiek van $y_1 = (2 \cdot x)^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ in de x-richting.

De grafiek van $y_2 = 2 \cdot x^4$ ontstaat uit die van $y = x^4$ door vermenigvuldiging met 2 in de y-richting.

De karakteristieken van de grafiek veranderen nauwelijks, ze lopen vooral meer of minder steil, afhankelijk van het getal waarmee je vermenigvuldigt.



Figuur 8.5

Opgave 5

Neem als standaardfunctie $y = \sqrt{x}$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = 3\sqrt{x}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

b Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \sqrt{3x}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

c Door welke transformaties kan de grafiek van $y_4 = 0{,}5\sqrt{x-3}+1$ uit die standaardfunctie ontstaan?

d De grafiek van de standaardfunctie heeft als startpunt $(0,0)$.
Welk startpunt heeft de grafiek van y_3?

Opgave 6

Neem als standaardfunctie $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van $y_2 = \frac{4}{x^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

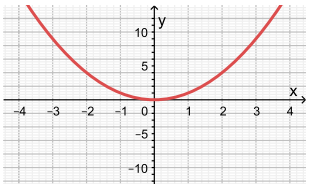
b Door welke transformaties kan de grafiek van $y_3 = \frac{1}{(0{,}5x)^2}$ uit die standaardfunctie ontstaan?

c Door welke transformaties kan de grafiek van $y_4 = \frac{3}{(x+4)^2} - 2$ uit die standaardfunctie ontstaan?

d De grafiek van de standaardfunctie heeft beide assen als asymptoten.
Welke asymptoten heeft de grafiek van y_4?

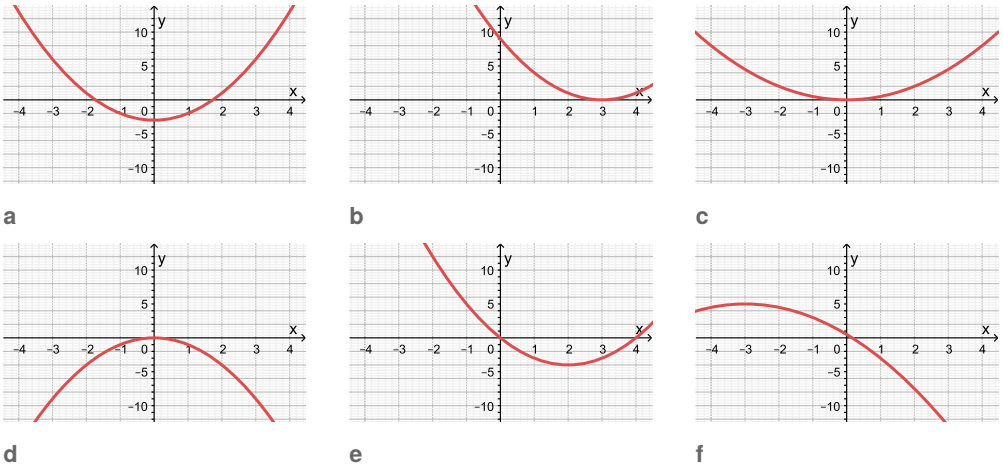
Opgave 7

Je ziet hier de grafiek $y_1 = x^2$ gemaakt in GeoGebra.



Figuur 8.6

Bekijk de volgende zes grafieken bij a, b, c, d, e en f met dezelfde instellingen van de assen.
Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek y_1.



Figuur 8.7

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast en geef de bijbehorende formule.

Oefenen

Opgave 8

Ga uit van de standaardfunctie $y = x^4$. De grafieken van de volgende functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^4$

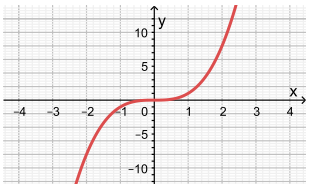
b $y_3 = (x - 4)^4 + 2$

c $y_4 = 2 - x^4$

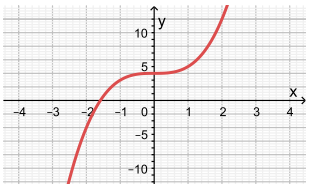
d $y_5 = (3x)^4 - 5$

Opgave 9

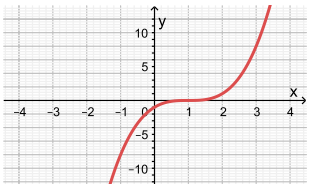
Je ziet vijf keer de standaardfunctie $y_1 = x^3$ gemaakt in GeoGebra.
De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan.



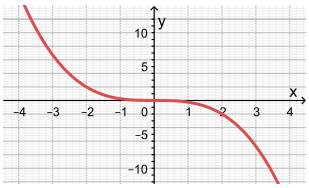
Figuur 8.8



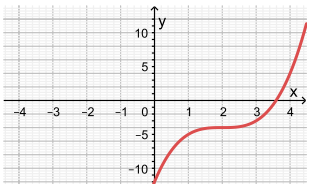
a



b



c



d

Figuur 8.9

Geef bij elke grafiek de juiste formule.

Opgave 10

Een kogel die door een kogelstoter wordt geworpen beschrijft in een Oxy-assenstelsel de baan $y = -0{,}02(x - 8)^2 + 3{,}5$.
Het moment van loslaten is bij $x = 0$.
y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

a Door welke transformaties ontstaat de baan van deze kogel uit de grafiek van de bijbehorende standaardfunctie?
Geef geschikte instellingen van de assen zodat je de volledige baan van de kogel in beeld kunt krijgen.

b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 11

Gegeven is de functie $y = \sqrt{x}$.

a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van de gegeven functie een verschuiving van -2 in de y-richting en een verschuiving van 5 in de x-richting toe te passen. Geef de formule van y_1.

b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van de gegeven functie eerst te spiegelen in de x-as, vervolgens een verschuiving van 3 in de x-richting toe te passen en tot slot nog een verschuiving van -4 in de y-richting door te voeren. Geef de formule van y_2.

c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van de gegeven functie eerst te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ in de x-richting en daarna een verschuiving van 4 in de y-richting door te voeren. Geef de formule van y_3.

Opgave 12

Voor de afstand a (in m) die je kunt kijken vanaf een ooghoogte h (in m) is $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$ m.
Hierbij wordt aangenomen dat h de ooghoogte boven het aardoppervlak is.

a Een vuurtoren staat op een duin van 15 m hoog.
Je meet je ooghoogte h vanaf de voet van de vuurtoren.
Hoe moet de formule voor de kijkafstand worden aangepast?

b Hoe ver kun je nu kijken als het uitkijkpunt van de vuurtoren 30 m boven het duin zit en jouw oog nog 1,80 m hoger?

c h kan nu ook negatieve waarden hebben.
Welke betekenis hebben die waarden en welke waarden kan h aannemen?

Opgave 13

De kracht die twee massa's m_1 en m_2 op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de aantrekkingskracht tussen twee massa's is

$$F = g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Hierin is:

- F de zwaartekracht (in N)
- g de gravitatieconstante, $g \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ $m^3s^{-2}kg^{-1}$
- m_1 en m_2 de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- r de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

De massa van de aarde is ongeveer $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg en de diameter is ongeveer 12 . 756 km.

Je wilt de aantrekkingskracht van de aarde berekenen van voorwerpen op of vlak boven (minder dan 10 km hoog) het aardoppervlak.

a Welke formule beschrijft de zwaartekracht van een voorwerp met massa 1 kg op een afstand a (in m) boven het aardoppervlak?

b De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $y = x^{-2}$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Bij welke instellingen van de assen krijg je de grafiek van de functie bij a zo in beeld dat beide asymptoten zichtbaar zijn?

Toepassen

De Wilhelminabrug in Deventer is een boogbrug over de IJssel. De eerste versie van deze brug stamt uit 1943. Na de Tweede Wereldoorlog is hij herbouwd. De brug kent twee grote bogen waarvan de vorm parabolisch is.

Figuur 8.10

Neem aan dat het wegdek van de brug de x-as voorstelt en h de hoogte van een punt van zo'n boog boven het wegdek is. Zowel x als h wordt in meter uitgedrukt. Neem ook aan dat $x = 0$ het midden van de brug is en dat het totale wegdek tussen de punten waar $h = 0$ een lengte heeft van 100 m. Voor het hoogste punt van de boog geldt $h = 16$ m.

Bij een parabool hoort een kwadratische functie, die door transformatie kan ontstaan uit die van $y = x^2$.

Je kunt nu zelf een formule opstellen die de vorm van de parabolische boog beschrijft.

Opgave 14

Bekijk de gegevens van de Wilhelminabrug in Deventer.

a Welke transformaties moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de boog van de Wilhelminabrug te krijgen?

b Leg uit dat bij de boog van de brug een formule past van de vorm $h = ax^2 + 16$.

c Bereken nu a en stel zo een formule op voor de boog.

Je ziet dat tussen beide bogen horizontale dwarsbalken zitten. Om vrachtverkeer goed mogelijk te maken moeten deze balken minstens 5 m boven het wegdek zitten.

d Op welke afstand van het midden van de brug kunnen de laagste dwarsbalken nog zitten?

Testen

Opgave 15

Ga uit van de standaard machtsfunctie $y = x^r$.
Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

a $y_2 = (x - 3)^r + 5$

b $y_3 = 0{,}5 \cdot x^r + 1$

c $y_4 = (3x)^r$

Opgave 16

Om de grafiek van $y = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, met GeoGebra of Desmos, is het handig om te weten hoe deze ontstaat uit transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

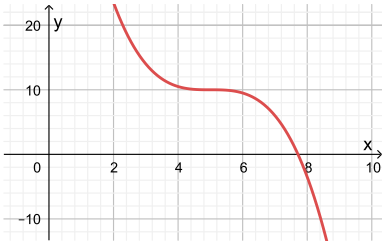
b Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

c Schrijf op bij welke instelling van de assen de grafiek van de gegeven functie goed in beeld komt.

Opgave 17

Je ziet de grafiek van een functie die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $y = x^3$. Het centrale punt van $y = x^3$ is verschoven van $(0,0)$ naar $(5,10)$.
De grafiek van de nieuwe functie gaat door het punt $(7,6)$.

Schrijf de bijpassende formule op.



Figuur 8.11

8.4 Wortelfuncties en gebroken functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- herkennen of een wortelfunctie uit een standaard machtsfunctie is ontstaan en welke transformaties daar bij horen;
- herkennen of een gebroken functie uit een standaard machtsfunctie is ontstaan en welke transformaties daar bij horen.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties met alle mogelijke exponenten en de rekenregels voor machten daarbij gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen;
- aan een formule herkennen of de bijbehorende grafiek door transformaties uit die van een standaardfunctie kan ontstaan.

Verkennen

Opgave V1

Je staat bij een uitkijktoren op een heuvel die een hoogte heeft van 25 m boven het aardoppervlak.

Voor de afstand a (in m) die je kunt kijken vanaf een ooghoogte h (in m) geldt $a = 3572 \cdot \sqrt{h + 25}$ m. Hierbij wordt aangenomen dat h de ooghoogte boven de heuvel is.

Wil je de grafiek bij deze functie maken, dan voer je in $y = 3572 \cdot \sqrt{x + 25}$.

a Licht toe dat de grafiek bij deze formule kan worden afgeleid uit de grafiek van $y = x^{0,5}$.

b Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $y = x^{0,5}$ om de grafiek bij de gegeven formule te krijgen?

Je kunt in de functie $y = x^{0,5}$ geen negatieve getallen invullen, want dat is eigenlijk een wortelfunctie.

c Wat betekent dit voor de waarden van h die je in de formule kunt invullen?

d Is a recht evenredig met $h^{0,5}$?

Opgave V2

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in °C (graden Celsius) gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in dagen.

Wil je de grafiek bij deze functie maken, dan voer je in $y = \frac{89}{x-2}$.

a Licht toe dat de grafiek bij deze formule kan worden afgeleid uit de grafiek van $y = x^{-1}$.

b Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $y = x^{-1}$ om de grafiek bij de gegeven formule te krijgen?

Je kunt in de functie $y = x^{-1}$ niet $x = 0$ invullen, want delen door 0 levert geen reële waarde op.

c Wat betekent dit voor de waarden van T die je in de formule kunt invullen?

d Is t recht evenredig met T^{-1}?

Uitleg 1

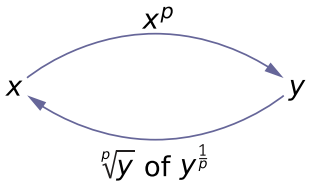
Alle functies van de vorm $y = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Als $p = \frac{1}{n}$ met $n = 2,3,4,5,...$ dan spreek je van wortelfuncties:

- $a = 3572\sqrt{h + 25} = 3572(h + 25)^{\frac{1}{2}}$
- $y = 40 + \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}} + 40$

De grafieken ervan kun je door transformatie afleiden uit die van de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen.

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht (of de wortelvorm) geïsoleerd aan één kant van het isgelijkteken en de rest aan de andere kant van het isgelijkteken staat.



Figuur 8.1

Er bestaan ook functies waar wel wortelvormen in voorkomen, maar daarnaast ook andere uitdrukkingen. Een voorbeeld is de functie $y = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Dit is geen wortelfunctie, maar je kunt de formule herleiden tot een verschil van twee machtsfuncties. Zo kun je er toch goed aan rekenen...

Opgave 1

In de **Uitleg 1 op pagina 316** zie je dat wortelfuncties als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende functies als machtsfunctie als dat kan.

a $y = 4\sqrt{x} + 3$

b $y = \sqrt{4 + x^2}$

c $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

Opgave 2

De functie $y = -3\sqrt{x - 8} + 6$ is een wortelfunctie.

a Maak de grafiek van deze functie en beschrijf met welke transformaties die grafiek kan worden verkregen uit de grafiek van $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van deze functie.
(Let er op dat je eerst de wortel isoleert.)

c Je kunt in $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geen negatieve x-waarden invullen.
Welke waarden kun je in de gegeven formule invullen?

d Los op: $-3\sqrt{x - 8} + 6 \leq -12$.

Uitleg 2

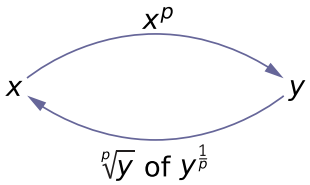
Alle functies van de vorm $y = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Als $p = -n$ met $n = 1,2,3,4,5,...$ dan spreek je van gebroken functies:

- $t = \frac{89}{T-2} = 89 \cdot (T-2)^{-1}$
- $y = \frac{15}{(x-1)^2} + 40 = 15 \cdot (x-1)^{-2} + 40$

De grafieken ervan kun je door transformatie afleiden uit die van de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen, zoals asymptoten die je kunt afleiden uit die van de standaard machtsfunctie.

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht geïsoleerd aan één kant van het isgelijkteken en de rest aan de andere kant van het isgelijkteken staat.



Figuur 8.2

Er bestaan ook functies waar wel breuken in voorkomen, die niet tot een machtsfunctie zijn te herleiden. Een voorbeeld is de functie $y = x^2 - \frac{3}{x}$. Soms kun je daar toch goed aan rekenen...

Opgave 3

In de **Uitleg 2 op pagina 317** zie je dat sommige gebroken functies als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende gebroken functies als machtsfunctie als dat kan.

a $y = \frac{1}{x^2} + 4$

b $y = \frac{1}{4+x^2}$

c $y = \frac{2}{(x-3)^4} + 10$

d $y = \frac{4+x}{x}$

Opgave 4

Gegeven is de gebroken functie $y = \frac{3}{(x-4)^2} + 1$.

a Uit welke standaardfunctie kan de grafiek hiervan door transformatie ontstaan?
En welke transformaties moet je dan achtereenvolgens toepassen?

b Welke twee asymptoten heeft de grafiek van de gegeven functie?
Welke x-waarde mag je er dus niet invullen?

c Los op: $\frac{3}{(x-4)^2} + 1 \geq 4$.

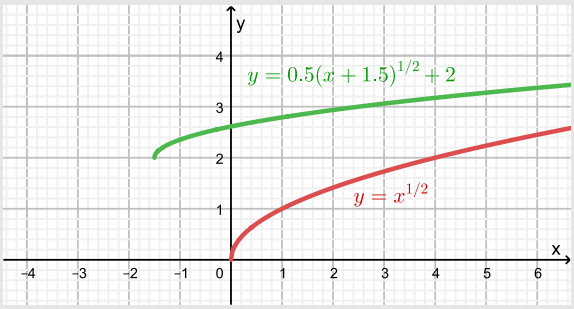
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

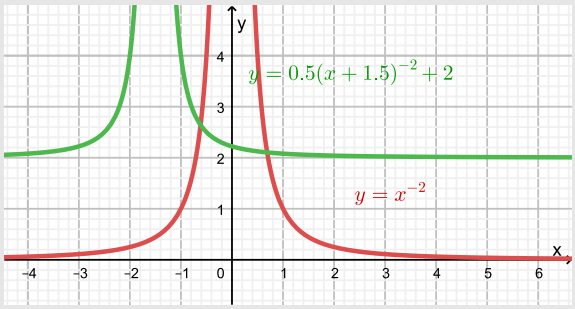
Als een **wortelfunctie** kan worden geschreven als een machtsfunctie van de vorm $y = a(x + b)^{\frac{1}{n}} + c$, waarin $n = 2,3,4,...$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{\frac{1}{n}}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.

Als een **gebroken functie** kan worden geschreven als een machtsfunctie van de vorm $y = a(x + b)^{-n} + c$, waarin $n = 1,2,3,4,...$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{-n}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.

Bekijk de applet



wortelfuncties



gebroken functies

Figuur 8.3

Voorbeeld 1

De trillingstijd van een trillende massa aan een veer hangt af van de veerconstante. Er geldt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Hierin is:

- T de trillingstijd in seconden
- m de massa in kg
- c de veerconstante in N/m

Van een veer is de veerconstante bekend: $c = 7,5$ N/m.
Laat zien dat T een wortelfunctie is van m en bereken m als $T = 2$.

Antwoord

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\left(\frac{m}{7,5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{7,5^{\frac{1}{2}}} \cdot m^{\frac{1}{2}} \approx 2,29 \cdot \sqrt{m}.$$

Nu duidelijk is dat T recht evenredig is met $\sqrt{m}$ kun je er gemakkelijk mee rekenen:

$T = 2$ betekent $2,29 \cdot \sqrt{m} = 2$.

Je vindt dan $m \approx 0,76$ kg.

Opgave 5

Bekijk de formule in **Voorbeeld 1 op pagina 318**.

a Je ziet dat T recht evenredig is met $\sqrt{m}$.
Bereken de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

b Door welke transformatie kan de grafiek van $T = 2{,}29\sqrt{m}$ uit de bijbehorende standaardfunctie ontstaan?

c Los de vergelijking $2{,}29 \cdot \sqrt{m} = 2$ zelf op.

Opgave 6

De formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ kun je ook gebruiken om de veerconstante c te berekenen.

a Laat zien, dat je de formule kunt schrijven als $c = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$.

b Hoe groot is de veerconstante als een gewicht van 1 kg een trillingstijd van 2 s oplevert?

Voorbeeld 2

Een school heeft een kopieerapparaat voor zijn studenten waarmee ook in kleur kan worden afgedrukt. De jaarlijkse huur (inclusief onderhoud) van dit apparaat bedraag € 840,= en elke kleurenkopie kost de school € 0,45.

De studenten moeten per kopie € 0,60 betalen.

Om te berekenen bij hoeveel kopieën per jaar de school uit de kosten komt, maakt een administrateur een formule voor de kosten k per kopie, afhankelijk van het aantal kopieën a.
Stel zelf zo'n formule op en laat zien dat k een getransformeerde machtsfunctie is van a.

Antwoord

$k = \frac{840+0{,}45a}{a} = \frac{840}{a} + \frac{0{,}45a}{a} = \frac{840}{a} + 0{,}45 = 840 \cdot a^{-1} + 0{,}45.$

De school komt uit de kosten als $\frac{840}{a} + 0{,}45 \leq 0{,}60$.

Ga na dat dit het geval is als $a \geq 5600$.

Opgave 7

Bekijk de formule in **Voorbeeld 2 op pagina 319**.

a Je ziet dat k een getransformeerde machtsfunctie is van a.

Door welke transformatie kan de grafiek van $k = 840 \cdot a^{-1} + 0{,}45$ uit de bijbehorende standaardfunctie ontstaan?

b Welke twee asymptoten heeft de grafiek van k?

c Los de ongelijkheid $\frac{840}{a} + 0{,}45 \leq 0{,}60$ zelf op.

Opgave 8

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in °C (graden Celsius) gevonden: $t = \frac{89}{T-2}$. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in dagen.

a Laat zien, dat deze functie een getransformeerde machtsfunctie is.

b Welke twee asymptoten heeft de grafiek van t?

c Bij welke temperatuur is binnen 5 dagen 50 % van het zaad ontkiemt?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $y = 40 - 10\sqrt{x+12}$.

a Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

b Benoem de transformaties die nodig zijn om de grafiek van deze functie uit de bijbehorende standaardfunctie af te leiden.

c Welke waarden van x kun je in deze functie invullen?

d Bepaal de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide assen in twee decimalen als nodig.

e Los algebraïsch op: $40 - 10\sqrt{x+12} \geq 10$.

Opgave 10

Gegeven de functie $y = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$.

a Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

b Bepaal de asymptoten van de grafiek van de gegeven functie.

c Bereken het nulpunt van de grafiek van de gegeven functie.

Opgave 11

Fruittelers bespuiten hun bomen regelmatig met insecticiden, stoffen om insecten die schadelijk zijn voor hun fruit te bestrijden. De opbrengst P (in kg) per appelboom hangt af van de hoeveelheid insecticide a (in liter) volgens de formule:

$P = 160 - \frac{65}{1+a}$

Hier is $a \leq 0 \leq 10$.

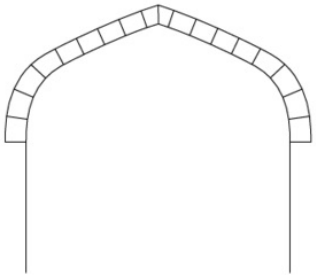
a Hoeveel bedraagt de opbrengst per appelboom als er geen insecticide wordt gespoten?

b Welke asymptoten heeft de grafiek van P als functie van a?
Licht je antwoord toe met behulp van transformaties.

c Hoeveel liter insecticide moet er worden gespoten om de opbrengst per appelboom hoger dan 140 kg te laten zijn?

Opgave 12

De bovenzijde van deze poort heet wel een 'tudorboog'.



Figuur 8.4

Neem aan dat de y-as door het midden van de poort loopt, evenwijdig aan de opstaande zijden. Neem ook aan dat de x-as loopt door de twee onderste punten van de boog. Dan geldt voor de rechterkant van een bepaalde tudorboog de formule:

$y = \sqrt{3 - 2x}$

Hierin is:

- x de horizontale afstand van een punt van de boog tot het midden ervan in m
- y de verticale afstand van een punt van de boog tot de x-as in m

Voor deze formule geldt $0 \leq x \leq 1{,}5$.

Verder is het linkerdeel van de boog het spiegelbeeld van het rechterdeel.

a Maak een schets van de tudorboog met behulp van een grafiek van de gegeven formule.
Welke formule geldt voor het linkerdeel van de tudorboog?

b Bereken hoe hoog het hoogste punt van de tudorboog boven de x-as zit.

c Hoe groot is de afstand tussen de twee punten van de boog die 1 m boven de x-as zitten?

Opgave 13

De kracht die twee massa's m_1 en m_2 op elkaar uitoefenen heet de zwaartekracht. Deze kracht is vooral merkbaar als het over grote massa's gaat, zoals hemellichamen. De formule voor de zwaartekracht is

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Hierin is:

- F de zwaartekracht (in N)
- G de gravitatieconstante, $G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}$ $m^3s^{-2}kg^{-1}$
- m_1 en m_2 de massa's (in kg) van de betrokken lichamen
- r de afstand (in m) tussen de zwaartepunten van de betrokken lichamen

De massa van de maan is ongeveer $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg en de diameter is ongeveer 3476 km.

Je wilt de zwaartekracht van de maan berekenen van voorwerpen op of vlak boven (minder dan 10 km hoog) het maanoppervlak.

a Laat zien dat de zwaartekracht van een voorwerp met massa 1 kg op een afstand a (in m) boven het maanoppervlak wordt beschreven door de formule:

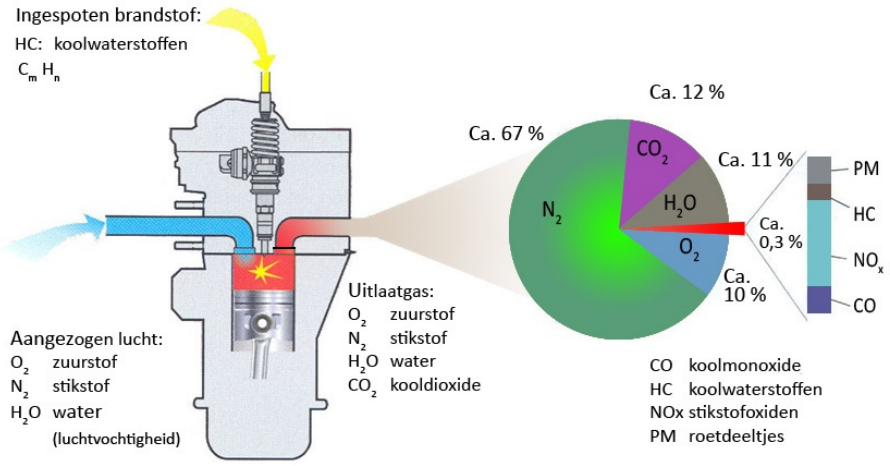
$F = \frac{49{,}1 \cdot 10^{11}}{(a+1738000)^2}$

b De grafiek van deze functie kan door transformatie ontstaan uit die van $F = a^{-2}$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Welke asymptoten heeft de grafiek van $F = \frac{49{,}1 \cdot 10^{11}}{(a+1738000)^2}$?

Toepassen

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht in komt. Deze figuur van de site van de ANWB laat dat zien.



Figuur 8.5 Bron: ANWB

Volgens onderzoek is de hoeveelheid CO die uitgestoten wordt afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid. Voor de CO-uitstoot bij een warme motor geldt:

$$u = 4{,}4 + \frac{196{,}0}{v}$$

Bij een koude motor geldt:

$$u = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{v}.$$

Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.
Deze formules zijn alleen geldig voor $v \geq 10$.

Opgave 14

Bekijk de gegevens van CO-uitstoot bij de motor van een rijdende auto.

a Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot afneemt als de snelheid toeneemt?

b De uitstoot van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?

c Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid. Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

d Hoe kun je aan beide formules zien dat de koude motor altijd een hoger CO-emissie heeft dan de warme motor?

Opgave 15

Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4{,}4L + 0{,}054T$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers en T de rijtijd in seconden.

Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $y = 3\sqrt{x} - 6$.

a Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

b Benoem de transformaties die nodig zijn om de grafiek van deze functie uit de bijbehorende standaardfunctie af te leiden.

c Bepaal de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide assen.

d Los algebraïsch op: $3\sqrt{x} - 6 \leq 9$.

Opgave 17

Gegeven de functie $y = \frac{300-10x}{2x}$.

a Laat zien dat dit een getransformeerde machtsfunctie is.

b Bepaal de asymptoten van de grafiek van de gegeven functie.

c Bereken het nulpunt van de grafiek van de gegeven functie.

d Los op in twee decimalen nauwkeurig: $\frac{300-10x}{2x} \geq 40$.

8.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met machten en heb je ontdekt dat veel functies met wortels en/of breukvormen als machtsfunctie met gebroken en/of negatieve exponenten zijn te schrijven. Verder heb je kennis gemaakt met verschuivingen en vermenigvuldigingen van grafieken. Veel functies kunnen daarmee ontstaan uit een standaardfunctie waarvan de eigenschappen bekend zijn.

Je hebt nu alle theorie van **Machten en wortels** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — evenredigheidsconstante — machtsfunctie — rekenregels voor machten
- omgekeerd evenredig met een macht — verticale/horizontale asymptoot — extra rekenregel voor machten
- standaardfunctie — transformaties — verschuiven in de x- of de y-richting — vermenigvuldigen in de x- of de y-richting
- wortelfunctie — gebroken functies

Activiteitenlijst

- een machtsfunctie herkennen aan de vorm $y = c \cdot x^p$ — terugrekenen vanuit een machtsfunctie met de omgekeerde macht — functies met wortelvormen herleiden naar machtsfuncties — machtsfuncties met gebroken exponent herleiden naar wortelfuncties;
- functies die omgekeerd evenredig zijn met een macht herleiden naar machtsfuncties — asymptoten bepalen — functies met gebroken vormen herleiden naar machtsfuncties — machtsfuncties met negatieve exponent herleiden naar functies met breuken;
- op functies transformaties zoals verschuiven in de x- of de y-richting en vermenigvuldigen in de x- of de y-richting toepassen;
- herkennen wanneer een functie met een wortel als machtsfunctie is te schrijven — herkennen wanneer een functie met een breuk als machtsfunctie is te schrijven — wortelfuncties en gebroken functies goed in beeld brengen zodat alle eigenschappen zichtbaar zijn.

Testen

Opgave 1

Geef van de volgende functies aan of y recht evenredig is met een macht van x of juist omgekeerd evenredig met een macht van x of geen van beide. Laat zien hoe de functie als machtsfunctie kan worden geschreven.

a $y = 3{,}45 \cdot x^{1{,}2}$

b $y = 12 \cdot \sqrt{2x}$

c $y = \frac{360}{x^2}$

d $y = 2x + \frac{3}{x}$

Opgave 2

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied. Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen.

Figuur 8.1 bron: Wikipedia

Ze ontdekten een verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen (S) op dat eiland: $S = 3 \cdot A^{0,30}$.

Het eiland **Jamaica** is ongeveer 1300 vierkante mijlen groot. Er zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van deze formule verwacht mag worden.

a Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b Binnen de theorie geldt als ruwe regel: 'Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.' Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van één groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van twee kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als 'eilanden' beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo'n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden. Welke mogelijkheid gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheid kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

c Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

Opgave 3

Gegeven is de functie $y = 10 - 2(x - 1)^5$.

a Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^5$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van de gegeven functie met de beide coördinaatassen.

c Los algebraïsch op: $y = 496$.

d Los algebraïsch op: $y > 8$.

Opgave 4

Herleid de volgende functies naar de vorm $y = a \cdot x^b$.

a $y = 3\sqrt{x}$

b $y = \frac{5}{2x^4}$

c $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

d $y = \sqrt[3]{\frac{729}{x}}$

Opgave 5

Herleid de volgende functies naar wortelfuncties en/of gebroken functies.

a $y = 5x^{\frac{1}{3}}$

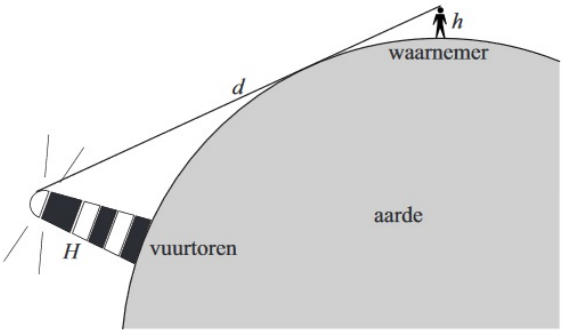
b $y = 2{,}5x^{-3}$

c $y = 3x^{-\frac{1}{2}}$

d $y = (2x)^{-\frac{1}{2}}$

Opgave 6

Het licht van de Lange Jaap, een vuurtoren bij Den Helder, reikt 30 zeemijl ver. Een zeemijl is 1852 m. De lamp van de Lange Jaap bevindt zich op een hoogte van 57 m. Vanaf een kijkhoogte van 2 m is het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl niet (rechtstreeks) te zien, omdat de vuurtoren zich dan achter de horizon bevindt.
De maximale afstand d waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken is afhankelijk van de hoogte H waarop de lamp van een vuurtoren zich bevindt en van de kijkhoogte h van de waarnemer. Bij benadering geldt:



Figuur 8.2

$$d = 3{,}74 \cdot \left(\sqrt{H} + \sqrt{h}\right)$$

Hierin is:

- d de maximale afstand in km waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken
- H de hoogte van het licht van de vuurtoren in m
- h de kijkhoogte in m

a Laat zien dat voor de Lange Jaap geldt $d \approx 28{,}24 + 3{,}74 \cdot \sqrt{h}$ m.

b De formule voor de kijkafstand van de Lange Jaap (zie a) is een getransformeerde machtsfunctie. Leg uit welke machtsfunctie dat is en om welke transformaties het gaat.

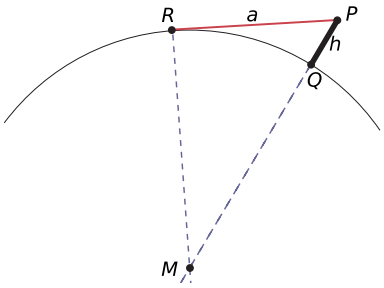
c Op welke kijkhoogte is de lamp van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl nog zichtbaar?

Toepassen

Opgave 7: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties' kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 8.3

a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h, rond af op honderdtallen.

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp 'Machtsfuncties'. Hoe zou dat kunnen komen?

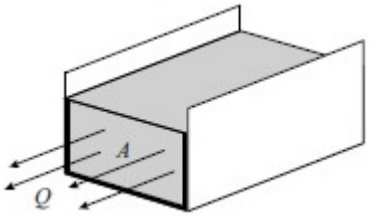
d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Opgave 8: Koelwater

Via een rechthoekige goot loost een fabriek koelwater op een rivier. De hoeveelheid koelwater die per seconde een dwarsdoorsnede van een goot passeert, wordt het debiet van de goot genoemd. Het debiet van de goot van de fabriek is te berekenen met de formule:

$$Q = 0{,}73 \cdot \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}}$$

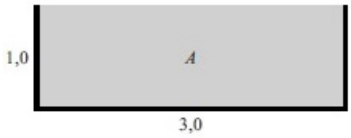


Figuur 8.4

Hierin is:

- Q het debiet in m^3 per seconde
- A de oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van het water in m^2

P is de totale lengte van de randen van de dwarsdoorsnede die onder water liggen in m. In de bovenste figuur zijn die randen dikgedrukt.

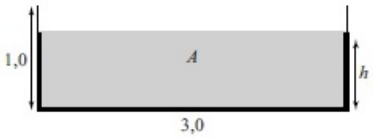


Figuur 8.5

De rechthoekige goot waarmee de fabriek het koelwater loost, is 3,0 meter breed en 1,0 meter hoog. Hiernaast is de dwarsdoorsnede van deze goot getekend bij een maximaal debiet.

De fabriek loost 5000 m^3 koelwater per uur.

a Bereken het maximale debiet en leid daaruit af of de goot tijdens deze lozing zal overstromen.



Figuur 8.6

De waterhoogte in de goot noemen we h, met h in m.

Bij normale lozing stroomt er continu 1,0 m^3 koelwater per seconde door de goot.

b Bereken in dit geval de waterhoogte in de goot. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

9

Exponenten en logaritmen

9.1 Exponentiële groei 330
9.2 Exponentiële functies 340
9.3 Het begrip logaritme 348
9.4 Logaritmische functies 355
9.5 Logaritmische schalen 362
9.6 Totaalbeeld 371

9.1 Exponentiële groei

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor, groeifactoren omrekenen;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met lineaire en exponentiële groei;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer 9,5 miljoen inwoners. Dit aantal groeide toen met een vast percentage van 4,5 % per jaar.

a In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld als de groei zo doorzet?

Noem het aantal inwoners in miljoenen A en laat t de tijd in jaren na 2005 zijn.

b Welke formule kun je opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?

c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Figuur 9.1

Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 1998 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat.
Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan $200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$.
In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat.
Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1{,}05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden.
Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van 1,05 per jaar.

Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan A het aantal leden in land A, B het aantal leden in land B en t de tijd in jaren na 2010.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 330** de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

a Welke formule kun je opstellen voor A afhankelijk van t?

b Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.

c Stel een formule op voor B afhankelijk van t.

d Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.

e In B groeit het aantal leden van voetbalclubs met 5% per jaar.
Hoeveel procent per maand is dat?

Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

a Teken de grafieken van A en B in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.

b In welk jaar zijn er in land A meer leden van voetbalclubs dan in land B?

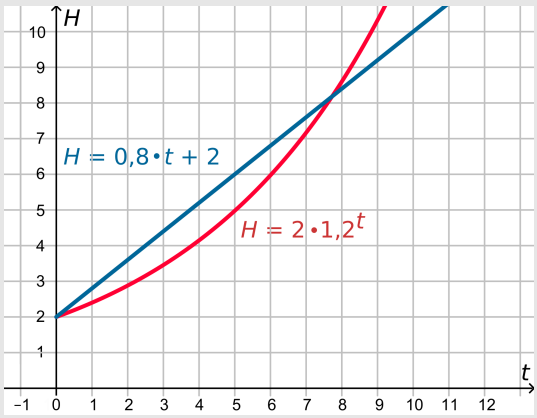
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: lineaire en exponentiële groei

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid b en een vaste toename per eenheid van a.
  Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
  Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal a.
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid b en een vaste groeifactor per eenheid van g.
  Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
  Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0,b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0,b)$ als $0 < g < 1$.



Figuur 9.2

Bij lineaire groei met een vaste toename van $a = 0$ spreek je van een **constante functie**.
En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor $g^0 = 1$.

Je kunt **groeifactoren omrekenen**:

als de groeifactor per dag 1,5 is, dan is hij per week $1{,}5^7$ en per uur $1{,}5^{\frac{1}{24}}$.

Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met 2,6% toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.
Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op.
Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is 1,026. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534.
Is het aantal zeehonden Z en de tijd in maanden t dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1{,}026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 332** zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeit.

a Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?

c Stel een formule op voor het aantal zeehonden Z afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.

d Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

Opgave 4

In de **Theorie op pagina 331** zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

a Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1{,}10^t$ en $H_2 = 0{,}6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

b Het éne snijpunt is uiteraard $(0{,}4)$. Bepaal het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

c Als je de groeifactor van H_1 verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?

d Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0{,}80^t$ en $H_2 = -0{,}5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

e Het éne snijpunt is uiteraard $(0{,}4)$. Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwonersaantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren.
Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben."

De burgemeester mw. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

a Maak nu grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mw. Jansma.

b Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.

c Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.

d Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.

e Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van B dat van A overschrijden als de groei zo door gaat?

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
aantal inwoners A	79600	81100	82600	84200	85600	87100	88500	90100	91600
aantal inwoners B	72100	73900	75800	77600	79600	81600	83600	85700	87800

Tabel 9.1

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin A het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor 1,025. Er geldt $B = 72100 \cdot 1{,}025^t$ waarin B het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad B meer inwoners heeft dan stad A.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 333**.

a Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.

b Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

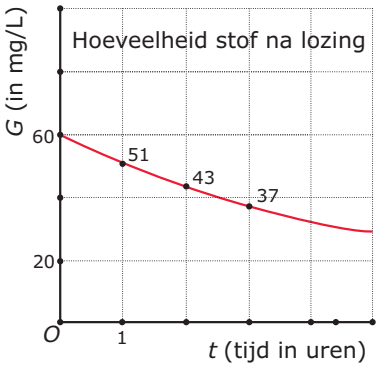
c Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.

d Hoe leid je voor stad B de formule af uit de tabel?

e Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van B dat van A gaat overschrijden als de groei zo door gaat.

Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif G (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. De hoeveelheid gif wordt steeds ongeveer met eenzelfde factor vermenigvuldigd die kleiner is dan 1, dus de hoeveelheid wordt steeds minder. Je spreekt dan van exponentieel verval.



Figuur 9.3

a Laat met een berekening zien, dat er (ongeveer) sprake is van exponentieel verval.

b Leid een formule af voor G afhankelijk van t.

c Na hoeveel uur is er minder dan 10% van deze giftige stof over?

Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid N is het volgende gegeven:
Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor N als functie van t er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor g per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800 \big/ 1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor g vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.

Je vindt $g = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 0{,}95$.
Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0{,}95^t$.
Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid b te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$. Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0{,}95^t$.

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3 op pagina 334** een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid N wordt gevonden op basis van de waarden van N op twee verschillende tijdstippen.

a Bereken zelf de groeifactor per tijdseenheid.

b Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.

c Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

Opgave 9

Bij de gegevens in **Voorbeeld 3 op pagina 334** past ook een lineaire formule voor N als functie van t.

a Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

b Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van N als $t = 20$.

c Bij de lineaire functie is de hoeveelheid N op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?

d Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid N ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.

Oefenen

Opgave 10

Een hoeveelheid H heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor H afhankelijk van t (in dagen) en bereken de waarde van H op $t = 10$ in gehelen nauwkeurig.

a H neemt dagelijks toe met 15%.

b H neemt dagelijks toe met 15.

c H neemt dagelijks af met 15%.

d H neemt dagelijks af met 15.

e H neemt wekelijks toe met 15%.

f H neemt wekelijks af met 15%.

Opgave 11

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

jaartal	bevolking
2008	154000
2009	156300
2010	158700
2011	161000

Tabel 9.2

Eén van de medewerkers zegt: “Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo'n 2300 inwoners bijkomen.”

a Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.

b Neem aan dat t de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners I volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: “Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar.”

c Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.

d Welke formule kun je opstellen voor I als functie van t uitgaande van deze exponentiële groei?

e Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?

f Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

Opgave 12

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

jaartal	2005	2006	2007	2008	2009
aantal konijnen	1450	1261	1097	954	830

Tabel 9.3

a Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?

b Welke formule kun je opstellen voor het aantal konijnen K afhankelijk van de tijd t in jaren?

Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.

c Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?

Opgave 13

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt 32,7% van het blauwe licht tegengehouden door het water.

Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?

Figuur 9.4

Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

a Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 12 uur af?

b Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?

c Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?

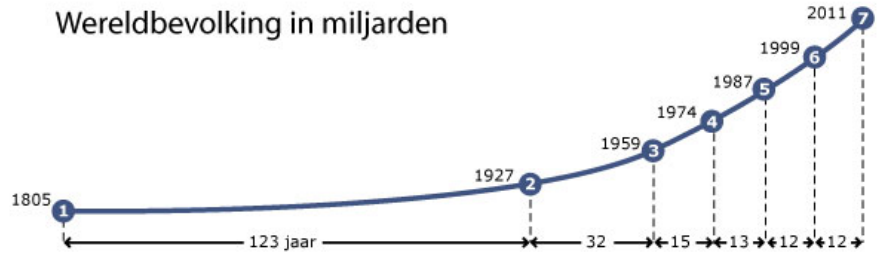
d Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?

e Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.

f Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

Opgave 15

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denken aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.



Figuur 9.5

a Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer 0,56% per jaar toenam.

Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.

b Met hoeveel procent per jaar ongeveer?

c Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.

d Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

Toepassen

Intel-processor	introductiejaar	# transistoren
4004	1971	2300
8008	1972	2500
8080	1974	4500
8086	1978	29.000
286	1982	134.000
386	1985	275.000
486	1989	1.200.000
Pentium	1993	3.100.000
Pentium II	1997	7.500.000
Pentium III	1999	9.500.000
Pentium 4	2000	42.000.000
Itanium	2001	25.000.000
Itanium 2	2003	220.000.000
Itanium 2 9M	2004	592.000.000

Tabel 9.4

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. De tabel symboliseert de ‘wet van Moore’. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde ‘processor’ (een minuscuul printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...
Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terecht komen.

Maar niet alleen de rekenkracht van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het is niet duidelijk of de grenzen van die groei in zicht komen...

Opgave 16: De wet van Moore

Bekijk de figuur.

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2500 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

Figuur 9.6

a In 1993 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?

b In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?

Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat R die rekenkracht voorstelt afhankelijk van t het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2500$.

c Stel een formule op voor R als functie van t.

d Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.

e Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.

Opgave 17: Facebook

Uit **Wikipedia, december 2012**:
"In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. December 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers."

a Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.

b Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

Testen

Opgave 18

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.

Figuur 9.7

a Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?

b Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning? En welke groeifactor per uur?

c Stel een formule op voor de bandenspanning p van deze autoband afhankelijk van de tijd t in dagen.

d Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 0,1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?

Opgave 19

Het aantal WhatsApp-berichten W is sinds 2001 flink toegenomen. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten W in miljoenen):

jaartal	2005	2006	2007	2008
W	4,9	9,8	19,6	39,2

Tabel 9.5

Figuur 9.8

a Met hoeveel procent neemt het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?

b Welke formule kun je opstellen voor het aantal WhatsApp-berichten W per jaar (in miljoenen) afhankelijk van het aantal jaren t na 2005?

c Hoeveel van deze berichten verwachtte men in 2012?

9.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële functies en herkennen of er van exponentiële groei sprake is;
- verdubbelingstijd en halveringstijd berekenen.

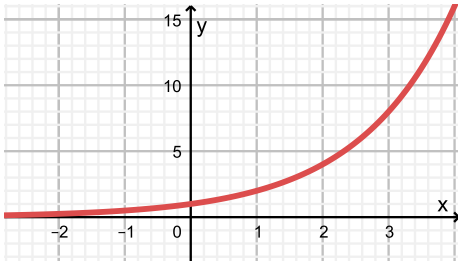
Voorkennis

- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van x.



Figuur 9.1

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt?

b Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 afneemt?

c Hoeveel is 2^0? Kun je dat verklaren?

d Hoeveel is 2^{-1}?

e Krijg je ooit een uitkomst 0?

Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van x.

a Hoe ziet die grafiek er uit?

Maar bekijk nu $y = (-2)^x$

b Vul de volgende tabel in:

x	0	1	2	3	4
y					

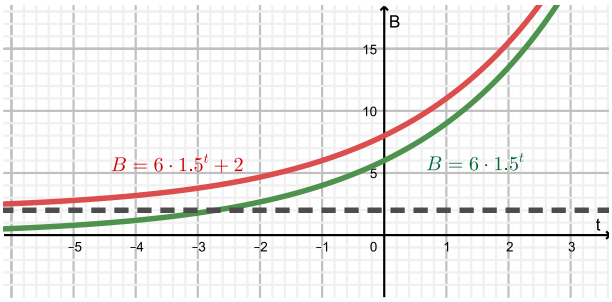
Tabel 9.1

c Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

Uitleg

Bekijk de applet: exponentiële functie

Hier zie je de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t$.
Er is sprake van exponentiële groei met beginwaarde 6 en groeifactor 1,5. Elke toename van x met 1 betekent dat de hoeveelheid 1,5 keer zo groot wordt. Elke afname van t met 1 betekent dat de hoeveelheid door 1,5 wordt gedeeld. De uitkomsten naderen naar 0, maar blijven toch altijd positief. De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek.



Figuur 9.2

Ook de functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$ is een exponentiële functie.
Maar nu is er van exponentiële groei geen sprake.
De grafiek van $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ is 2 omhoog geschoven.
De lijn $y = 2$ is nu de horizontale asymptoot.

Bij $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ is er sprake van een vaste verdubbelingstijd: hoe groot de hoeveelheid op zeker moment ook is, er telkens evenveel tijd nodig om het dubbele te krijgen, namelijk ongeveer 1,71 tijdseenheden.
Bij $y = 6 \cdot 1{,}5^x + 2$ is dat niet het geval.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t$ in de **Uitleg op pagina 341**.

a Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?

b Wat gebeurt er met de y-waarde als t met 1 toeneemt?
En als t met 1 afneemt?

c Wat gebeurt er met de y-waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

d Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-6} van 0 af? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

e Bereken de verdubbelingstijd die hoort bij deze exponentiële groei.

f Laat zien dat deze verdubbelingstijd niet afhangt van de y-waarde waar je mee begint.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$ in de **Uitleg op pagina 341**.

a Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?

b Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?

c Wat gebeurt er met de y-waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

d Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-6} van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

e Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

Opgave 3

Neem eens aan, dat je een glas met water van 70 °C in een kamer met een temperatuur van 20 °C zet. Volgens de warmtewet van Newton neemt het temperatuurverschil met de omgeving met een vast percentage per uur af. Neem aan dat dit met 60% per uur is.

a Hoeveel graden is de watertemperatuur na 1 uur?

Neem aan dat T de temperatuur in °C en t de tijd in uren is.

b Waarom is de formule $T = 70 \cdot 0{,}4^t$ geen goede formule voor dit afkoelingsproces?

c Bedenk een formule die wel past bij dit afkoelingsproces.

d Is hier sprake van exponentiële afname, exponentieel verval?

Theorie en voorbeelden

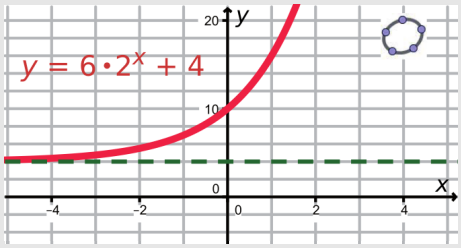
Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële functie

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $g < 1$.

Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichter bij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.



Figuur 9.3

Alleen als $a = 0$ is er sprake van exponentiële groei.
De **verdubbelingstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid verdubbelt.
De **halveringstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid halveert.
Deze tijdsduren kun je vooralsnog alleen met inklemmen of een grafische rekenmachine of GeoGebra vinden.

Voorbeeld 1

De brandstof van kerncentrales bestaat uit staven uranium. Dit uranium wordt in de reactor omgezet naar plutonium. Deze stof zendt radioactieve straling uit met een halveringstijd van 10.000 jaar. Omdat de tijd waarin de hoeveelheid plutonium halveert zo groot is, is het bewaren van dit radioactieve afval een probleem.

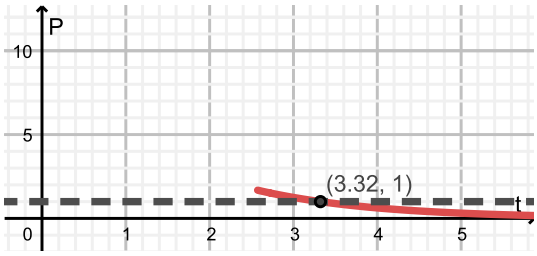
Hoe lang moet je 10 kg plutonium als radioactief afval opslaan om te zorgen dat er nog 1 kg van over is?

Antwoord

Neem je de tijd t in eenheden van één halveringstijd, dan is de hoeveelheid plutonium P in kg:

$P = 10 \cdot 0{,}5^t$

Je hebt dan nog 1 kg over als $10 \cdot 0{,}5^t = 1$.
Dat levert met GeoGebra op: $t \approx 3{,}32$.
Je moet het plutonium dan ongeveer
$3{,}32 \cdot 10000 = 33200$ jaar bewaren.



Figuur 9.4

Je kunt ook de tijd t in jaren nemen.
Dan moet je eerst de groeifactor g per jaar berekenen vanuit de halveringstijd, dus vanuit:

$10 \cdot g^{10000} = 5$ ofwel $g^{10000} = 0{,}5$.

Je vindt $g = 0{,}5^{\frac{1}{10000}} = 0{,}9999306... \approx 0{,}99993$. (Neem vooral veel decimalen.)

Vervolgens moet je oplossen $10 \cdot 0{,}99993^t = 1$.
Je vindt dan $t \approx 33219$ jaar.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 342** wordt het verloop van de hoeveelheid plutonium in de loop van de tijd beschreven door een beginwaarde en een halveringstijd.

a Waarom is er dan sprake van exponentieel verval?

b Welke eenheid van tijd hoort er bij de formule $P = 10 \cdot 0{,}5^t$?

c Welke horizontale asymptoot heeft deze formule?

d Bereken zelf de groeifactor per jaar.
Ga met behulp van GeoGebra of de grafische rekenmachine na dat na 33219 jaar de hoeveelheid plutonium minder dan 1 kg is.

Opgave 5

Bij het huidige groeitempo is de verdubbelingstijd van de wereldbevolking 58 jaar.
Eind 2011 bedroeg de wereldbevolking 7 miljard mensen.

a Stel een formule op voor het aantal mensen N als functie van de tijd t.
Neem als tijdseenheid de verdubbelingstijd.

b Na hoeveel jaar zouden er 10 miljard mensen op aarde zijn?

c Stel ook een formule op voor N als functie van t in jaren.

d Laat zien dat deze formule hetzelfde resultaat oplevert als bij b.

Voorbeeld 2

Je ziet hier het verloop van de temperatuur T in °C van theewater in een beker die wordt geplaatst in een omgevingstemperatuur van 20 °C afhankelijk van de temperatuur t in uren.

t in uur	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T in °C	90,0	48,0	31,2	24,5	21,8	20,7	20,3	20,1	20,0

Tabel 9.2

Laat zien, dat de formule $T = 70 \cdot 0{,}4^t + 20$ redelijk past bij deze tabel.

Als het theewater onder de 30 °C komt kun je er geen bruikbare thee meer van maken. Na hoeveel uur is dat niet meer mogelijk?

Antwoord

Maak een tabel met de gegeven formule en vergelijk hem met de tabel hierboven.
Je zult zien dat ze goed overeenkomen.

Bruikbare thee kun je maken tot $70 \cdot 0{,}4^t + 20 < 30$.
Zo'n vergelijking kun je nog niet algebraïsch oplossen en dus kun je net zo goed meteen GeoGebra of een grafische rekenmachine inzetten. Je krijgt dan gemakkelijk de juiste oplossing $t > 2{,}12$ uur.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 344**.

a Maak zelf een tabel en een grafiek bij de formule.

b Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van T?

c Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?

d Laat zien dat je geen bruikbare thee meer kunt maken na $t > 2{,}12$.

Opgave 7

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule

$A = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$

geeft de hoeveelheid A in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed van de patiënt is opgenomen.

a Is de grafiek van A als functie van t dalend of stijgend?
Hoe zie je dat aan de formule?

b Geef een formule voor de asymptoot van de grafiek van A.

c Laat zien dat er geen sprake is van exponentiële groei.

d Na hoeveel minuten is 75 % van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Oefenen

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 50 \cdot 0{,}92^t$.

a Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek dalend is?

b Wat gebeurt er met de y-waarde als t met 1 toeneemt?
En als t met 1 afneemt?

c Wat gebeurt er met de y-waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

d Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-2} van 0 af? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

e Bereken de halveringstijd die hoort bij deze exponentiële groei. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 20 - 14 \cdot 0{,}8^t$.

a Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek stijgend is?

b Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?

c Wat gebeurt er met de y-waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?

d Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-2} van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

e Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

Opgave 10

Salmonella is een darmbacterie. Die komt door uitwerpselen van mens en dier terecht in het milieu, in het water en in levensmiddelen. Mensen lopen meestal een besmetting op door rauwe dierlijke producten, zoals vlees, vis, eieren en zuivel. Ook groenten en fruit kunnen salmonella bevatten.

Bij een temperatuur van 20 °C wordt het aantal bacteriën elk half uur verdrievoudigd.

a Als het aantal salmonellabacteriën elk half uur drie keer zo groot wordt, met welke groeifactor per uur neemt dit aantal dan toe?

b Hoe groot is de groeifactor (drie decimalen) per minuut?

Neem aan dat A het aantal salmonella bacteriën en t de tijd in minuten is. De omgevingstemperatuur is 20 °C .
Op $t = 0$ zitten er in een salade 20 salmonella bacteriën per ml.

c Welke formule geldt voor A afhankelijk van t?

d Bereken de verdubbelingstijd bij deze groei in tienden van minuten nauwkeurig.

Als er meer dan $1{,}0 \cdot 10^5$ bacteriën per ml in het voedsel voorkomen, kun je ziek worden als je ervan eet.

e Na hoeveel tijd kun je je salade niet meer eten?

Opgave 11

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en hij moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van 0,6. Als het promillage lager is dan 0,5 mag hij weer rijden.

Hoe lang moet Jelte wachten?

Figuur 9.5

Opgave 12

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van 3,2 bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer 1,0 bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk p (in bar) afhankelijk van de tijd t (in dagen) na het oppompen.

Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $p = 2{,}2 \cdot 0{,}96^t + 1$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van p als functie van t? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?

b Waarom hebben negatieve waarden van t hier geen betekenis?

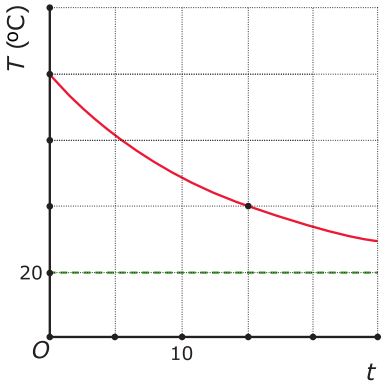
c Een autoband is te zacht als de druk lager is dan 1,6 bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

Toepassen

Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T - 20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T - 20$ en dus ook voor T als functie van t in minuten.



Figuur 9.6

Opgave 13: Afkoelende thee

Voor het temperatuursverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

a Licht dit toe.

b Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor T als functie van t.

d Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25 °C?

Opgave 14: Opwarmende melk

Melk komt met een temperatuur van 6 °C uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur (20 °C). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 13 °C heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

Testen

Opgave 15

In 1999 waren er 6 miljard mensen en in 2011 waren dat er 7 miljard.
Neem aan dat de wereldbevolking exponentieel groeide in die periode.

a Welke groeifactor per jaar hoort er bij die exponentiële groei?
Met hoeveel procent nam de wereldbevolking jaarlijks toe? Geef je antwoord in tienden van procenten.

b Ga er vanuit dat de groei van de wereldbevolking vanaf 2011 met diezelfde groeifactor door gaat.
Welke formule kun je dan opstellen voor het aantal mensen N afhankelijk van de tijd t in jaren?

c Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van N?

d In welk jaar zou volgens dit groeimodel de wereldbevolking de 10 miljard gaan overschrijden?

Opgave 16

In een glas bevindt zich een liter water dat zojuist nog heeft gekookt. De temperatuur bij inschenken in het glas $t = 0$ bedroeg 95 °C. Het glas staat in een kamer waarbinnen de temperatuur 20 °C is. De temperatuur T in °C van het water daalt volgens de formule

$T = 75 \cdot 0{,}9^t + 20$

waarin t de tijd in minuten na het inschenken is.

a Laat zien, dat de temperatuur bij inschenken inderdaad 95 °C bedroeg.

b Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?

c Welke formule hoort er bij de horizontale asymptoot?

d Na hoeveel tijd is de temperatuur lager dan 30 °C? Geef je antwoord in tienden van minuten nauwkeurig.

9.3 Het begrip logaritme

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- logaritmen berekenen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

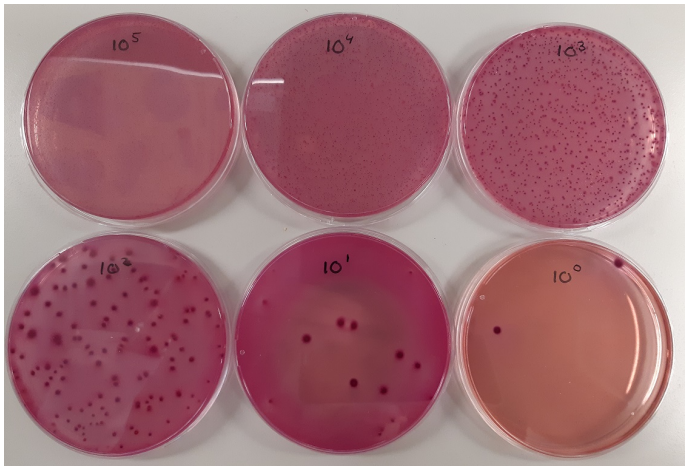
- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.
De afspraak is dat een voedingsbodem waarop tussen de 15 en 150 bacteriekolonies ontstaan, wordt geteld.



Figuur 9.1

a Op de voedingsbodem waarbij het monster 10^2 keer is verdund, zijn er na 18 uur (bij 37 °C) 80 bacteriekolonies ontstaan.
Hoeveel kolonievormende eenheden zitten er dan in 1 mL onverdund monster?

Tijdens de exponentiële groeifase (de zogenaamde 'logfase') blijkt dat de bacterie zich iedere 20 minuten verdubbelt. Hierbij past de groeiformule:

$B = 1 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$

waarin B het aantal bacteriën en t de tijd in minuten is.

b Bereken het aantal bacteriën na 40, 60 en 120 minuten.

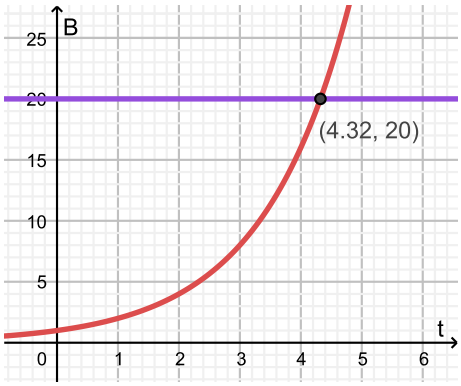
c Hoe wordt de formule bij b als je de tijd in uren neemt?
Controleer je formule door het aantal bacteriën te berekenen na 2 uur. Krijg je hetzelfde antwoord als bij b?

d Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 6000 bacteriën gevormd?

Uitleg 1

Bekijk de applet: logaritme

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B = 2 \cdot 10^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1200 bacteriën?
$2 \cdot 10^t = 1200$ geeft: $10^t = 600$
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 2{,}78$.
Dit antwoord is afgerond.
De exacte oplossing schrijf je als: $t = \log(600)$.
Dit is de logaritme van 600 met grondtal 10.
Het grondtal 10 schrijf je niet op, ook op een rekenmachine zie je dit grondtal niet.



Figuur 9.2

Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in de **Uitleg 1 op pagina 349**.

a Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 5000 is.
Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.

b Los nu met behulp van een logaritme op: $10^t = 1000$.
Waarom komt de waarde van t op een geheel getal uit?

c Controleer dat ook met de applet deze waarde voor t wordt gevonden.

Opgave 2

Je hebt gezien hoe je een vergelijking zoals $10^t = c$ kunt oplossen met behulp van een logaritme met grondtal 10.

a In welke gevallen wordt de oplossing een geheel getal?

b Laat door berekening zien, dat $\log\left(10^3\right) = 3 \cdot \log(10)$.

c Waarom geldt in het algemeen $\log\left(10^t\right) = t \cdot \log(10)$?

d Ga met je rekenmachine na, dat ook $\log\left(2^3\right) = 3 \cdot \log(2)$.
Controleer dit ook voor andere getallen.

e Welke eigenschap van logaritmen geldt dus?

Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is B het aantal bacteriën en t de tijd in uren.

Als je nu wilt weten na hoeveel tijd je 1000 bacterieën hebt, dan moet je oplossen:

$4 \cdot 1{,}5^t = 1000$

Eerst beide zijden delen door 4 geeft:

$1{,}5^t = 250$

Ook een dergelijke vergelijking kun je met behulp van logaritmen oplossen.
Je gebruikt dan de eigenschap $\log(g^t) = t \cdot \log(g)$.

$1{,}5^t = 250$ los je op door aan beide zijden de logaritme te nemen: $\log(1{,}5^t) = \log(250)$.
De eerder genoemde eigenschap geeft dan $t \cdot \log(1{,}5) = \log(250)$.
En dus is $t = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)}$.

En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: $t = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)} \approx 13{,}62$.

De oplossing van $1{,}5^t = 250$ wordt wel kortweg genoteerd als $t = {}^{1{,}5}\log(250)$.
Dit is een logaritme met grondtal 1,5.
Met de oplossing die je eerder zag betekent dit ${}^{1{,}5}\log(250) = \frac{\log(250)}{\log(1{,}5)}$.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg 2 op pagina 350**.

a Los zelf de vergelijking $4 \cdot 1{,}5^t = 2000$ op met behulp van de 10-logaritme.

b Schrijf de oplossing van de vergelijking $1{,}5^t = 500$ op als één logaritme.

c Hoe bereken je ${}^{1{,}5}\log(500)$ op je rekenmachine?

Opgave 4

Een bacteriekolonie groeit volgens de formule $B = 6 \cdot 5^t$ met t de tijd in uren en B het aantal bacteriën.

a Bereken met behulp van logaritmen na hoeveel tijd er 6000 bacteriën zijn.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken met behulp van logaritmen de verdubbelingstijd in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **10-logaritme** $x = \log(c)$ is de oplossing van $10^x = c$.

Dus geldt dan ook:

$\log(10^c) = c$ en $10^{\log(c)} = c$

De 10-logaritme is de terugrekenbewerking van de exponentiële functie met grondtal 10 en omgekeerd.

De ***g*-logaritme** $x = {}^g\log(c)$ is de oplossing van $g^x = c$.

Ook hier geldt:

${}^{g}\log(g^{c}) = c$ en $g^{{}^{g}\log(c)} = c$

De logaritme ${}^{g}\log(c)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $c > 0$.

Het verband tussen ${}^{g}\log(c)$ en $\log(c)$ is:

${}^{g}\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

Hiermee kun je logaritmen met een willekeurig grondtal op een rekenmachine berekenen.
Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan rechts onder de log: $\log_g(c)$.

Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas met een lage soortelijke massa. Dat gas staat onder druk en er lekt een klein deel van weg.
Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van het gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het luchtschip niet meer vliegen. Hoeveel dagen kan het luchtschip vliegen als het geheel is gevuld met gas? Geef je antwoord met een logaritme, en als een benadering afgerond op twee decimalen.

Figuur 9.3

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

Los op: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$.

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 0{,}98^t &= 2400 \\ 0{,}98^t &= 0{,}8 \\ t &= {}^{0{,}98}\log(0{,}8) = \frac{\log(0{,}8)}{\log(0{,}98)} \approx 11{,}05 \end{aligned}$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op dag 111 kan het luchtschip niet meer vliegen.

Opgave 5

Uit een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 vervliegt per tien dagen 4% van het gas.
Na hoeveel dagen is de inhoud van het luchtschip verminderd tot 2800 m^3?

a Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze zo ver mogelijk.

b Geef de oplossing van de vergelijking als logaritme. Geef ook een benadering afgerond op twee decimalen.

Opgave 6

Een hoeveelheid bacteriën neemt per dag met 20% toe.

a Bepaal de bijbehorende groeifactor.

b Een bioloog wil weten na hoeveel dagen het aantal bacteriën is verdubbeld. Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze vergelijking zo ver mogelijk.

c Schrijf de oplossing van de vergelijking als een logaritme en beantwoord daarmee de vraag.

Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt:

$p = 1013 \cdot 10^{-0{,}065h}$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

In deze formule wordt het standaard grondtal 10 gebruikt, de groeifactor is niet onmiddellijk zichtbaar. Hoe kun je aan deze formule zien dat er van exponentiële afname sprake is? Bereken de bijbehorende halveringshoogte, de hoogte waarin de luchtdruk wordt gehalveerd.

Antwoord
Je kunt de formule schrijven als $p = 1013 \cdot \left(10^{-0{,}065}\right)^h$.

De groeifactor is dus $10^{-0{,}065} \approx 0{,}86$.
Deze groeifactor is kleiner dan 1 en dus is er van exponentiële afname sprake.

De halveringshoogte vind je uit $10^{-0{,}065h} = 0{,}5$.
Dit betekent: $-0{,}065h = \log(0{,}5) \approx -0{,}301$ (standaard grondtal 10).

En dus wordt de halveringshoogte: $h \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}065} \approx 4{,}63$ km.

Opgave 7

Bekijk de formule voor de luchtdruk p (in hectopascal) als functie van het hoogte h (in km) in **Voorbeeld 2 op pagina 352**.

a De groeifactor is $10^{-0{,}065}$. Waarom kun je al meteen aan het negatiefteken zien dat er sprake is van exponentiële afname?

b Waarom is het gebruik van het standaardgrondtal 10 handig?

c Op welke hoogte is nog maar een kwart van de luchtdruk op zeeniveau over?

d Op welke hoogte is nog maar éénvijfde van de luchtdruk op zeeniveau over?

Opgave 8

Voor een bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is B het aantal bacteriën en t de tijd in uren.

a Laat met je rekenmachine zien, dat $1{,}5 = 10^{\log(1{,}5)} \approx 10^{0{,}176}$.

b Laat hiermee zien dat de formule voor de bacteriegroei kan worden geschreven als $B = 4 \cdot 10^{0{,}176t}$.

c Vanaf welk tijdstip zijn er meer dan 150 bacteriën?
Gebruik de formule bij b.

Oefenen

Opgave 9

Een hoeveelheid bacteriën groeit volgens de formule $B = 3 \cdot 7^t$ waarin t de tijd in uren is en B de hoeveelheid bacteriën.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig met behulp van logaritmen na hoeveel uur er 6000 bacteriën zijn.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de verdubbelingstijd van de bacteriegroei.

Opgave 10

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

a $10 \cdot 10^x = 0{,}1$

b $0{,}5 \cdot 2^x = 30$

c $54 \cdot 0{,}8^t = 27$

Opgave 11

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 12

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3% per jaar.
Geef de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Opgave 13

Een radioactieve stof vervalt volgens deze formule: $N = N_0 \cdot 0{,}93^t$
N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaar.
N_0 is de hoeveelheid op $t = 0$.

a Bereken de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.

b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram. Rond af op één decimaal.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

Toepassen

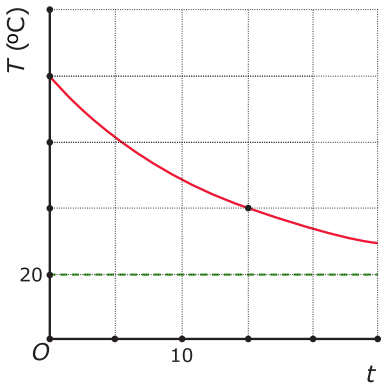
Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Er geldt: $T = 60 \cdot 0{,}93^t + 20$.

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten



Figuur 9.4

Opgave 14: Afkoelende thee

Bekijk de formule voor de afkoelende thee.

a Bereken op welk tijdstip de thee kouder is dan 30 °C.
Geef je antwoord als logaritme en in minuten nauwkeurig.

b Het verschil van T en de omgevingstemperatuur neemt exponentieel af.
Bereken de halveringstijd die daarbij hoort in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15: Opwarmend water

Water uit de koelkast heeft een temperatuur van 6 °C.
Als het uit de koelkast komt, warmt het langzaam op naar kamertemperatuur van 20 °C.
Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat het water 5 minuten nadat het uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 15 °C heeft.

Na hoeveel minuten is het water warmer dan 18 °C?
Geef je antwoord als logaritme en benaderd in minuten nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 4^x = 35$

b $1050 \cdot 1{,}08^t = 1800$

Opgave 17

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door elke minuut één keer te spoelen met water. Hierdoor verdwijnt telkens 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe lang men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

9.4 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

Een logaritmische functie heeft een formule zoals $y = \log(x)$.

Het grondtal van deze logaritme is 10, dus je kunt deze grafiek vergelijken met die van $y = 10^x$.

a Maak de grafiek van deze functies in één figuur.

b Je ziet dat beide grafieken erg op elkaar lijken, ze zijn elkaars spiegelbeeld.
In welke lijn moet je dan spiegelen?

c Welke asymptoten hebben de beide grafieken?

d Laat met een paar getallenvoorbeelden zien, dat $\log(10^x) = x$ en dat $10^{\log(x)} = x$.

Uitleg

Bekijk de applet.

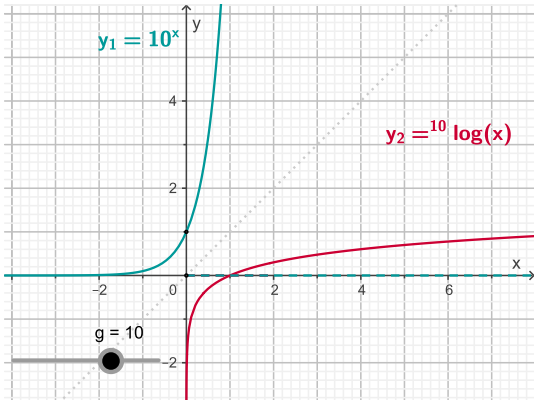
Je ziet hier de grafieken van $y = \log(x)$ en $y = 10^x$.
Ze zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

$y = \log(x)$ is een logaritmische functie met:

- nulpunt bij $x = 1$;
- een stijgende grafiek;
- verticale asymptoot $x = 0$.

Je kunt er alleen positieve x-waarden invullen.

Je ziet dat de eigenschappen $y = \log(x)$ het spiegelbeeld zijn van die van $y = 10^x$.
Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: $\log(10^x) = x$ en $10^{\log(x)} = x$.



Figuur 9.1

Voor logaritmische functies met andere grondtallen geldt $y = {}^g\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(g)}$.

Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen als $y = \log(x)$.

Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 10^x$ en $y_2 = \log(x)$.

a Het punt $(10,1)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

b Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

c Laat met een voorbeeld zien dat y_1 en y_2 elkaars terugrekenfunctie zijn.

d Los op $\log(x) \leq 3$.
Houd rekening met de x-waarden die je in een logaritme mag invullen.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Maak beide grafieken.

b Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Los op ${}^2\log(x) \leq 3$.

e Laat zien, dat $y = {}^2\log(x) \approx 3{,}32 \cdot \log(x)$.

Opgave 3

Plot de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.
De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van y_2?

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Los op ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) \leq 3$.

d Laat zien, dat $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \approx -3{,}32 \cdot \log(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

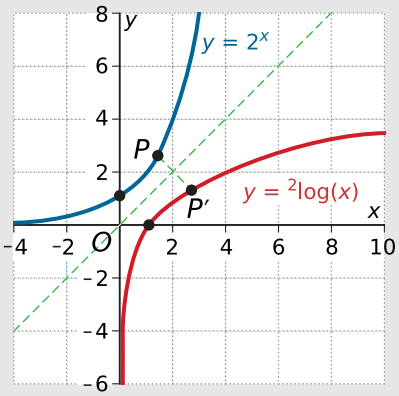
Bekijk de applet.

Een functie van de vorm $y = {}^{g}\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- alleen x-waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek



Figuur 9.2

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

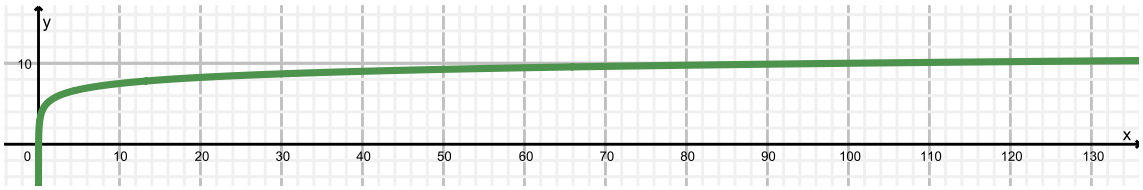
Voorbeeld 1

Gegeven is de logaritmische functie $y = 2{,}5 \cdot \log(x) + 5$.

Maak de grafiek van deze functie en los op $y \leq 10$.

Antwoord

De grafiek zie je hier.



Figuur 9.3

$2{,}5 \cdot \log(x) + 5 = 10$ los je zo op:

$$\begin{aligned} 2{,}5 \cdot \log(x) + 5 &= 10 \\ 2{,}5 \cdot \log(x) &= 5 \\ \log(x) &= 2 \\ x &= 10^2 = 100 \end{aligned}$$

beide zijden −5
beide zijden delen door 2,5
beide zijden exponentiële functie met grondtal 10

In de grafiek zie je dat de oplossing van de ongelijkheid is $0 < x \leq 100$.

Opgave 4

Bekijk de in **Voorbeeld 1 op pagina 357** gegeven functie.

a Welke asymptoot heeft deze functie?
Welke waarden van x mag je er invullen?

b Voor welke waarden van x is $y \leq 0$?

Opgave 5

Gegeven is de functie $y = 3 \cdot {}^{2}\log(x) - 1$.

a Laat zien dat deze functie te schrijven is als $y \approx 9{,}97 \cdot \log(x) - 1$.

b Los op: $3 \cdot {}^{2}\log(x) - 1 \leq 4$. Geef een benadering in twee decimalen.

Voorbeeld 2

In een luchtballon kun je de hoogte bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. In het gebied waar de ballon vliegt geldt bij een gegeven temperatuur op de grond:

$h = 57 - 19 \cdot \log(p)$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Er wordt een luchtdruk van ongeveer 920 hPa gemeten.
Op welke hoogte zit de ballon dan?

Hoe groot is de luchtdruk als je hoger dan 1 km zit?

Antwoord

$p = 920$ invullen geeft $h = 57 - 19 \cdot \log(920) \approx 0{,}688$ km.

Als je hoger dan 1 km zit, geldt: $57 - 19\log(p) > 1$.
De bijbehorende vergelijking kun je oplossen: $p \approx 886$.
Dus de luchtdruk is dan lager dan 886 hPa.

Opgave 6

Bekijk de logaritmische functie in **Voorbeeld 2 op pagina 358**.

a Laat zien hoe je $57 - 19\log(p) > 1$ oplost.

b Hoeveel bedroeg de luchtdruk op de begane grond?

Opgave 7

Een andere formule voor het berekenen van de hoogte h in km afhankelijk van de luchtdruk p in hPa is:

$h = {}^{0{,}886}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$

a Laat zien dat je dit kunt schrijven als $h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

b Hoeveel bedraagt de luchtdruk op de begane grond?

c Op welke hoogte wordt de luchtdruk in dit gebied lager dan 900 hPa?

Oefenen

Opgave 8

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 2 \cdot \log(x) - 2{,}5$.

a Maak de grafiek van deze functie.

b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?

c Los op: $y \leq 0$.

Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32{,}8 \cdot {}^{0,9}\log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule met een logaritme met het standaardgrondtal 10.

Opgave 10

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ISO/ASA-systeem. Vroeger werd vaak een ander gevoeligheidsgetal gebruikt, de DIN-waarde. Het verband tussen ISO en DIN wordt gegeven door de formule:
$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ISO aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ISO heeft een DIN-waarde van 21.

a Bereken a.

b Maak de bijbehorende grafiek. Laat x lopen tot 1500.

c Welke ISO-waarde heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

Opgave 11

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.
In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L. De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N. Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$$20 \cdot \log(N) = 202 - \tfrac{4}{3}L$$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.

b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen (500000) vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:
$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$
De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

c Bereken welke waarde L in 2001 had.

Toepassen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde "veilige norm" op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft.
Dit maximum wordt N_{max} genoemd en hangt af van de breedte van de weg. Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{max} = \frac{8289{,}3(1{,}778 - \log(B))}{B}.$$

Hierin is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kun je enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Opgave 12

Bekijk de formule van Gerlough voor het maximale aantal passerende auto's om voetgangers de gelegenheid te geven veilig over te steken.

a Een weg is 5,40 meter breed. Tijdens de spits passeren er 1740 auto's per uur.
Voldoet deze weg aan de veilige norm? Licht je antwoord toe.

b De formule van Gerlough heeft alleen betekenis als N_{max} positief is.
Bereken voor welke waarden van B dit het geval is. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Opgave 13

Een weg waarover volgens de veilige norm per uur maximaal 1648 auto's mogen passeren, wordt 0,50 meter smaller gemaakt. Dit heeft tot gevolg dat het maximum aantal auto's dat per uur mag passeren groter wordt.

Bereken hoeveel auto's er per uur méér mogen passeren in de nieuwe situatie.

Testen

Opgave 14

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 3 - 0{,}5 \cdot \log(x)$.

a Maak de grafiek van deze functie.

b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?

c Los op: $y \geq 0$.

Opgave 15

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

Mark (8 jaar) en Helen (10 jaar) wonen in Nederland en zijn wat lengte en gewicht betreft gemiddelde Nederlandse kinderen.

a Mark heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig.

b Helen is 1,40 m lang. Schat haar gewicht in kg.

9.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier te werken;
- de formule van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële en logaritmische functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- vergelijkingen met exponentiële en logaritmische functies oplossen.

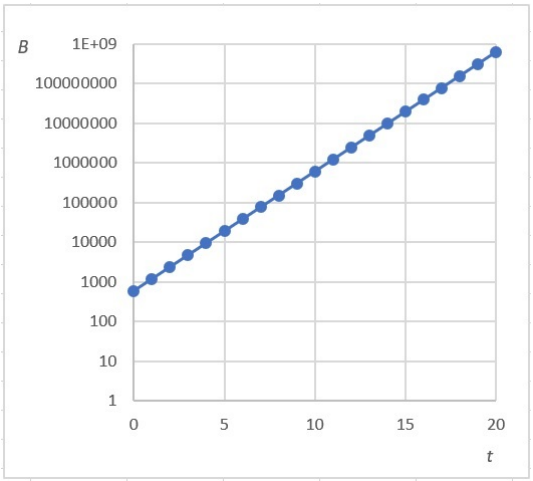
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 600 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.
Hier zie je een grafiek van B als functie van t. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

a Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

b Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t.



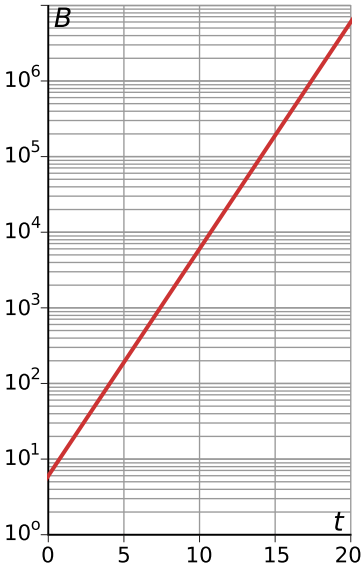
Figuur 9.1

Uitleg

Als je de getallen 1, 10, 100 en 1000 op een getallenlijn wilt zetten, zie je dat de kleinere getallen erg dicht bij elkaar liggen en niet te onderscheiden zijn.

In plaats van een lineaire schaalverdeling zoals 0,1,2,3,4,..., kun je dan een schaalverdeling met machten van 10: 10^0,10^1,10^2,10^3,10^4,... gebruiken. Dit heet een logaritmische schaalverdeling.

Bekijk de grafiek. Op de B-as is zo'n schaalverdeling gebruikt. Dit is de grafiek van een bacteriegroei. Het verloop van het aantal bacteriën B in gram wordt gegeven door de exponentiële formule:
$B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.



Figuur 9.2

Het getal dat je in de grafiek wilt zetten, moet dus worden 'vertaald' naar een macht van 10. Daarvoor neem je de 10-logaritme van het getal. Bijvoorbeeld:

- Op $t = 12$ zijn er $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën.
- $\log(24576) \approx 4{,}39$ dus 24576 kun je schrijven als $10^{4{,}39}$.
- Dan kun je het getal in het logaritmische assenstelsel zetten.

Door de horizontale hulplijnen in het assenstelsel is deze omrekening niet meer nodig.
Je weet dat 24576 tussen $10^4 = 10000$ en $10^5 = 100000$ komt te liggen.
De eerste lijn boven 10^4 stelt $2 \cdot 10^4 = 20000$ voor.
De tweede lijn boven 10^4 stelt $3 \cdot 10^4 = 30000$ voor.
Het getal 24576 ligt tussen deze lijntjes in (recht boven $t = 12$).

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn.

Er bestaat voor dit soort grafieken speciaal **enkellogaritmisch papier**. Ook in Excel kun je gemakkelijk grafieken met een logaritmische schaal maken.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 363** is een grafiek van de exponentiële functie $B = 6 \cdot 2^t$ getekend. Op de B-as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

a Laat zien dat de punten die horen bij $t = 5$ en $t = 10$ goed zijn getekend.

b De tweede horizontale lijn boven 10^2 stelt 300 voor. Laat zien dat dit op de juiste hoogte is getekend.

c Maak een tabel voor B uitgezet tegen t.
Teken daarmee zelf de grafiek op enkellogaritmisch papier.

Opgave 2

Gegeven is de functie $y = 2 \cdot 3^x$.

a Teken op enkellogaritmisch papier een bijpassende grafiek. Neem $0 \leq x \leq 7$.

b Lees uit de laatste grafiek af hoe groot de y-waarde bij $x = 5{,}5$ is en controleer het antwoord met de gegeven formule.

Theorie en voorbeelden

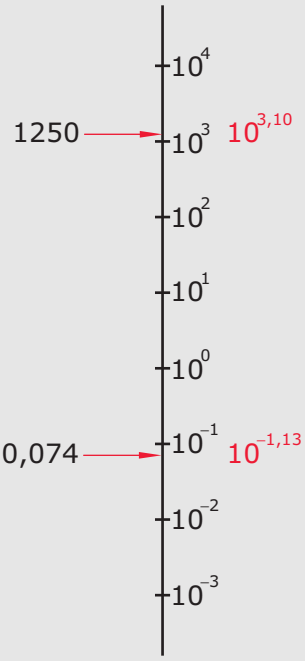
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen plaatsen. Met behulp van de knop logaritme op de rekenmachine kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$
  Je plaatst 1250 op 3,10 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$
  Je plaatst 0,074 op 1,13 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-1} en 10^{-2}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn. Er bestaat speciaal **enkellogaritmisch papier** dat bestaat uit een as met een logaritmische schaalverdeling.

Omdat een rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat. Bij de grafiek kun je in dat geval een bijpassende formule opstellen.



Figuur 9.3

Voorbeeld 1

Zet op de logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 uit. Lees ook af welke waarden a en b hebben.

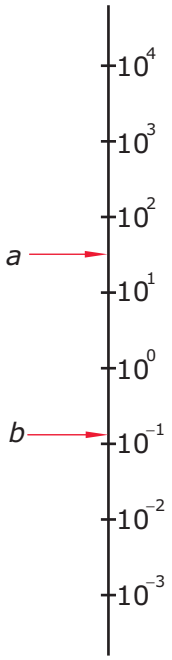
Antwoord

Reken eerst de getallen 7250 en 0,002 om.

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ en hieruit volgt $7250 \approx 10^{3{,}86}$
  Plaats 7250 op 3,86 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ en hieruit volgt $0{,}002 \approx 10^{-2{,}70}$
  Plaats 0,002 op 2,70 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3}.

Lees nu af:

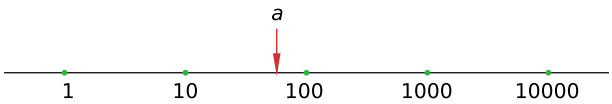
- $a \approx 10^{1{,}5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0{,}9} \approx 0{,}13$



Figuur 9.4

Opgave 3

Lees het getal a op deze logaritmische schaal af.



Figuur 9.5

Opgave 4

Teken een logaritmische schaal met waarden van 10^{-6} tot 10^{7}.

a Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

b Een mens is ongeveer 1,80 meter groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan. Neem aan dat de schaal in meters is gegeven.

c De Mount Everest is ongeveer 8884 meter hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

d Een amoebe is een ééncellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter. Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

e Op de schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen.

Voorbeeld 2

Jodium-131 is een onstabiele radioactieve en zeer gevaarlijke stof. Jodium-131 komt van nature niet op aarde voor, maar is wel vrijgekomen tijdens de kernrampen in Tsjernobyl en Fukushima. Ook wordt Jodium-131 geproduceerd in een kernreactor om het te kunnen gebruiken in de nucleaire geneeskunde ter behandeling van onder andere schildklierkanker. Jodium-131 heeft als eigenschap dat het 'vervalt', er verwijnt steeds een beetje van de stof.
Bekijk de vervaltabel van Jodium-131.

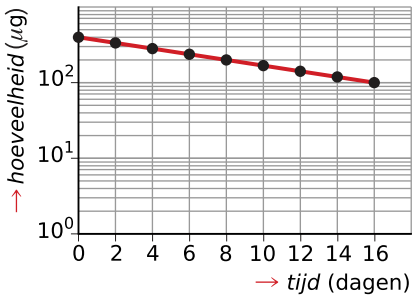
tijd (dagen)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
hoeveelheid (μ g)	400	336	282	238	202	166	142	116	98

Tabel 9.1

Teken bij deze tabel een grafiek op **enkellogaritmisch papier** en onderzoek of er sprake is van exponentiële groei (verval).

Antwoord

$400 = 4 \cdot 10^2$; het eerste punt komt bij het derde streepje boven 10^2.
$336 = 3{,}36 \cdot 10^2$
$282 = 2{,}82 \cdot 10^2$
$238 = 2{,}38 \cdot 10^2$
$202 = 2{,}02 \cdot 10^2$
$166 = 1{,}66 \cdot 10^2$
$142 = 1{,}42 \cdot 10^2$
$116 = 1{,}16 \cdot 10^2$
$98 = 9{,}8 \cdot 10^1$



Figuur 9.6

Er is sprake van exponentiële groei, want de punten van de grafiek liggen (bij benadering) op een rechte lijn.

Opgave 5

Bekijk de twee vervaltabellen met daarin de hoeveelheid M van stof M en de hoeveelheid P van stof P in microgram (μg).

tijd (h)	1	4	16	64
M (μg)	1000	250	62,5	15,6

tijd (h)	0	24	48	72
P (μg)	1000	250	62,5	15,6

Figuur 9.7

Onderzoek met behulp van grafieken op **enkellogaritmisch papier** of er sprake is van exponentiële groei.

Opgave 6

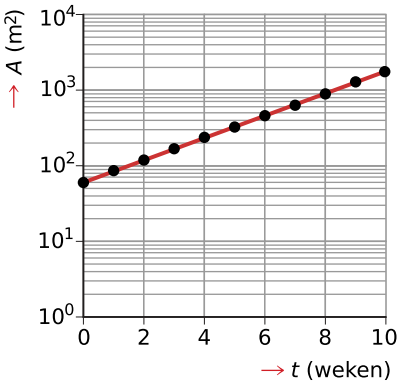
Maak een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik **enkellogaritmisch papier**. Gegeven is nu de functie $N = 12000 \cdot 0{,}8^t$.

a Teken de grafiek van N in het assenstelsel of op het enkellogaritmische papier.

b Lees uit de figuur de waarden van t af waarvoor $N < 3000$.
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van de groei van een waterplant.
De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 9.8

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t: $A = b \cdot g^t$

Lees uit de figuur af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 6 \cdot 10^1 \approx 60$.
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 9 \cdot 10^2 \approx 900$.

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}4$

De formule is: $A \approx 60 \cdot 1{,}4^t$

Opgave 7

In **Voorbeeld 3 op pagina 366** zie je een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daarbij kun je een functievoorschrift opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Lees de waarden af voor A bij $t = 5$ en $t = 7$.

b Stel met behulp van deze waarden een formule voor A op met dezelfde beginwaarde als in het voorbeeld. Ga na dat je ongeveer dezelfde formule vindt.

c Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 8

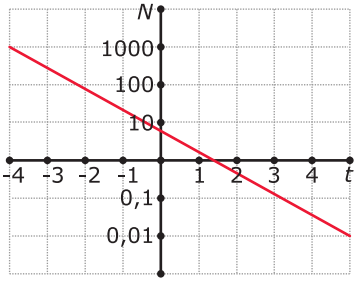
Bekijk deze grafiek van N als functie van t.

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de horizontale en verticale as?

b Lees twee waarden voor N uit de grafiek af en stel een formule op voor N.

c Bereken ter controle met de formule van b het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen nut om te vragen naar de t-waarden waarvoor $N = 0$?



Figuur 9.9

Oefenen

Opgave 9

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.

b Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2025. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

Opgave 10

Bekijk de tabel die bij gegevens over een bacteriecultuur hoort.
t is gegeven in uren en N in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 9.2

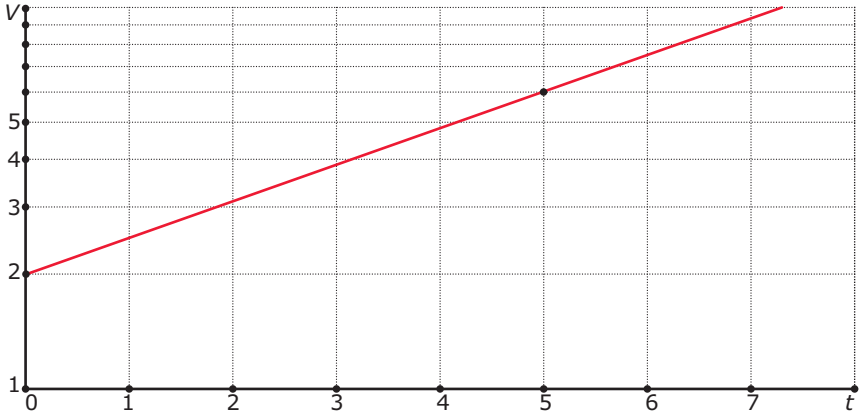
a Maak met behulp van de gegeven tabel een grafiek N uitgezet tegen t op enkellogaritmisch papier. Is er sprake van exponentiële groei?

b Stel een formule op voor N als functie van t.

c Bereken N als $t = 10$ uur.

Opgave 11

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t.



Figuur 9.10

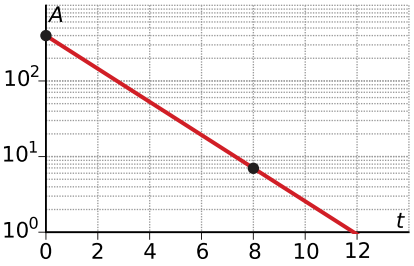
a Geef een formule voor V.

b Bereken in twee decimalen de waarde van t waarvoor $V = 10$. Controleer je antwoord met de grafiek.

c De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de t-as te hebben.
Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen.

Opgave 12

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een afnemende hoeveelheid A als functie van de tijd t.



Figuur 9.11

a Geef een formule voor A.

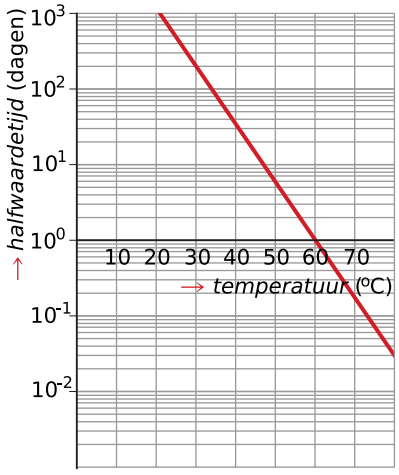
b Bereken in twee decimalen de waarde van t waarvoor $A = 20$. Controleer je antwoord met de grafiek.

c De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de t-as te hebben. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen.

Opgave 13

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 9.12

a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30.
Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht.
Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28.
Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C.
Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

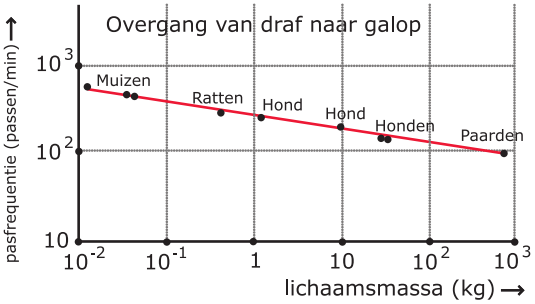
b Laat met behulp van de grafiek zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing.
Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten.
Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden.
Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

Toepassen

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa.
Noem de lichaamsmassa m (in kilogram) en de pasfrequentie P.
De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.
Op beide assen is nu een logaritmische schaal gebruikt.



Figuur 9.13

Daardoor hoort bij deze rechte lijn een formule van de vorm $\log(P) = a \cdot \log(m) + b$.

Dit kun je herleiden tot $P = 10^b \cdot m^a$, zodat P een machtsfunctie is van m.

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de pasfrequentie P afhankelijk van de lichaamsmassa m in kg.

a Waar kun je aan zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij 'kleine hond'?

c Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij 'paard'?

Opgave 15

De grafiek in **Toepassen op pagina 369** kan worden benaderd met de formule $P = 259 \cdot m^{-0,14}$.

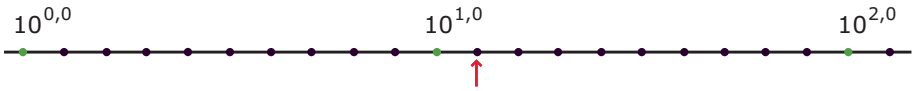
a Laat zien dat de waarden die je in de vorige opgave hebt afgelezen voor 'kleine hond' en 'paard' hieraan voldoen.

b Het gewicht van een savanneolifant is gemiddeld 6000 kg.
Bij welke pasfrequentie gaat deze olifant van draf naar galop?

Testen

Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 9.14

a Welk getal hoort bij het pijltje?

b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

c Geef aan waar 5,5 en waar $10^{0,5}$ moeten staan. Doe dit ook bij 55 en $10^{1,5}$.

d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 9.3

a Zet de punten $(0,40),(1,57),...,(6,447)$ uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte A die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken. Ga er van uit dat de grafiek door $(0,40)$ en $(4,200)$ gaat.

9.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met exponenten en logaritmen en heb je met name gewerkt aan situaties waarin exponentiële groei of exponentieel verval belangrijk is. Je hebt de eigenschappen van exponentiële en logaritmische functies leren kennen. En je hebt gewerkt met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier.

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei — groeifactor
- exponentiële functie — horizontale asymptoot — verdubbelingstijd en halveringstijd
- logaritme — verveelvoudigingstijd
- logaritmische functie — terugrekenfunctie
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken — de groeifactor vaststellen bij exponentiële groei — groeifactoren omrekenen;
- een exponentiële functie herkennen — horizontale asymptoot herkennen — bijbehorende vergelijkingen grafisch oplossen — verdubbelingstijd, halveringstijd berekenen;
- logaritme gebruiken om een exponentiële vergelijking op te lossen — eigenschappen van logaritmen benoemen — logaritmen berekenen met behulp van de rekenmachine;
- een logaritmische functie herkennen — grafieken van logaritmische functies maken — vergelijkingen met logaritmen oplossen door terugrekenen met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal;
- logaritmische schalen aflezen — grafieken tekenen op enkellogpapier — formule opstellen van een exponentiële functie op enkellogpapier.

Testen

Opgave 1

Paracetamol is het wereldwijd meest gebruikte pijnstillende en koortsverlagende middel. Het wordt onder andere verkocht in pillen van 500 mg. Na inname in het lichaam (een pilletje paracetamol slikken) wordt deze stof ook weer langzaam afgebroken. De halveringstijd is (afhankelijk van de omstandigheden) ongeveer 3 uur.

Figuur 9.1

a Hoeveel uur na inname is nog 12,5% van de paracetamol in het lichaam over?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur in drie decimalen nauwkeurig? En het afnamepercentage per uur?

Als de hoeveelheid paracetamol in je lichaam onder de 50 mg is, gaat er geen werking meer van uit.

c Je slikt twee paracetamolpillen van 500 mg. Na hoeveel uur zijn ze uitgewerkt?

Opgave 2

Samoa is een republiek in Polynesië die bestaat uit de westelijke Samoa-eilanden. In 2006 bedroeg het aantal inwoners volgens een officiële volkstelling 179186. N is het aantal inwoners van Samoa afgerond op honderdtallen en t is de tijd in jaren vanaf 2006.
Het aantal inwoners werd voor het jaar 2012 geschat op 194300.

a Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor N afhankelijk van t?

b Ga na dat bij de gegevens ook exponentiële groei past met een percentage van ongeveer 1,36% per jaar.

c Welke formule geldt voor N afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?

d Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal inwoners van Samoa voor het eerst de 200000 zal overschrijden.

Opgave 3

In 2000 was het aantal inwoners van het werelddeel Afrika ongeveer 872 miljoen en in 2010 was dit aantal ongeveer 1138 miljoen. Het aantal inwoners groeide exponentieel.
Azië had in 2000 meer inwoners, namelijk 3864 miljoen, maar het groeipercentage was 1,5% per jaar.

In welk jaar zal - mits de groei zo door gaat - het aantal inwoners van Afrika dat van Azië gaan overstijgen? Schrijf de bijbehorende ongelijkheid op.

Opgave 4

Een pakje boter wordt in de koelkast geplaatst. Daardoor daalt de temperatuur van de boter. Neem aan dat voor die temperatuur geldt $T = 14 \cdot 0{,}8^t + 6$, met t in minuten en T in °C.

a Hoeveel bedroeg de temperatuur van de boter voordat ze in de koelkast werd geplaatst?

b Hoeveel bedraagt de temperatuur in de koelkast?

c Maak een grafiek van T als functie van t.

d Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de boter minder dan 1 °C van de temperatuur binnen de koelkast verschilt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar hangt af van de hoogte h (kilometer) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt:

$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ millibar. Maak de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 millibar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 millibar.

b Bereken hoe hoog het vliegtuig vliegt in km nauwkeurig.

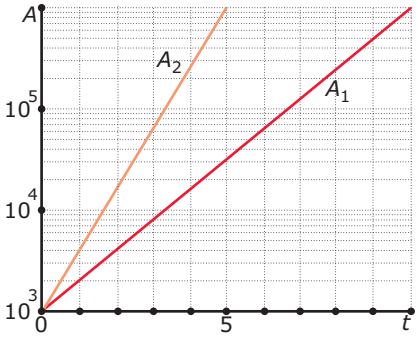
c Neem aan dat $p_0 = 1010$. Druk p uit in h. Rond waar nodig af op drie decimalen.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 millibar op zeeniveau en berekent dat het vliegtuig zich op 3 kilometer hoogte bevindt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 millibar.

d Hoe hoog bevindt het vliegtuig zich in werkelijkheid? Rond af op meters.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 gram salade afhankelijk is van de temperatuur. Bekijk in de grafiek de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius. t is de tijd in dagen. Bij een hogere temperatuur groeit het aantal bacteriën sneller.



Figuur 9.2

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.

c Bereken hoeveel keer zo veel bacteriën er na tien dagen bij 4 °C zijn vergeleken met de situatie bij 0 °C.

d Bereken hoeveel de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C bedraagt.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip 'zuurgraad' gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: $pH = -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $pH = -\log[H_3O^+]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

10

Periodieke functies

10.1 Periodiciteit 376
10.2 Graden en radialen 384
10.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie 391
10.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand 399
10.5 Totaalbeeld 407

10.1 Periodiciteit

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- periodieke verschijnselen en hun periode herkennen;
- rekenen met de periode bij het bepalen van uitkomsten bij een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

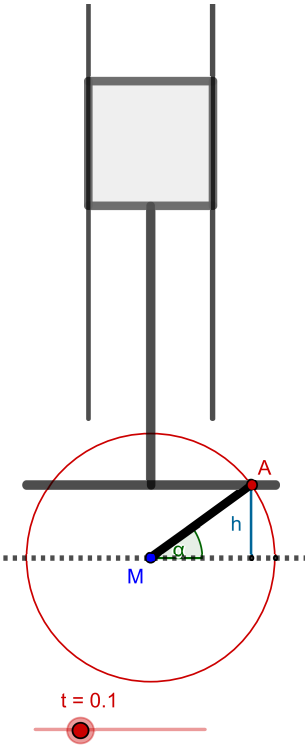
- werken met (draai)hoeken die groter zijn dan 90°.
- werken met sinus, cosinus en tangens, ook bij hoeken die groter zijn dan 90°.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang in 1 seconde rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 5$ centimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, α is de draaihoek.



Figuur 10.1

a Hoe groot is α als $t = 0{,}1$?

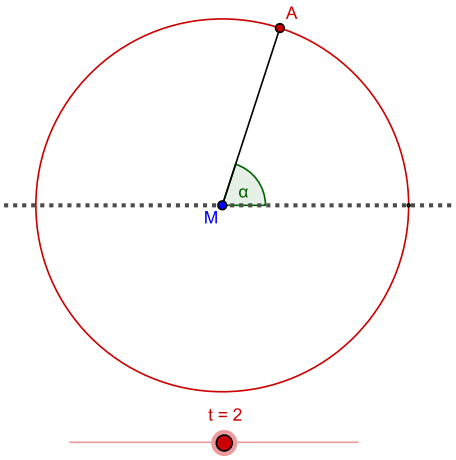
b Hoe groot is α als de zuiger voor het eerst na $t = 0$ op zijn laagste punt zit? En hoe groot is t dan?

c Op welke tijdstippen zit de zuiger nog meer op zijn laagste punt?

d De hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn verandert steeds. Maak een schets van de grafiek van h afhankelijk van t.

Uitleg

Bekijk de applet: wiel.



Figuur 10.2

Een wiel draait met steeds dezelfde snelheid rond (eenparige cirkelbeweging) en maakt één omwenteling in 10 seconden. Op tijdstip $t = 0$ zit punt A uiterst rechts. Het draait tegen de wijzers van de klok in.
De positie van A is een periodiek (zich herhalend) verschijnsel.
De periode is 10 s.
Op welke tijdstippen zit punt A weer uiterst rechts?

Omdat het wiel in 10 seconden ronddraait, is dat op $t = 0,10,20,...$
Als het wiel al aan het draaien was, is dat ook op $t = -10, -20,...$
Kortweg op: $t = 0 + k \cdot 10$ met k een geheel getal of nog korter: $t = k \cdot 10$.
Als $k = 1$ dan geldt $t = 1 \cdot 10 = 10$.
k mag ook negatief zijn: als $k = -2$ dan geldt $t = -2 \cdot 10 = -20$.

Op welke tijdstippen staat punt A helemaal onderaan?

Dit gebeurt op drie vierde van een omwenteling, op 7,5 seconden. Daar kan steeds weer 10 bij of af.
$t = ...; -12,5; -2,5; 7,5; 27,5; ...$
Anders gezegd: $t = 7,5 + k \cdot 10$ met k een geheel getal.

Omdat de periode van draaiing 10 seconden is, draait het wiel per seconde $\frac{1}{10}$ deel.
Dit heet de frequentie van de draaiing.

Opgave 1

Ga uit van het ronddraaiend rad in de **Uitleg op pagina 377**.

a Op welke tijdstippen zit punt A bovenaan?

b Geef in de figuur aan waar punt A zit op $t = 7 + k \cdot 10$.

c De frequentie van draaiing is $\frac{1}{10}$ per seconde.
Hoe groot is de frequentie van dit wiel per minuut?

Opgave 2

Een wiel draait met dezelfde snelheid in 15 seconden helemaal rond.

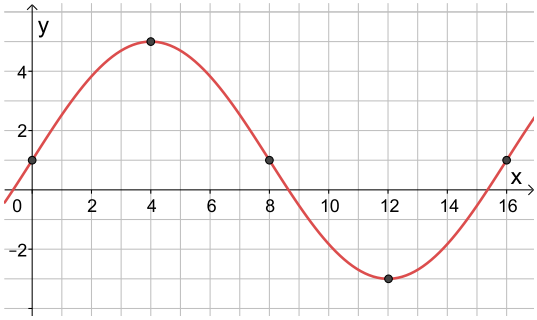
a Bereken de frequentie per minuut.

b Bereken de frequentie per kwartier.

c Een ander wiel draait in 20 minuten 400 keer rond.
Hoe groot is de frequentie per seconde?

Opgave 3

Bekijk deze grafiek van een periodieke functie.
De grafiek loopt aan beide kanten oneindig ver door.



Figuur 10.3

a Bepaal de periode van dit periodieke verschijnsel.

b Bepaal de uitkomst bij $x = 36$.

c Bij welke x-waarden met $45 \leq x \leq 65$ geldt $y = 1$?

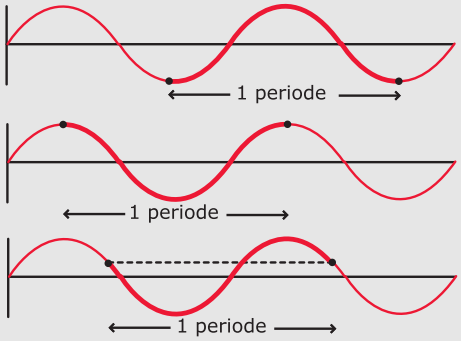
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **periode** van een **periodiek verschijnsel** is de lengte van het kortste interval op de horizontale as dat hoort bij het deel van de grafiek dat zich steeds herhaalt.

In de grafiek zie je een zich herhalende golfbeweging. Er zijn verschillende intervallen voor de periode mogelijk:

- van een maximum tot het eerstvolgend maximum.
- van een minimum tot het eerstvolgend minimum.
- een willekeurig punt tot het volgende punt waarop de grafiek dezelfde hoogte én dezelfde daling of stijging heeft als in het andere punt.



Figuur 10.4

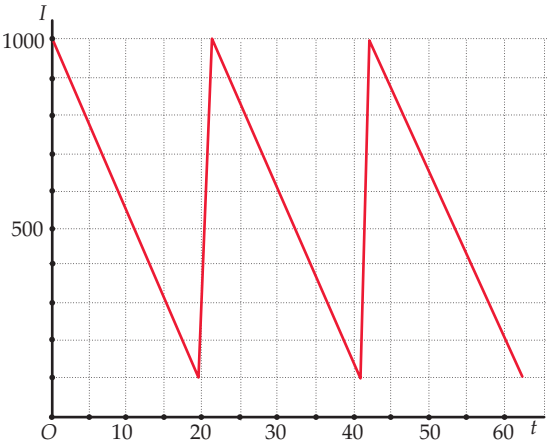
Voor de lengte van het interval waarop de grafiek zich herhaalt is het niet belangrijk uit welk deel van de grafiek het interval komt. Die lengte is altijd gelijk als de grafiek zuiver periodiek is.

Als op tijdstip t een bepaalde uitkomst voorkomt, komt diezelfde uitkomst ook voor op $t + k \cdot$ periode, waarin k een geheel getal is.

Het aantal periodes per tijdseenheid heet de **frequentie**: frequentie $= \frac{1}{\text{periode}}$

Voorbeeld 1

Een opslagtank bevat 1000 liter brandstof op dag $t = 0$. In 20 dagen neemt die hoeveelheid gelijkmatig af tot 100 liter. Dan wordt de tank in een dag bijgevuld tot 1000 liter, enzovoort.
Hoeveel liter brandstof bevat de tank na 75 dagen?



Figuur 10.5

Antwoord

De periode van de inhoud is 21 dagen.
Er is een gelijke inhoud bij: $t = 75 + k \cdot 21$

Omdat $t = 75 = 12 + 3 \cdot 21$ heeft de tank op dag 12 dezelfde inhoud als op dag 75, want hier zitten precies drie periodes tussen.

In 20 dagen gaat er 900 liter uit de tank, dat is 45 liter per dag minder. Van $t = 0$ naar $t = 12$ gaat er $45 \cdot 12$ liter uit.
Er was 1000 liter. Er is $1000 - 540 = 460$ liter over op $t = 12$ en ook op $t = 75$.

Opgave 4

Bekijk het leeglopen en weer vullen van de brandstoftank in **Voorbeeld 1 op pagina 378**. De hoogte van de brandstof in de tank is een periodiek verschijnsel.

a Hoeveel bedraagt de periode?

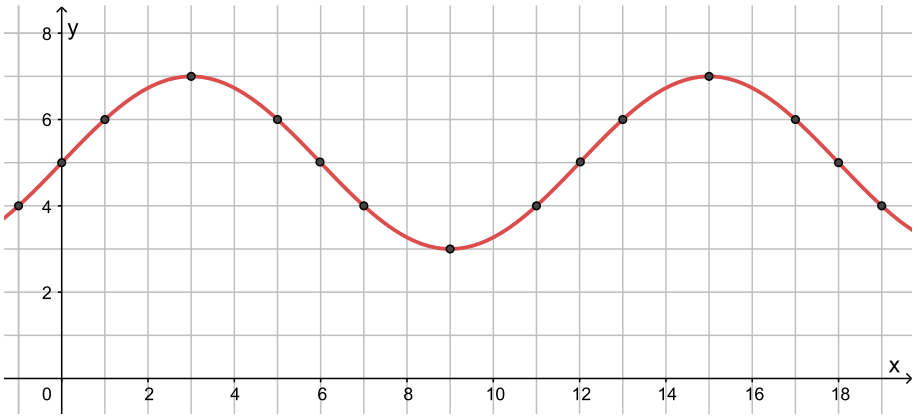
b Leg uit waarom er 550 liter in de tank zit op $t = 10 + k \cdot 21$ en op $t = 20{,}5 + k \cdot 21$.

c Voor welke waarden van t zit er 100 liter in de tank?

d Hoeveel zit er in de brandstoftank na 500 dagen?

Opgave 5

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie.



Figuur 10.6

a Bepaal de periode van deze functie.

b Bepaal de uitkomsten bij $x = 81$ en $x = 91$.

c Bepaal de x-waarden bij $y = 6$ als $75 \leq x \leq 85$.

d Bepaal de uitkomst bij $x = -5$.

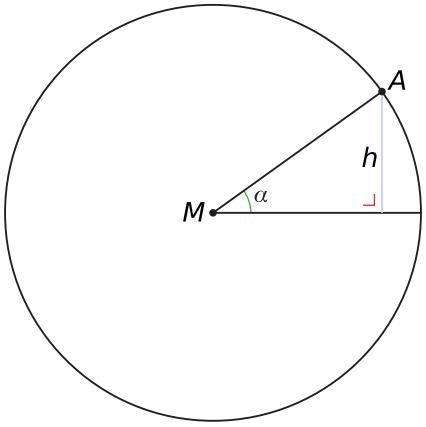
e Bepaal de x-waarden bij $y = 4$ als $-100 \leq x \leq -90$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bekijk de figuur. Het geeft schematisch een waterrad weer dat in 20 seconden ronddraait.
Punt A is helemaal rechts op de cirkel op het tijdstip $t = 0$.
Gegeven is dat de straal MA van het waterrad 100 centimeter is.
Het waterrad draait tegen de wijzers van de klok in.

Meet de hoogte h van punt A ten opzichte van de as van het rad, zodat op tijdstip $t = 0$ de hoogte ook 0 cm is.
Hoe hoog is het punt op $t = 83$? Rond je antwoord af op centimeters.



Figuur 10.7

Antwoord

De periode van h is 20, de hoogtes zijn gelijk bij $t = 83 + k \cdot 20$.
De hoogte bij $t = 83$ is hetzelfde als bij $t = 3$.

Bij $t = 3$ heeft punt A $\frac{3}{20}$ van de cirkel doorlopen en is $\frac{3}{20} \cdot 360 = 54°$ gedraaid:

$\sin(54°) = \frac{h}{100}$ geeft $h = 100 \cdot \sin(54°) \approx 80{,}9$ cm.

Op $t = 83$ is de hoogte ongeveer 81 cm.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 380** over het ronddraaiende punt A in het waterrad.

a Op welke tijdstippen is punt A op de top van het waterrad?

b Bereken in centimeter de hoogte van A na 44 seconden. Rond af op één decimaal.

c Bereken in centimeter de hoogte van punt A na 119 seconden. Rond af op één decimaal.

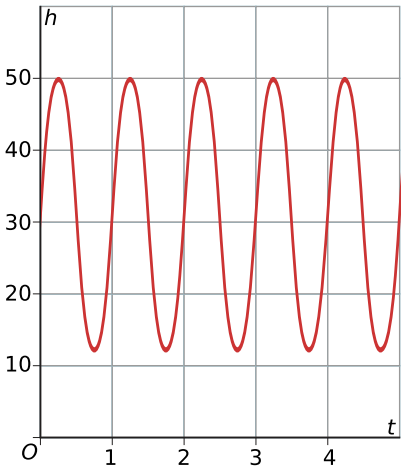
d Met welke frequentie draait dit waterrad? Ga uit van een tijdseenheid van een uur.

Opgave 7

Bekijk het punt P op de tip van een rotorblad van een ronddraaiende windmolen.

Figuur 10.8

De grafiek van h als functie van t is getekend, waarin h de hoogte van punt P boven de grond in meter voorstelt en t de tijd in seconden.



Figuur 10.9

a Met welke periode draait het rotorblad van de windmolen? Met welke frequentie (per minuut) draait het rotorblad?

b Hoe hoog zit de as van de windmolen boven de grond? En hoe lang is het rotorblad?

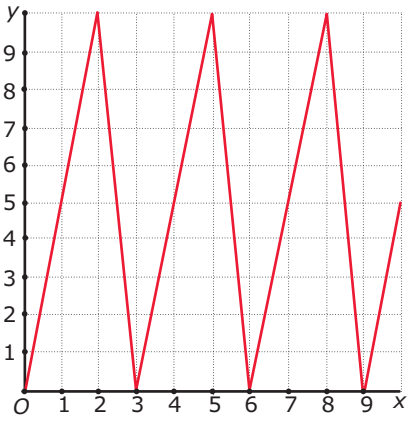
c Teken de grafiek van de hoogte van de tip van één van de twee andere rotorbladen.

d De wind neemt af, de windmolen gaat een half keer zo snel draaien. Teken de bijbehorende grafiek.

Oefenen

Opgave 8

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie.



Figuur 10.10

a Bereken de uitkomst bij $x = 25$.

b Voor welke waarden van x is $y = 10$?

c Bepaal de waarden van x waarvoor $y = 5$ met $0 \leq x \leq 9$

Opgave 9

Een grafiek bestaat in een Oxy-assenstelsel uit rechte lijnstukken tussen de punten (100,1000), (110,600), (140,1000), (150,600), (180,1000), enzovoort. Het patroon gaat oneindig ver door.

a Hoe groot is de periode van deze grafiek?

b Bereken de waarde van y bij $x = 250$.

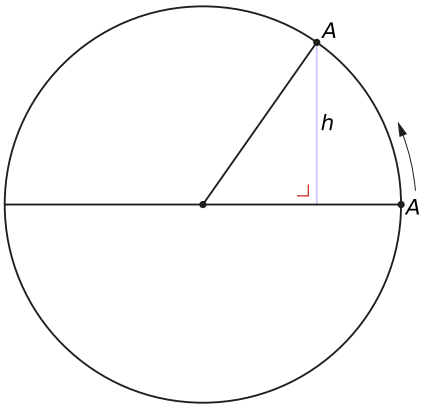
c Teken de grafiek met $0 \leq x \leq 100$.

d Bereken de waarde van y bij $x = -250$.

e Hoeveel getallen x met $0 \leq x \leq 100$ bestaan er bij $y = 900$?

Opgave 10

Punt A ligt op een wiel op afstand 1 van het middelpunt. Noem de hoogte van punt A ten opzichte van de horizontale as door het middelpunt h met t de tijd in seconden. Punt A begint rechts, $h = 0$ bij $t = 0$. Het wiel draait in 6 seconden rond, linksom.



Figuur 10.11

a Hoe groot is h als $t = 1{,}5$?.

b Bereken de hoogtes bij $t = 4{,}5$, $t = 10{,}5$ en $t = 16{,}5$.

c Op welke tijdstippen zit punt A even hoog als op $t = 0{,}75$?

d Op welke tijdstippen zit punt A op een hoogte van $h = 0{,}5$?

Opgave 11

Een torenklok heeft een grote wijzer met een lengte van 1,5 m. De beide wijzers zitten bevestigd op de as van de klok op 45 m boven de grond. Punt T stelt de punt van deze grote wijzer voor. De hoogte h in meter van T boven de grond hangt af van de draaihoek α. Neem aan dat $\alpha = 0$ om 12:00 uur. De wijzer draait rechtsom.

a Hoe hoog zit T boven de grond op 2:10 uur?

b Teken de grafiek van h afhankelijk van α.

c Er zijn twee tijdstippen waarop $h = 46$. De bijbehorende punten waar T dan zit zijn A en B. Hoe ver zitten die punten A en B van elkaar?

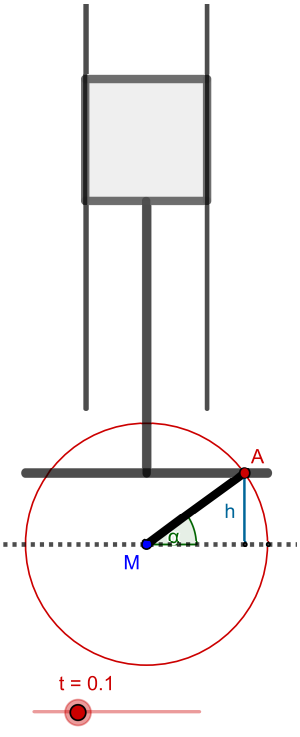
Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je opnieuw een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang in 1 seconde rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 5$ centimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, α is de draaihoek.

Je kunt je afvragen wat het verband is tussen de hoogte van de zuiger en de hoek waaronder het punt A is gedraaid.

Of het verband tussen de hoogte van de zuiger en de tijd t.



Figuur 10.12

Opgave 12

Kijk bij de krukstang eerst naar de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a Hoe kun je h berekenen vanuit de draaihoek α?

b Hoe kun je h berekenen vanuit de tijd t?

c Welke draaitijden horen bij $h = 2{,}5$?

Opgave 13

De onderkant van de zuiger zit 11 cm boven punt A.
Noem de hoogte van de onderkant van de zuiger boven de horizontale stippellijn H.

a Welke formule kun je nu opstellen voor H als functie van t?

b Op welke tijdstippen geldt $H = 16$ cm?

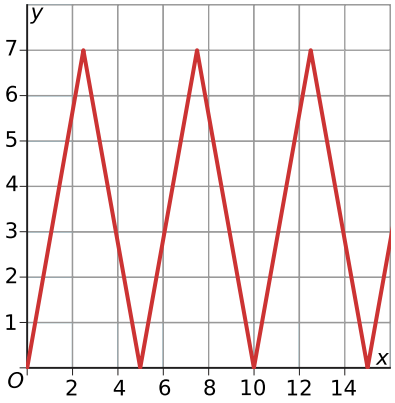
c Op welke tijdstippen is H zo klein mogelijk?

d Hoe ziet de grafiek van H als functie van t er uit?

Testen

Opgave 14

Bekijk de grafiek van deze periodieke functie. Binnen iedere periode is de grafiek symmetrisch.



Figuur 10.13

a Bepaal y als $x = 7{,}5$.

b Voor welke waarden van x is $y = 0$?

c Bereken de uitkomst bij $x = 22{,}5$.

Opgave 15

Een wiel met een straal van 30 centimeter draait met constante snelheid linksom rond. Aan de buitenkant van het wiel zit een punt A. De omlooptijd van het wiel is 20 seconden. De hoogte h (cm) van A na t seconden wordt gemeten ten opzichte van de horizontale lijn door het middelpunt van het wiel. Op $t = 0$ zit A boven aan het wiel zit, dus er geldt $h(0) = 30$.

a Met welke frequentie draait punt A? Gebruik minuten als tijdseenheid.

b Bereken de hoogte op $t = 35$ s.

c Bereken de hoogte op $t = 18$ s. Rond af op één decimaal.

d Geef alle tijdstippen t met $-40 \leq t \leq 40$ waarvoor geldt $h = 0$.

10.2 Graden en radialen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met positieve en negatieve draaihoeken;
- hoeken afmeten aan de lengte van hun boog op de eenheidscirkel;
- omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

Voorkennis

- werken met (draai)hoeken die groter zijn dan 90°.
- werken met sinus, cosinus en tangens, ook bij hoeken die groter zijn dan 90°.

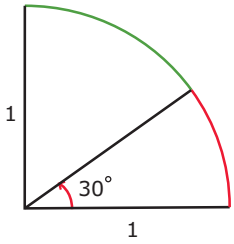
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de figuur is een kwart cirkel getekend, waarvan de straal 1 is.

De hele cirkel is in 360° verdeeld, hoeken heb je tot nu toe in graden uitgedrukt.



Figuur 10.1

a Hoe lang is de rode cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in radialen. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.

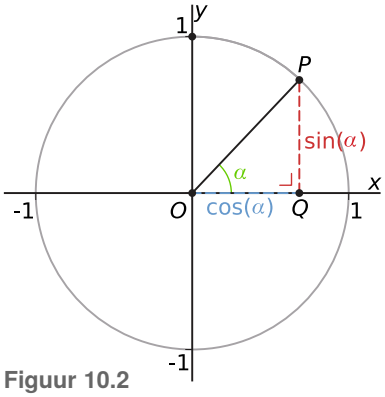
b Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?

c Reken om van graden naar radialen: 60°, 90°, 180°, 50°.

Uitleg

Bekijk de applet.

De grootte van hoeken kun je weergeven in graden, maar ook in booglengte. Het gaat dan om de lengte van de boog die in een cirkel met straal 1 bij die hoek hoort. De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.



Figuur 10.2

De cirkel heet de eenheidscirkel. De omtrek van een eenheidscirkel is gelijk aan 2π.

Bij een booglengte van π (halve cirkel, 180°) hoort een hoek van π rad.
Bij een booglengte van 2π (hele cirkel, 360°) hoort een hoek van 2π rad.
Bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel hoort een hoek van 1 rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen. Je ziet:

- $\sin(\pi) = 0$ en $\cos(\pi) = -1$
- $\sin(1{,}5\pi) = -1$ en $\cos(1{,}5\pi) = 0$
- $\sin(2{,}5\pi) = \sin(0{,}5\pi + 2\pi) = 1$ en $\cos(4\pi) = \cos(2 \cdot 2\pi) = 1$

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je $180° = \pi$ rad.

Bijvoorbeeld: $40° = \frac{40}{180}\pi$ rad $= \frac{2}{9}\pi$ rad

Opgave 1

Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal van 1 eenheid).

a Teken P als de draaihoek $\alpha = 30°$. Bereken de coördinaten van P.
Hoeveel radialen is α?

b Teken Q als de draaihoek $\alpha = 150°$. Bereken de coördinaten van Q.
Hoeveel radialen is α?

c Teken R als de draaihoek $\alpha = 210°$. Bereken de coördinaten van R.
Hoeveel radialen is α?

d Teken S als de draaihoek $\alpha = 270°$. Bereken de coördinaten van S.
Hoeveel radialen is α?

e Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$?

f Waarom is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$?

Opgave 2

a Hoeveel radialen horen er bij $360°$?

b Waarom is $\sin(0{,}4) = \sin(0{,}4 + 8\pi)$?

c Bij welke draaihoeken is de y-coördinaat van het ronddraaiende punt 0? Geef je antwoord in graden en in radialen.

d Bij welke draaihoeken is de y-coördinaat 1? Geef je antwoord in graden en in radialen.

Opgave 3

a Hoeveel radialen is $60°$?

b Hoeveel graden is $1{,}5\pi$ rad?

Theorie en voorbeelden

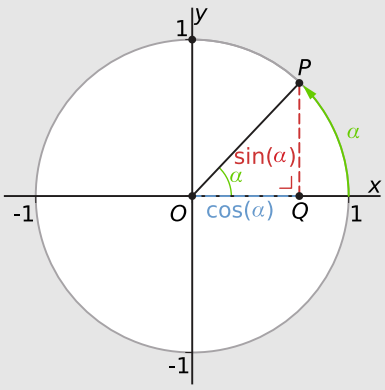
Om te onthouden

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met middelpunt in O. Punt P ligt op de eenheidscirkel.

Voor de **draaihoek** α van P is de **booglengte** genomen vanaf (1,0) tot het draaiende punt, hier P. Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief.

Er geldt:
$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad.



Figuur 10.3

Op de eenheidscirkel hoort bij een draaihoek van 1 rad een booglengte van 1.
180° komt dan overeen met π radialen of π rad, ofwel de halve omtrek van de eenheidscirkel.

Tenzij anders aangegeven, wordt de hoekeenheid rad gebruikt. Let op de instelling van je rekenmachine.

Voorbeeld 1

Bij het omrekenen van graden naar radialen geldt: 180° is gelijk aan π radialen

- $1^\circ = \frac{1}{180}\pi$ rad
- $90^\circ = \frac{90}{180} \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi$ rad

En omgekeerd:

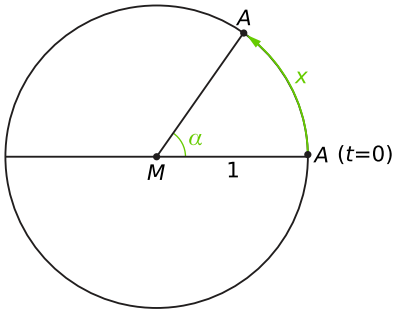
- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57{,}295...^\circ$
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 30^\circ$

graden	180	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180}{\pi}$
radialen	π	1	$\frac{1}{6}\pi$

Tabel 10.1

Opgave 4

Punt A beweegt tegen de klok in over een eenheidscirkel met middelpunt M. α is de draaihoek van MA in graden en x is de lengte van de cirkelboog die bij die draaihoek hoort.



Figuur 10.4

a Hoeveel bedraagt x als $\alpha = 360^\circ$?

b Vul de tabel in.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	225°	270°	330°
x									

Tabel 10.2

c Hoeveel radialen is 10°?

d Hoeveel graden is 10 radialen?

Opgave 5

Neem de tabel over en vul in.

graden	0	18		220		540
radialen			$\frac{5}{9}\pi$		2π	

Tabel 10.3

Voorbeeld 2

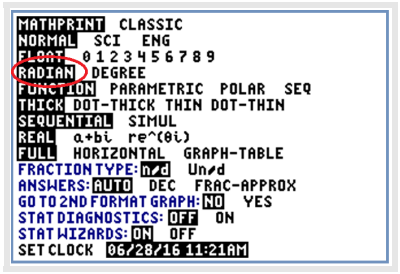
Bepaal met een rekenmachine of met Desmos of GeoGebra:

$\sin\left(\frac{1}{36}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right)$, $\sin\left(5\frac{5}{9}\pi\right)$ en $\sin\left(55\frac{5}{9}\pi\right)$

Rond af op drie decimalen.
Waarom zijn de laatste twee uitkomsten hetzelfde?

Antwoord

Reken in radialen, want er zijn geen gradentekens.
Laat de (grafische) rekenmachine, Desmos,of GeoGebra dan ook in radialen rekenen. Ga na, hoe je dat moet instellen.



Figuur 10.5 Op de TI-84 Plus

Ga na dat:

$\sin\left(\frac{1}{36}\pi\right) \approx 0{,}087$

$\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right) \approx 0{,}985$

$\sin\left(5\frac{5}{9}\pi\right) \approx -0{,}985$

$\sin\left(55\frac{5}{9}\pi\right) \approx -0{,}985$

De laatste twee uitkomsten zijn gelijk omdat tussen $5\frac{5}{9}\pi$ en $55\frac{5}{9}\pi$ precies $50\pi = 25 \cdot 2\pi$ zit. Dat zijn precies 25 periodes.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 387**.

a Bepaal afgerond op drie decimalen $\sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

b Leg uit waarom $\sin\left(40\frac{1}{55}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

c Geef nog twee verschillende waarden voor α waarvoor geldt $\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{1}{55}\pi\right)$.

Opgave 7

a Leg uit waarom $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ en $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$, waarbij k een geheel getal is.

b Welke waarden kunnen $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ aannemen?

c Geef twee verschillende waarden voor α waarvoor geldt:
$\cos(0{,}1\pi) = \cos(\alpha)$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

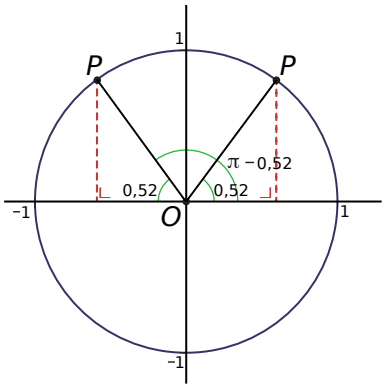
Je ziet hier dat $\sin(0{,}52) \approx 0{,}5$.
Verklaar waarom $\sin(\pi - 0{,}52) = \sin(0{,}52)$. Schrijf alle hoeken op waarvan de sinus 0,5 is.

Antwoord

Bekijk de figuur met twee posities van het draaiende punt P op een eenheidscirkel, achtereenvolgens met hoek 0,52 en $\pi - 0{,}52$.

In de eenheidscirkel liggen de punten P bij de hoeken 0,52 en $\pi - 0{,}52$ symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door het middelpunt.
Dus is: $\sin(\pi - 0{,}52) = \sin(0{,}52)$.

Verder kun je bij beide hoeken veelvouden van 2π optellen.
Alle hoeken met een sinus van 0,5 zijn dus:
$\alpha \approx 0{,}52 + k \cdot 2\pi \vee \alpha \approx \pi - 0{,}52 + k \cdot 2\pi \approx 2{,}62 + k \cdot 2\pi$.



Figuur 10.6

Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 3 op pagina 388** dat er binnen één omwentelingsperiode twee hoeken zijn met dezelfde sinus.

a Leg uit waarom $\sin(0{,}4) = \sin(\pi - 0{,}4)$.

b Schrijf alle hoeken op waarvan de sinus gelijk is aan $\sin(0{,}4)$.

c Geldt altijd $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$?

Opgave 9

Je ziet in **Voorbeeld 3 op pagina 388** dat er binnen één omwentelingsperiode twee hoeken zijn met dezelfde sinus.

a Leg uit waarom $\cos(0{,}4) = \cos(2\pi - 0{,}4)$.

b Schrijf alle hoeken op waarvan de cosinus gelijk is aan $\cos(0{,}4)$.

c Geldt altijd $\cos(\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$?

Oefenen

Opgave 10

De hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

a $30°, 20°, 10°, 270°, 360°, 455°, 780°$

De booglengtes zijn in de eenheidscirkel gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

b $\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi; 1; \pi; 3{,}1416; 10\pi$

Opgave 11

Teken een eenheidscirkel en lees daaruit af:

a $\sin(0°)$

b $\sin(90°)$

c $\cos(180°)$

d $\sin(270°)$

e $\sin(-450°)$

f $\cos(-630°)$

Opgave 12

Met je rekenmachine kun je nagaan dat $\sin(0{,}4) \approx 0{,}389$.

a Bepaal alle waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ waarvan de sinus dezelfde waarde heeft.

b Geef alle waarden van α waarvan de sinus 0,389 is met $-2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$, ook in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Gegeven is dat: $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Onderzoek welke waarden van α voldoen aan $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

a Geef in een eenheidscirkel alle waarden van x met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Geef alle waarden van α die hieraan voldoen met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Toepassen

Naast graden en radialen wordt in bijvoorbeeld de landmeetkunde of de bouw ook de **decimale graad** gebruikt.

Deze graad is gedefinieerd als $\frac{1}{400}$ deel van een cirkel en wordt aangegeven met gon, grad of gra.
Een volledige cirkel is 400 gon.

Opgave 14

Lees na wat een decimale graad is.

a Hoeveel gon is 90°?

En hoeveel gon is $\frac{\pi}{3}$ rad?

b Toon aan dat $\alpha° = \frac{10\alpha}{9}$ gon.

c Geef een omzettingsformule om van radialen naar gon te gaan.

Opgave 15

Neem de volgende tabel over en vul hem verder in:

graden	0					200	240		
radialen			$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{7}{9}\pi$				4π
gon		20		100				620	

Tabel 10.4

Testen

Opgave 16

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen benaderd.

a Deze hoeken zijn gegeven in graden. Reken om naar radialen.
$60°, 45°, 180°, 300°, 330°, 350°, -350°$.

b Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen. Bereken de bijbehorende hoeken in graden. $\pi, \frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{4}\pi, 2\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{12}\pi, 2, \frac{5}{3}\pi$.

Opgave 17

Gegeven $\sin(0{,}25) \approx 0{,}25$.

a Teken in een eenheidscirkel alle waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ aan die hieraan voldoen.

b Schrijf alle waarden van α op die hieraan voldoen. Benaderingen in twee decimalen.

10.3 Sinusfunctie en cosinusfunctie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken.

Voorkennis

- werken met radialen;
- een grafiek tekenen met GeoGebra en/of een grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Maak (bijvoorbeeld met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine) de grafiek van $y = \sin(x)$. Denk er om dat vanaf nu x in radialen is, tenzij duidelijk wordt aangegeven dat er in graden moet worden gewerkt.

a De grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?

b Welke symmetrieassen heeft de grafiek?

c Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

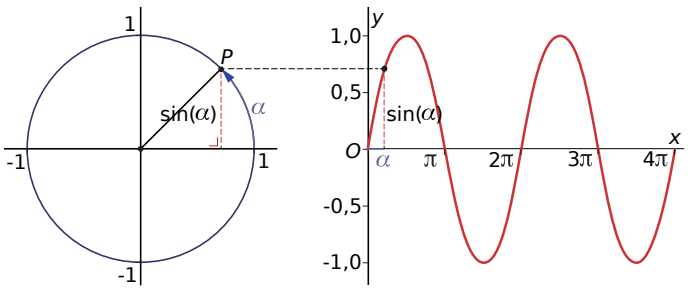
d Los op: $\sin(x) = 0{,}5$.
Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinusfunctie.

$y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van h.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur, waar twee periodes van de grafiek getekend zijn. Hierin is $y = h = \sin(\alpha)$.



Figuur 10.1

Op de horizontale as is de eenheid π, zodat exact de snijpunten met de x-as en de toppen zijn af te lezen.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$.

Wil je alle waarden weten waarvoor bijvoorbeeld $h = y = 0{,}5$ dan los je de vergelijking $\sin(x) = 0{,}5$ op met je rekenmachine. Daar gebruik je (afhankelijk van je machine) de functie arcsin, of inv sin, of $\sin^{-1}$ voor.
Je vindt dan maar één antwoord $x = \arcsin(0{,}5) = 0{,}5235...$
Met behulp van de periode en de symmetrie van de grafiek bepaal je de andere x-waarden.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ in **Uitleg 1 op pagina 391**.
Maak zelf deze grafiek met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

a Bepaal de coördinaten van de toppen van jouw sinusgrafiek.

b Bepaal de nulpunten van jouw sinusgrafiek.

c Waarom geldt $\sin(x) = \sin(\pi - x)$?

Opgave 2

Je wilt de vergelijking $\sin(x) = 0{,}6$ oplossen.
Je moet er dan van uit gaan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

a Welke waarde voor x geeft je rekenmachine in drie decimalen nauwkeurig? (Denk om radialen.)

b Welke waarden voor x voldoen aan de vergelijking?

Je wilt alleen de oplossingen in drie decimalen waarvoor geldt $0 \leq x \leq 20$.

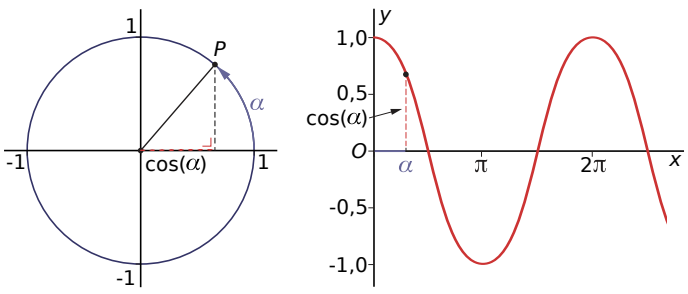
c Welke oplossingen zijn dat?

Uitleg 2

Bekijk de applet: sinusfunctie.

$y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode 2π.
Hierin is $x = \alpha$ radialen en op de y-as komt de waarde van h.
De grafiek loopt links en rechts van de y-as oneindig door als je α niet beperkt vanaf 0 tot 2π rad.

Bekijk de figuur met een periode van de grafiek van f.



Figuur 10.2

Op de horizontale as is als eenheid π genomen.

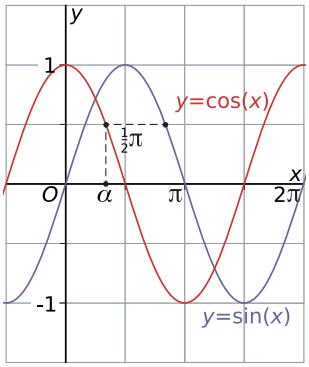
- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $2k \cdot \pi$.
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $\pi + 2k \cdot \pi$.
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen lijkt op de standaard sinusgrafiek $y = \sin(x)$.

De grafiek is alleen met $-\frac{1}{2}\pi$ verschoven in de x-richting.

Dit betekent $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je door transformatie uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan.



Figuur 10.3

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ in **Uitleg 2 op pagina 392**.
Maak zelf deze grafiek met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

a Bepaal de coördinaten van de toppen van jouw cosinusgrafiek.

b Bepaal de nulpunten van jouw cosinusgrafiek.

c Waarom geldt $\cos(x) = \cos(-x)$?

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $\cos(x) = 0{,}6$ oplossen.
Je moet er dan van uit gaan dat alle waarden van x zijn toegestaan.

a Welke waarde voor x geeft je rekenmachine in drie decimalen nauwkeurig? (Denk om radialen.)

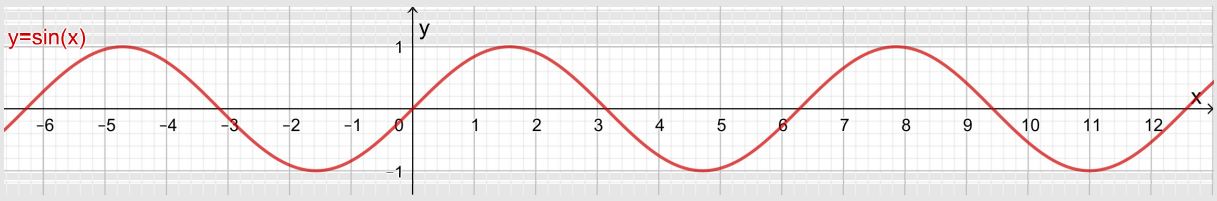
b Welke waarden voor x voldoen aan de vergelijking?

Je wilt alleen de oplossingen in drie decimalen waarvoor $0 \leq x \leq 20$.

c Welke oplossingen zijn dat?

Theorie en voorbeelden

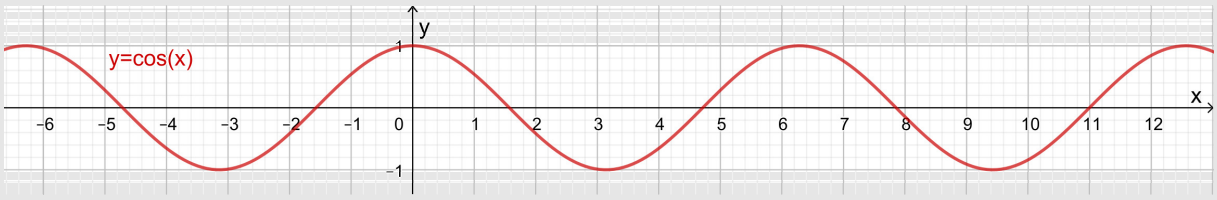
Om te onthouden



Figuur 10.4

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 10.5

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

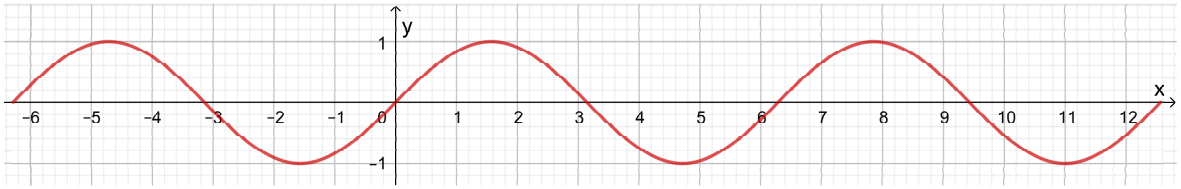
De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $y = \sin(x)$ op het gebied $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Je kunt met je rekenmachine bepalen dat $\sin(0{,}5) \approx 0{,}479$ in drie decimalen nauwkeurig.
Voor welke andere x-waarden op het gegeven gebied is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 10.6

Bekijk eerst de grafiek voor $0 \leq x \leq 2\pi$, dus binnen de 'eerste' periode.

Uit de symmetrie volgt: $\sin(0{,}5) = \sin(\pi - 0{,}5) = \sin(2{,}66) \approx 0{,}479$.

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.
Daarom geldt dat $\sin(x) = 0{,}479$ als $x \approx 0{,}5 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 2{,}66 + k \cdot 2\pi$.

Op $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ geldt $\sin(x) = 0{,}479$ voor:
$x \approx -5{,}80 \vee x = -3{,}62 \vee x \approx 0{,}50 \vee x \approx 2{,}66 \vee x \approx 6{,}76 \vee x \approx 8{,}95$

Opgave 5

Je bekijkt de functie $y = \sin(x)$ met $0 \leq x \leq 6{,}5\pi$.

a Hoeveel periodes zijn er dan zichtbaar?

b Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \sin(0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

c Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 394**.
Gebruik dezelfde sinusgrafiek.

a Bepaal afgerond op drie decimalen een waarde van x waarvoor $\sin(x) = 0{,}8$.

b Leg uit welke x-waarde binnen dezelfde periode ook dezelfde uitkomst geeft.

c Los op $\sin(x) = 0{,}8$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

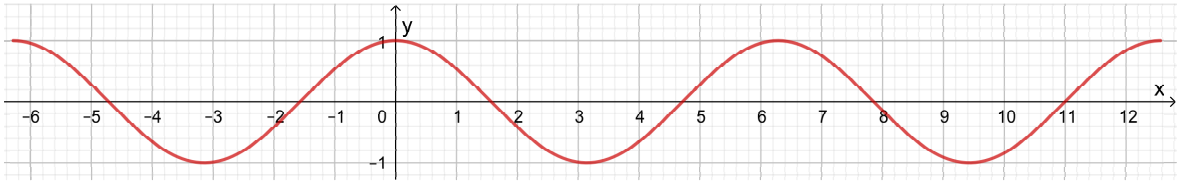
d Los op $\sin(x) = -0{,}5$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $y = \cos(x)$ op het gebied $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Los op: $\cos(x) = 0{,}1$. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Antwoord



Figuur 10.7

Met je rekenmachine (denk om radialen) vind je: $x \approx 1{,}471$.

Bekijk eerst de grafiek voor $0 \leq x \leq 2\pi$, dus binnen de 'eerste' periode.

Uit de symmetrie volgt: $\cos(1{,}471) = \cos(2\pi - 1{,}471) = \cos(4{,}813) = 0{,}1$.

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.
Daarom geldt dat $\cos(x) = 0{,}1$ als $x \approx 1{,}471 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 4{,}813 + k \cdot 2\pi$.

Op $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ geldt $\cos(x) = 0{,}1$ voor:
$x \approx -4{,}813 \vee x = -1{,}471 \vee x \approx 1{,}471 \vee x \approx 4{,}813 \vee x \approx 7{,}754 \vee x \approx 11{,}096$

Opgave 7

Je bekijkt de functie $y = \cos(x)$ met $-0{,}5\pi \leq x \leq 6{,}5\pi$.

a Hoeveel periodes zijn er dan zichtbaar?

b Voor welke waarden van x in het gegeven gebied geldt $y = \cos(0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

c Voor welke waarden van x in het gegeven gebied, geldt $y = \cos(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 395**.
Gebruik dezelfde cosinusgrafiek.

a Bepaal afgerond op drie decimalen een waarde van x waarvoor $\cos(x) = 0{,}8$.

b Leg uit welke x-waarde binnen dezelfde periode ook dezelfde uitkomst geeft.

c Los op $\cos(x) = 0{,}8$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

d Los op $\cos(x) = -0{,}5$ met $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

Oefenen

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ met $-\pi \leq x \leq 3\pi$.
Los op. Geef je antwoorden afgerond op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ met $-\pi \leq x \leq 3\pi$.
Los op. Geef je antwoorden afgerond op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 11

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 1$

b $\sin(x) = \sin(1)$

c $\sin(1) = x$

Opgave 12

Geef alle oplossingen. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 1$

b $\cos(x) = \cos(1)$

c $\cos(1) = x$

d $\cos(x) = \sin(1)$

Opgave 13

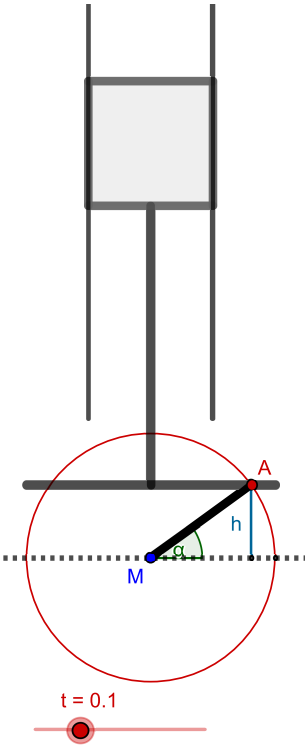
Maak de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ in één figuur.
Los op: $\sin(x) = \cos(x)$.

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h = \sin(x)$.



Figuur 10.8

Opgave 14

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt de formule voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 15

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.
Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt.

a Welke formule kun je opstellen voor h als functie van t?

b Maak de grafiek bij de formule die je bij a hebt gevonden.
Hoe kun je die uit de standaardsinus afleiden?

c Op welke tijdstippen geldt $h = 8$ cm? Geef je antwoorden in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de grafiek van $y = \sin(x)$ met $20\pi \leq x \leq 24\pi$.

Je weet dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \approx 0{,}866$ op drie decimalen nauwkeurig.

Bij welke andere waarden van x binnen het gegeven gebied vind je dezelfde uitkomst? Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 17

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$. Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

10.4 Periode, amplitude en evenwichtsstand

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ tekenen met x in radialen;
- in dergelijke grafieken de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de frequentie van het bijbehorende periodieke verschijnsel benoemen en interpreteren;
- vergelijkingen van de vorm $a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d = p$ oplossen.

Voorkennis

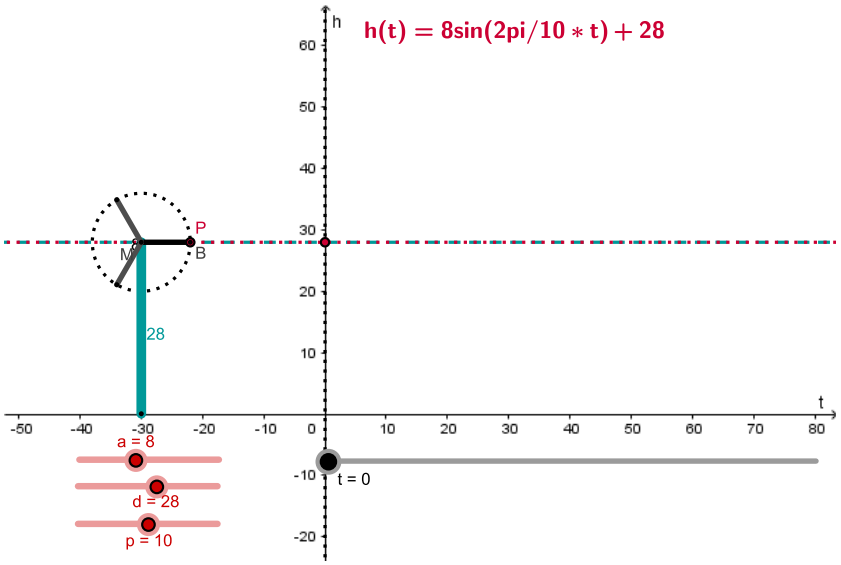
- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken.
- een grafiek tekenen met GeoGebra en/of een grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een schematische tekening van een windmolen. Punt P is een vleugeltip.
De hoogte van de molen is d (in m), de lengte van de wieken is a (in m) en de omwentelingstijd van een wiek is p (in s).

Bekijk de applet: windmolen.



Figuur 10.1

Als $a = 8$, $d = 28$ en $p = 10$, dan is:

$h = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot t\right) + 28$

de formule die de hoogte h (in m) van punt P boven de grond beschrijft.

a Leg uit hoe je aan deze formule komt.

b Bekijk de grafiek van h. De horizontale stippellijn heet wel de evenwichtsstand van de grafiek.
Door welk getal wordt die evenwichtsstand bepaald?

c De maximale uitwijking uit de evenwichtsstand heet de amplitude.
Welk getal bepaalt de amplitude?

d Waar vind je in de formule van h de periode (de omwentelingstijd) terug?

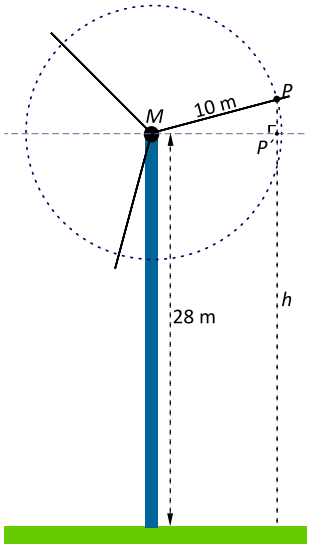
e Het punt Q is de vleugeltip van de volgende wiek. De grafiek van de hoogte h_Q van die tip lijkt erg op die van h. Welk verschil is er? En welke formule hoort er bij h_Q?

Uitleg

Hier zie je een schematische weergave van een windmolen. Neem aan dat punt P rondjes draait met een periode van 5 seconden, de omwentelingstijd. De hoogte van de molen (neem aan dat dit ook de hoogte van de draaias is) en de lengte van de wieken zijn gegeven in de figuur. De hoogte h (in m) van punt P boven de grond, hangt af van de tijd t in seconden:

$$h = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) + 28$$

Ga zelf na, hoe je deze formule kunt beredeneren en maak de bijbehorende grafiek.



Figuur 10.2

Het wordt een sinusgrafiek die uit de standaard sinusfunctie ontstaat door:

- met $\frac{1}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2\pi}$ te vermenigvuldigen in de x-richting,
  ofwel de periode 5 te maken;
- met 10 te vermenigvuldigen in de y-richting,
  ofwel de maximale uitwijking, de amplitude, 10 te maken;
- met 28 te verschuiven in de y-richting,
  ofwel de evenwichtsstand 28 te maken.

Om de grafiek goed in beeld te krijgen neem je op de horizontale as (de t-as) minstens twee periodes: $0 \leq t \leq 10$.
Op de verticale as zit de grafiek tussen $28 - 10 = 18$ en $28 + 10 = 38$.

Opgave 1

Bekijk de formule van de hoogte h van punt P afhankelijk van de tijd t in de **Uitleg op pagina 400**.

a Maak zelf de grafiek van h. Kies geschikte instellingen voor de assen.

b De evenwichtsstand van dit periodieke verschijnsel is een horizontale lijn.
Welke formule hoort daarbij?

c Welke maximale waarden heeft de grafiek van h? En welke waarden voor t horen daarbij?

d Welke minimale waarden heeft de grafiek van h? En welke waarden voor t horen daarbij?

e Welke positie heeft P als $t = 0$?

f Waaraan zie je dat P tegen de klok in draait?

Opgave 2

Een andere windmolen heeft een hoogte van 35 m en wieken met een lengte van 15 m.
De omwentelingstijd van de wieken is 3 seconden.
Je bekijkt de hoogte h (in m) van de tip van een wiek afhankelijk van de tijd t (in s).
De wieken draaien linksom en op $t = 0$ wijst deze wiek precies horizontaal naar rechts.

a Welke formule kun je voor h opstellen?

b Welke transformaties moet je op de standaard sinusgrafiek toepassen om de grafiek van h te krijgen?

c Hoe groot zijn de amplitude en de evenwichtsstand?

d Op welke tijdstippen is $h = 25$ m? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

e Hoe lang elke periode is $h \geq 25$ m? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Bekijk de formule van h in de.
De windmolen heeft nog twee wieken. Q is de tip van de wiek die eenzelfde hoogtegrafiek heeft als P maar precies $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ seconde later.

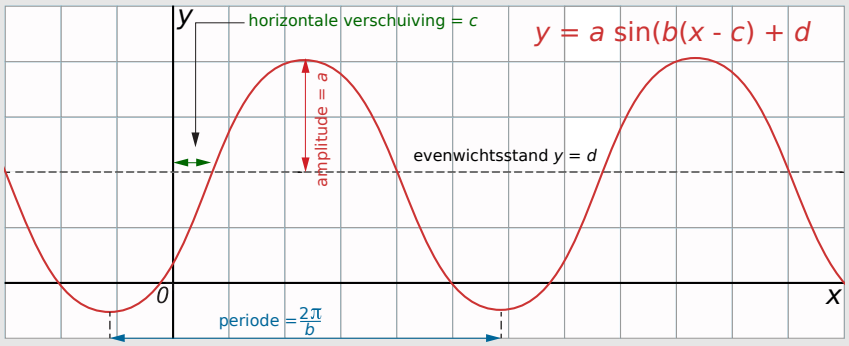
a Hoe loopt de grafiek van h_Q, de hoogtegrafiek van punt Q?

b Schrijf een formule voor h_Q op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: transformaties sinusgrafiek.



Figuur 10.3

Door transformaties van de grafiek van $y = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.

De grafieken van deze functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $y = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a;
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$; de **frequentie** is het aantal periodes per tijdseenheid;
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een verschuiving in de x-richting;
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een foto van het **reuzenrad** in het Prater in Wenen. Er bestaan reuzenraden van diverse afmetingen. Sommige zijn meer dan 150 m hoog.

Figuur 10.4

P is de positie van een bakje van een reuzenrad. Voor de hoogte h van dit bakje boven de begane grond geldt:

$h = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21$

waarin t de tijd in seconden is.

Leid de afmetingen van dit reuzenrad en de omwentelingstijd van het bakje af uit de formule.
Bereken hoe lang je elke omwenteling meer dan 30 m boven de grond zit.

Antwoord

Van dit periodieke verschijnsel is de evenwichtsstand $h = 21$ en de amplitude 20.

Dat betekent dat de straal van het reuzenrad 20 m is en de totale hoogte $21 + 20 = 41$ m is.

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.

Voor de tijd t voor één omwenteling moet $\frac{\pi}{15} \cdot t = \frac{2\pi}{30} \cdot t = 2\pi$.

Dit geeft voor de omwentelingstijd, de periode 30 s.

Je zit meer dan 30 m boven de grond als geldt $20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 > 30$.

Je lost dus eerst op: $20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 = 30$.

Dit herleid je tot: $\sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) = 0{,}45$.

Daarna werk je de sinus weg met behulp van je rekenmachine en los je de ongelijkheid op met behulp van de grafiek.

Opgave 4

Bekijk de formule van de hoogte h van een bakje van een reuzenrad boven de grond in **Voorbeeld 1 op pagina 402**.

a Leg uit waarom dit reuzenrad 41 hoog moet zijn.

b Op welke hoogte moet je waarschijnlijk in het bakje instappen?

c Los de vergelijking $20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21 = 30$ zelf stap voor stap op.

d Bereken hoe lang je elke omwenteling meer dan 30 m boven de grond zit.

Opgave 5

Bekijk de functie $h = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) + 21$ met $0 \leq t \leq 60$.

a Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

b Met welke transformaties kun je de grafiek van h laten ontstaan uit die van de standaard sinusfunctie?

Voorbeeld 2

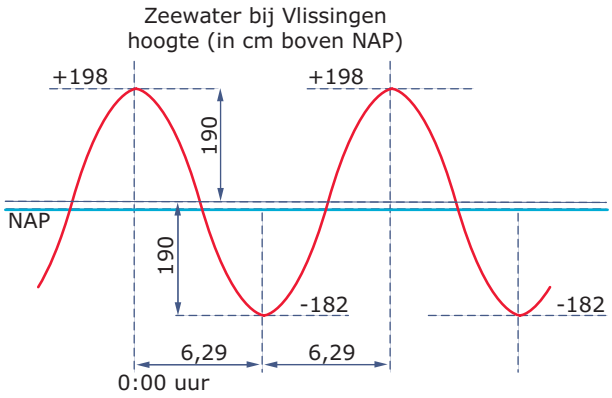
De grafiek in de figuur geeft globaal de getijdebeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de formule:

$h = 8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}58} \cdot t\right)$ met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en h in cm ten opzichte van het NAP.

Met welke frequentie treedt per week hoogwater op?

Hoeveel uur per dag is de waterstand hoger dan 1 m boven NAP?



Figuur 10.5

Antwoord

De periode van dit periodiek verschijnsel is ongeveer 12,58 uur.

Een week heeft $7 \cdot 24 = 168$ uur.

De hoogwater frequentie per week is dus $\frac{168}{12{,}58} \approx 13{,}4$.

Je moet nu de vergelijking $8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}58} \cdot t\right) = 100$ oplossen.

Dit kun je doen vanuit GeoGebra of een grafische rekenmachine, maar je kunt ook de balansmethode toepassen.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 403**.

a Waarom is deze sinusoïde uit de standaard cosinusfunctie afgeleid?

b Hoe hoog is de evenwichtsstand volgens de gegeven formule? En de amplitude?

c Hoe groot is de frequentie van hoogwater per dag?

d Op welke tijdstippen is het op 23 juni 2008 hoogwater geweest?

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 403** wordt de vraag gesteld hoe lang de waterstand dagelijks hoger dan 1 m boven NAP zit.

a Los zelf de bijbehorende vergelijking stap voor stap op met de balansmethode.

b Beantwoord nu de vraag.

Oefenen

Opgave 8

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h = 50 \sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120 \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) - 20$

d $P = 15 - 20 \sin(2x)$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op. Rond af op drie decimalen.

a $10 \sin(x - 2) = 5$

b $50 - 30 \cos\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 10

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h = 11 + 10 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Hierin is h uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Maak de grafiek van h.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke betekenis?

c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoelang een bakje van een reuzenrad zich hoger dan 18 meter boven de grond bevindt.

Opgave 11

De menselijke ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud V kan daarbij met zo'n halve liter toenemen. Het longvolume na inademen is 5,2 liter. Hierbij past bij benadering de formule:

$V = 4{,}95 + 0{,}25 \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right)$

met t de tijd in seconden en V het longvolume in liter.

a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut? En hoe lang duurt elke ademhaling volgens de formule?

b Bepaal de evenwichtsstand, de periode en de amplitude van deze sinusoïde.

c Op welke momenten is de longinhoud minimaal?

Opgave 12

Op 24 november 2015 werd voorspeld dat op 15 december 2016 het waterpeil bij Hoek van Holland hoog zou zijn om 3:05 uur en om 15:23 uur.
Er werd een model opgesteld van het getij, hierbij werd een sinusoïde $h = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$ gebruikt voor de hoogte van de waterstand.
t wordt genomen in uren.

Hoe groot is b in dit model?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. Hoe vaker de snaar per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling want de bijbehorende formule heeft de vorm van een sinusoïde.

Figuur 10.6

Bij deze A hoort een harmonische trilling met formule $u = 0{,}5 \cdot \sin(880\pi \cdot t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

Opgave 13

Bekijk de formule voor de harmonische trilling die hoort bij de A van een piano.

a Maak de bijbehorende grafiek, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

b Geef een mogelijke formule voor de harmonische trilling die bij de eerste boventoon hoort.

c Neem aan dat de A en zijn eerste boventoon samen het geluid bepalen.
Hoe ziet de grafiek er uit als je hun bijbehorende trillingen optelt? Krijg je opnieuw een harmonische trilling?

Testen

Opgave 14

Bepaal van de functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\sin(x + 8)$

c $y = 0{,}5\cos(0{,}5\pi x) + 3$

Opgave 15

De wieken van een windmolen draaien rond. De hoogte h van de tip van één van die wieken boven de begane grond wordt gegeven door:

$h = 45 + 18 \cdot \sin(\pi \cdot t)$

met t de tijd in seconden en h de hoogte in m.

a Met welke omwentelingstijd draaien deze wieken rond?

b Hoe lang zijn de wieken van deze molen en op welke hoogte zit de draaias van het stel wieken?

c Maak een grafiek van h waarin precies twee periodes zichtbaar zijn.
Welke instellingen voor de assen zijn dan nodig?

d Hoeveel tijd is deze tip zichtbaar boven een fabriek die voor de molen staat en 35 m hoog is?

10.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met periodieke verschijnselen en ontdekt dat functies met sinus en cosinus standaard periodieke functies zijn. Daarbij hoort het werken met radialen in plaats van graden. Verder zijn de begrippen periode, frequentie, evenwichtsstand en amplitude voorbij gekomen. Deze zijn vaak goed te gebruiken bij het beschrijven van periodieke verschijnselen.

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- periodiek verschijnsel — periode — frequentie
- radiaal — positieve en negatieve draaihoeken
- standaard sinusfunctie — standaard cosinusfunctie
- sinusoïde — amplitude, evenwichtsstand

Activiteitenlijst

- een periodiek verschijnsel herkennen — rekenen met de periode en de frequentie van een periodiek verschijnsel;
- hoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd — sinus en cosinus van hoeken in radialen bepalen;
- grafieken tekenen van de functies $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ met x in radialen — vergelijkingen van de vorm $\sin(x) = c$ of $\cos(x) = c$ oplossen;
- aan de formule herkennen wanneer een functie een sinusoïde is — de periode, de frequentie, de amplitude en de evenwichtsstand benoemen en gebruiken — vergelijkingen van de vorm $a \cdot \sin(b(x + c)) + d = p$ oplossen.

Testen

Opgave 1

Reken de hoeken in graden om naar radialen tussen 0 en 2π, en omgekeerd. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a 120°

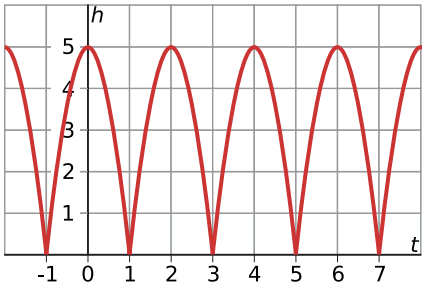
b 700°

c $\frac{5}{6}\pi$ rad

d $\frac{5}{6}$ rad

Opgave 2

Bekijk een periodieke grafiek.
Voor $-1 \leq t \leq 1$ geldt $h = 5 - 5t^2$



Figuur 10.1

a Bepaal de periode van de grafiek.

b Voor welke waarden van t geldt $h = 0$?

c Bereken h als $t = 6{,}5$.

d Bereken h als $t = 112$.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

a $2\sin(x) = \sqrt{2}$

b $\cos(x) = \cos(2)$

c $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

d $25 + 10\sin\left(\frac{\pi}{7}t\right) = 17$

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse Zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$y = 0{,}4 + 1{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP. Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

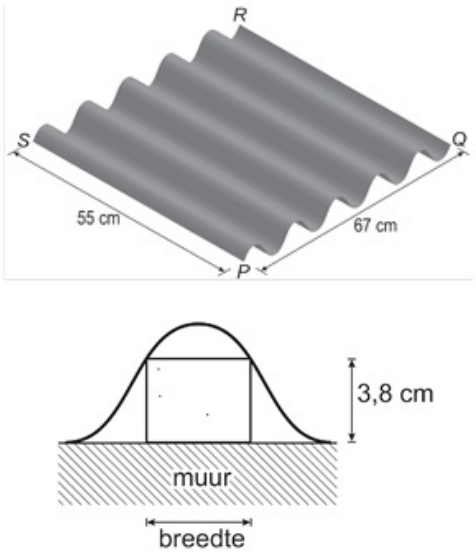
Hoe hoog moet de zeedijk van Petten minimaal zijn? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

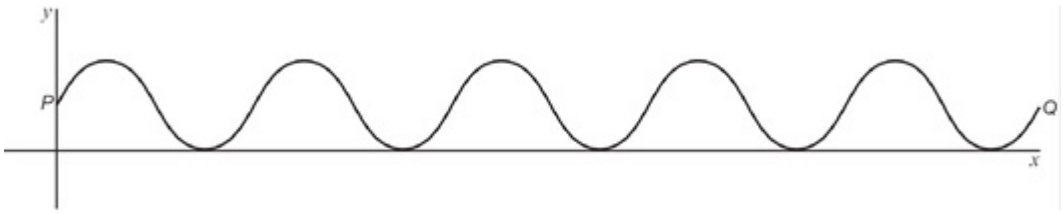
Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$y = 3 + 3 \sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In de figuur hiernaast is dit geschetst.



Figuur 10.2



Figuur 10.3

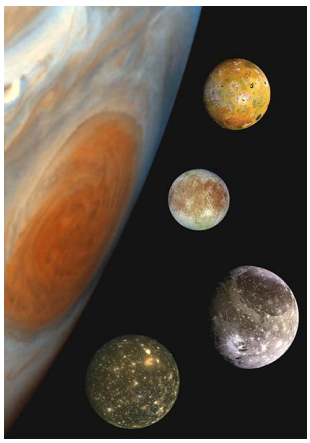
a Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat (zie de figuur rechtsboven) is een rechthoek $PQRS$. $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm. Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q. De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

b Stel een formule op van deze sinusoïde als deze op ware grootte in een assenstelsel zoals in het vooraanzicht wordt weergegeven.

Toepassen

In 1610 werden **de vier helderste Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008. Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

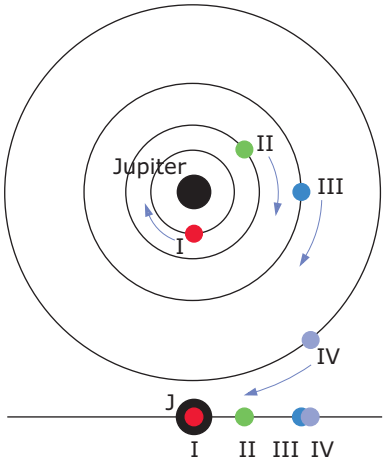


Figuur 10.4

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u_G = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{7{,}2}(t - 10)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 sep 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen. En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.



Figuur 10.5

Opgave 6

Bekijk de gegevens van de Jupitermanen.

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

De diameter van Jupiter is ongeveer 142 . 980 km.

b Hoe ver is Ganymedes gemiddeld van Jupiter verwijderd?

c Hoeveel dagen doet Ganymedes over één omwenteling rond Jupiter?

Opgave 7

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking u ten opzichte van Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen. Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0{,}378(t - 7{,}5))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

a Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de grafiek in het slingerdiagram van september 2008.
Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

b Stel zo'n formule op voor de Jupitermaan Europa.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

c Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

11

Modelleren

11.1 Een model opstellen 412
11.2 Optimaliseren 420
11.3 Onderzoeksopdrachten 427

11.1 Een model opstellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met allerlei functies;
- meetkundige technieken zoals de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, met sinus, cosinus, tangens.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wilt berekenen hoe ver deze persoon theoretisch over het aardoppervlak kan kijken. Welke eigenschappen (van de situatie) komen hierbij kijken?

Uitleg

Probleem:
“Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) over het aardoppervlak kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de uitleg. De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

a Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.

b Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak. Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.

c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?

d Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.

e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a. Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in ΔMPR.

a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.

De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.

b Hoe kun je daarmee rekening houden?

c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:
Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a. De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR. En die kun je uitrekenen in driehoek MPR.

a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.

b Waarom is nu het probleem opgelost?

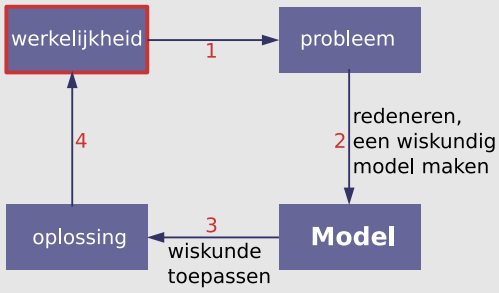
c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.
Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.



Figuur 11.1

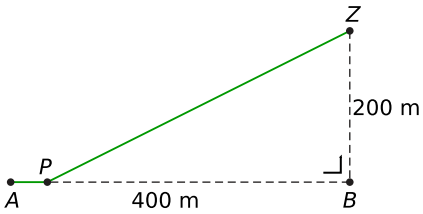
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De **lijst met mogelijke vragen** kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Zwemmer in nood

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij (punt A). Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer (bij Z) die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?



Figuur 11.2

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid 5,4 km/h.

Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen. Bekijk daarna de opgaven.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 414** zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?

b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?

c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP. Noem die lengte bijvoorbeeld x.

e Stel een formule op voor de totale tijd T die nodig is om Z te bereiken vanuit A.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 414** en de opgave over het 'zwemmer in nood' probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?

b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?

c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?

d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?

e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).

Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:

$P = c \cdot m \cdot v^2$

Hierin is P het vermogen in kilowattuur (kWh), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 415**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.

d Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Oefenen

Opgave 7

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord? Dit in vergelijking met het leggen van de kabel op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden.

a Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.

b Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.

c Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.

Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieselversie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieselversie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

a Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.

b Welke oplossing vind je?

c Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) 52,37° en 40000 km.

Opgave 10

Je ziet hier een locomotief van Märklin of Fleischmann, die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

Figuur 11.3

Opgave 11

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule $W = 0{,}03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S$. Hierin is W het gewicht in kg, S het vleugeloppervlak in m^2, V de kruissnelheid in m/s en d de luchtdichtheid in kg/m^3.

a Ga uit van een luchtdichtheid van 0,421 kg/m^3. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid 700 km/h is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.

b Een vliegtuig met een kruissnelheid van 250 m/s en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?

c In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van 0,369 kg/m^3. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V. Wat is de evenredigheidsconstante?

d Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig 1,4 keer zo groot wordt?

Toepassen

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 $watt/m^2$.

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a. Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € 0,15 per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost. Neem nu per jaar:

- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € 50,00 per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € 0,15 per kWh.

Opgave 12

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in.

a Welke formule geldt voor de lichtsterkte in dit punt?
Neem aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.

b Welke twee voorwaarden leveren de formules bij a op?

Opgave 13

Bekijk de vorige opgave. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden. De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15\right)$$

a Laat zien hoe je aan deze formule komt.

b Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Testen

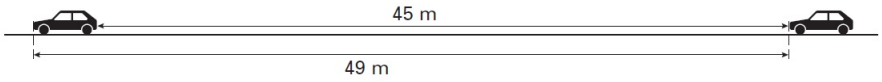
Opgave 14

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.
Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

$$k = k_{\max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right)$$

Hierbij is v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur, v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt, k de verkeersdichtheid en k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg. Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: 'Houd 2 seconden afstand'.



Figuur 11.4

a Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.
Ga uit uit van de volgende situatie.
Op een weg is $v_{max} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

b Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{max} = 250$ en $v_{max} = 160$.

c Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v. Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is

11.2 Optimaliseren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Verkennen

Opgave V1

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Probleem:
"Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?"

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.
Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2. Met deze gegevens maak je een figuur.
Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000$ m^2. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg op pagina 420**.

a Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000$ m^2 is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.

b Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg op pagina 420**.
Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie.
Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.

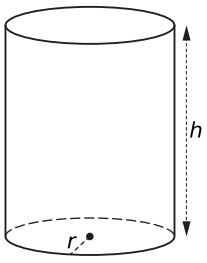
Meestal schakel je daarna GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine in om de optimale oplossing te vinden.
Maar dat kan eigenlijk alleen als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft.
In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$



Figuur 11.1

Omdat gegeven is dat $I = 1000$ cm^3 kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r.

De formule die je krijgt, kun je in een grafische rekenmachine, Desmos, of GeoGebra invoeren. Je vindt dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 3

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1 op pagina 421**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?

c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.

d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3.

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x.
Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$.
Deze variabelen hangen allemaal af van x.

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2 op pagina 422**. Kies voor x het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x.

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

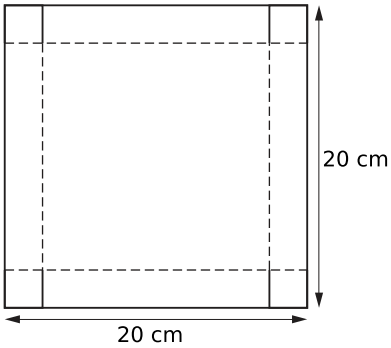
b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

Oefenen

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.



Figuur 11.2

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?

b Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.

Opgave 8

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.

Figuur 11.3

Opgave 9

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q (×1000) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

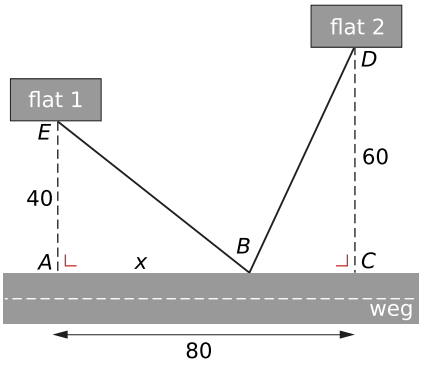
c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.
Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.



Figuur 11.4

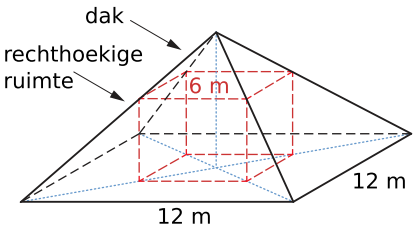
a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

b Bereken de totale lengte L in meter.

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 11.5

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Opgave 12

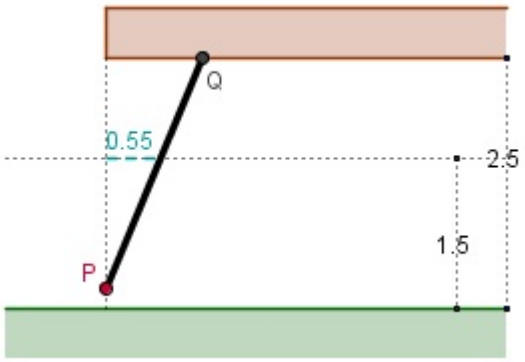
De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Toepassen

Bekijk de applet: Garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 11.6

Opgave 13

Bekijk het probleem in **Toepassen op pagina 425**.

a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A, beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

$$A = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2{,}5^2 - x^2}$$

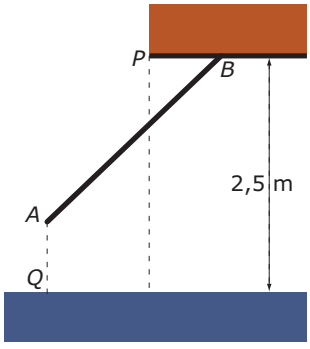
b Probeer zelf de formule voor A als functie van x af te leiden.

c Bereken voor welke x de waarde van A maximaal is.

Opgave 14

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 11.7

Testen

Opgave 15

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Los het geschetste probleem op.

Opgave 16

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

11.3 Onderzoeksopdrachten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

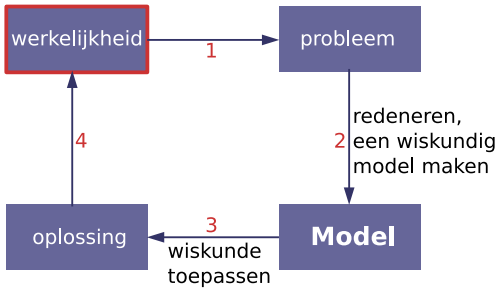
- modelleren toepassen bij onderzoeksopdrachten.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Uitleg

Het is nu de bedoeling dat je zelf wat complexere opdrachten aanpakt.
Dit worden **onderzoeksopdrachten** genoemd.
In dergelijke opdrachten wordt een situatie beschreven waarin de wiskunde je kan helpen bij het vinden van een geschikte oplossing. Welke wiskunde dat is en hoe die oplossing tot stand kan komen, moet je zelf onderzoeken. Denk daarbij aan de modelleercyclus en de **lijst met mogelijke vragen** om je te helpen.



Figuur 11.1

Omdat het de bedoeling is dat je hier zelf onderzoek doet, vind je geen uitgebreide antwoorden bij deze opgaven!

Toepassen

De volgende opdrachten zijn bedoeld als **onderzoeksopdrachten**. De bedoeling is dat je zelf een onderzoekje doet, mogelijk zelfs met een eigen experiment. Daarvan maak je een uitgebreid onderzoeksverslag. Je vindt dan ook geen uitgebreide uitwerkingen bij deze opgaven.

Opgave 1: Elektrisch rijden?

Het rijden in een auto kost geld. Je maakt kosten vanwege de brandstof of de elektriciteit, maar ook betaal je wegenbelasting, verzekering, en dergelijke. En tenslotte moet je de auto kopen en ook dat kost geld. Ga na wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Figuur 11.2

Hier heb je enkele gegevens om mee te werken:

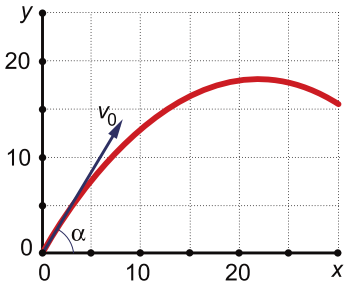
- Smart fortwo op benzine:
  - benzine kost € 1,60 per liter;
  - je rijdt gemiddeld 20 km per liter benzine;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 2000,=;
  - de aanschafprijs is € 15000,=.
- Smart fortwo op elektriciteit:
  - elektriciteit kost € 0,20 per kWh;
  - de maximale accucapaciteit is € 17,6 kWh;
  - met de maximale accucapaciteit rijd je gemiddeld 140 km;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 1200,=;
  - de aanschafprijs is € 22000,=.

Maar het is natuurlijk leuker om met actuele gegevens te werken en je 'eigen' type auto te kiezen!

Bereken van een bepaald merk auto wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Opgave 2: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.
Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.



Figuur 11.3

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.
Dus is:

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \text{ en } y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0(\cos)^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

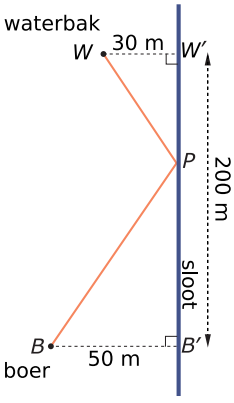
a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

Opgave 3: Kortste weg of snelste weg?

Een boer wil water naar de waterbak brengen die voor zijn paarden is bestemd. Hij haalt dat uit de sloot met behulp van een emmer. Daarbij neemt hij ofwel de kortste weg, ofwel de snelste weg. In de figuur hiernaast is een bovenaanzicht van de situatie getekend met de afstanden er in aangegeven.



Figuur 11.4

a Bepaal de kortste weg van B naar W via de sloot.

Met een lege emmer loopt de boer met een snelheid van 3 m/s, met een volle emmer met een snelheid van 1 m/s.

b Bepaal de snelste weg van B naar W via de sloot.

Opgave 4: Geremde exponentiële groei

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes (‘Drosophila melanogaster’). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
N	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 11.1

Figuur 11.5

a Ga na dat deze groep fruitvliegjes in het begin exponentieel groeit. Met welk percentage per dag?

Er blijkt uiteindelijk toch geen sprake te zijn van exponentiële groei. N nadert de 350 fruitvliegjes.

De bijpassende formule heeft daardoor de vorm: $N = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

b Stel de formule op die bij deze tabel past.
Bereken bij welke waarde van t de groeisnelheid maximaal is.

c Probeer bij de groei van de mensheid zo'n geremd exponentieel groeimodel op te stellen.

Opgave 5: Filevorming

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.

Figuur 11.6

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond van deze aannames een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v. Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

12

Vlakke figuren

12.1 Driehoeken en vierhoeken 432
12.2 Berekeningen in vlakke figuren 442
12.3 Omtrek en oppervlakte 453
12.4 Cirkels 466
12.5 Bijzondere lijnen 473
12.6 Totaalbeeld 479

12.1 Driehoeken en vierhoeken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- vlakke figuren kunnen indelen in soorten;
- de verschillende soorten driehoeken en hun symmetrie-eigenschappen kunnen benoemen;
- de verschillende soorten vierhoeken en hun symmetrie-eigenschappen kunnen benoemen.

Voorkennis

- vlakke figuren en hun eigenschappen;
- hoeken berekenen met behulp van X-hoeken, Z-hoeken, F-hoeken, de hoekensom van een driehoek en een vierhoek;
- lijn-, punt- en draaisymmetrie herkennen en benoemen.

Verkennen

Opgave V1

Bij constructies zijn driehoeken heel belangrijk.
Iemand zegt:
"Een driehoek is een figuur die bestaat uit drie punten die niet op één lijn liggen en hun verbindingslijnstukken."

Figuur 12.1

a Klopt deze uitspraak?

b Kun je de uitspraak nog verbeteren?

c Noem alle soorten bijzondere driehoeken en hun eigenschappen.

d Hoe groot zijn de hoeken van een driehoek samen?

e Waarom is de driehoek bij constructies zo belangrijk?

Opgave V2

Naast driehoeken zijn er ook vierhoeken (en vijfhoeken en zeshoeken en...).

a Wat is precies een vierhoek?

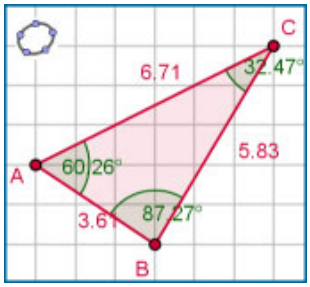
b Noem alle soorten bijzondere vierhoeken en hun eigenschappen.

c Hoe groot zijn de hoeken van een vierhoek samen? Weet je ook waarom?

d Wat is het nadeel van een vierhoek in een constructie? Kun je een voorbeeld geven?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

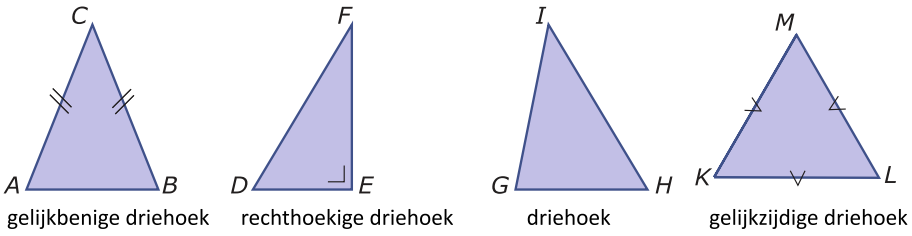


Figuur 12.2

Een veelhoek is een figuur bestaande uit hoekpunten en lijnstukken die samen een deel van het vlak insluiten. Deze lijnstukken heten zijden.

Een driehoek is een veelhoek met drie hoekpunten en drie zijden. Hier zie je driehoek ABC. Je schrijft ook wel: ΔABC.
De lengtes van de zijden en de grootten van de hoeken zijn gegeven. Ga nog eens na, dat de hoeken samen 180° zijn.
Bijzondere driehoeken zijn:

- de rechthoekige driehoek met één rechte hoek;
- de gelijkbenige driehoek met twee gelijke zijden;
- de gelijkzijdige driehoek met alle drie de zijden gelijk.



Figuur 12.3

Opgave 1

Bekijk de vier driehoeken in **Uitleg 1 op pagina 433**.

a Welke twee gelijkbenige driehoeken zijn er? Welke gelijke benen hebben ze? En welke symmetrieassen?

b Hoeveel gelijke hoeken heeft een gelijkbenige driehoek in ieder geval? En hoeveel als hij ook gelijkzijdig is?

c Hoeveel graden zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?

d Hoeveel graden zijn de hoeken van een gelijkbenige driehoek als hij precies één hoek van 40° heeft?

e Teken een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. Hoe groot zijn de hoeken daarvan?

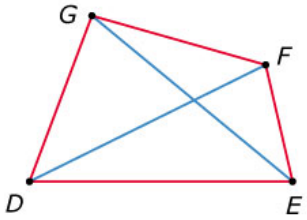
Opgave 2

Teken een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

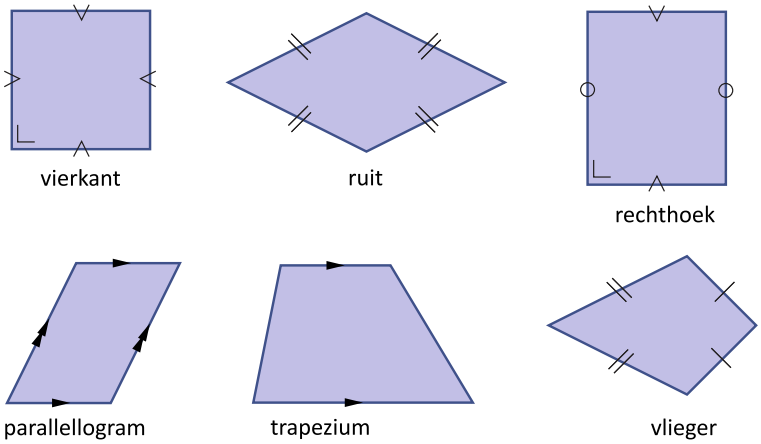
Een vierhoek is een veelhoek met vier hoekpunten en vier zijden. Hier zie je vierhoek $ABCD$. De lengtes van de zijden en de grootte van de hoeken zijn gegeven. Omdat elke vierhoek in twee driehoeken is te verdelen zijn de hoeken samen 360°.



Figuur 12.4

Bijzondere vierhoeken zijn:

- de rechthoek met vier rechte hoeken;
- de vierkant met vier rechte hoeken en vier gelijke zijden;
- de vlieger met één symmetrieas;
- de ruit met vier gelijke zijden;
- het trapezium met één paar evenwijdige zijden;
- het parallellogram met twee paren evenwijdige zijden.



Figuur 12.5

Opgave 3

Bekijk de vierhoeken in de **Uitleg 2 op pagina 434**.

a Welke vierhoek heeft de meeste symmetrieassen?

b ‘Elk parallellogram is ook een trapezium.’
Klopt het omgekeerde ‘Elk trapezium is ook een parallellogram.’ ook?

c ‘Elke ruit is ook een parallellogram.’
Klopt deze uitspraak? En klopt het omgekeerde?

d Bestaat er een rechthoekige ruit?

e Hoeveel diagonalen heeft elke vierhoek?

f Heeft een parallellogram symmetrieassen? Heeft een parallellogram een centrum van symmetrie?

Opgave 4

Bekijk weer de vierhoeken in de **Uitleg 2 op pagina 434**.

Je weet nog wat F-hoeken, Z-hoeken en X-hoeken zijn.

a Een ruit heeft een hoek van 30°.
Hoe groot zijn de andere hoeken?

b Een parallellogram heeft een hoek van 30°.
Hoe groot zijn de andere hoeken?

c Een trapezium heeft een hoek van 30°.
Kun je de andere hoeken berekenen?

d Wat weet je van de diagonalen van een ruit? En van een vlieger?

Opgave 5

Gebruik de applet van de **Uitleg 2 op pagina 434**.

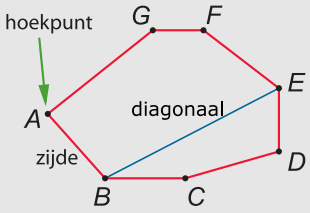
Maak elk van de zes genoemde soorten vierhoeken en bekijk de symmetrie-eigenschappen ervan. Maak een overzicht van de symmetrische eigenschappen per vierhoek.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **veelhoek** is een figuur bestaande uit **hoekpunten** en lijnstukken die samen een deel van het vlak insluiten. Deze lijnstukken heten **zijden**.

De lijnstukken tussen twee hoekpunten die geen zijde van de veelhoek zijn, heten **diagonalen**.



Figuur 12.6

Een **driehoek** is een veelhoek met drie hoekpunten en drie zijden. De drie hoeken zijn samen 180°. Er bestaan verschillende soorten driehoeken:

- de rechthoekige driehoek met één rechte hoek;
- de gelijkbenige driehoek met twee gelijke zijden;
- de gelijkzijdige driehoek met alle drie de zijden gelijk.

Een **vierhoek** is een veelhoek met vier hoekpunten en vier zijden. De vier hoeken zijn samen 360°. Er bestaan verschillende soorten vierhoeken:

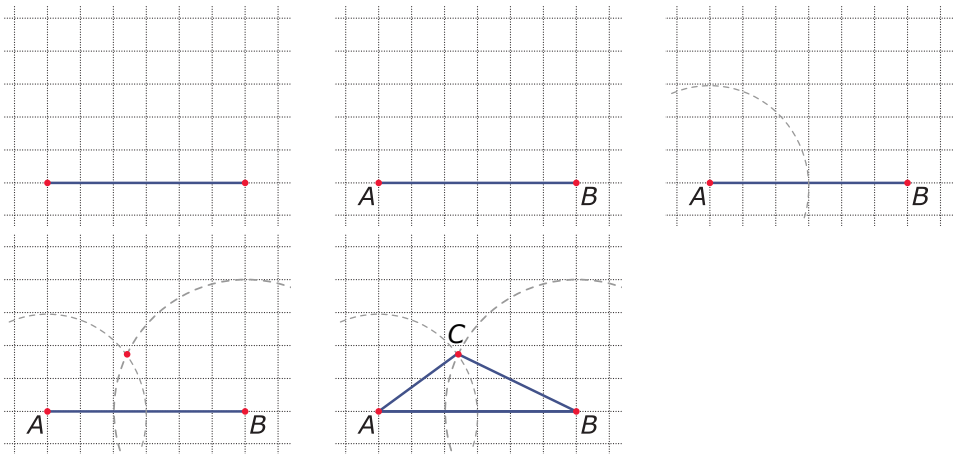
- de rechthoek met vier rechte hoeken;
- de vierkant met vier rechte hoeken en vier gelijke zijden;
- de vlieger met één symmetrieas;
- de ruit met vier gelijke zijden;
- het trapezium met één paar evenwijdige zijden;
- het parallellogram met twee paren evenwijdige zijden.

Voorbeeld 1

In constructies die sterk moeten zijn, kom je vaak driehoeken tegen. Een driehoek is namelijk niet te vervormen. Daarom kan een betrekkelijk lichte bouwkraan toch zware lasten tillen.

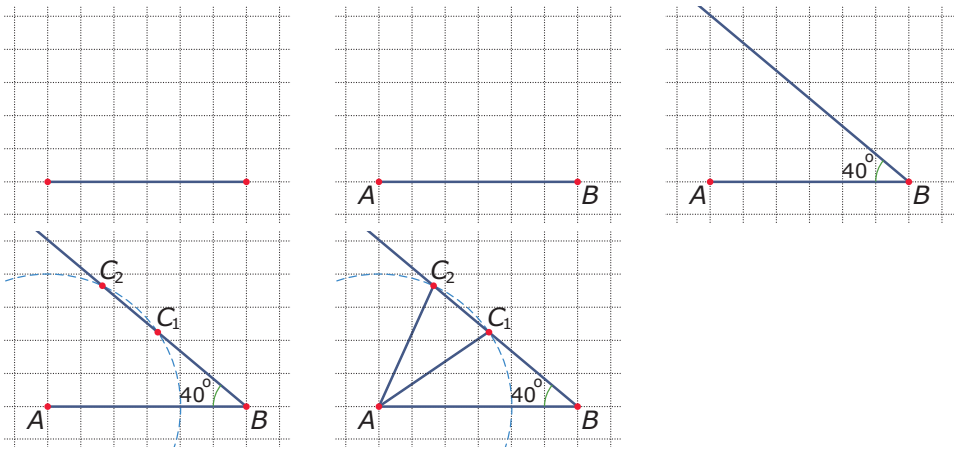
Je kunt een driehoek construeren met passer en geodriehoek.

Bekijk de constructie van ΔABC met drie gegeven zijden:
$AB = 6$, $BC = 4$ en $AC = 3$.



Figuur 12.7

Bekijk de constructie van ΔABC met twee gegeven zijden: $AB = 6$, $AC = 4$ en $\angle B = 40°$. Merk op dat er twee verschillende driehoeken mogelijk zijn.



Figuur 12.8

Opgave 6

Construeer de volgende driehoeken.

a ΔABC: $\angle B$ is een rechte hoek, $AB = 3$ en $BC = 4$.

b ΔABC: $AB = 5$, $AC = 5$ en $BC = 5$.

Opgave 7

Construeer de volgende driehoeken.

a Teken twee gelijkbenige driehoeken ΔABC met $AB = 5$ cm en $\angle A = 30°$.

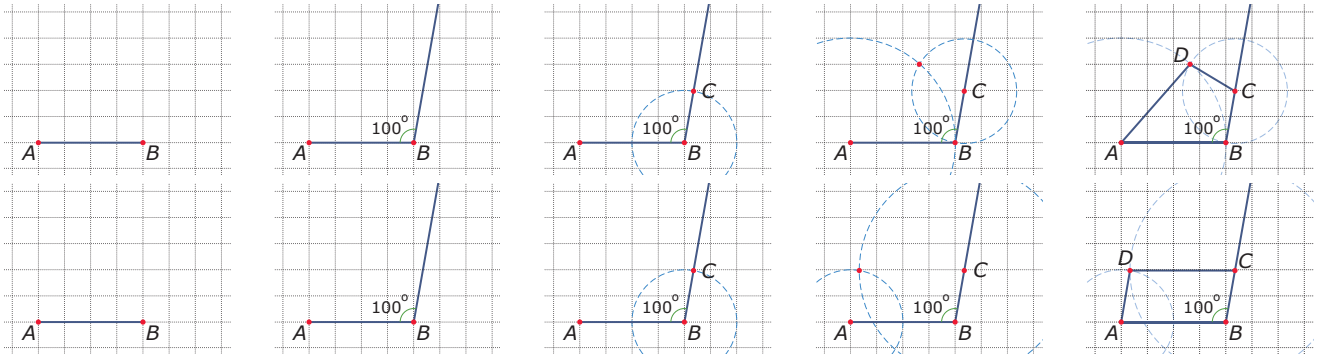
b Teken ΔGHI met $GH = HI = 5$ cm en $\angle G = 60°$. Wat weet je van $\angle H$ en $\angle I$?

Voorbeeld 2

Ook vierhoeken zijn met passer en liniaal te construeren.
Bedenk dat een vierhoek met vier gegeven zijden nog niet vast ligt, die kun je nog vervormen.

Bekijk hier de constructie van een vlieger $ABCD$ met: $AB = 4$, $BC = 2$ en $\angle B = 100°$.

Daarnaast zie je de constructie van een parallellogram $ABCD$ met: $AB = 4$, $BC = 2$ en $\angle B = 100°$.



Figuur 12.9

Opgave 8

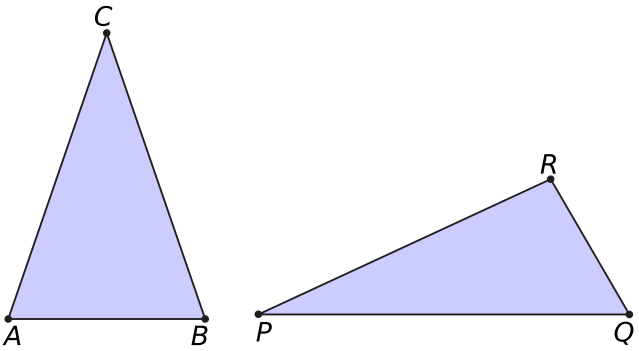
Bekijk de constructie van een parallellogram en een vlieger in **Voorbeeld 2 op pagina 437**.

a Construeer een parallellogram $ABCD$ met $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm en $\angle A = 30°$.

b Construeer een vlieger $KLMN$ met $KL = 5$ cm, $LM = MN = 3$ cm en $\angle NKL = 60°$.

Opgave 9

Je ziet twee driehoeken. ΔABC is een gelijkbenige driehoek met benen van 4 cm en een tophoek van 38° en voor ΔPQR geldt dat $\angle P = 20°$, $\angle Q = 50°$ en $PR = 4$ cm.



Figuur 12.10

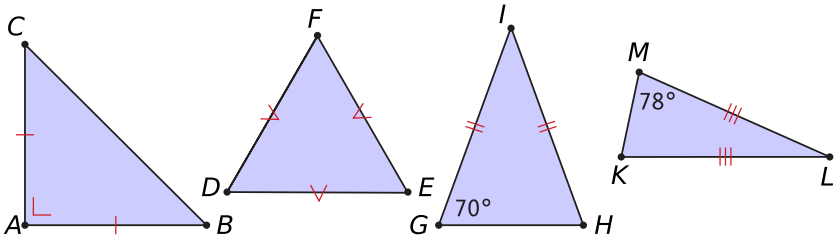
a Teken ΔABC en spiegel hem in lijnstuk BC.
Bereken de hoeken van de figuur die nu ontstaat.

b Teken ΔPQR en spiegel hem in lijnstuk PQ. Geef de naam van de vierhoek die nu ontstaat en bereken de hoeken ervan.

Oefenen

Opgave 10

Je ziet vier driehoeken. In de driehoeken is aangegeven welke lijnstukken gelijk zijn.

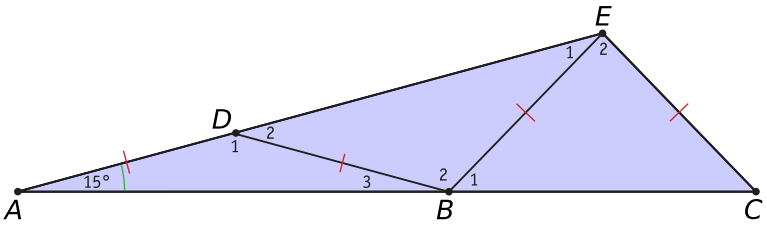


Figuur 12.11

Bereken de hoeken van deze driehoeken.

Opgave 11

ΔACE is verdeeld in meerdere driehoeken. In de figuur is aangegeven welke zijden even lang zijn.



Figuur 12.12

Bereken de hoeken die zijn aangeduid met een cijfer.

Opgave 12

Om een unieke driehoek te tekenen, heb je minstens drie gegevens nodig.

a Teken twee gelijkbenige driehoeken ΔABC met $AB = 5$ cm en $\angle A = 30°$.

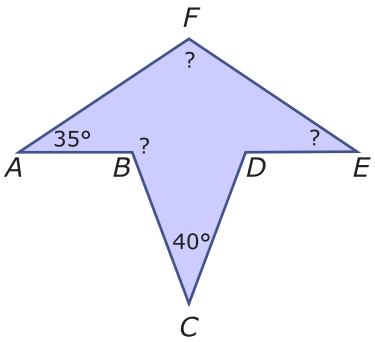
b Teken twee rechthoekige driehoeken ΔDEF met $DE = 5$ cm en $\angle D = 30°$.

c Teken ΔGHI met $GH = HI = 5$ cm en $\angle G = 60°$. Wat weet je van $\angle H$ en $\angle I$?

Opgave 13

Deze figuur is lijnsymmetrisch. Hij bestaat uit twee driehoeken.

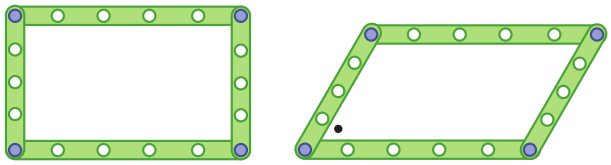
Bereken de hoeken waar een vraagteken in staat.



Figuur 12.13

Opgave 14

Je ziet hoe je een rechthoek van metalen strips kunt vervormen.



Figuur 12.14

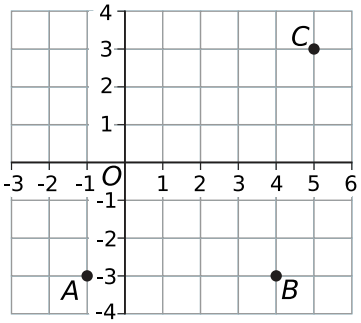
a Hoe heet de rechter figuur?

b Je kunt het vervormen van de rechthoek voorkomen door één strip toe te voegen. Licht toe hoe die strip moet worden geplaatst.

c Als je de rechthoek zo vervormt dat de hoek met de stip 58° is, hoe groot zijn dan de andere hoeken van de figuur die zo ontstaat?

Opgave 15

Je ziet een assenstelsel met de punten $A(-1,-3)$, $B(4,-3)$ en $C(5,3)$.



Figuur 12.15

a A, B en C zijn hoekpunten van parallellogram $ABCD$. Geef de coördinaten van punt D.

b A, B en C zijn hoekpunten van vlieger $ABCE$. Geef de coördinaten van punt E.

c Welke andere bijzondere vierhoeken $ABCP$ kun je met deze punten maken? Licht je antwoord toe.

Opgave 16

Probeer de volgende vierhoeken te construeren, of leg uit waarom dit niet lukt.

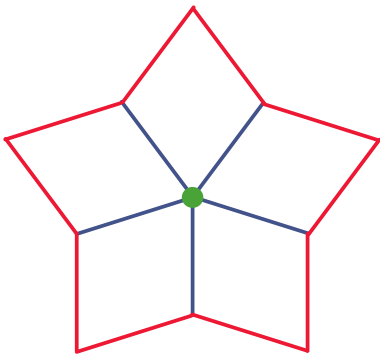
a Vlieger $ABCD$ met $AB = 2$ cm en $BC = AC = 3$ cm.

b Parallellogram $EFGH$ met $EF = 5$ cm, $EH = 3$ cm en $\angle F = 40°$.

c Ruit $KLMN$ met $KL = 3$ cm en $\angle M = 40°$.

Opgave 17

Als je vijf gelijke ruiten tegen elkaar legt met alle vijf precies één punt gemeenschappelijk, dan krijg je de rode ster hiernaast.



Figuur 12.16

a Deze ster heeft tien hoeken. Hoe groot zijn die hoeken?

b Je kunt op dezelfde manier (met smallere ruiten) een achtpuntige ster maken. Hoe groot zijn daar de hoeken van?

c En zo maak je ook een honderdpuntige ster. Hoe groot zijn daar de hoeken van?

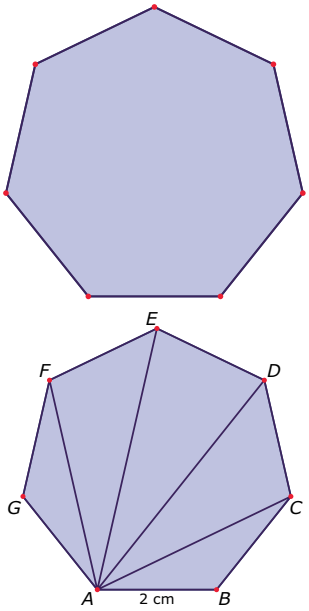
d En nu een n-puntige ster, die dus uit n ruiten bestaat. Hoe groot zijn nu de hoeken?

Toepassen

Er bestaan natuurlijk ook vijfhoeken, zeshoeken, zevenhoeken, etc.
Als alle zijden ervan gelijk zijn, heten ze regelmatig.

Je ziet hier een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm. Alle hoeken en alle zijden zijn gelijk. Om zo'n figuur te kunnen tekenen verdeel je hem vanuit één hoekpunt in driehoeken. Omdat hij uit vijf driehoeken bestaat is zijn totale hoekensom $5 \cdot 180° = 900°$. Elke hoek is dan $\frac{900}{7} \approx 128{,}6°$.

Nu kun je de regelmatige zevenhoek tekenen. Je weet immers alle hoeken en alle zijden, dus de figuur ligt vast.



Figuur 12.17

Opgave 18

In de **Uitleg op pagina 440** wordt verteld hoe je een regelmatige zevenhoek kunt tekenen.

a Teken een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.

b Geldt de hoekensom van 900° ook voor niet-regelmatige zevenhoeken? Licht je antwoord toe.

Als van een driehoek de drie zijden gelijk zijn, dan geldt dit ook voor de hoeken.

c Als van een zevenhoek alle zijden gelijk zijn, geldt dit dan automatisch ook voor de hoeken?

Opgave 19

Op dezelfde manier als in de vorige opgave kun je alle regelmatige veelhoeken tekenen.

a Teken een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ waarvan alle zijden 4 cm zijn.

b Hoeveel gegevens heb je nodig om een niet-regelmatige zeshoek te construeren?

Testen

Opgave 20

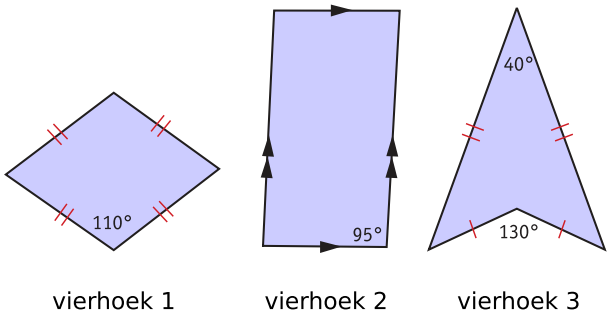
Probeer de volgende driehoeken te construeren. Als dat niet lukt, leg je uit waarom niet.

a ΔDEF met $DE = 5$ cm, $EF = 3$ cm en $DF = 1$ cm.

b ΔKLM met $KL = 3$ cm en twee hoeken van 40°.

Opgave 21

Je ziet drie vierhoeken. In de vierhoeken is aangegeven welke lijnstukken gelijk of evenwijdig zijn.



Figuur 12.18

Geef elke vierhoek de juiste naam en bereken alle hoeken die niet zijn gegeven.

12.2 Berekeningen in vlakke figuren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen;
- werken met verhoudingen, gelijkvormigheid en de vergrotingsfactor om de lengtes van lijnstukken te berekenen.

Voorkennis

- vlakke figuren, met name driehoeken en vierhoeken en hun eigenschappen;
- hoeken berekenen met behulp van X-hoeken, Z-hoeken, F-hoeken, de hoekensom van een driehoek en een vierhoek;
- lijn-, punt- en draaisymmetrie herkennen en benoemen.

Verkennen

Opgave V1

Van een rechthoekige driehoek weet je twee zijden: $AB = 5$ cm en $BC = 3$ cm.

a Kun je deze driehoek nu construeren?

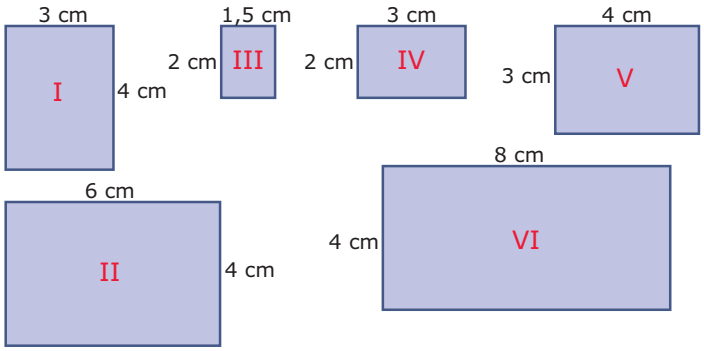
b Neem aan dat van deze driehoek $\angle ABC$ recht is.
Kun je de lengte van AC bepalen? Zo ja, bepaal die lengte in mm nauwkeurig.

c Neem aan dat van deze driehoek $\angle ACB$ recht is.
Is AC langer of korter dan bij b?

d De driehoek die je bij b hebt getekend is een schaalmodel van een veel grotere rechthoekige driehoek met zijden van 50 m en 30 m. Hoe lang moet dan de derde zijde wel zijn (in m nauwkeurig)?

Opgave V2

Je ziet hier een aantal rechthoeken.



Figuur 12.1

Welke rechthoeken zijn gelijk? En welke rechthoeken zijn niet gelijk maar hebben dezelfde verhoudingen van lengte en breedte?

Uitleg 1

Elke rechthoekige driehoek heeft twee rechthoekszijden, dat zijn de benen van de rechte hoek. De langste zijde heet wel de hypothenusa.
De beroemde stelling van Pythagoras geeft als verband tussen deze zijden:

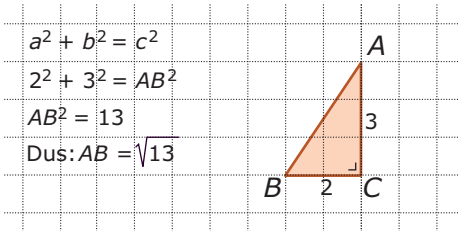
$$(\text{rechthoekzijde 1})^2 + (\text{rechthoekzijde 2})^2 = (\text{hypothenusa})^2$$

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras

Hier zie je hoe je de stelling van Pythagoras gebruikt om de lengte van de hypothenusa AB te berekenen in de rechthoekige driehoek ABC.

Deze stelling is zo belangrijk omdat elke veelhoek is te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken (rechthoekige driehoeken).

Bovendien geldt ook het omgekeerde: als in een driehoek de stelling van Pythagoras geldt, dan is de driehoek rechthoekig.



Figuur 12.2

Opgave 1

Bekijk de figuur in de **Uitleg 1 op pagina 443** nog eens. Bekijk vooral goed hoe je het werken met de stelling van Pythagoras opschrijft. In deze rechthoekige driehoek is de hypothenusa is steeds zijde AB.

a Neem $AC = 6$ en $BC = 4$ en bereken AB. Laat de wortel in het antwoord staan.

b Oefen dit (samen met een medeleerling) voor andere waarden van AC en BC.

Opgave 2

Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90^\circ$ is $PQ = 18$ mm en $QR = 30$ mm. Neem als hypothenusa PR.

a Schets deze driehoek en schat de lengte van PR oftewel zijde q.

b Bereken de lengte van PR met behulp van de stelling van Pythagoras in twee decimalen nauwkeurig.

Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90^\circ$ is $PQ = 16$ mm en $PR = 30$ mm.

c Schets deze driehoek en schat de lengte van QR.

d Bereken de lengte van QR in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

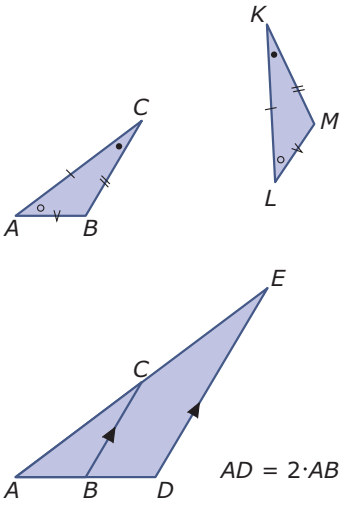
Van een driehoek is $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm en $BC = 8$ cm.

Is deze driehoek rechthoekig?

Uitleg 2

Als twee figuren gelijk zijn, zoals in het bovenste plaatje, dan betekent dit dat je als het ware beide figuren kunt uitknippen en precies over elkaar heen leggen. De overeenkomstige hoeken zijn dan even groot en de overeenkomstige zijden zijn even lang. Figuren die precies gelijk aan elkaar zijn noem je congruent. Hier zijn de driehoeken ABC en LMK congruent en dat schrijf je als $\Delta ABC \cong \Delta LMK$.

Maar er bestaan ook figuren die wel dezelfde vorm hebben, maar toch niet even groot zijn. De éne figuur is dan een vergroting (of verkleining) van de andere. Dit betekent dat wel alle hoeken van beide figuren even groot zijn, maar dat de zijden van de éne figuur met een vaste factor moeten worden vermenigvuldigd.
In het onderste plaatje zie je dat de lijnstukken BC en DE evenwijdig zijn. Dus zijn de hoeken bij B en D en die bij C en E even groot. De zijde AD is tweemaal zo groot als AB. Dit geldt ook voor DE en BC en voor AE en AC. De zijden van ΔADE zijn 2 keer zo groot dan de overeenkomstige zijden van ΔABC. Je zegt nu dat de driehoeken ABC en ADE gelijkvormig zijn en dat schrijf je als $\Delta ABC\ \Delta ADE$. ΔADE is een vergroting van ΔABC met vergrotingsfactor 2.



Figuur 12.3

Opgave 4

In de **Uitleg 2 op pagina 444** zie je wat het verschil is tussen gelijke (dus congruente) driehoeken en gelijkvormige driehoeken.

Bekijk eerst de bovenste figuur.

a Waaraan zie je dat de overeenkomstige zijden van beide figuren gelijk zijn?

b Je ziet dat er twee paren gelijke hoeken zijn in de bovenste figuur. Waarom is dan automatisch het derde paar hoeken ook gelijk?

c Je ziet dat $\Delta ABC \cong \Delta LMK$. Waarom wordt bij de tweede driehoek de lettervolgorde zo gekozen?

Bekijk nu de tweede figuur. Je ziet dat evenwijdige lijnstukken worden aangeduid door pijltjes in de lijnstukken.

d Waarom weet je nu zeker dat $\angle ABC = \angle ADE$?

e Wordt er bij het opschrijven van de gelijkvormige driehoeken ook op de volgorde van de letters gelet?

f Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor als je ΔABC opvat als 'vergroting' van ΔADE?

g Stel de vergrotingsfactor van ΔABC naar ΔADE is 2,5. Zijn beide driehoeken dan nog steeds gelijkvormig?

Opgave 5

Het herkennen van gelijkvormige figuren of congruente figuren is vaak lastig.

a Waarom zijn alle vierkanten gelijkvormig en/of congruent?

b Waarom zijn niet alle rechthoeken gelijkvormig en/of congruent?

c Zijn alle gelijkzijdige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

d Zijn alle gelijkbenige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

e Waarom zijn alle congruente figuren ook gelijkvormig? Van welke vergrotingsfactor is er dan sprake?

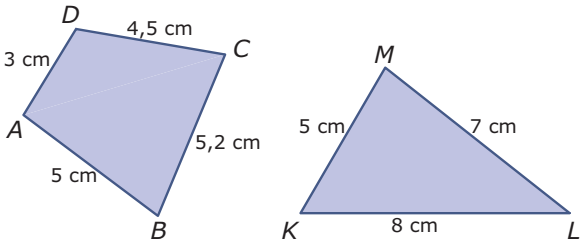
Opgave 6

Hier zie je een vierhoek en een driehoek waarvan de lengtes van de zijden bekend zijn.

a Teken de driehoek na. Moet je daarvoor nog een hoek opmeten?

b Leg uit hoe je de vierhoek kunt natekenen. Moet je nu extra metingen doen?

c Leg uit hoe je een gelijkvormige vierhoek kunt tekenen met een vergrotingsfactor van 1,5.

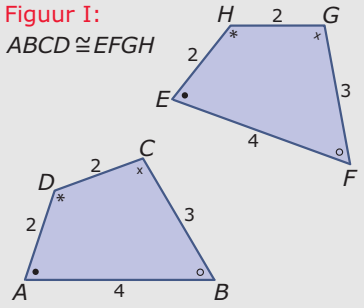


Figuur 12.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

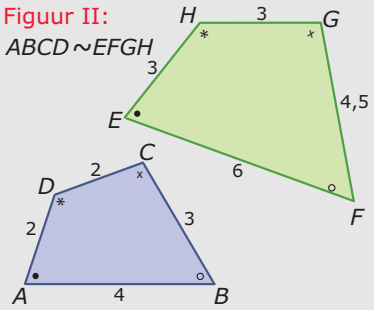
Twee figuren heten **congruent** als ze voor wat betreft hun vorm en hun afmetingen precies gelijk zijn. Dit betekent voor veelhoeken dat hun **overeenkomstige hoeken** gelijk zijn èn hun **overeenkomstige zijden** zijden gelijk zijn. Alleen voor driehoeken is het voldoende dat de drie overeenkomstige zijden gelijk zijn.



Figuur 12.5

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting of verkleining van de andere is. Voor veelhoeken betekent dit dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn en de overeenkomstige zijden met eenzelfde **vergrotingsfactor** zijn vermenigvuldigd.

Bij gelijkvormige veelhoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. Bij de gelijkvormige vierhoeken hiernaast hoort onderstaande verhoudingstabel.



Figuur 12.6

AB 4 cm	*BC* 3 cm	*CD* 2 cm	*DA* 2 cm
EF 6 cm	*FG* 4,5 cm	*GH* 3 cm	*HE* 3 cm

Tabel 12.1

De bijbehorende **vergrotingsfactor** is 1,5.

Verder geldt in rechthoekige driehoeken de **stelling van Pythagoras**:

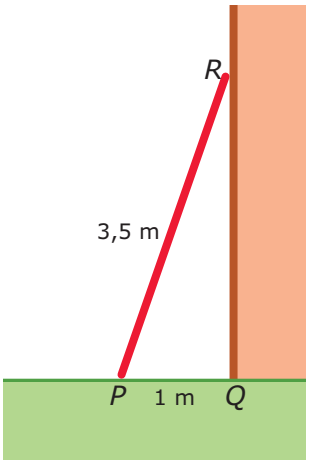
$$(\text{rechthoekzijde 1})^2 + (\text{rechthoekzijde 2})^2 = (\text{hypothenusa})^2$$

En omgekeerd is een driehoek rechthoekig als voor de lengtes van de zijden de stelling van Pythagoras geldt.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: ladder tegen muur

Iemand zet een ladder van 3,5 m schuin tegen de muur van een huis. Hier zie je een zijaanzicht van de situatie. Het punt waar de ladder op de grond staat is 1 m van de muur verwijderd. Hoe hoog komt de ladder?



Figuur 12.7

Antwoord

Je gaat er van uit dat de muur loodrecht op de grond staat, dus dat ΔPQR een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij Q. De stelling van Pythagoras in ΔPQR is:

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

Je weet: $PQ = 1$ m en $PR = 3{,}5$ m.
Dan krijg je: $1^2 + QR^2 = 3{,}5^2$.
Dit geeft:
$QR^2 = 3{,}5^2 - 1^2 = 11{,}25$.
En dus is:

$QR = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ m.

Opgave 7

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 1 op pagina 446**.

a Zet de voet van de ladder op 1,5 m van de muur. Hoe hoog komt hij nu? Geef het antwoord weer in twee decimalen nauwkeurig.

b Je wilt dat de bovenkant van je ladder op 3 m hoogte boven de grond tegen de muur komt. Hoeveel cm moet je de voet van de ladder van de muur zetten?

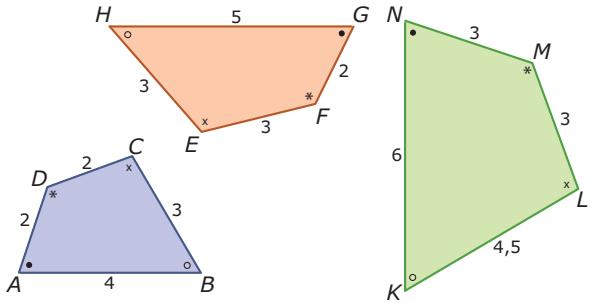
Opgave 8

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

Maak er één waarvan twee zijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.

Voorbeeld 2

Laat met een berekening zien welke van de onderstaande vierhoeken gelijkvormig zijn en welke niet.



Figuur 12.8

Antwoord

Van alle drie de vierhoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk. Het gaat dus om de overeenkomstige zijden. Die moeten een verhoudingstabel opleveren.

Vergelijk eerst bijvoorbeeld de vierhoeken $ABCD$ en $GHEF$. (Je ziet dat de lettervolgorde van de tweede vierhoek zo is gekozen dat de letters bij de overeenkomstige hoeken in dezelfde volgorde staan als die van vierhoek $ABCD$.)
Maak een tabel zoals deze waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan.

AB 4 cm	BC 3 cm	CD 2 cm	DA 2 cm
GH 5 cm	HE 3 cm	EF 3 cm	FG 2 cm

Tabel 12.2

Je ziet dat er geen vaste vergrotingsfactor vanuit de zijden van $ABCD$ waarmee je de overeenkomstige zijden van $GHEF$ krijgt. Deze tabel is geen verhoudingstabel. Dus deze twee vierhoeken zijn niet gelijkvormig.

Op dezelfde manier kun je de de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ vergelijken.

Opgave 9

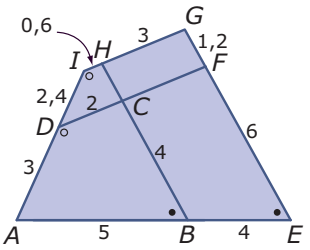
Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 447**.

a Laat met behulp van een tabel zien dat de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ wel gelijkvormig zijn.

b De vierhoek $PQRS$ heeft zijden die allemaal precies 2 keer zo groot zijn als de overeenkomstige zijden van vierhoek $ABCD$. Zijn deze twee vierhoeken dus gelijkvormig?

Opgave 10

In de figuur hiernaast tref je een heleboel vierhoeken aan.



Figuur 12.9

a Hoeveel?

b Waarom hebben de vierhoeken $ABCD$ en $AEFD$ wel gelijke hoeken, maar zijn ze toch niet gelijkvormig?

c Waarom zijn de vierhoeken $ABCD$ en $AEGI$ gelijkvormig?

Opgave 11

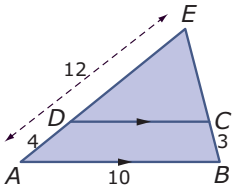
De vierhoeken $ABCD$ en $PQRS$ zijn gelijkvormig. Verder is $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 3$, $AD = 4$ en $QR = 8$ cm.

Bereken de lengte van PQ. Werk bijvoorbeeld met een verhoudingstabel van overeenkomstige zijden en bepaal de vergrotingsfactor.

Voorbeeld 3

In deze figuur zijn AB en CD evenwijdig.

Bereken de lengte van CD en die van CE.



Figuur 12.10

Antwoord

Omdat $\angle A = \angle CDE$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle DCE$ (F-hoeken) is $\Delta ABE \sim \Delta DCE$.

Maak nu een verhoudingstabel voor de zijden en vul getallen of onbekenden in.

AB 10 cm	BE $x + 3$ cm	AE 12 cm
DC y cm	CE x cm	DE 8 cm

Tabel 12.3

De vergrotingsfactor van ΔABE naar ΔDCE is $8 \big/ 12 = \frac{2}{3}$.
$CD = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3}$.
Om CE te berekenen gebruik je $x = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)$. Hieruit volgt $x = 6$ en dus $CE = 6$.

Opgave 12

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 448**. Je ziet hoe je in situaties waarin sprake is van evenwijdige lijnen gelijkvormige driehoeken kunt vinden en met behulp daarvan lengtes van lijnstukken berekenen.

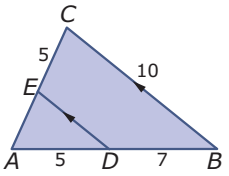
a Waarom is $\Delta ABE \sim \Delta DCE$?

b Leg uit waarom $DE = 8$.

c Laat zien, dat inderdaad $CE = 6$.

Opgave 13

In deze figuur is $BC//DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.



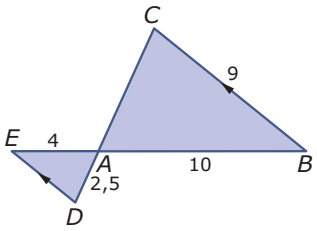
Figuur 12.11

a Waarom is $\Delta ABC \sim \Delta ADE$?

b Bereken de lengte van DE en van AE in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 14

In deze figuur is $BC//DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.



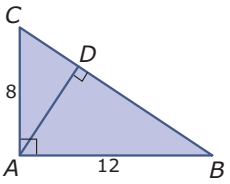
Figuur 12.12

a Vul aan $\Delta ABC \sim$ ... en leg uit waarom deze driehoeken gelijkvormig zijn.

b Bereken de lengte van DE en van AC.

Opgave 15

Bekijk de figuur.



Figuur 12.13

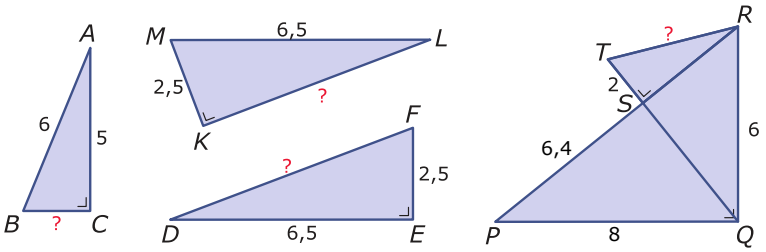
a Bereken de lengte van AD in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de lengte van BD in één decimaal nauwkeurig. Doe dit een keer met behulp van de stelling van Pythagoras en ook een keer met behulp van gelijkvormigheid.

Oefenen

Opgave 16

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.



Figuur 12.14

Bereken in elke figuur eerst de exacte lengte van de zijde met het vraagteken en benader daarna waar nodig de lengte in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

b Driehoek DEF met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

c Driehoek GHI met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

d Driehoek KLM met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

Opgave 18

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

a Maak een schets van de situatie.

b Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 19

Een rechthoek heeft zijden van 18 cm en 30 cm. Van een verkleining van die rechthoek is één van de zijden 6 cm.

Welke afmetingen kan de verkleining hebben? Geef beide mogelijkheden.

Opgave 20

$\Delta KLM \sim \Delta ABC$. Verder is gegeven $AB = 7{,}4$, $BC = 5$, $KM = 2{,}8$ en $ML = 3{,}5$.

Maak een schets van de situatie en bereken de twee zijden van deze driehoeken die je nog niet weet.

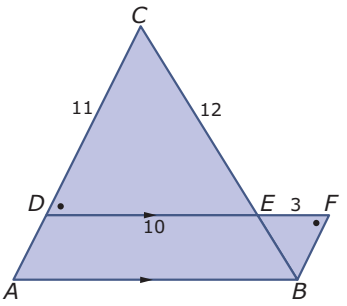
Opgave 21

Willem heeft een poster van 50 bij 80 cm. Hij heeft een lijst voor de poster van 60 bij 100 cm. Willem ontdekt dat de poster daar niet mooi inpast en wil de poster zo bijsnijden dat hij gelijkvormig is met de lijst.

Hoe moet hij de poster bijsnijden opdat er zo min mogelijk van verloren gaat?

Opgave 22

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 12.15

a Licht toe waarom de driehoeken DEC en FEB gelijkvormig zijn.

b Bereken de lengte van EB.

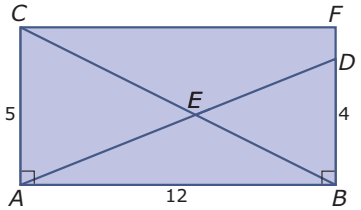
Je wilt de lengte van AB berekenen.

c Welke gelijkvormige driehoeken gebruik je? Schrijf de gelijkvormigheid op de juiste wijze op.

d Bereken de lengte van AB.

Opgave 23

Bekijk de figuur hieronder.



Figuur 12.16

Bereken CE en ED in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 24

De hoogte van een boom kun je bepalen door de lengte van zijn schaduw te meten. Boris meet dat een boom een schaduw heeft van 25 m. Hijzelf heeft een schaduw van 1,40 m. Nu is Boris 1,80 m lang.

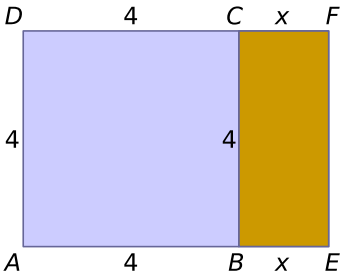
Bereken de hoogte van de boom in m nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet.

Hier zie je een rechthoek met daarin een vierkant met een kleinere rechthoek ernaast. Is die kleinere rechthoek gelijkvormig met de grote rechthoek? Is het mogelijk om de rechthoek zo aan te passen dat dit het geval is?

Deze vraag leidt tot de bekende **Gulden Snede**. Dat is een al uit de Oudheid bekende manier om een lijnstuk zoals AE in twee delen te verdelen. De vergrotingsfactor van AB naar AE waarbij de rechthoeken gelijkvormig zijn is de **Gulden Snede**.



Figuur 12.17

Opgave 25

Hierboven wordt de vraag gesteld of het mogelijk is om een rechthoek te verdelen in een vierkant en een kleinere rechthoek die met de gegeven rechthoek gelijkvormig is.

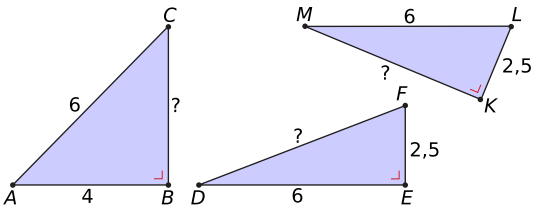
Met de applet kun je de lengte van de rechthoek wat aanpassen.

Probeer met de applet te bepalen welke afmetingen de rechthoek $AEFD$ moet hebben om ervoor te zorgen dan hij gelijkvormig is met rechthoek $EFCB$. Bepaal ook de vergrotingsfactor van AB naar AE, de Gulden Snede dus.

Testen

Opgave 26

Hier zie je drie figuren met rechthoekige driehoeken.



Figuur 12.18

Bereken in elke figuur de lengte van de zijde met het vraagteken exact of in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 27

Iemand heeft een bijzonder tafelkleed gekocht en wil er speciaal een tafel voor laten maken. Het is een zuiver rond tafelkleed met een diameter van 2,40 meter. De tafel moet zuiver vierkant worden.

Hoe groot mag de zijde van deze tafel maximaal zijn om volledig bedekt te worden door het kleed? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 28

Gegeven is ΔABC met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 7$. Op zijde AC ligt punt D zo, dat $\angle DBC = \angle A$.

a Teken de driehoek met lijnstuk BD er in. Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

b Punt D verdeelt de zijde AC in de twee stukken AD en DC. Bereken de lengte van die twee lijnstukken in twee decimalen nauwkeurig.

12.3 Omtrek en oppervlakte

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de omtrek en de oppervlakte van veelhoeken berekenen;
- werken met formules voor de oppervlakte van driehoeken en vierhoeken.

Voorkennis

- vlakke figuren, met name driehoeken en vierhoeken en hun eigenschappen;
- lengtes van zijden in driehoeken berekenen met de stelling van Pythagoras en/of gelijkvormigheid.

Verkennen

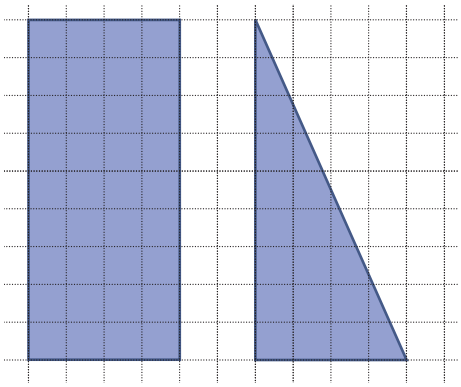
Opgave V1

Je ziet hier een rechthoek en een rechthoekige driehoek op een cm-rooster.

a Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de rechthoek?

b Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de rechthoekige driehoek?

c Waarom kun je van deze figuren gemakkelijk de oppervlakte bepalen?



Figuur 12.1

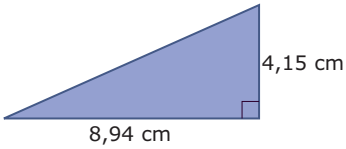
Opgave V2

Dit is een rechthoekige driehoek die niet precies op een cm-rooster past.

a Waarom moet nu het rechtehoekteken in de figuur staan?

b Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de rechthoekige driehoek? Geef het exacte antwoord. Laat je berekening zien.

c Hoe reken je in het algemeen de oppervlakte uit van een rechthoekige driehoek? Probeer je antwoord in formulevorm te geven.

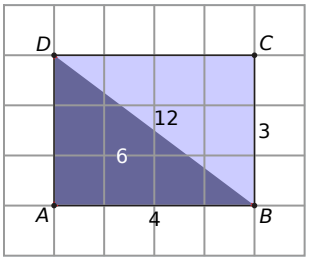


Figuur 12.2

Uitleg 1

Bekijk de applet: oppervlakte (halve) rechthoek en vierkant

Bekijk de oppervlakte van de rechthoek. De rechthoek is verdeeld in twee rechthoekige driehoeken. Je ziet dat een rechthoekige driehoek de helft van een rechthoek is.



Figuur 12.3

Om de oppervlakte van een figuur te bepalen kun je soms handig gebruikmaken van oppervlakteformules.

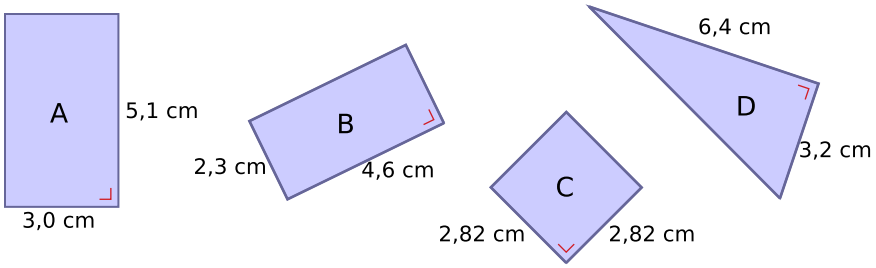
- De oppervlakte van een rechthoek kun je berekenen met *lengte* · *breedte*. Noem je de lengte l en de breedte b, dan geldt de formule:
  oppervlakte (rechthoek) $= l \cdot b$
- Voor de oppervlakte van de rechthoekige driehoek, geldt:
  oppervlakte (rechthoekige driehoek) $= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b$
- Voor de oppervlakte van een vierkant (dus *lengte* = *breedte* = *zijde* = z) geldt:
  oppervlakte (vierkant) $= z^2$

Van figuren met andere vormen kun je ook de oppervlakte uitrekenen:

- Is de figuur uit bekende basisvormen opgebouwd, dan kun je eerst de oppervlakte van deze basisvormen berekenen. Daarna tel je die oppervlaktes bij elkaar op.
- Je kunt ook een rechthoek om een figuur heen maken. Bereken daar de oppervlakte van. Vervolgens trek je daar de oppervlakte van de 'te veel berekende' gebieden van af. De te veel berekende gebieden zijn de oppervlaktes tussen de figuur en de rechthoek eromheen.

Opgave 1

Bekijk de drie rechthoeken en rechthoekige driehoek.



Figuur 12.4

a Waarom moet je de oppervlakte van deze figuren berekenen met behulp van een oppervlakteformule?

b Bereken van elk van deze vier figuren de exacte oppervlakte.

c Van een rechthoek kun je gemakkelijk de omtrek berekenen. Welke formule geldt voor de omtrek van een rechthoek?

d Bereken de exacte omtrek van de figuren a, b en c.

e Hoe kun je van figuur d de omtrek bepalen?

Opgave 2

In de **Uitleg 1 op pagina 454** vind je de oppervlakteformule voor een vierkant.

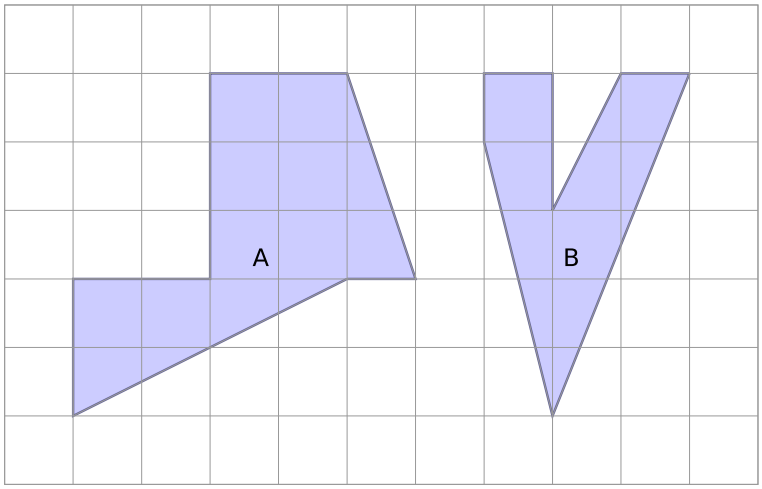
a Bereken de exacte oppervlakte van een vierkant met zijden van 4,7 mm.

b Bereken de lengte van de zijde van een vierkant met een oppervlakte van 15 mm^2 in tienden van millimeters nauwkeurig.

c Welke formule geldt voor de omtrek van een vierkant met zijde z?

Opgave 3

Bekijk figuur a en b. De roostereenheid is 1 cm.



Figuur 12.5

a Bereken de exacte oppervlakte van figuur a in cm^2.

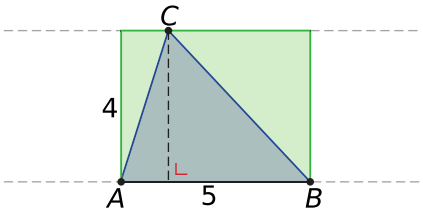
b Bereken de oppervlakte van figuur b in cm^2.

Uitleg 2

Bekijk de applet: Principe van Cavalieri.

Je hebt geleerd dat de oppervlakte van een driehoek de helft is van de oppervlakte van de rechthoek, waarvan de lengte gelijk is aan de basis en de breedte gelijk is aan de hoogte van de driehoek:

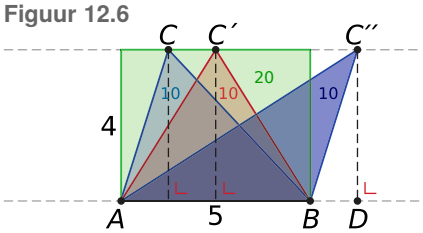
oppervlakte (driehoek) $= \frac{1}{2} \cdot$ *basis* $\cdot$ *hoogte*



Figuur 12.6

In de figuur zie je drie driehoeken: ΔABC, $\Delta ABC'$ en $\Delta ABC''$.

Zolang de basis en hoogte niet veranderen, verandert ook de oppervlakte van de driehoek niet. Je kunt dus de vorm van de driehoek veranderen door C evenwijdig aan de basis te verschuiven zonder dat de oppervlakte verandert. Dit heet het principe van Cavalieri. Verschuif je hoekpunt C naar C', dan blijft de oppervlakte van beide driehoeken hetzelfde.
Oppervlakte ΔABC = oppervlakte $\Delta ABC'$.

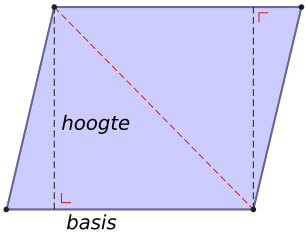


Figuur 12.7

Het principe van Cavalieri blijft ook gelden als één van de hoeken op de basis stomp wordt, zoals bij $\Delta ABC''$ het geval is. De hoogte is dan een lijnstuk buiten de driehoek. In de figuur is dat $C''D$, de (loodrechte) afstand van de top C'' tot het verlengde van de basis AB. De oppervlakte van de driehoeken $\Delta ABC = \Delta ABC' = \Delta ABC''$ blijft gelijk.

Bekijk de applet.

Elke vierhoek kun je verdelen in twee driehoeken.
De oppervlakte van een vierhoek is daarom gelijk aan de som van de oppervlaktes van de twee driehoeken waarin je hem kunt verdelen. Bij bijzondere vierhoeken levert dit eenvoudige formules op voor het berekenen van de oppervlakte.



Figuur 12.8

Is een vierhoek een parallellogram, dan levert het verdelen twee gelijke driehoeken op. De oppervlakte van een parallellogram is daarom precies twee keer de oppervlakte van één van die driehoeken.

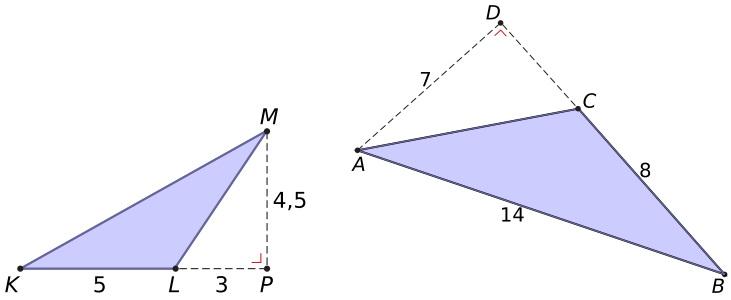
oppervlakte (parallellogram) = basis · hoogte

In de voorbeelden zie je ook hoe je de oppervlakte van enkele andere bijzondere vierhoeken zoals de vlieger en het trapezium berekent.

Opgave 4

a Bereken de oppervlakte van ΔKLM.

b Bereken de oppervlakte van ΔABC.



Figuur 12.9

Opgave 5

Teken een parallellogram $ABCD$ met basis $AB = 7$ en een hoogte van 5. (Gebruik daarbij handig het rooster).

a Als je de plaats van A en B hebt gekozen, is er dan nog maar één parallellogram mogelijk?

A. ja
B. nee

b In welke twee gelijke driehoeken kun je je parallellogram verdelen?

c Heeft elk parallellogram met een basis van 7 en een hoogte van 5 dezelfde oppervlakte?

A. ja
B. nee

d Bereken die oppervlakte met de formule voor de oppervlakte van een parallellogram. Controleer vervolgens met het rooster in de applet dat het antwoord correct is.

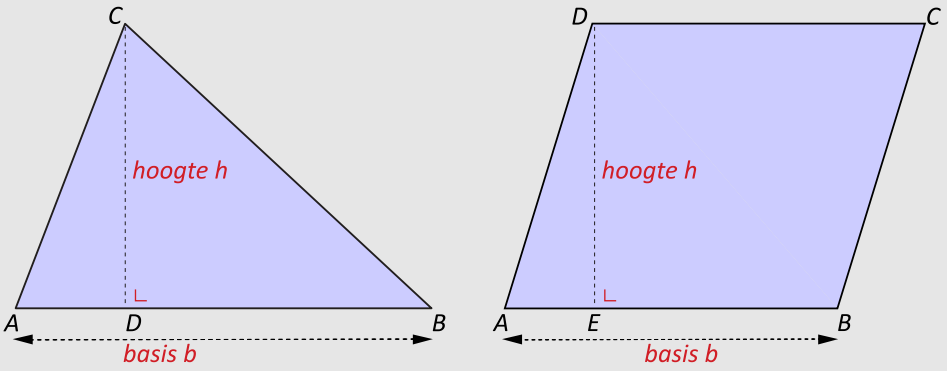
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **omtrek** van een figuur versta je de hoeveelheid lengte-eenheden die je nodig hebt om de figuur om te trekken. De lengte-eenheid is de **meter** m.
Andere lengtematen leidt je hiervan af: 1 cm = 0,01 m, 1 mm = 0,001 m, etc.
Over eenheden en hun voorvoegsels gaat onderdeel 6 van Rekenen 1.

Onder de **oppervlakte** van een figuur versta je de hoeveelheid oppervlakte-eenheden die je nodig hebt om de figuur te bedekken. De oppervlakte-eenheid is de **vierkante meter** m^2.
Andere oppervlaktematen leidt je hiervan af: omdat 1 cm = 0,01 m is 1 cm^2 = 0,01 · 0,01 = 0,0001 m^2.

Van een rechthoek bereken je snel de oppervlakte door de lengte en de breedte te vermenigvuldigen.
Een halve rechthoek is de helft daarvan.



Figuur 12.10

Elke veelhoek is ofwel te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken, ofwel te omlijsten door een rechthoek waarvan je dan kleinere rechthoeken en halve rechthoeken kunt ‘afknippen’. Op die manier kun je van elke veelhoek de oppervlakte berekenen.
Je kunt daarmee ook **oppervlakteformules** afleiden:

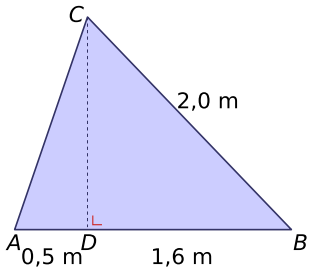
- $opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ met basis b en hoogte h;
- $opp(parm) = b \cdot h$ met basis b en hoogte h;
- $opp(vlieger) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$ met p en q de lengtes van de diagonalen;
- $opp(trapezium) = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ met a en b de lengtes van de evenwijdige zijden en h de hoogte.

Als een figuur wordt vergroot met vergrotingsfactor k dan wordt ook de omtrek k keer zo groot, maar de oppervlakte wordt $k \cdot k = k^2$ keer zo groot.

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Bereken ook de oppervlakte van ΔPQR waarvan de lengtes van de zijden precies 3 keer zo groot zijn dan die van ΔABC.



Figuur 12.11

Antwoord

Voor de oppervlakte van een driehoek geldt:

$$\textit{oppervlakte (driehoek)} = \tfrac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte}$$

Van ΔABC is de basis $AB = 0{,}5 + 1{,}6 = 2{,}1$ m en de hoogte CD.
De lengte van CD bereken je met de stelling van Pythagoras. Ga na, dat $CD = 1{,}2$ m.

Dus is: $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}1 \cdot 1{,}2 = 1{,}26$ m^2.

Van ΔPQR zijn alle lengtes van zijden 3 keer zo groot.
Dus is $\Delta PQR \cong \Delta ABC$. (Welke hoeken overeenkomstige hoeken zijn is voor de oppervlakte niet van belang.)
De basis van ΔPQR is (bijvoorbeeld) $PQ = 6{,}3$ m.
De bijbehorende hoogte is dan $3 \cdot 1{,}2 = 3{,}6$ m.

Dus is: $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}3 \cdot 3{,}6 = 11{,}34$ m^2.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 458**.

a Reken zelf de lengte van hoogte CD na.

In het voorbeeld zie je hoe je met die hoogte de oppervlakte van ΔABC berekent.

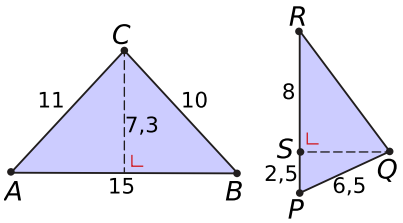
b Hoe kun je de omtrek van ΔABC berekenen?

c Hoe groot is de omtrek van ΔPQR?

d ΔKLM is een driehoek waarvan alle zijden 4 keer zo groot zijn dan die van ΔABC.
Hoe groot zijn de omtrek en de oppervlakte van ΔKLM?

Opgave 7

Bereken van deze driehoeken de oppervlakte en de omtrek.



Figuur 12.12

Opgave 8

De punten $A(-3,-3)$, $B(2,-3)$, $C(3,-2)$ en $D(0,3)$ zijn gegeven. Neem 1 cm als roostereenheid.

a Teken ΔABD in een assenstelsel. Bereken de oppervlakte van deze driehoek met behulp van de oppervlakteformule.

b Teken ΔACD in een nieuw assenstelsel. Waarom kun je de oppervlakte van ΔACD niet exact met behulp van de oppervlakteformule berekenen?

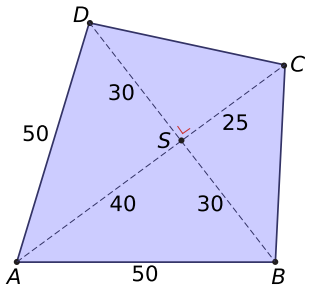
c Bereken op een andere manier de exacte oppervlakte van ΔACD.

d Meet nu de lengte van AC en meet de afstand van punt D tot AC in millimeter nauwkeurig.

Bereken met die getallen de oppervlakte van ΔACD. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze vlieger.



Figuur 12.13

Antwoord

Vlieger $ABCD$ bestaat uit vier rechthoekige driehoeken:

- *oppervlakte* $(\Delta ABS) = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600$
- *oppervlakte* (ΔASD) = *oppervlakte* $(\Delta ABS) = 600$
- *oppervlakte* $(\Delta BCS) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 = 375$
- *oppervlakte* (ΔCDS) = *oppervlakte* $(\Delta BCS) = 375$

De oppervlakte van de vlieger is daarom $2 \cdot 600 + 2 \cdot 375 = 1950$ eenheden.

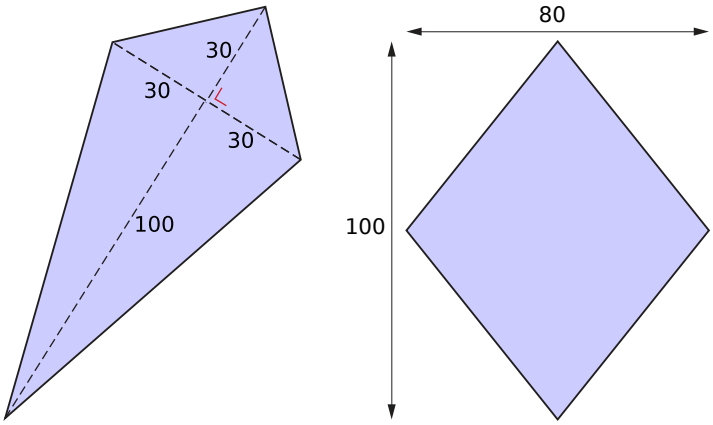
Voor de omtrek moet je de lengtes van de vier zijden optellen.
De lengtes van BC en CD moet je nog berekenen.

Met de stelling van Pythagoras: $BC = CD = \sqrt{30^2 + 25^2} = \sqrt{1525} \approx 39{,}1$.

De omtrek is daarom ongeveer $100 + 2 \cdot \sqrt{1525} \approx 178{,}1$.

Opgave 9

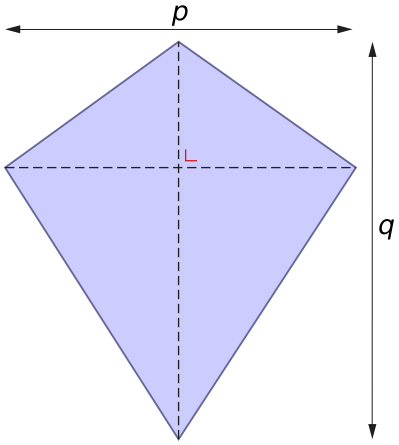
Bereken de oppervlakte en de omtrek van de vlieger en de ruit.



Figuur 12.14

Opgave 10

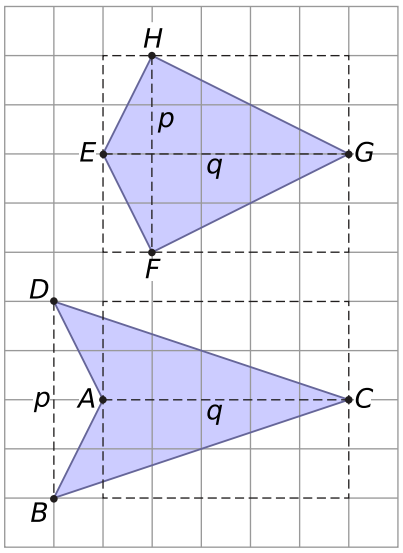
Bekijk de vlieger.



Figuur 12.15

a Laat zien waarom geldt: *oppervlakte (vlieger)* $= \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$

b Bekijk vlieger $EFGH$ en 'pijlpuntvlieger' $ABCD$ (dat is een vlieger met een stompe hoek op de symmetrieas). Je ziet dat in $ABCD$ diagonaal BD buiten de figuur ligt. Leg aan de hand van de figuur uit waarom je de algemene formule voor de oppervlakte van vliegers ook voor pijlpuntvliegers kunt gebruiken.



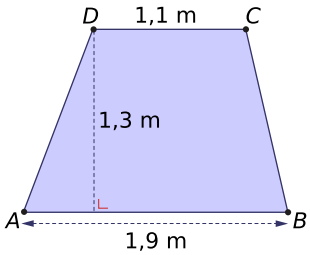
Figuur 12.16

c Geldt deze formule voor de oppervlakte van een vlieger voor elke vlieger? Dus ook voor een ruit bijvoorbeeld?

A. ja
B. nee

Voorbeeld 3

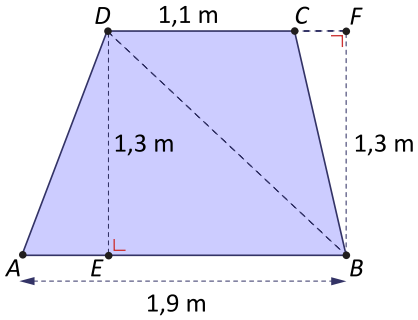
Bereken de oppervlakte van het trapezium.



Figuur 12.17

Antwoord

Het trapezium $ABCD$ bestaat uit twee driehoeken met gelijke hoogte. Deze hoogtes zijn aangegeven met de lijnstukken DE en BF.



Figuur 12.18

oppervlakte $(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}3 = 1{,}235\ \text{m}^2$

oppervlakte $(\Delta BCD) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}3 = 0{,}715\ \text{m}^2$

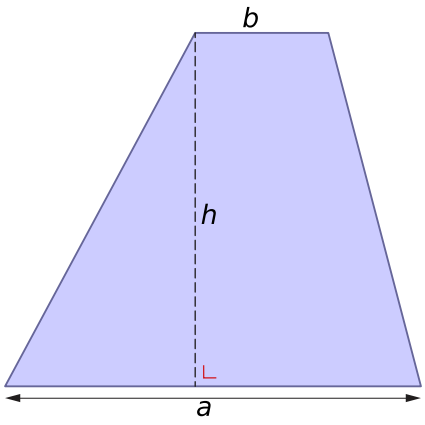
oppervlakte (trapezium) $= 1{,}235 + 0{,}715 = 1{,}95\ \text{m}^2$

Opgave 11

Bekijk het trapezium in het. Je kunt de oppervlakte van dit trapezium ook berekenen met de driehoeken die ontstaan door diagonaal AC te trekken. Laat zien dat je dan dezelfde oppervlakte krijgt.

Opgave 12

Bekijk het trapezium. Als de lengte van de twee evenwijdige zijden en de afstand tussen die twee zijden is gegeven, kun je de oppervlakte van het trapezium berekenen.



Figuur 12.19

a Laat zien dat de oppervlakte van dit trapezium gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.

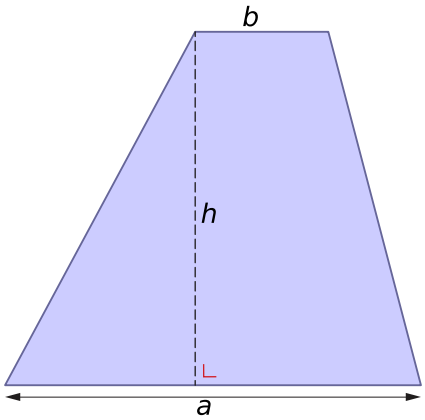
b Bereken, met behulp van de bij a gevonden oppervlakteformule, de oppervlakte van het trapezium uit het voorbeeld.

c Teken zelf een 'schuiner' trapezium waarvan de afstand tussen beide evenwijdige zijden niet binnen het trapezium valt. Kun je nog steeds met dezelfde formule de oppervlakte van zo'n trapezium berekenen?

d Kun je van dit trapezium de omtrek berekenen? Licht je antwoord toe.

Opgave 13

Bekijk het trapezium. Gegeven is: $a = 5$, $h = 6$ en de oppervlakte is 19,5. Bereken de lengte van zijde b.

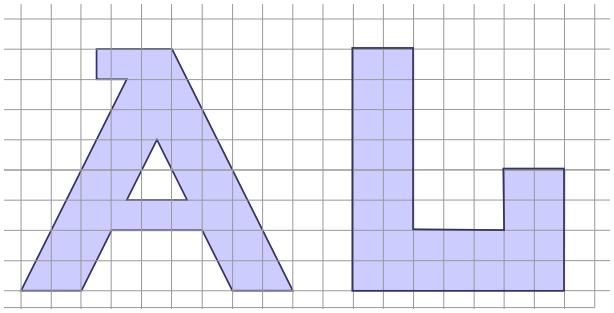


Figuur 12.20

Oefenen

Opgave 14

Hier en op het **werkblad** zie je een A en een L op roosterpapier. Je mag er van uitgaan dat de hoekpunten van de letter A die geen roosterpunt zijn telkens precies midden tussen twee roosterpunten liggen. Let op: de roostereenheid is 0,5 cm.



Figuur 12.21

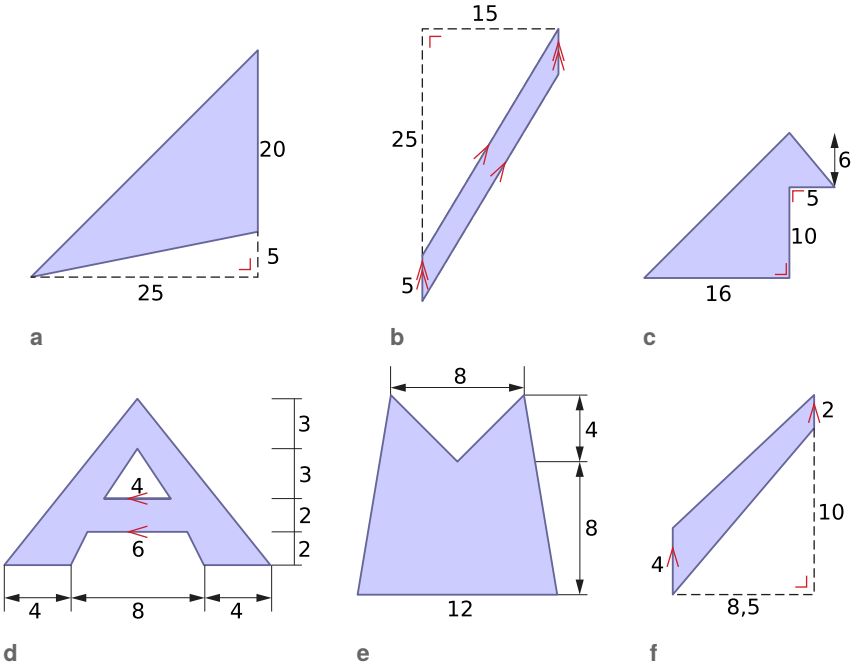
a Bereken van zowel de A als de L de exacte oppervlakte in mm^2.

b Waarom kun je wel van de L, maar niet van de A de exacte omtrek bepalen?

c Bereken de omtrek van de L in mm.

Opgave 15

Deze figuren staan ook op het **werkblad**.



Figuur 12.22

Bereken de oppervlakte van de figuren. Je mag ervan uitgaan dat de figuren d en e lijnsymmetrisch zijn.

Opgave 16

In een assenstelsel zijn de punten $A(0,-2)$, $B(3,-2)$, $C(2,2)$ en $D(-2,4)$ gegeven.

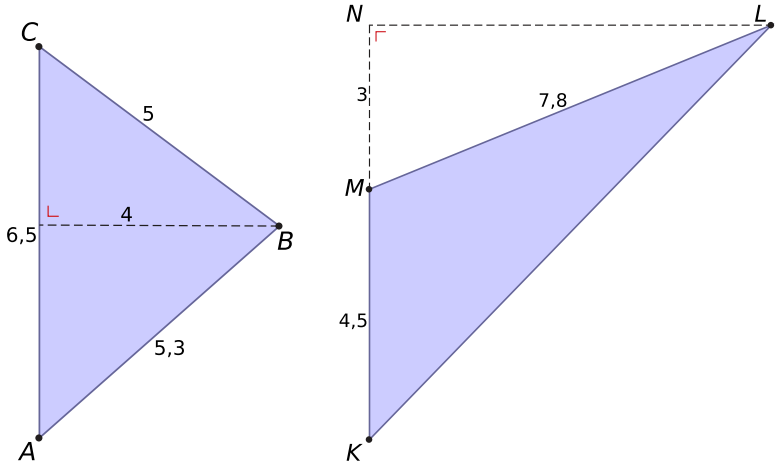
a Bereken de oppervlakte van ΔABC.

b Bereken de oppervlakte van ΔABD.

c Bereken de oppervlakte van ΔACD.

Opgave 17

Bekijk de twee driehoeken.

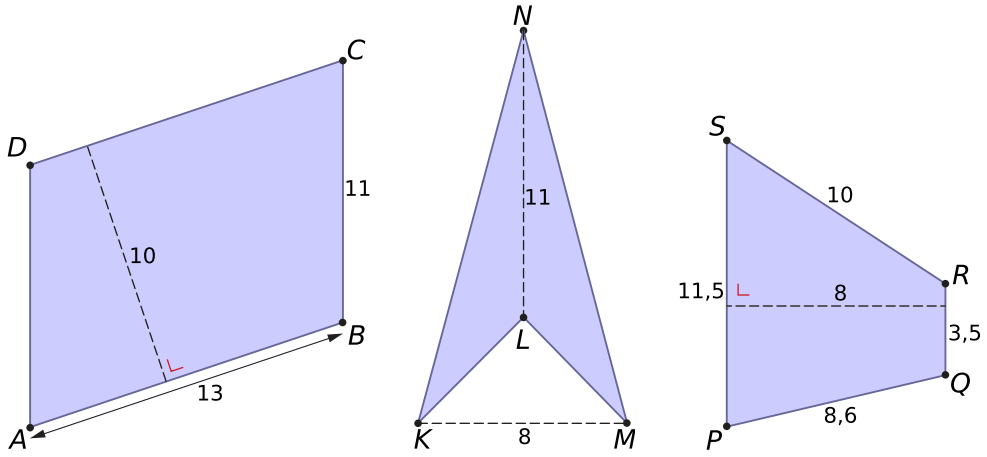


Figuur 12.23

Bereken van beide driehoeken de oppervlakte en de omtrek in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 18

Bekijk de drie vierhoeken: een parallellogram, een pijlpuntvlieger en een trapezium.



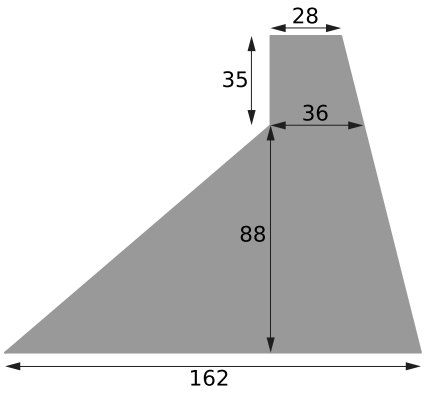
Figuur 12.24

Bereken de oppervlakte van deze vierhoeken.

Opgave 19

Bekijk de figuur. De onderkant en de bovenkant lopen evenwijdig. De linker bovenhoek is een rechte hoek (90°). Alle maten zijn in centimeters.

Bereken de oppervlakte van deze staalplaat.

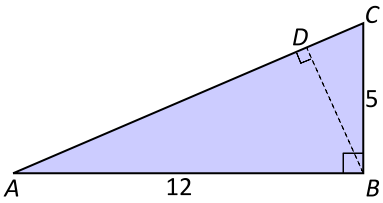


Figuur 12.25

Opgave 20

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC. De afmetingen van de zijden staan in de figuur.

Bereken de lengte van lijnstuk BD met behulp van de oppervlakte van ΔABC.



Figuur 12.26

Toepassen

Een van de vele grote wiskundigen uit de Griekse Oudheid was **Heron van Alexandrië**. Hij leefde ongeveer van 10 na Christus tot 70 na Christus. Hij heeft een groot aantal formules bedacht, waaronder een formule om de oppervlakte van een driehoek te berekenen aan de hand van de lengtes van de drie zijden. Deze formule staat ook wel bekend als de formule van Heron.
Stel dat een driehoek zijden a, b en c heeft, dan luidt de formule:

$$\textit{oppervlakte} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Daarbij staat s voor de helft van de omtrek van de driehoek.

Opgave 21

Bekijk de formule van Heron.

a Waarom geldt $s = \frac{a+b+c}{2}$?

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van 3 cm, 4 cm en 5 cm.

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek met de bekende formule met basis en hoogte.

c Bereken de oppervlakte met de formule van Heron. Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt.

d Bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden van 12,9 cm, 9,3 cm en 11,8 cm. Rond af op twee decimalen.

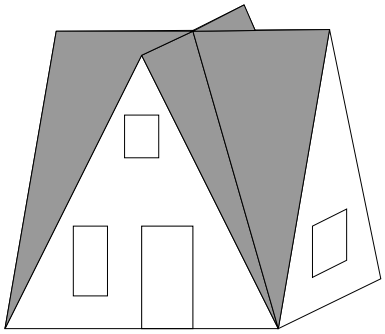
Opgave 22: Vakantiehuisje

Vakantiehuisjes zoals in bijgaande figuur hebben een grondoppervlak van 4 meter bij 4 meter en een hoogte van 4,8 meter.

a Bereken de oppervlakte van de voorgevel inclusief ramen en deur.

b Bereken de totale oppervlakte van het dak.

c Bereken de lengte van een dakgoot die tussen de twee hellende dakvlakken loopt.

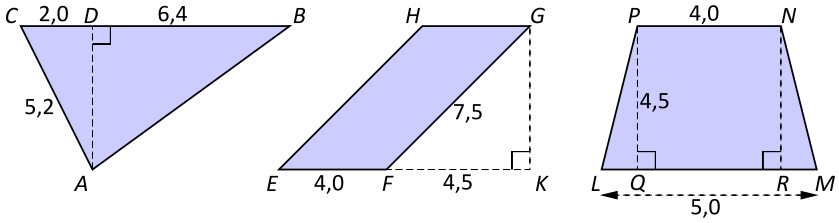


Figuur 12.27

Testen

Opgave 23

Hier zie je drie figuren, een driehoek ABC, een parallellogram $EFGH$ en een trapezium $LMNP$ met $MN = LP$.



Figuur 12.28

Bereken van elke figuur de omtrek en de oppervlakte.

Opgave 24

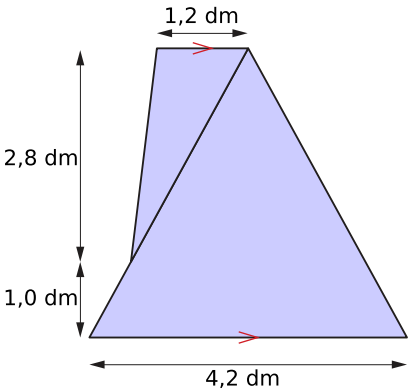
Van een driehoek PQR is de hoogte op QR gelijk aan 12 cm en de oppervlakte is 60 cm^2.

Bereken de lengte van QR.

Opgave 25

De figuur bestaat uit twee driehoeken. De zijden aan de onder- en de bovenkant van de figuur lopen evenwijdig aan elkaar. De afstandslijnen staan loodrecht op elkaar.

Bereken de oppervlakte van de totale figuur.



Figuur 12.29

12.4 Cirkels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de omtrek en de oppervlakte van een cirkel berekenen;
- de omtrek en de oppervlakte van een cirkelsector berekenen.

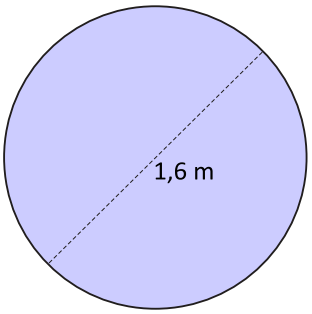
Voorkennis

- vlakke figuren, met name driehoeken en vierhoeken en hun eigenschappen;
- lengtes van zijden in driehoeken berekenen met de stelling van Pythagoras en/of gelijkvormigheid;
- de omtrek en de oppervlakte van veelhoeken berekenen;
- werken met formules voor de oppervlakte van driehoeken en vierhoeken.

Verkennen

Opgave V1

Dit is een rond tafelblad met een diameter van 1,6 m.
Je wilt dit tafelblad bekleden met een fineerlaag en langs de omtrek een afdekrand maken. Je gebruikt voor de omtrek de vuistregel 3× *diameter*.



Figuur 12.1

a Hoeveel cm afdekrand heb je dan nodig? Is dat genoeg, denk je?

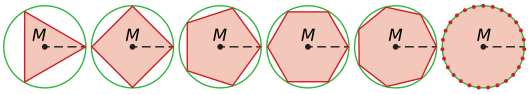
b Hoeveel m^2 fineer heb je nodig om het tafelblad te bekleden?

Uitleg

Bekijk de applet.

Al in de Oudheid wilde men weten hoe je de omtrek van een cirkel berekent. Door een regelmatige veelhoek in de cirkel te passen en van die veelhoek de omtrek te bepalen, kun je de omtrek van de cirkel benaderen. Hoe meer hoeken de veelhoek heeft, hoe beter de benadering van de cirkel. De veelhoek gaat namelijk steeds meer op een cirkel lijken.

Benadering omtrek cirkel met *straal* = 1 en *diameter* = 2



n-hoek	3	4	5	6	7	...27
omtrek(veelhoek)	5,20	5,66	5,88	6,00	6,07	6,27
omtrek(veelhoek)/diameter	2,60	2,83	2,94	3,00	3,04	3,13

Figuur 12.2

In de figuur zijn de omtrek van de cirkel en het waarmee je de diameter moet vermenigvuldigen om de omtrek te berekenen, benaderd.

De werkelijke omtrek van de cirkel is 3,14159265... · 2.

Het getal 3,14159265... wordt "pi" genoemd en aangeduid met de Griekse letter π.
π heeft oneindig veel decimalen zonder enige regelmaat.

Zo is al in de Oudheid ontdekt dat voor een cirkel met straal r en diameter $d = 2r$ geldt:

- $omtrek(cirkel) = \pi \cdot d$
- $opp(cirkel) = \pi \cdot r^2$

Opgave 1

Het getal π is ook op je rekenmachine te vinden.

a Schrijf de waarde van π in negen decimalen op.

b De Oude Grieken dachten dat π een breuk was.

Ze gebruikten voor $\frac{\text{omtrek}}{\text{diameter}}$ van een cirkel soms de breuk $\frac{22}{7}$.
Hoeveel verschilt dit getal van π? Rond af op negen decimalen.

Opgave 2

Je hebt een cirkel met en straal van 5 cm.

a Hoe groot is de diameter?

b Bereken de omtrek van deze cirkel in tienden van millimeters nauwkeurig.

Eigenlijk is de cirkel alleen de lijn zelf, het middelpunt hoort er zelfs niet bij. Maar als je over de oppervlakte ervan spreekt bedoel je (natuurlijk) de oppervlakte van het binnengebied.

c Bereken die oppervlakte in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 3

Ga uit van een cirkel met straal r. De diameter is $d = 2r$.

a Welke formule kun je opschrijven voor de omtrek P van die cirkel uitgedrukt in de straal?

b Laat zien dat voor de oppervlakte A van deze cirkel geldt: $A = \frac{1}{4}\pi d^2$

Theorie en voorbeelden

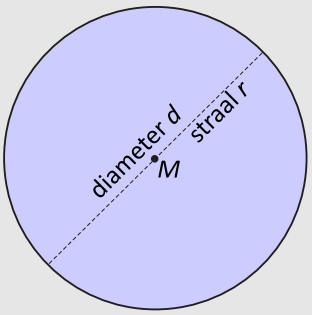
Om te onthouden

Een **cirkel** is een kromme lijn waarvan alle punten dezelfde afstand tot een gegeven **middelpunt** M hebben. Die afstand heet de **straal** r van de cirkel. De **diameter** van de cirkel is twee keer de straal $d = 2r$.

Voor een cirkel met straal r en diameter $d = 2r$ geldt:

- $omtrek(cirkel) = \pi \cdot d$
- $opp(cirkel) = \pi \cdot r^2$

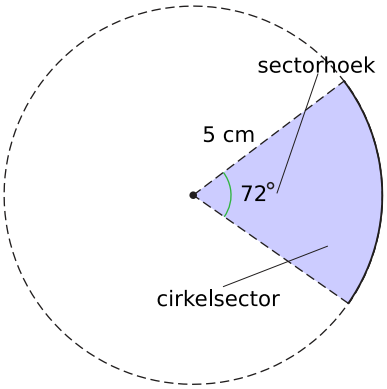
Een **cirkelsector** is een deel van de cirkel in de vorm van een 'taartpunt' tot het middelpunt.



Figuur 12.3

Voorbeeld 1

Je kunt een cirkel in cirkelsectoren (taartpunten) opdelen. Bereken van deze cirkelsector de omtrek en de oppervlakte.



Figuur 12.4

Antwoord

De omtrek van de cirkelsector bestaat uit twee lijnstukken van 5 cm en een deel van de omtrek van een cirkel met een straal van 5 cm.

Deze cirkel heeft een omtrek van $\pi \cdot d = \pi \cdot 10$ cm.

De cirkelsector heeft een sectorhoek van $72°$.

Een hele cirkel beslaat $360°$. De lengte van de cirkelboog die hoort bij de cirkelsector is dus het $\frac{72}{360}$ deel van de omtrek van de hele cirkel. De lengte van de cirkelboog is $\frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 10 \approx 6{,}3$ cm.

De totale omtrek van de cirkelsector is in één decimaal nauwkeurig: $2 \cdot 5 + \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 10 \approx 16{,}3$ cm

Om de oppervlakte van de cirkelsector te berekenen, bedenk je eerst dat de gehele cirkel een oppervlakte van $\pi r^2 = \pi \cdot 5^2$ cm^2 heeft.

De oppervlakte van de cirkelsector is het $\frac{72}{360}$ deel van de oppervlakte van de gehele cirkel.

De oppervlakte van de cirkelsector is dus $\frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 15{,}71$ cm^2.

Opgave 4

Bekijk de berekening van de omtrek en de oppervlakte van een cirkelsector in **Voorbeeld 1 op pagina 468**. Bereken de omtrek en de oppervlakte van een cirkelsector met een straal van 25 cm en een sectorhoek van $113°$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 5

Het binnengebied van een rotonde is zuiver cirkelvormig met een straal van 16 m. Het gebied is verdeeld in drie even grote cirkelsectoren. Langs alle randen van die sectoren worden drie verschillende soorten struiken geplant. Eén van die drie sectoren wordt langs de complete rand met 120 rozenstruikjes beplant. De afstand tussen de rozenstruikjes (tussen de middens) is 0,55 m.

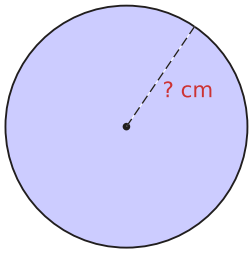
a Bereken de omtrek van deze cirkelsector in meters. Hoeveel rozenstruikjes zijn er nodig?

Het binnengebied van elke cirkelsector wordt een grasveldje.

b Hoeveel m^2 gras heeft elke cirkelsector?

Voorbeeld 2

Bereken de straal van een cirkel met een omtrek van 10 cm in millimeters nauwkeurig.



Figuur 12.5

Antwoord

Voor de omtrek van een cirkel geldt: $omtrek\ (cirkel) = 2\pi r$

Hier is de omtrek 10 cm.
Dus geldt voor de straal r van de cirkel: $2\pi r = 10$ cm

De straal is daarom: $\frac{10}{2\pi} \approx 1{,}6$ cm

Opgave 6

Bekijk de berekening van de straal van een cirkel met een gegeven omtrek in **Voorbeeld 2 op pagina 469**.

a Bereken de straal van een cirkel met een omtrek van 25 cm in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken nu de diameter van een cirkel met een omtrek van 30 cm in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

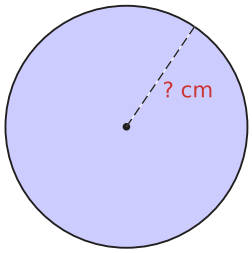
Het binnengebied van een rotonde is zuiver cirkelvormig. Langs de rand van dit binnengebied staan 200 rozenstruiken met een onderlinge afstand tussen de middens van 0,55 m.

a Hoeveel meter is de omtrek van deze rotonde (ongeveer)?

b Bereken de straal van deze rotonde. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 3

Bereken de straal van een cirkel met een oppervlakte van 10 cm^2 in millimeters nauwkeurig.



Figuur 12.6

Antwoord

Voor de oppervlakte van een cirkel geldt: $oppervlakte\ (cirkel) = \pi \cdot straal^2$

De oppervlakte van de cirkel is 10 cm^2.
Dus geldt:

$$\pi r^2 = 10$$
$$r^2 = \frac{10}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 1{,}8$$

Dat is 18 mm.

Opgave 8

Bekijk de berekening van de straal van een cirkel met een gegeven oppervlakte in het.

a Voer zelf de berekening uit en geef het antwoord in tienden van millimeters nauwkeurig.

b Bereken de diameter van een cirkel met een oppervlakte van 25 cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Het binnengebied van een rotonde is zuiver cirkelvormig. De oppervlakte van dit binnengebied is 200 m^2.

a Hoe groot is de straal van deze rotonde in meters nauwkeurig? Rond af op twee decimalen.

b Bereken de omtrek van dit binnengebied in één decimaal nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 10

De grote wijzer van een kerkklok is 1,5 m lang.

a Bereken de lengte van de weg die de punt van de wijzer in een kwartier aflegt in centimeters nauwkeurig.

b Legt de wijzerpunt in een jaar tijd ongeveer 100 km af? Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Ga ervan uit dat de aarde precies bolvormig is en dat de omtrek 40000 km is.

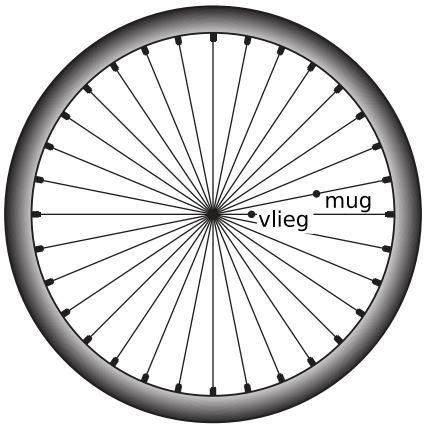
a Bereken de straal van de aarde in gehele kilometers nauwkeurig.

b Stel je voor dat om de evenaar een touw is gespannen. Als je dat touw nu overal op de evenaar op 1 meter boven het aardoppervlak wilt bevestigen, hoeveel extra meter touw heb je dan nodig? Rond af op gehele meters.

Opgave 12

Op een spaak van een fietswiel zit een vlieg, op een andere spaak zit een mug. De vlieg zit 10 cm van de as, de mug 30 cm. Het wiel draait precies één keer rond, zodat de vlieg en de mug allebei een cirkel draaien.

Hoeveel gehele centimeters is de cirkel van de mug groter dan die van de vlieg?



Figuur 12.7

Opgave 13

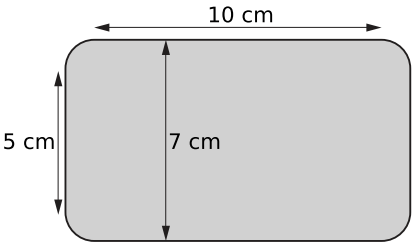
Een cd-rom heeft een diameter van 12 cm. Het gaatje in het midden heeft een diameter van 15 mm.

Bereken de oppervlakte van de cd-rom in cm^2. Rond af op één decimaal.

Opgave 14

Je ziet een blik sardines. In het bovenaanzicht zijn de afmetingen getekend. De afgeronde hoeken zijn kwartcirkels.

Figuur 12.8

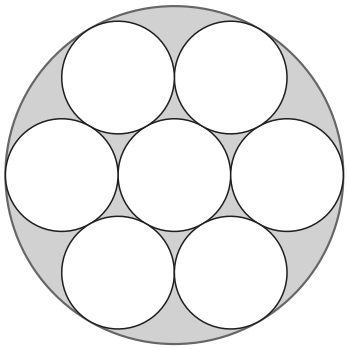


Figuur 12.9

Bereken de oppervlakte van de bovenkant van zo'n sardineblik in cm^2. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Dit is het bovenaanzicht van zeven gelijke balletjes die precies binnen een grote cirkelvormige doos passen. Elk balletje heeft een diameter van 20 cm. Bereken de oppervlakte van de lege ruimte die overblijft in dit bovenaanzicht. Geef je antwoord in hele mm^2.



Figuur 12.10

Opgave 16

Een cirkel heeft een oppervlakte van 400 m^2.

Bereken de omtrek van deze cirkel in meters nauwkeurig.

Toepassen

De planeten bewegen ongeveer in cirkels om de zon. De maan draait ongeveer in een cirkel om de aarde. Je kunt opzoeken hoe groot de straal van die banen (ongeveer) is en hoelang de planeten en de maan over één omwenteling doen.

Daarmee kun je de snelheid berekenen waarmee de planeten en de maan bewegen door de ruimte.

Opgave 17

De aarde draait in ongeveer 365,25 dagen om de zon en staat ongeveer $149{,}6 \times 10^6$ km van de zon af (gemiddeld).

Met welke snelheid (in km/h) beweegt de aarde om de zon? Rond af op twee decimalen.

Opgave 18

De maan draait in ongeveer 27,32 dagen om de aarde en staat ongeveer 384450 km van de aarde af (gemiddeld).

Met welke snelheid (in km/h) beweegt de Maan om de Aarde? Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 19

De omtrek van een bloempot is circa 68 cm.

a Bereken de diameter van deze bloempot in cm, in mm nauwkeurig.

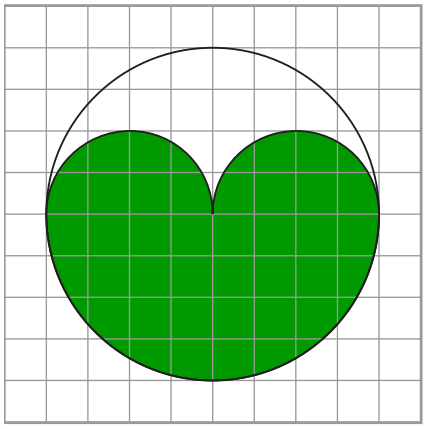
b Hoe groot is de straal van deze bloempot in cm, in mm nauwkeurig?

Opgave 20

Van een pizza met een diameter van 70 cm wordt op de normale manier acht gelijke punten gesneden. Bereken de oppervlakte van één zo'n punt in hele mm^2.

Opgave 21

In de afbeelding zie je een cirkel met een diameter van 8 centimeter. Daarvan is een deel groen gemarkeerd. Bereken de oppervlakte van het deel binnen de cirkel dat niet gemarkeerd is.



Figuur 12.11

12.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- in een driehoek deellijnen, middelloodlijnen, zwaartelijnen, hoogtelijnen tekenen;
- de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van een driehoek tekenen.

Voorkennis

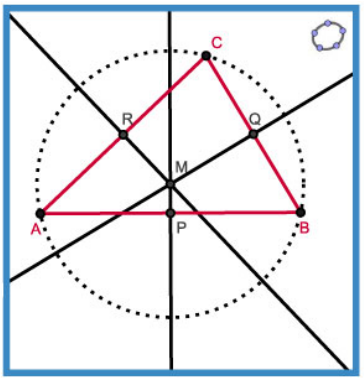
- vlakke figuren, met name driehoeken en vierhoeken en hun eigenschappen;
- lengtes van zijden in driehoeken berekenen met de stelling van Pythagoras en/of gelijkvormigheid;
- de omtrek en de oppervlakte van veelhoeken en cirkels berekenen;
- werken met formules voor de oppervlakte van driehoeken, vierhoeken en cirkels.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: middelloodlijnen

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.



Figuur 12.1

a Wat is een middelloodlijn eigenlijk precies?

b Het lijkt er op dat deze middelloodlijnen door één punt gaan. Teken zelf een driehoek met de drie middelloodlijnen en ga na dat ze alle drie door één punt gaan.

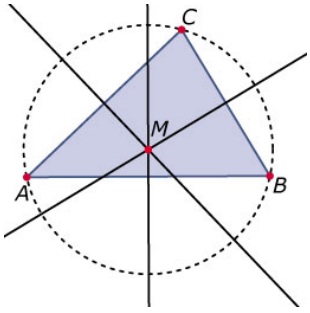
c De getekende cirkel heet de omgeschreven cirkel van deze driehoek. Teken zo'n cirkel in jouw driehoek.

Uitleg

Bekijk de applet: middelloodlijnen

Een **middelloodlijn** van een lijnstuk is een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat, dus de symmetrieas van dat lijnstuk.

Je ziet hier ΔABC met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden getekend. Die drie lijnen gaan door één punt M. Dit punt M is het middelpunt te zijn van een cirkel door de drie hoekpunten van die driehoek. Deze cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.



Figuur 12.2

Er zijn nog meer bijzondere lijnen in een driehoek...

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 473** wat middelloodlijnen zijn.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de middelloodlijnen van elk van de drie zijden van de driehoek.

b Gaan de drie middelloodlijnen door één punt D?

c Je kunt een cirkel tekenen die precies om de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de omgeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 2

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeeld.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.

b Gaan de drie deellijnen door één punt D?

c Je kunt een cirkel tekenen die precies binnen de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 3

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de drie zwaartelijnen CP, AQ en BR van de driehoek.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt Z?

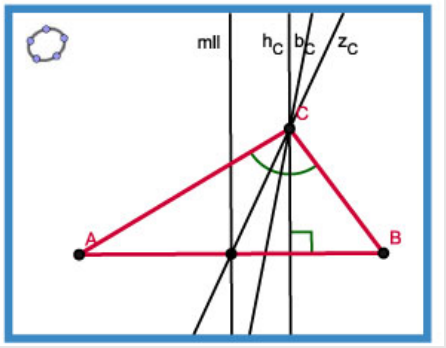
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: bijzondere lijnen in een driehoek

In veel vlakke figuren kun je bijzondere lijnen tekenen. Je ziet hier in ΔABC:

- de **middelloodlijn** van zijde AB, dat is een lijn die deze zijde loodrecht middendoor deelt;
- de **deellijn** of **bissectrice** van $\angle C$, dat is een lijn die deze hoek middendoor deelt;
- de **zwaartelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt naar het midden van de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C);
- de **hoogtelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt loodrecht op de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C).



Figuur 12.3

Dit zijn **definities** van deze bijzondere lijnen. Andere definities zijn:

- de **omgeschreven cirkel** van een driehoek is de cirkel door de drie hoekpunten;
- de **ingeschreven cirkel** van een driehoek is de grootste cirkel die nog precies binnen de driehoek ligt.

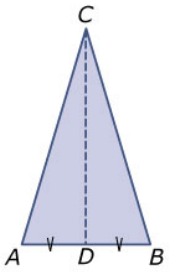
De bijzondere lijnen van een driehoek hebben bepaalde eigenschappen. Je kunt uitspraken doen als “De drie middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt en dat punt is het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van de driehoek.”

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: hoogtelijnen

Je ziet hier ΔABC met daarin de drie hoogtelijnen.

Ook die drie hoogtelijnen gaan door één punt, zelfs als twee hoogtelijnen niet binnen de driehoek vallen.



Figuur 12.4

Opgave 4

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1 op pagina 475**.

a Teken zelf een driehoek met drie scherpe hoeken.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Opgave 5

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1 op pagina 475**.

a Teken zelf een driehoek met één stompe hoek.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen. Je moet daartoe twee zijden verlengen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Opgave 6

In elke driehoek ABC gaan de drie bissectrices door één punt.

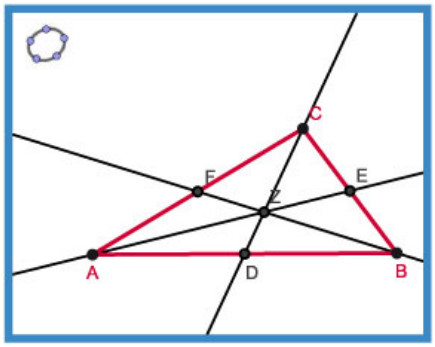
Teken de ingeschreven cirkel van een ΔABC.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: zwaartelijnen

Je ziet hiernaast ΔABC waarin de drie zwaartelijnen zijn getekend. Deze lijnstukken verbinden een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde. Hun snijpunt is het zwaartepunt Z van de driehoek. Een opvallende eigenschap van het zwaartepunt is dat dit punt de zwaartelijnen in twee stukken verdeeld die de verhouding $2 : 1$ hebben.

Laat dit zien met behulp van gelijkvormigheid.



Figuur 12.5

Antwoord

Teken lijnstuk EF.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FEC volgt $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.
En daarom is $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$. De overeenkomstige zijden vormen dus een verhoudingstabel:

AB	BZ	AZ
EF	FZ	EZ

Tabel 12.1

De vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ bedraagt $\frac{1}{2}$, dus $EZ = \frac{1}{2} \cdot AZ$ en $FZ = \frac{1}{2} \cdot BZ$. En dus is $AZ : EZ = BZ : FZ = 2 : 1$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 476**.

a Teken zelf ΔABC met de zwaartelijnen AE en BF en teken lijnstuk EF.
Waarom zijn de driehoeken ABC en FEC gelijkvormig?

b Leg uit, dat dit betekent dat $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.

c Leg uit, dat uit het voorgaande volgt dat $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$.

d Hoe kom je aan de vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ?

Opgave 8

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als $2 : 1$ kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z.
Bereken de lengte van lijnstuk AZ.

Oefenen

Opgave 9

Teken een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = AC$.

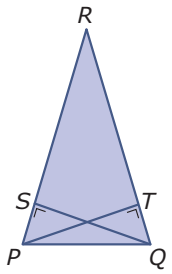
a Teken de hoogtelijn AD.

b Welke twee congruente driehoeken vind je nu in je figuur?

c Waarom volgt uit die congruentie dat AD ook deellijn van $\angle A$ is? En ook dat AD ook zwaartelijn en middelloodlijn is?

Opgave 10

Je ziet hier een gelijkbenige driehoek PQR met de hoogtelijnen PT en QS. Verder is $PQ = 4$ en $PR = QR = 8$ cm.



Figuur 12.6

a Teken deze driehoek en teken er de derde hoogtelijn RU bij in.

b Waarom is $\Delta PQS \sim \Delta PRU$?

c Bereken de lengte van alle drie de hoogtelijnen.

Opgave 11

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Teken van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel en bereken van beide de straal.

Opgave 12

In een rechthoekige driehoek PQR is $\angle Q = 90°$, $PQ = 24$. Verder is de zwaartelijn $PT = 26$ cm. De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z.

a Maak een schets van de situatie.

b Bereken de lengte van QR en UR.

c Bereken de lengte van lijnstuk UZ.

Opgave 13

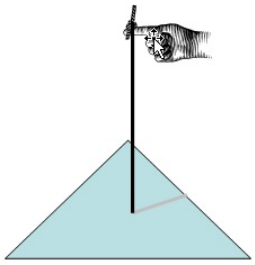
Van dit bord van Delft's Blauw zijn vier scherven overgebleven. Je kunt zien dat het een rond bord was.

Figuur 12.7

Formuleer een manier om de cirkel die het bord beschreef te reconstrueren.

Toepassen

Het woord 'zwaartelijn' heeft alles te maken met de **zwaartekracht**. Neem maar eens een hele grote driehoek en een touwtje met een gewicht er aan. Houd die driehoek en het touwtje in één punt van die driehoek losjes vast. De zwaartekracht laat dan het touwtje loodrecht naar beneden hangen. Dit touwtje verdeelt de driehoek in twee even zware delen, dus (als de driehoek overal even dik is) in twee delen met dezelfde oppervlakte. Je kunt op de driehoek een lijn tekenen die precies onder het touwtje ligt, dat is een zwaartelijn van de driehoek.



Figuur 12.8

Doe dit met de drie hoekpunten van de driehoek en je hebt de drie zwaartelijnen. Het zwaartepunt is het snijpunt van de zwaartelijnen, als je je driehoek daaraan ophangt, hangt hij in evenwicht. Zo kun je een mobile maken van driehoeken...

Opgave 14

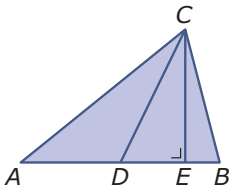
Hierboven wordt verteld dat de zwaartelijnen van een driehoek met de zwaartekracht samenhangen.

a Voer zelf dit experiment uit. Het leukst is dit met een willekeurige driehoek die niet te klein en te licht is.

b Markeer het zwaartepunt van de driehoek. Laat zien dat als je de driehoek in evenwicht blijft als je hem in het zwaartepunt ophangt.

Opgave 15

Een zwaartelijn verdeelt een driehoek in twee delen met dezelfde oppervlakte. Bekijk de figuur hiernaast. CD is een zwaartelijn en CE een hoogtelijn in ΔABC.



Figuur 12.9

a Hoe bereken je ook weer de oppervlakte van een driehoek?

b Laat nu zien dat de oppervlaktes van ΔADC en ΔDBC even groot zijn.

c Leg uit waarom de drie zwaartelijnen een driehoek in zes delen met dezelfde oppervlakte verdelen.

Testen

Opgave 16

Van een rechthoekige driehoek ABC is $\angle A = 90°$, $AB = 10$ cm en $AC = 5$ cm.

a Teken deze driehoek met zijn omgeschreven cirkel.

b Waarom is bij elke rechthoekige driehoek het middelpunt van de omgeschreven cirkel het midden van de langste zijde (hypothenusa)?

c Bereken de lengte van de straal van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 17

Gegeven is een driehoek met zijden van 8, 5 en 4 cm.

a Teken het zwaartepunt van deze driehoek.

b Teken het hoogtepunt van deze driehoek, dus het snijpunt van de drie hoogtelijnen.

12.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met vlakke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakteformules, soorten bijzondere lijnen in een driehoek voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Vlakke figuren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- veelhoek — gelijkbenige, gelijkzijdige, rechthoekige driehoek — vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, vlieger, trapezium
- gelijkvormig — congruent — stelling van Pythagoras
- omtrek — oppervlakte — oppervlakteformule
- omtrek en oppervlakte cirkel — pi
- hoogtelijn, zwaartelijn, bissectrice, middelloodlijn — ingeschreven en omgeschreven cirkel

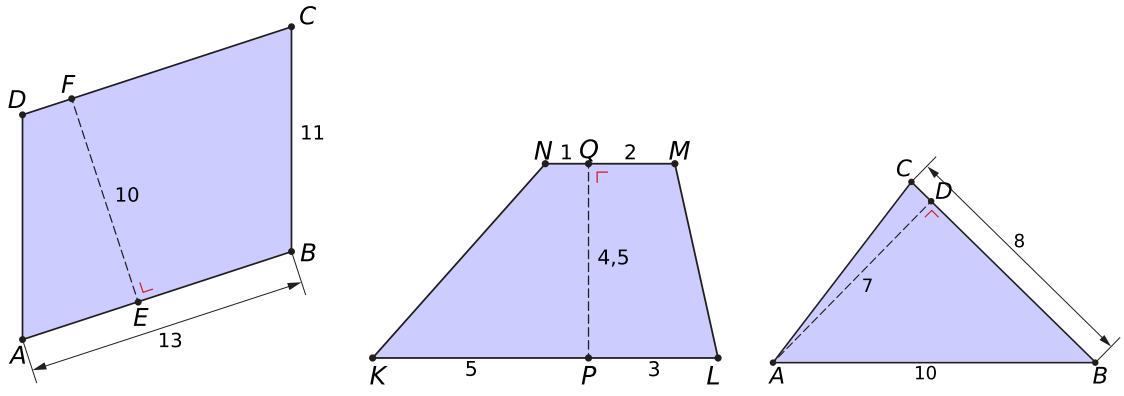
Activiteitenlijst

- soorten driehoeken herkennen en construeren — soorten vierhoeken herkennen en construeren;
- gelijkvormige figuren herkennen — berekeningen uitvoeren met behulp van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras;
- omtrek en oppervlakte van een veelhoek bepalen — werken met oppervlakteformules van driehoeken en vierhoeken — vergrotingsfactor bij oppervlakte gebruiken;
- de omtrek en de oppervlakte van een cirkel(sector) berekenen;
- hoogtelijnen, zwaartelijnen, bissectrices, middelloodlijnen in een driehoek tekenen — ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek construeren.

Testen

Opgave 1

Je ziet een parallellogram, een trapezium en een driehoek. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 12.1

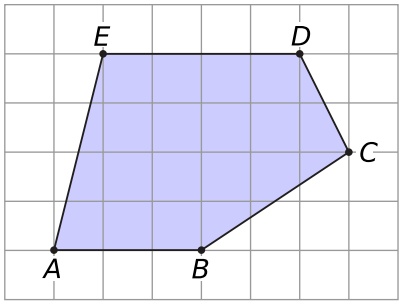
a Bereken de omtrek en de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.

b Bereken de oppervlakte van trapezium $KLMN$.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 2

Bekijk de figuur. Elk roosterhokje is 5 mm bij 5 mm.



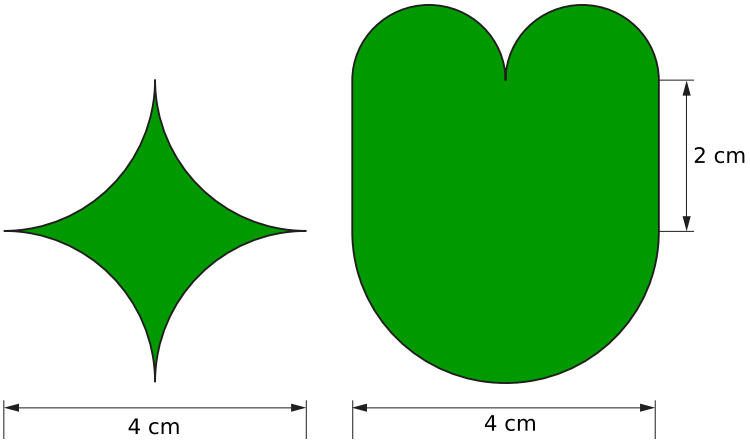
Figuur 12.2

a Teken zelf deze figuur op zo'n rooster en bereken de omtrek van deze figuur exact en in millimeters nauwkeurig.

b Bereken de oppervlakte van deze figuur in cm^2.

Opgave 3

Deze twee figuren bestaan uit kwart cirkels, halve cirkels en evenwijdige lijnstukken.



Figuur 12.3

a Bereken de omtrek van figuur a in centimeters. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de omtrek van figuur b in centimeters. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de oppervlakte van figuur a in cm^2. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

d Bereken de oppervlakte van figuur b in cm^2. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 4

Van een cirkel is de diameter 12 m.

a Bereken de omtrek en van deze cirkel in hele cm.

b Bereken de oppervlakte van deze cirkel in cm^2 nauwkeurig.

Van een andere cirkel is de oppervlakte 100 m^2.

c Bereken de omtrek van die cirkel in hele cm.

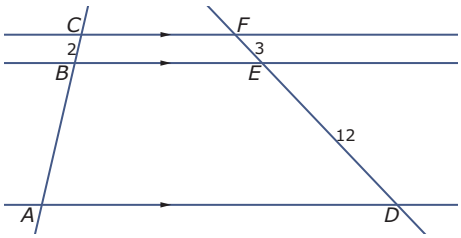
Opgave 5

Van een cirkelsector met een straal van 7 cm is de omtrek 28 cm.

Hoe groot is de oppervlakte van die cirkelsector in gehele cm^2?

Opgave 6

Je ziet hier hoe drie evenwijdige lijnen worden gesneden door twee andere lijnen. Zo ontstaan de trapezia $ADEB$, $BEFC$ en $ADFC$.



Figuur 12.4

a Waarom zijn deze trapezia niet zonder meer gelijkvormig?

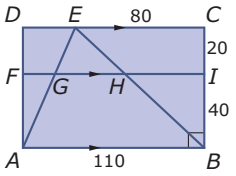
Je wilt de lengte van AB berekenen.

b Waarom is het verstandig om dat een lijn door F te tekenen die evenwijdig is met lijn AC?

c Bereken de lengte van AB.

Opgave 7

$ABCD$ is een rechthoek en $FI//AB$.



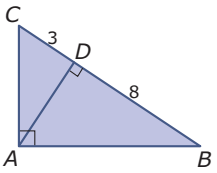
Figuur 12.5

a Bereken de lengte van BH.

b Bereken de lengte van AG.

Opgave 8

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met daarin hoogtelijn AD.



Figuur 12.6

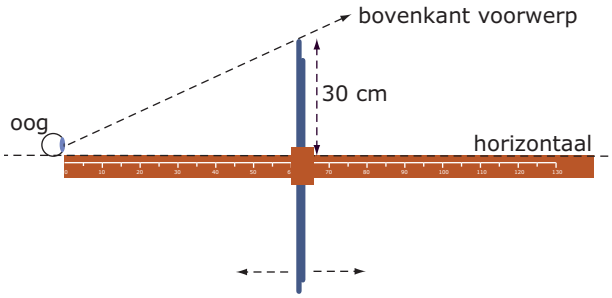
Bereken de lengte van AD.

Toepassen

Je ziet hier een **Jacobsstaf**, een oud instrument om de hoogte of de breedte van een bouwwerk te bepalen, maar ook de hoek van de zon ten opzichte van de horizon. Hiermee op zee de breedtegraad vaststellen waarop je je bevindt. De Jakobsstaf is de voorloper van de sextant.

Figuur 12.7

Hij bestaat uit een lat met daarop een schaalverdeling die je vlak onder je oog kon houden. Loodrecht daarop kun je een andere lat (soms meerdere latten) verschuiven. Je houdt de schaalverdeling horizontaal en kijkt langs de bovenkant van die loodrechte lat. Je verschuift hem tot je het hoogste punt van het bouwwerk nog precies ziet. Nu kun je op de schaalverdeling de horizontale afstand tot je oog aflezen.



Figuur 12.8

Opgave 9: Hoogte meten met de Jacobsstaf

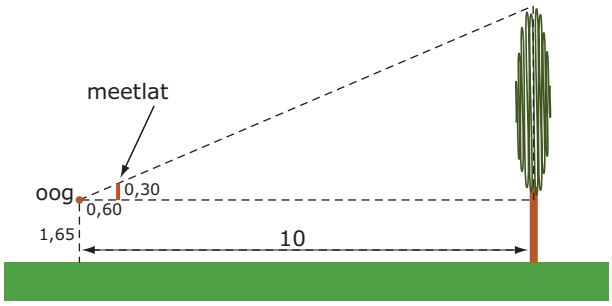
Je kunt hierboven nalezen wat een Jacobsstaf is.

Stel je voor dat je met zo'n Jacobsstaf de hoogte wilt bepalen van een kerktoren. Je gaat dan ongeveer 100 m van die toren af staan en houdt de Jacobsstaf op ooghoogte horizontaal tegen je gezicht. Je verschuift de verticale lat totdat je langs de bovenkant nog net de torenspits kunt zien. Je ziet in de figuur dat die verticale lat 30 cm boven de horizontale lat uitsteekt.

a Maak een schets van de situatie.

b Je leest op de schaalverdeling af dat de verticale lat bij 65 cm staat. Bereken nu de hoogte van de toren als jouw ooghoogte 1,70 m boven de grond is.

Opgave 10: Hoogte van een boom



Figuur 12.9

Marisa berekent de hoogte van een boom met behulp van een meetlat met een lengte van 30 cm. Ze houdt de meetlat verticaal en zo, dat de onderkant ervan op ooghoogte zit. Kijkt ze nu precies langs de bovenkant dan ziet ze de top van de boom. Haar vriend Peter meet na dat de onderkant van de meetlat 60 cm voor haar oog zit en 1,65 m boven de begane grond. Verder staat Marisa 10 m van de boom af.

Bereken de hoogte van de boom in dm nauwkeurig.

13

Goniometrie

13.1 Goniometrische verhoudingen 484
13.2 Omtrek en oppervlakte 491
13.3 Vectoren 498
13.4 Sinusregel 506
13.5 Cosinusregel 511
13.6 Totaalbeeld 518

13.1 Goniometrische verhoudingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen.

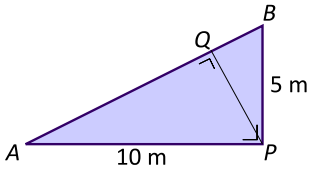
Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een rechthoekige driehoek APB. De hoogtelijn PQ stelt de afstand van punt P tot lijnstuk AB voor.



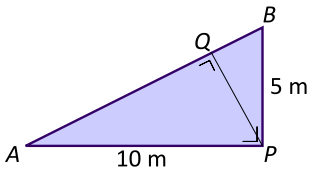
Figuur 13.1

a Hoe lang is deze afstand in cm nauwkeurig?

b Hoe groot is $\angle QPB$ in graden nauwkeurig?

Uitleg 1

Je ziet een rechthoekige driehoek APB. De hoogtelijn PQ stelt de afstand van punt P tot lijnstuk AB voor.



Figuur 13.2

Deze afstand PQ kun je berekenen met behulp van gelijkvormigheid: twee driehoeken zijn gelijkvormig als hun hoeken gelijk zijn. Dat is het geval bij de driehoeken APB en PQB. Je noteert $\Delta APB \sim \Delta PQB$ met de overeenkomstige hoekpunten op dezelfde plaats.
Je weet dan dat de verhoudingen van de overeenkomstige zijden gelijk zijn:

$AP = 10$	$PB = 5$	AB
PQ	QB	$PB = 5$

Tabel 13.1

Je ziet nu dat je van ΔAPB nog de lengte van AB moet berekenen.
Daarvoor gebruik je de stelling van Pythagoras in ΔAPB:

$AP^2 + PB^2 = AB^2$ geeft $10^2 + 5^2 = 125 = AB^2$, zodat $AB = \sqrt{125} \approx 11{,}180$.

Deze waarde van AB kun je in de tabel invullen. Er geldt: $\frac{PQ}{AP} = \frac{PB}{AB}$, dus $\frac{PQ}{10} \approx \frac{5}{11{,}180} \approx 0{,}447$.
Dit levert op $PQ \approx 4{,}47$ m.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 484**.
Er wordt gesteld dat $\Delta APB \sim \Delta PQB$ omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

a Welke hoeken zijn dat?

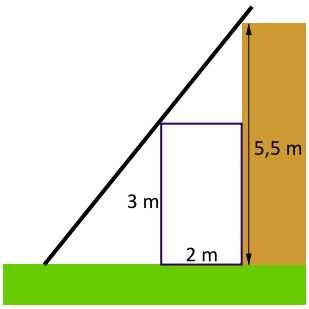
b Driehoeken zijn gelijkvormig als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.
Geldt dat ook voor andere figuren?

Je kunt deze berekening ook uitvoeren met de driehoeken APB en APQ.

c Laat zien, dat je dan op dezelfde waarde van PQ uitkomt.

Opgave 2

Je ziet hier hoe iemand een ladder tegen een 5,5 m hoge muur plaatst over een schuurtje heen waarvan de hoogte 3 m en de diepte tot de muur 2 m is.



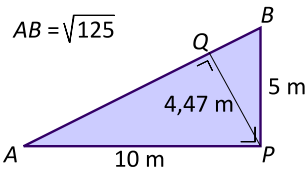
Figuur 13.3

a Hoe ver minimaal van de muur moet die ladder op de grond worden geplaatst?

b Hoe lang moet de ladder minimaal zijn?

Uitleg 2

Dit is dezelfde figuur als in **Uitleg 1 op pagina 484**.
De afmetingen die je daar hebt berekend, staan nu in de figuur.



Figuur 13.4

Als je hierin hoeken wilt berekenen, maak je gebruik van de bekende goniometrische verhoudingen sinus, cosinus of tangens.

Bijvoorbeeld kun $\angle QPB$ berekenen in de rechthoekige driehoek PQB.
Je weet dan de aanliggende rechthoekszijde PQ van $\angle QPB$ en je weet de langste zijde PB.

Dus: $\cos(\angle QPB) \approx \frac{4{,}47}{5} \approx 0{,}894$.

En daarmee bereken je $\angle QPB \approx 26{,}6° \approx 27°$.
Daarbij moet je terugrekenen vanuit cosinus. Op rekenmachines wordt daarvoor arccos, of inv cos, of $\cos^{-1}$ gebruikt.

Belangrijk is dat goniometrie vooralsnog alleen in rechthoekige driehoeken kan worden toegepast.
Je moet daarom telkens goed opletten waar zo'n driehoek is te vinden. En dan moet je de goniometrische verhoudingen nog weten, je vind ze nog eens in de **Theorie op pagina 486**.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 485**.
Je ziet hoe $\angle QPB$ wordt berekend.

a Misschien moet je eerst even de goniometrische verhoudingen even opzoeken.
Schrijf even op wat je verstaat onder sinus, onder cosinus en onder tangens.

b Waarom kun je bij de gegevens in de figuur de grootte van $\angle QPB$ alleen met behulp van cosinus berekenen?

c Bereken met behulp van goniometrie en de gegevens in de figuur de grootte van $\angle A$ op twee manieren.

Opgave 4

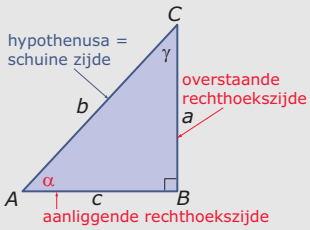
ΔABC heeft zijden $AB = 6$ cm en $AC = BC = 10$ cm.

Bereken de grootte van elk van de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet hier een rechthoekige driehoek. De lengtes van de zijden worden met kleine letters aangeduid die corresponderen met de hoofdletters van de hoekpunten er tegenover. De groottes van de hoeken worden met griekse letters aangeduid die corresponderen met de hoekpunten. In dit geval is $\beta = 90°$. In zo'n rechthoekige driehoek geldt:



Figuur 13.5

De **stelling van Pythagoras**:

$(\text{éne rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = (\text{hypothenusa})^2$.

De **goniometrische verhoudingen**:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypothenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypothenusa}}$$

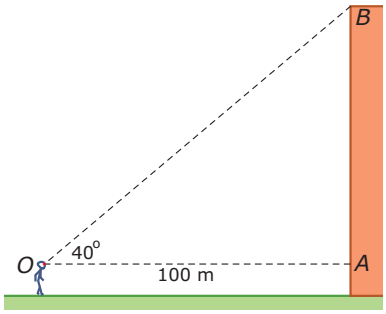
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Verder gebruik je vaak het feit dat driehoeken **gelijkvormig** zijn als hun overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Hun overeenkomstige zijden hebben dan gelijke verhoudingen. De éne driehoek is een **vergroting** van de andere. Er is een vaste **vergrotingsfactor** van de lengtes van de éne driehoek naar de overeenkomstige lengtes van de andere driehoek.

Voorbeeld 1

Hiernaast zie je hoe iemand de hoogte van een flatgebouw berekent. Hij gaat 100 van een verticale gevel van de flat staan en meet de hoek waaronder hij de top van die gevel ziet. Dat is de hoek tussen een horizontale lijn en de kijklijn vanuit zijn oog naar de top van de gevel. Zo'n hoek heet een hellingshoek. Hier wordt een hellingshoek van 40° gemeten.

Hoe hoog is het flatgebouw als de hellingshoek op 1,50 m boven de grond wordt gemeten?



Figuur 13.6

Antwoord

In de rechthoekige driehoek OAB geldt: $\tan(\angle AOB) = \frac{AB}{OA}$.

Dit betekent $\tan(40°) = \frac{AB}{100}$.

Nu is $\tan(40°) \approx 0{,}839$, dus $0{,}839 \approx \frac{AB}{100}$ zodat $AB \approx 83{,}9$ m.

De hoogte van het flatgebouw is dus ongeveer $83{,}9 + 1{,}5 = 85{,}4$ m.

Opgave 5

Een landmeter staat 50 m van een cilindervormige koeltoren af en meet de hellingshoek naar de top. Hij vindt 31°. Zijn hoekmeter staat op een statief en zit 1,50 m boven de grond.

Bereken de hoogte van deze koeltoren.

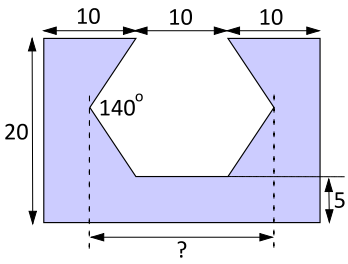
Opgave 6

Een vuurtorenwachter zit boven in zijn vuurtoren 40 m boven de zeespiegel. Hij ziet twee schepen die zich met de vuurtoren precies in één vlak bevinden. De man ziet deze boten onder hellingshoeken van 22° en 16°.

Bereken de afstand tussen beide schepen.

Voorbeeld 2

Je ziet hier een symmetrisch profiel, alle afmetingen zijn in mm.
Bereken de afmeting waar het vraagteken bij staat.



Figuur 13.7

Antwoord

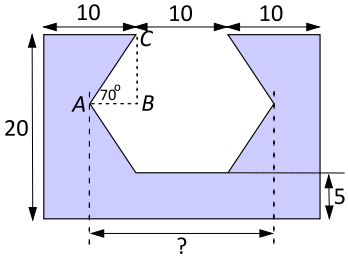
Zoek weer eerst een geschikte rechthoekige driehoek, bijvoorbeeld ΔABC.

Van deze driehoek weet je $\angle A = 70°$ en $BC = 7{,}5$ mm.

Dus is $\tan(70°) = \frac{BC}{AB} = \frac{7{,}5}{AB}$.

En dit betekent: $AB = \frac{7{,}5}{\tan(70°)} \approx 2{,}7$ mm.

De gezochte afmeting is daarom 15,4 mm.



Figuur 13.8

Opgave 7

Bekijk het profiel in **Voorbeeld 2 op pagina 487**.

a Waarom is $BC = 7{,}5$?

b Waarom is de gevraagde afmeting 15,4 mm?

c Hoeveel bedraagt de totale omtrek van dit profiel?

d Hoe groot zijn de twee hoeken onderin de zeshoek?

Opgave 8

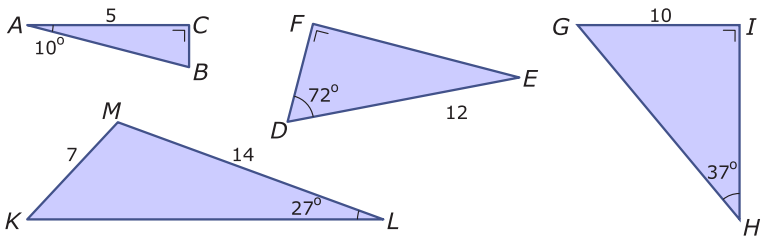
Een driehoekige plaat ABC heeft als hoogte $CD = 1{,}2$ m.
Verder is $AC = 1{,}8$ m en $\angle C = 70°$.

Hoe lang zijn de overige zijden van deze driehoek?

Oefenen

Opgave 9

Je ziet hier vier driehoeken.

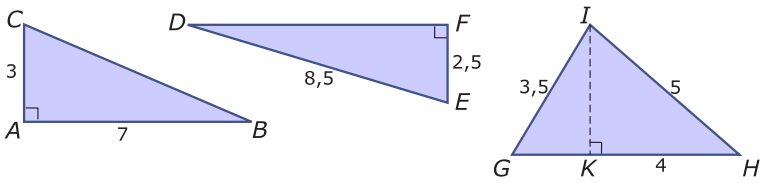


Figuur 13.9

Bereken alle onbekende zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet hier drie driehoeken.



Figuur 13.10

Bereken alle onbekende hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 11

De toren van Pisa staat al jaren scheef. De toren is 82 m lang, maar als je een steen neerlaat aan een touw vanaf het laagste punt van de scheve bovenrand, dan raakt de steen de grond als het touw 80 m lang is.

Hoe groot is dan de hoek die de scheve toren van Pisa met de begane grond maakt?

Figuur 13.11

Opgave 12

Je ziet hier het SmartCover van een iPad2. Dit SmartCover bedekt de iPad volledig, de afmetingen ervan zijn 18,5 bij 24 cm. Hij bestaat (zoals je ziet) uit vier aaneengesloten banen van 24 cm lengte, die echter niet allemaal even breed zijn. De tweede baan van links is ongeveer 5,6 cm breed en de andere drie zijn 4,3 cm breed.

Als je het SmartCover oprolt zoals in de figuren hieronder is te zien, dan maakt het scherm een hoek met de tafel waar hij op ligt. Neem voor deze opgave aan dat de iPad en de SmartCover geen dikte hebben.

Figuur 13.12

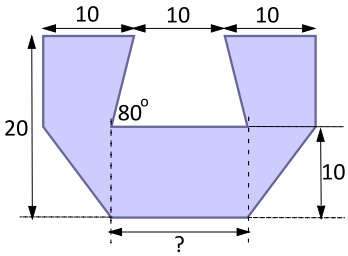
a Hoe groot is de hellingshoek van de iPad met de tafel?

b Je kunt de driehoekige steun nog verder scharnieren en zo de iPad in de kijkstand zetten. Een strook van 4,3 cm breedte ligt nu op het tafelblad en de tablet leunt tegen een andere strook van 4,3 cm. Welke hoek maakt de iPad nu met het tafelblad? En hoe hoog zit de bovenrand van de iPad nu boven het tafelblad?

Opgave 13

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een profiel.
Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de afmeting waar het vraagteken bij staat in tienden van mm nauwkeurig.

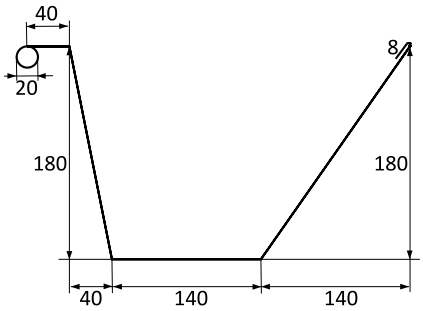


Figuur 13.13

Opgave 14

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een zinken goot.
Alle afmetingen zijn in mm.
De omtrek van een cirkel met diameter d is $\pi \cdot d$.

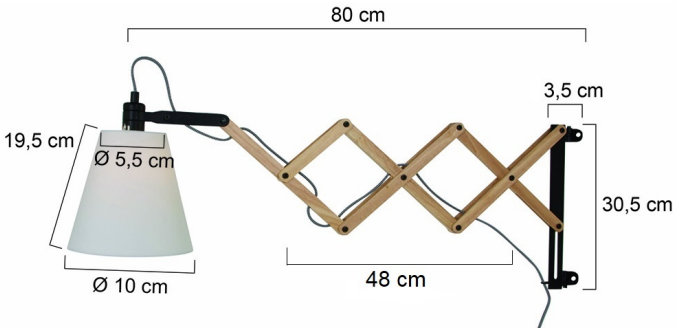
Bereken de breedte van de plaat zink die nodig is om deze goot te vormen en bereken de grootte van de hoeken waaronder de plaat moet worden gebogen.



Figuur 13.14

Toepassen

Je ziet hier een schaarlamp met een latwerk van twee ruiten. Het latwerk heet de schaar van de lamp. Je kunt de lamp daardoor in horizontale richting bewegen. De lamp staat nu op zijn uiterste stand, de schaarlengte is 80 cm, zoals in de figuur is te zien. De breedte van de schaar (tussen de twee scharnierpunten op de bevestigingsstang) is dan 18 cm.
De maximale breedte van de schaar is 28,5 cm.



Figuur 13.15

Opgave 15

Bekijk de tekst over de schaarlamp.

a Hoe groot is de hoek die deze lange latjes in hun middens met elkaar maken als de lamp in de stand van de figuur staat?

b Hoe lang zijn de lange latjes?

c Hoe groot is de schaarlengte als de hoek die de lange latjes in hun middens met elkaar maken 100° is?

Testen

Opgave 16

Een vliegtuig vliegt 2500 m vanaf de startbaan onder een vaste hoek naar een hoogte van 800 m.
Onder welke hellingshoek verliep dat deel van de vlucht?

Opgave 17

Een spoorwegovergang wordt omgebouwd tot een spooronderdoorgang.
Het wegdek dat ongeveer horizontaal over de spoorwegovergang loopt moet daartoe onder een hoek van 4° naar beneden worden gelegd tot het laagste punt op 5 m onder het spoor. Vanaf dat punt moet het onder dezelfde hoek weer omhoog gaan.

Hoe lang zijn de twee hellende stukken wegdek samen?

Opgave 18

Een plaatje in de vorm van een rechthoekige driehoek ABC heeft een rechte hoek bij C en rechthoekszijden $AC = 12$ cm en $BC = 8$. Het plaatje wordt in twee rechthoekige driehoeken ADC en DBC gezaagd. Bereken de lengtes van de rechthoekszijden van die twee rechthoekige driehoeken in mm nauwkeurig.

13.2 Omtrek en oppervlakte

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- omtrek en oppervlakte van vlakke figuren berekenen, ook met behulp van goniometrie.

Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen.

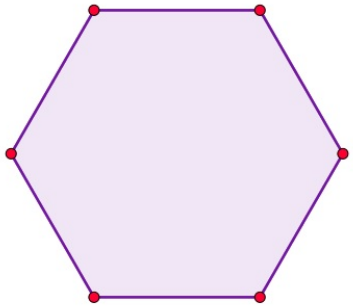
Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige zeshoek. Alle zijden zijn even lang, in dit geval 2 cm. Ook alle hoeken zijn even groot.

a Hoe groot is de omtrek van deze zeshoek?

b Hoe groot is de oppervlakte van deze zeshoek?

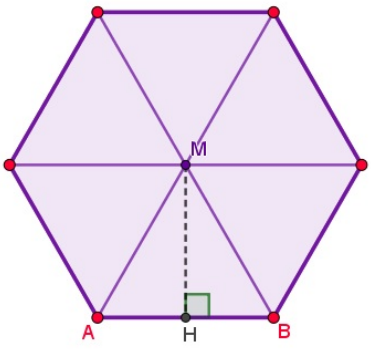


Figuur 13.1

Uitleg

Een regelmatige zeshoek is een zeshoek met gelijke zijden en gelijke hoeken.
Van deze zeshoek is elke zijde 2 cm.
De omtrek ervan is dus gemakkelijk $6 \cdot 2 = 12$ cm, gewoon de totale lengte van alle zijden samen.

Hoe je de oppervlakte van zo'n zeshoek berekent, zie je in de figuur.
De zeshoek bestaat uit zes gelijke driehoeken, die beslist gelijkbenig zijn en een basis van 2 cm hebben. Verder weet je de tophoek van zo'n driehoek, want alle zes gelijke tophoeken zitten bij M tegen elkaar en vormen samen een hoek van 360°. Dus bijvoorbeeld $\angle AMB = 360° / 6 = 60°$.
Nu kun je op meerdere manieren verder redeneren:



Figuur 13.2

- Met goniometrie: $\tan(30°) = \frac{HB}{MH} = \frac{1}{MH}$ geeft $MH \approx 1{,}732$.

  ΔMHB is een halve rechthoek met oppervlakte $1 \cdot 1{,}732/2 \approx 0{,}866$.
  De hele zeshoek bestaat uit 12 van die driehoeken, dus de oppervlakte is $12 \cdot 0{,}866 \approx 10{,}39$ cm^2.

- Met de stelling van Pythagoras: omdat $\angle AMB = 60°$ moeten de andere hoeken van ΔABM ook wel $60°$ zijn. Dus is ΔABM gelijkzijdig, alle zijden zijn 2 cm.
  Voor de hoogte MH van deze driehoek geldt $MH^2 + 1^2 = 2^2$.

  Dus $MH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

  De oppervlakte van ΔABM is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

  De oppervlakte van de zeshoek is $6 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm^2.

De oppervlakte van de meeste figuren kun je vinden door ze ofwel te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken en eventueel delen van cirkels, ofwel te omlijsten met een rechthoek en daarvan dan rechthoeken, halve rechthoeken en delen van cirkels af te trekken.
De omtrek van de meeste figuren kun je vinden door de rand in lijnstukken en delen van cirkels te verdelen en de lengte van al die stukken op te tellen.

Soms is het handig om gebruik te maken van formules.

Bijvoorbeeld geldt voor de oppervlakte van elke driehoek $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, waarin A de oppervlakte (engels: 'area'), b de lengte van de basis en h de lengte van de hoogte op die basis is. In de **Theorie op pagina 493** vind je een overzicht van die formules.

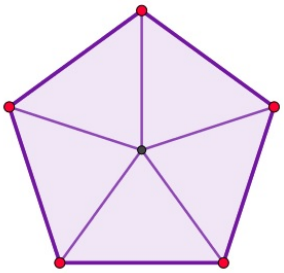
Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 491**.
De oppervlakte van de zeshoek wordt bepaald door van ΔABM de tophoek $\angle AMB$ te berekenen.
Je kunt echter ook in plaats daarvan $\angle BAM$ berekenen en daarmee de oppervlakte uitrekenen.

a Hoe kun je $\angle BAM$ berekenen?

b Hoe kun je met behulp van $\angle BAM$ de oppervlakte van de zeshoek berekenen?

Ook een regelmatige vijfhoek kun je opdelen in driehoeken, zie de figuur.

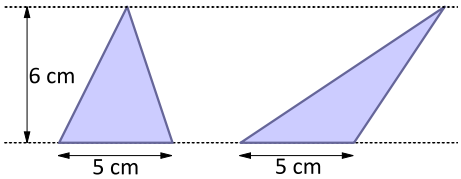


Figuur 13.3

c Bereken de oppervlakte van deze vijfhoek als alle zijden 3 cm lang zijn.

Opgave 2

Je ziet hier twee verschillende driehoeken.



Figuur 13.4

a Waarom hebben ze dezelfde oppervlakte?
Hoe groot is die oppervlakte?

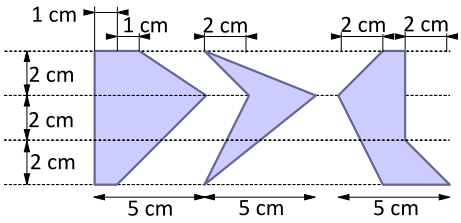
b Welke van beide driehoeken heeft de grootste omtrek?

Van een driehoek ΔABC is $AB = 7$ cm, $AC = 4$ cm en $\angle A = 40°$.

c Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze driehoek.

Opgave 3

Van veel figuren kun je de oppervlakte berekenen door opdelen of omlijsten.
Bekijk deze figuren.



Figuur 13.5

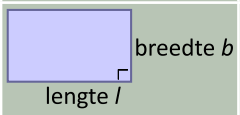
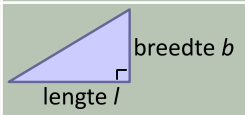
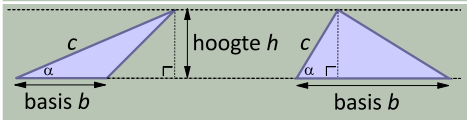
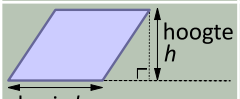
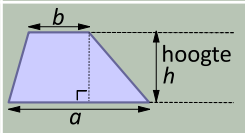
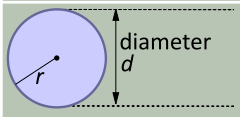
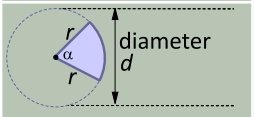
Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze drie figuren.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte** van de meeste figuren kun je vinden door ze ofwel te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken en eventueel delen van cirkels, ofwel te omlijsten met een rechthoek en daarvan dan rechthoeken, halve rechthoeken en delen van cirkels af te trekken.
De **omtrek** van de meeste figuren kun je vinden door de rand in lijnstukken en delen van cirkels te verdelen en de lengte van al die stukken op te tellen.

Soms is het handig om gebruik te maken van formules.
Hier vind je een overzicht van de belangrijkste formules.

rechthoek	**halve rechthoek**	**driehoek**	
 oppervlakte: $l \cdot b$ omtrek: $2 \cdot l + 2 \cdot b$	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot l \cdot b$ omtrek: $l + b + \sqrt{l^2 + b^2}$	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ of $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	
parallellogram	**trapezium**	**cirkel**	**cirkelsector**
 oppervlakte: $b \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 oppervlakte: $\pi \cdot r^2$ of $\frac{1}{4}\pi \cdot d^2$ omtrek: $2\pi \cdot r$ of $\pi \cdot d$	 oppervlakte: $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$ omtrek: $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r + 2r$

Tabel 13.1

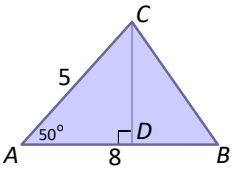
Voorbeeld 1

Gegeven ΔABC met $\angle A = 50°$, $AB = 8$ cm en $AC = 5$ cm.

Bereken de oppervlakte van deze driehoek in mm^2 nauwkeurig.

Antwoord

Maak een schets en zet er meteen een handig gekozen hoogtelijn in.
In dit geval is dat CD.



Figuur 13.6

In ΔADC geldt: $\sin(50°) = \frac{CD}{5}$, zodat $CD = 5 \cdot \sin(50°) \approx 3{,}830$ cm.

De oppervlakte van ΔABC is dus: $\approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3{,}830 \approx 15{,}32$ cm^2

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 494** hoe je van ΔABC de oppervlakte berekent.

a Bereken de omtrek van deze driehoek.

b Toon aan dat voor de oppervlakte van ΔABC dan geldt: $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$.

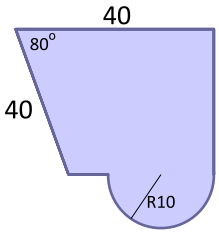
Opgave 5

Van ΔPQR is $\angle R = 67°$, $PR = 10$ cm en $QR = 12$ cm.

Bereken de oppervlakte en de omtrek van deze driehoek in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

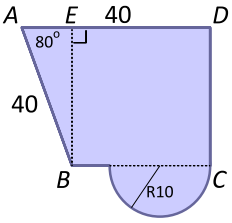
Je ziet hier een afdekplaatje, alle afmetingen zijn in mm.
R10 betekent dat de cirkel een straal van 10 (hier: mm) heeft.
Bereken de oppervlakte van dit plaatje in mm^2 nauwkeurig.



Figuur 13.7

Antwoord

Verdeel de figuur en zet letters bij hoekpunten.



Figuur 13.8

Van ΔABE weet je $\angle A = 80°$ en $AB = 40$ mm.

Dus is $\sin(80°) = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{40}$, zodat $BE = 40 \cdot \sin(80°) \approx 39{,}4$ mm.
Zo is ook: $AE \approx 6{,}9$ mm.

De gezochte oppervlakte is daarom
$\frac{1}{2} \cdot 39{,}4 \cdot 6{,}9 + 39{,}4 \cdot (40 - 6{,}9) + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 1597$ mm^2.

Opgave 6

Bekijk het plaatje in **Voorbeeld 2 op pagina 494**.

a Waarom is $AE \approx 6{,}9$?

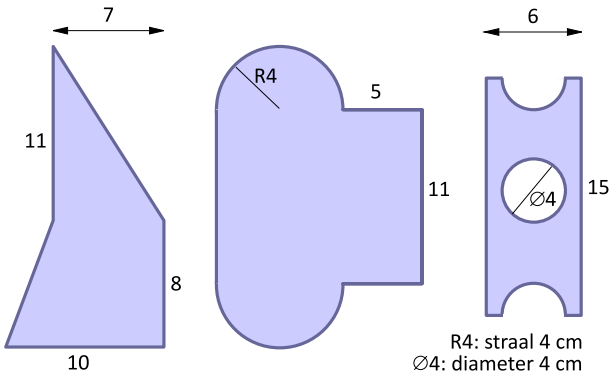
b Leg uit hoe uiteindelijk de oppervlakte van het plaatje is berekend.

c Hoeveel bedraagt de totale omtrek van dit plaatje in tienden van mm nauwkeurig?

Oefenen

Opgave 7

Je ziet hier drie vormen. Neem aan dat alle hoeken die recht lijken dat ook zijn en alle bogen die op cirkelbogen lijken echte cirkelbogen zijn. Alle afmetingen zijn in cm.

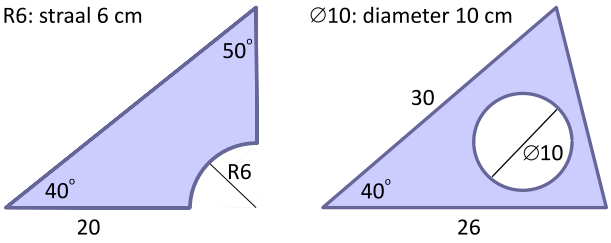


Figuur 13.9

Bereken van elke vorm de oppervlakte in mm^2 en de omtrek in mm nauwkeurig.

Opgave 8

Je ziet hier twee vormen. Neem aan dat alle hoeken die recht lijken dat ook zijn en alle bogen die op cirkelbogen lijken echte cirkelbogen zijn. Alle afmetingen zijn in cm.



Figuur 13.10

Bereken van elke vorm de oppervlakte in mm^2 en de omtrek in mm nauwkeurig.

Opgave 9

Een atletiekbaan bestaat uit twee rechte stukken van 100 m en twee halve cirkels die ook elk een lengte hebben van 100 m.
Het middenterrein van die atletiekbaan is een rechthoek met op beide uiteinden halve cirkels.

Hoe groot is de oppervlakte van dit binnenterrein?

Opgave 10

Een driehoekig afdekplaatje heeft twee zijden van 412 mm die een hoek van 30° met elkaar maken.

Hoe groot is de oppervlakte van dit plaatje?

Opgave 11

Je ziet hier een foto van een huis met een zogenaamd mansardedak. Het dak bestaat uit vier delen die allemaal de vorm van een rechthoek van 2,5 m bij 10 m hebben (houd geen rekening met de dakkapel boven de voordeur en de schoorsteen). De onderste twee delen van het dak maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak. De vloer van het huis is een rechthoek van 6 m bij 10 m. De dakgoot zit op 3 m boven de grond.

Figuur 13.11

a Maak een tekening van de zijgevel op schaal met de maten erin. Je kunt ze afleiden uit bovenstaande tekst.

b Bereken de hoogte van het huis in cm nauwkeurig.

Vanwege de druk van eventuele sneeuw op het dak, mag volgens de aannemer het dak geen hellingshoek lager dan 35° hebben, want anders dan moet het dak verstevigd worden.

c Bereken de hellingshoek van de bovenste twee delen van het dak in graden nauwkeurig en beslis of het dak verstevigd moet worden.

Opgave 12

In de Amsterdamse St. Gabriëlskerk vind je dit veelkleurige vijfhoekige glas-in-loodraam. Het is ontworpen en vervaardigd door de Haarlemse glazenier W. Bogtman. Het complete vijfhoekige raam (dus de buitenste vijfhoek) past precies in een cirkel met een straal van 1 m. Alle zijden van het raam zijn even lang.

Figuur 13.12

a Teken deze vijfhoek en licht toe hoe je dat doet.

b Bereken de lengtes van de zijden van deze vijfhoek in mm nauwkeurig.

c Bereken de totale oppervlakte van het glas-in-loodraam in cm^2 nauwkeurig.

In het vijfhoekige raam zit een vijfpuntige ster van metalen strips.

d Hoeveel meter van die strips is er in totaal nodig voor deze vijfpuntige ster? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

e In feite bestaat deze ster uit 15 lijnstukken met twee verschillende lengtes. Bereken die twee verschillende lengtes in mm nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet.

Met deze applet maak je regelmatige veelhoeken. Ze passen in een cirkel met straal 1. Je kunt een regelmatige n-hoek opdelen in n gelijke en gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek het middelpunt van de cirkel is waar de andere hoekpunten op liggen.

Met behulp van goniometrie kun je van zo'n driehoek de oppervlakte berekenen. En daarmee bereken je ook de oppervlakte van de veelhoek. En zo kun je zelfs π benaderen...

Opgave 13

Bekijk de applet. Als je $n = 5$ instelt zie je een regelmatige vijfhoek.

a In hoeveel gelijke en gelijkbenige driehoeken kun je deze figuur opdelen?

b Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek?

c Bereken de oppervlakte van zo'n driehoek.

d Hoe groot is de oppervlakte van de vijfhoek?

Opgave 14

Bekijk de applet nog eens. Als je $n = 6$ instelt zie je een regelmatige zeshoek.

a Bereken op dezelfde manier als in de voorgaande opgave de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Neem nu $n = 8$.

b Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek.

Neem nu $n = 10$.

c Bereken de oppervlakte van de regelmatige tienhoek.

Neem nu $n = 100$.

d Bereken de oppervlakte van de regelmatige honderdhoek.

e Als je n steeds kon blijven vergroten, welk getal ga je dan steeds meer benaderen?

Testen

Opgave 15

Van ΔABC is gegeven $AB = 30$ mm, $BC = 12$ mm en $\angle B = 65°$.
Bereken van deze driehoek de omtrek in mm en de oppervlakte in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 16

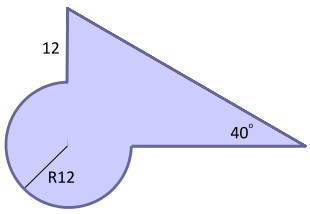
Een regelmatige zevenhoek heeft zijden die 2 cm lang zijn.

Bereken de oppervlakte van de zevenhoek in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 17

Deze vorm bestaat uit een rechthoekige driehoek waaraan driekwart van een cirkel is bevestigd.
Alle afmetingen zijn in cm.

Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze vorm in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 13.13

13.3 Vectoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip vector;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90°;
- vectoren ontbinden in twee componenten met behulp van goniometrie.

Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken;
- de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de afstand). Hij is op te splitsen in een Noordelijke component en een Oostelijke component.

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.

a Bereken de Noordelijke component en de Oostelijke component met behulp van sinus en/of cosinus.

b Bereken ook de Noordelijke component bij een richtingshoek van 120°. Waarom is hij negatief?

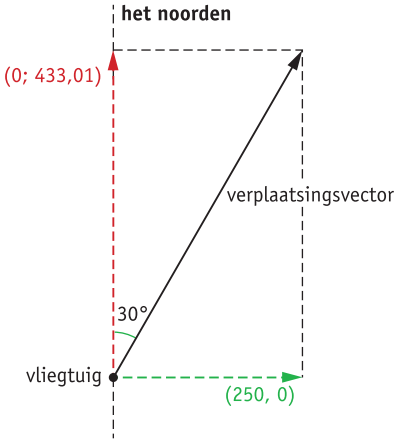
c Bij welke richtingshoeken zijn beide componenten negatief?

Uitleg

Bekijk de applet.

Wanneer zowel grootte als richting een rol speelt, gebruik je een vector. Bijvoorbeeld $\vec{v}$ om de verplaatsing van een vliegtuig weer te geven. De lengte van de verplaatsingsvector is de afstand in km, de richting is de richtingshoek ten opzichte van het noorden. Voor de verplaatsingsvector $\vec{v} = (\alpha, d)$ geldt:

- α is de hoek met het noorden;
- d is de afstand in km.



Figuur 13.1

Zo'n vector $\vec{v}$ heeft twee componenten: een noordelijke component en een oostelijke component. Deze twee componenten kun je bepalen door de vector te ontbinden in de twee richtingen (noord en oost):

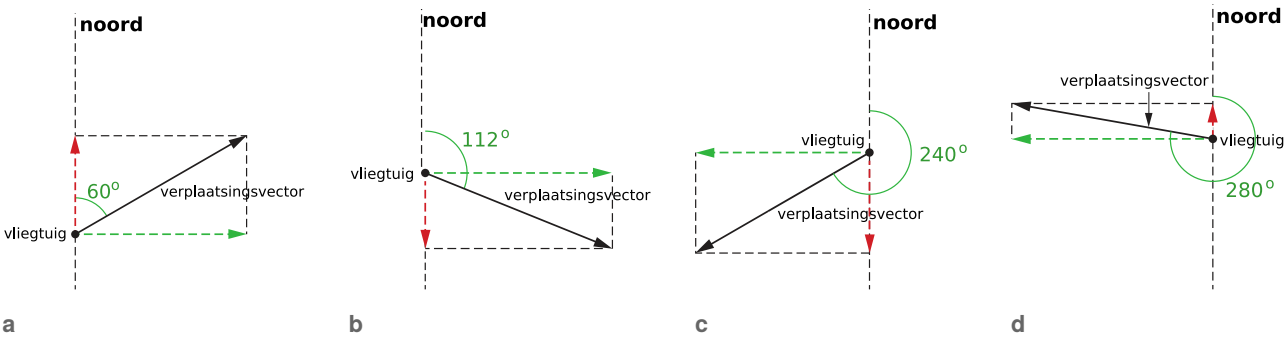
- de noordelijke component is $v_N = d \cdot \cos(\alpha)$
- de oostelijke component is $v_O = d \cdot \sin(\alpha)$

Die componenten kunnen ook negatief zijn, afhankelijk van hun richting. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.

Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Als er meerdere vliegtuigen op verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend. Toch kunnen de verplaatsingsvectoren wel gelijk zijn.

Opgave 1

Je ziet vier keer een verplaatsingsvector getekend. Ga er van uit dat elke verplaatsingsvector een lengte heeft van 40 km. Bereken bij elke situatie de lengtes van de noordelijke component en de oostelijke component. Geef met behulp van mintekens de richting aan. Rond indien nodig af op één decimaal.



Figuur 13.2

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bereken ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (met behulp van de tangens).

a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km

b noordelijke component: - 300 km, oostelijke component: 400 km

c noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 300 km

d noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: - 150 km

e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: - 100 km

f noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 0 km

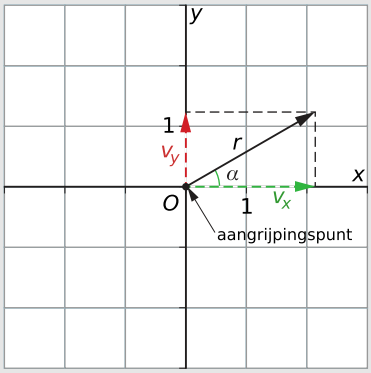
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting. Je kunt hem beschrijven door:

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector met de gekozen hoofdrichting maakt.



Figuur 13.3

In deze figuur is de hoofdrichting de positieve x-as en wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten. De vector kun je dan beschrijven door aan te geven hoe groot de x-**component** v_x en de y-component v_y zijn. De x-component is positief als hij in de positieve x-richting wijst, anders negatief. De y-component is positief als hij in de positieve y-richting wijst, anders negatief.

- $v_x = r\cos(\alpha)$
- $v_y = r\sin(\alpha)$

De lengte van deze vector is $r = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De richtingshoek kun je vanuit de componenten berekenen: $\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}$.
Hierbij gebruik je geen mintekens, maar let je goed op welke hoek je precies berekent.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben.
In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn.

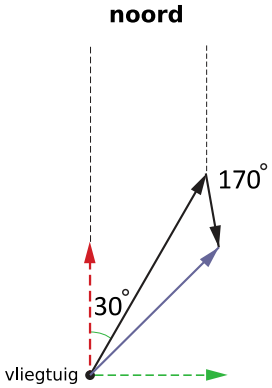
De vector die van de oorsprong O naar punt A wijst, schrijf je als $\overrightarrow{OA}$.

Voorbeeld 1

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h en een koers 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij gewond is geraakt. Er wordt een helikopter gestuurd.
Bereken de koershoek van de helikopter en de te vliegen afstand.

Antwoord

De plaats waar de piloot van koers veranderde is V en de plaats waar de noodlanding plaatsvond is N.



Figuur 13.4

De noordelijke component van $\overrightarrow{TV}$ is $420 \cdot \cos(30°) \approx 363{,}7$ km en de oostelijke component is $420 \cdot \sin(30°) = 210$ km.

De noordelijke component van $\overrightarrow{VN}$ is $180 \cdot \cos(170°) \approx -177{,}3$ en de oostelijke component is $180 \cdot \sin(170°) \approx 31{,}3$.

De noordelijke component van vector $\overrightarrow{TN}$ is ongeveer $363{,}7 + -177{,}3 = 186{,}4$ en de oostelijke component is ongeveer $210 + 31{,}3 = 241{,}3$

De helicopter moet dus ongeveer 186,4 km naar het noorden en 241,3 km naar het oosten.

Dat betekent voor de koershoek α dat $\tan(\alpha) \approx \frac{186{,}4}{241{,}3}$, zodat $\alpha \approx 37{,}7°$.

En voor de te vliegen afstand r dat $r = \sqrt{186{,}4^2 + 241{,}3^2} \approx 305$ km.

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 501** hoe je vectoren kunt optellen door ze aan elkaar te leggen.

Teken zelf de beschreven situatie op schaal 1 : 4 . 000 . 000.
Controleer de gevonden antwoorden door meting.

Opgave 4

Een piloot vertrekt met zijn vliegtuig van vliegveld T en vliegt 2 uur met een constante snelheid van 130 km/h en een koers 150° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 200° en de snelheid in 100 km/h. Na 1 uur is hij op zijn bestemming, vliegveld A.

a Bereken de ligging van vliegveld A ten opzichte van vliegveld T.

Dezelfde piloot vliegt later rechtstreeks terug van A naar T.

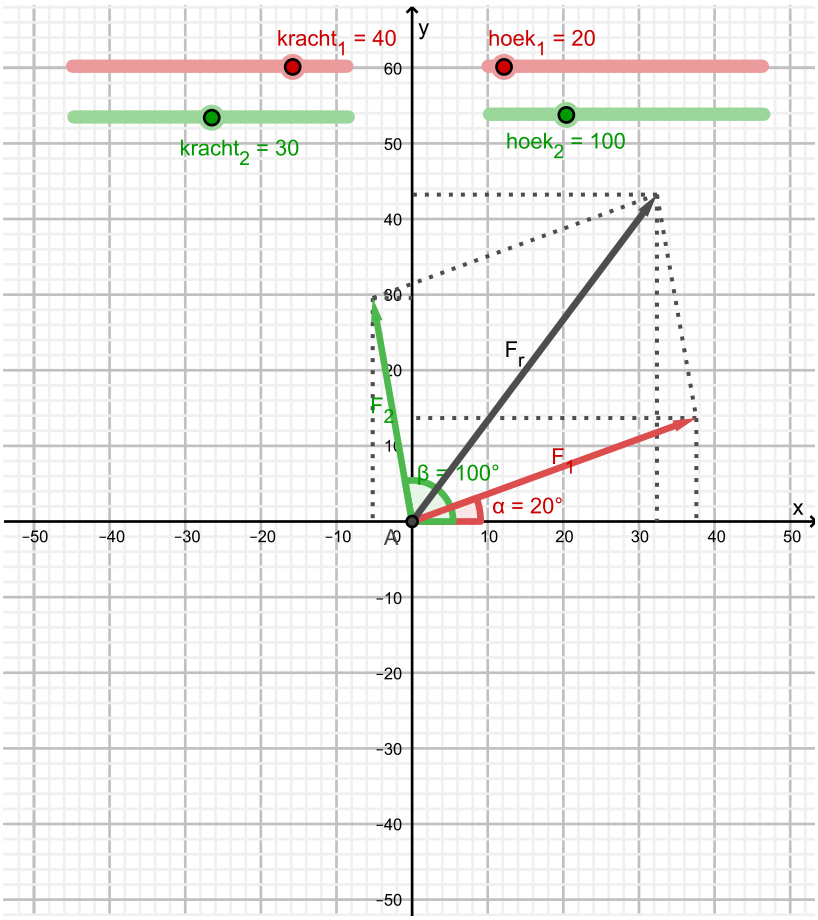
b Welke koers moet hij dan aanhouden en hoeveel km moet hij vliegen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier twee krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ die beide in punt A aangrijpen.
De krachten in N (newton) en de hoeken die de krachten maken met de positieve x-as zijn gegeven.

Bereken de resulterende kracht $\vec{F_r}$. (Geef het aantal N en de bijbehorende hoek.)



Figuur 13.5

Antwoord

Je kunt hierbij gebruik maken van de horizontale x- en de verticale y-componenten van beide krachten. Er geldt:

- $F_{1,x} = 40 \cdot \cos(20°) \approx 37{,}6$ N.
  $F_{2,x} = 30 \cdot \cos(100°) \approx -6{,}9$ N.
  Dus: $F_{r,x} \approx 37{,}6 + -6{,}9 = 30{,}7$ N.
- $F_{1,y} = 40 \cdot \sin(20°) \approx 13{,}7$ N.
  $F_{2,y} = 30 \cdot \sin(100°) \approx 29{,}5$ N.
  Dus: $F_{r,x} \approx 13{,}7 + 29{,}5 = 43{,}2$ N.

Nu je de componenten van de resultante hebt, kun je de grootte van de kracht en de grootte van de hoek berekenen:

$F_r \approx \sqrt{30{,}7^2 + 43{,}2^2} \approx 53$ N.

Uit $\tan(\gamma) \approx \frac{43{,}2}{30{,}7} \approx 1{,}407$ volgt $\gamma \approx 55°$ voor de hoek van de resultante met de positieve x-as.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 502** het berekenen van een resulterende kracht. Alle hoeken zijn ten opzichte van de positieve x-as en alle krachten hebben A als aangrijpingspunt.

a Neem de krachten $\vec{F}_1$ van 25 N en een hoek van 30° en $\vec{F}_2$ van 40 N en een hoek van 160°.
Bereken de grootte van de resultante.

De resultante die je bij a hebt gevonden heeft een negatieve x- en een positieve y-component.
De draaihoek ligt daarom tussen 90° en 180°.
Bij het berekenen van die hoek γ kun je dan beter werken met $\tan(180° - \gamma)$ omdat je dan niet met mintekens hoeft te rekenen.

b Bereken de grootte van de hoek die de resultante met de positieve x-as maakt.

c Neem de krachten $\vec{F}_1$ van 30 N en een hoek van 135° en $\vec{F}_2$ van 20 N en een hoek van 190°.
Bereken de grootte en de hoek van de resultante.

d Hoe bereken je de draaihoek γ als hij tussen 180° en 270° in ligt?

e Je kunt met de applet diverse krachten instellen.
Bereken steeds de grootte en de draaihoek van de resultante.

Oefenen

Opgave 6

Deze krachten $\vec{F}$ grijpen aan in de oorsprong van het assenstelsel. De grootte van de kracht is gegeven, evenals de draaihoek ten opzichte van de positieve x-as.
Bereken de bijbehorende x- en y-componenten. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a Grootte $F = 3$ N en richtingshoek $\alpha = 115°$.

b Grootte $F = 1$ N en richtingshoek $\alpha = 193°$.

c Grootte $F = 4$ N en richtingshoek $\alpha = 311°$.

d Grootte $F = 5$ N en richtingshoek $\alpha = 44°$.

Opgave 7

Deze krachten $\vec{F}$ grijpen aan in de oorsprong van het assenstelsel.
De bijbehorende x- en y-componenten zijn gegeven. Bereken de grootte F (in N) en de richtingshoek α ervan.

a $F_x = 12$ N en $F_y = 15$ N.

b $F_x = -10$ N en $F_y = 20$ N.

c $F_x = -10$ N en $F_y = -5$ N.

d $F_x = 15$ N en $F_y = -5$ N.

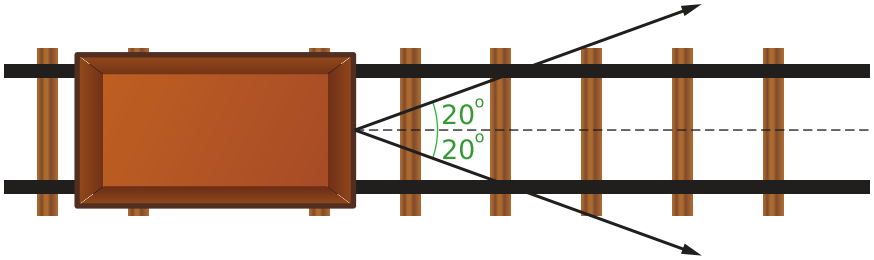
Opgave 8

Een piloot stijgt op van een vliegveld R en vliegt 20 minuten met een snelheid van 150 km/uur en een koershoek van 110° ten opzichte van het noorden. Daarna volgt het vliegtuig een kwartier een koers van 250° met een snelheid van 120 km/uur en vervolgens wordt bij T geland.

Hoeveel km is het vliegtuig van R verwijderd?
Welke koershoek moet de piloot aanhouden voor een rechtstreekse retourvlucht?

Opgave 9

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is 40°. De grootte van elke kracht is 7 N.



Figuur 13.6

a Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.

b Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van 20° ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van 15° ten opzichte van de rails.

c In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 10

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar heeft last van de stroming. Daardoor komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar op een punt B dat verder stroomafwaarts ligt. De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in vijf minuten de overkant van de rivier.
Bereken de snelheid waarmee hij AB aflegt in km/h. Rond af op drie decimalen.

Opgave 11

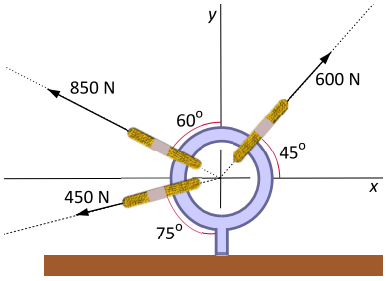
Twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ werken in hetzelfde aangrijpingspunt op een bepaald voorwerp.
Het voorwerp gaat verschuiven.
$\vec{F}_1$ is 15 N en maakt een hoek van 20° met de bewegingsrichting.
$\vec{F}_2$ maakt een hoek van 330° met de bewegingsrichting.

Hoe groot moet $\vec{F}_2$ dan zijn en hoe groot is de resultante van beide krachten?

Toepassen

Aan een ring in een balk zijn drie touwen bevestigd.
Op elk van die drie touwen werkt een bepaalde kracht, het middelpunt van de ring kun je als hun aangrijpingspunt opvatten. De hoofdrichting is de x-as die evenwijdig loopt met de balk. $\vec{F}_1$ is de kracht van 600 N, $\vec{F}_2$ die van 850 N en $\vec{F}_3$ die van 450 N.

In deze situatie kun je allerlei resultantes berekenen.



Figuur 13.7

Opgave 12

Bekijk het plaatje bij **Toepassen op pagina 505**.

a Bepaal de componenten van de krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$.

b Bepaal hiermee de resultante van $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ en ook de hoek die deze resultante met de positieve x-as maakt.

c Bereken de resultante van $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ en de bijbehorende hoek met de positieve x-as.

Testen

Opgave 13

Een schip vaart vanuit de haven in R een afstand van 120 km met een koers van 340° ten opzichte van het noorden.

Hoeveel km is het schip in noordelijke en in oostelijke richting verplaatst?

Opgave 14

Een ander schip vaart vanuit H in een rechte lijn. Het zit op zeker moment 34 km ten noorden van H en 15 km ten oosten van H.

Welke koershoek ten opzichte van het noorden heeft de kapitein aangehouden?
Hoeveel km heeft hij gevaren?

Opgave 15

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 2 uur met een constante snelheid van 180 km/h in een koers van 40° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 160° en de snelheid in 150 km/h. Na 1 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd.
Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

13.4 Sinusregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de sinusregel in (niet-rechthoekige) driehoeken.

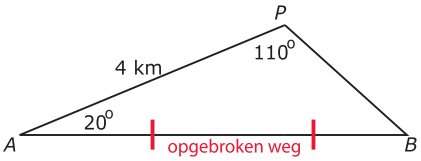
Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens toepassen;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90°.

Verkennen

Opgave V1

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°. De weg van A naar P is 4 km.



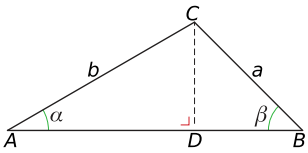
Figuur 13.1

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB?

Opgave V2

Bekijk de driehoek.

Laat zien, dat $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$ door de lengte van CD op twee manieren te berekenen.

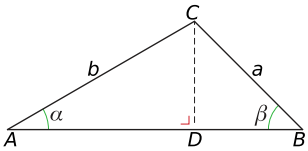


Figuur 13.2

Uitleg

Je kunt een verband afleiden tussen a, b, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\beta)$ door de hoogtelijn CD op twee manieren te schrijven:

- In ΔADC is $CD = b \sin(\alpha)$
- In ΔDBC is $CD = a \sin(\beta)$



Figuur 13.3

Dit betekent: $b \sin(\alpha) = a \sin(\beta)$.

Dit kun je schrijven als: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

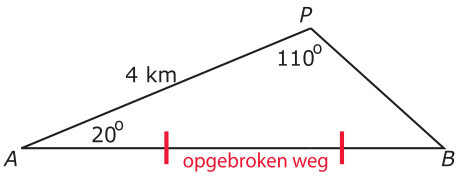
Met behulp van een andere hoogtelijn kun je ook zo'n verband tussen a, c, $\sin(\alpha)$ en $\sin(\gamma)$ afleiden. Hierin is $c = AB$ en $\gamma = \angle C$.

Dit verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek heet de ‘sinusregel’.

Opgave 1

Gebruik de sinusregel om het volgende (reeds bekende) probleem op te lossen.

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P. De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110°. De weg van A naar P is 4 km.



Figuur 13.4

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AP?

Opgave 2

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 5$ cm, $\angle A = 40°$ en $\angle C = 65°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 5$ cm, $\angle D = 40°$ en $\angle E = 65°$. Bereken de lengte van DF in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

De algemene afspraak voor het geven van namen aan onderdelen van driehoek ABC is:

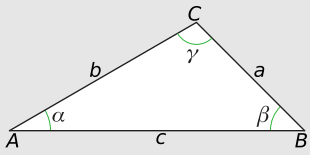
$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$; en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$

Nu kun je ook afleiden: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In elke ΔABC noem je $\angle A = \alpha$ en a is de zijde tegenover $\angle A$. Op dezelfde wijze doe je dit met de andere hoeken en zijden, zie figuur.



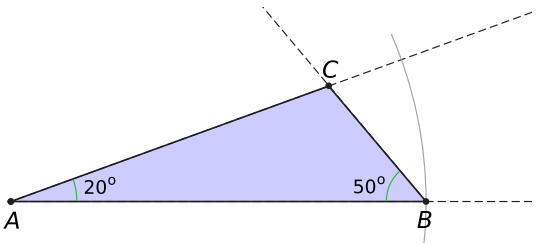
Figuur 13.5

In elke ΔABC geldt de **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $AB = 6$.
Bereken de lengte van AC.



Figuur 13.6

Antwoord

Merk eerst op dat $\angle C = 110°$.

$$\frac{AC}{\sin(50°)} = \frac{6}{\sin(110°)}$$

Hieruit volgt: $AC \approx 4{,}89$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 507** zie je de constructie van $\triangle ABC$ als gegeven is $\angle A = 20°$, $\angle B = 50°$ en $AB = 6$ cm.

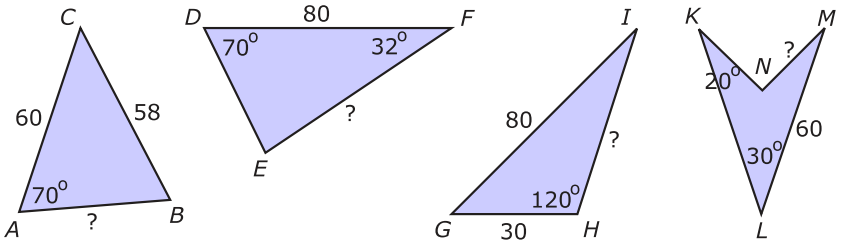
a Construeer zelf deze driehoek.

b Waarom is het voor het berekenen van de lengte van AC nodig om $\angle C$ te berekenen?

c Controleer dat inderdaad $AC \approx 4{,}89$.

Opgave 6

Bereken de zijde waar een vraagteken bij staat.



Figuur 13.7

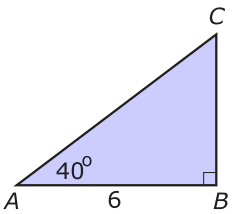
Opgave 7

Je kunt de sinusregel op meerdere manieren schrijven. Bijvoorbeeld ook zo: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Bedenk nog twee manieren waarop je de sinusregel kunt schrijven.

Opgave 8

In deze rechthoekige driehoek kun je de lengte van AC berekenen met behulp van de sinusregel.



Figuur 13.8

a Laat zien hoe dat gaat.

b Bereken AC ook zonder de sinusregel te gebruiken.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is ΔABC met $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$ en $AB = 5$.
Bereken AC en BC in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

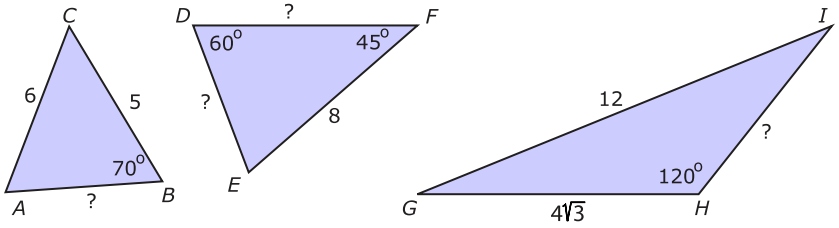
Gegeven is ΔKLM met $\angle K = 40°$, $KM = 6$ en $LM = 8$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$ in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Laat met een berekening zien dat een driehoek ABC met $AB = 12$, $AC = 8$ en $\angle B = 45°$ onmogelijk is.

Opgave 12

Bereken de zijde waar een vraagteken bij staat in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 13.9

Opgave 13

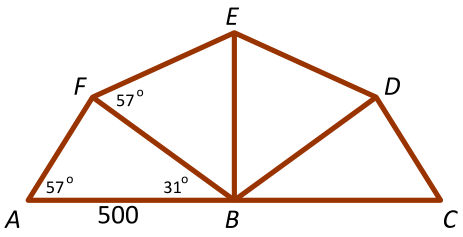
Je wilt de afstand bepalen tussen A en B, maar tussen deze punten ligt een meertje. Je gaat nu als volgt te werk:

- Vanuit punt A loop je 200 m in een richting die een hoek van 60° maakt met AB. Zo houd je droge voeten.
- Je bent op een punt dat je P noemt en meet de hoek tussen AP en PB. Die is 80°.
- Vervolgens bereken je de lengte van AB.

Laat met een tekening zien hoe dit in zijn werk gaat en bereken de lengte van AB.

Opgave 14

Dit is een symmetrische kapspant, de lengte van de gegeven balk is in cm.



Figuur 13.10

Bereken de lengte van balk BF en de afstand tussen de punten F en D in cm nauwkeurig.

Toepassen

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen, werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette ‘voorwaartse insnijding’. Deze methode werkt alleen in de ‘lagere geodesie,’ de landmeetkunde waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Opgave 15

Stel dat A en B de bekende punten zijn. Ze liggen 125,3 m uit elkaar. Je wilt de positie van P bepalen. Je meet de hoeken BAP en ABP: $\angle BAP = 68{,}3°$ en $\angle ABP = 77{,}4°$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP.

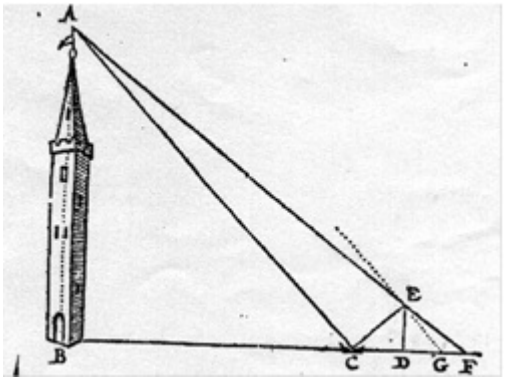
Opgave 16

Iemand wil de hoogte van een toren weten. Hij gaat een stuk van de toren vandaan staan en meet de hoek tussen de horizontale richting en de richting naar de spits van de toren (punt A). Deze hoek C is 32°. Dan loopt hij 50 m verder van de toren vandaan en meet de hoek naar de top opnieuw; de nieuwe hoek D is nu 15°.

a Maak een schets van deze situatie met de gegevens die bekend zijn. Ga er daarbij vanuit dat beide hoeken op 1,80 m boven de grond zijn gemeten.

b Bereken de hoogte van de toren in meter nauwkeurig. (Opmerking: er is een oplossing van dit probleem waarbij je de sinusregel gebruikt, maar er is ook een oplossing te bedenken waarbij dit niet hoeft. Kun je beide oplossingen vinden?)

De Nederlandse meetkundige Sybrandt Hansz. Cardinael (1578–1647) bedacht een manier om de hoogte van een toren te bepalen. Je hebt er zelfs geen hoeken voor nodig. Hier zie je hoe hij te werk ging. De toren is AB en er ligt een spiegel op de grond in C. Je zet bij D een verticale stok DE zo, dat de top A van de toren in de spiegel gezien kan worden vanuit E. Vervolgens bepaal je de plaats van punt F zo, dat vanuit F de top A juist boven de stok DE in het verlengde van FE gezien kan worden. Als je de lengtes van CD, DE en DF kent, kun je de hoogte van de toren AB berekenen.



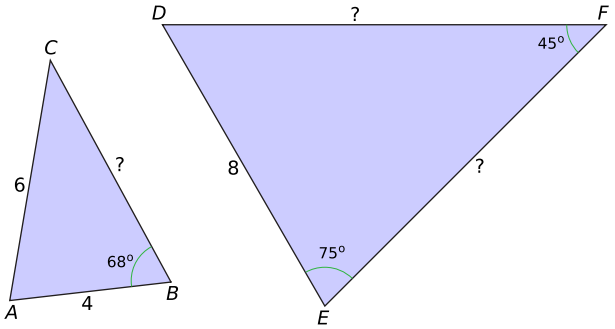
Figuur 13.11

c Bereken de hoogte van de toren als $CD = 8$, $DE = 6$ en $DF = 9$.

Testen

Opgave 17

Bereken in de twee onderstaande figuren de lengte van het lijnstuk waar een vraagteken bij staat in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 13.12

13.5 Cosinusregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de cosinusregel in (niet-rechthoekige) driehoeken.

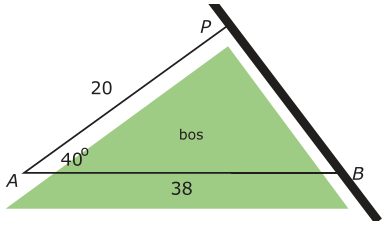
Voorkennis

- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras toepassen;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens en de sinusregel toepassen;
- werken met goniometrie bij hoeken die groter zijn dan 90°.

Verkennen

Opgave V1

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.



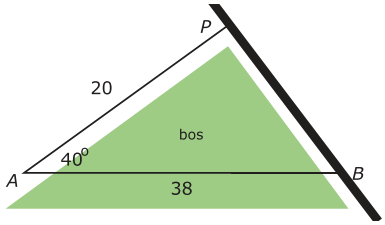
Figuur 13.1

a Bereken hoeveel verschil er is tussen de route AB door het bos en de route van A naar B via P en het fietspad.

b Waarom lukt dit met de sinusregel niet?

Uitleg

Bij een crosscountry-wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is een route rechtstreeks door het bos van A naar B. De tweede mogelijkheid is een route via punt P en een geasfalteerd fietspad. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. Het pad van A naar P is 20 m, dat van A naar B is 38 m.



Figuur 13.2

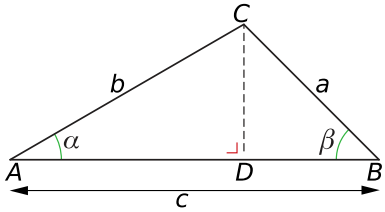
Nu is de sinusregel niet bruikbaar. Je kunt dit alleen oplossen door een hoogtelijn PD op AB te tekenen. Dat is nog behoorlijk wat rekenwerk. Handiger is het om de cosinusregel te gebruiken in ΔABP.

In elke driehoek ABC geldt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

In de driehoek bij de crosscountry-wedstrijd is $C = P$ en dus $\alpha = 40°$, $PB = a$, $AB = c$ en $AP = b$.

Even invullen en je vindt $PB = a \approx 26{,}1$ m.



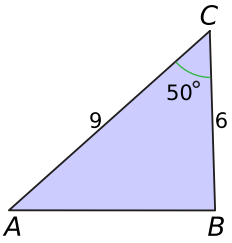
Figuur 13.3

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 511** wat de cosinusregel is. Laat zien hoe je aan de lengte van PB komt met behulp van de cosinusregel.

Opgave 2

Bekijk driehoek ABC. Twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven.



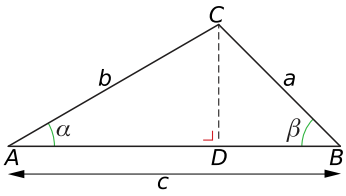
Figuur 13.4

a Hoe ziet de cosinusregel bij de gegeven hoek eruit?

b Bereken de derde zijde van deze driehoek.

Opgave 3

Wil je in deze figuur a uitrekenen terwijl α, b en c bekend zijn, dan lukt dit niet met behulp van de sinusregel. Je kunt echter een verband afleiden tussen a, α, b en c.



Figuur 13.5

a Laat zien, dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.

b Laat zien dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$ door haakjes weg te werken.

c Laat tenslotte zien, dat $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

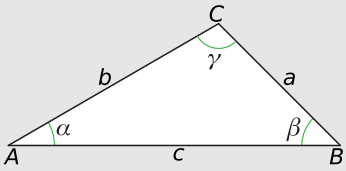
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In elke ΔABC geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

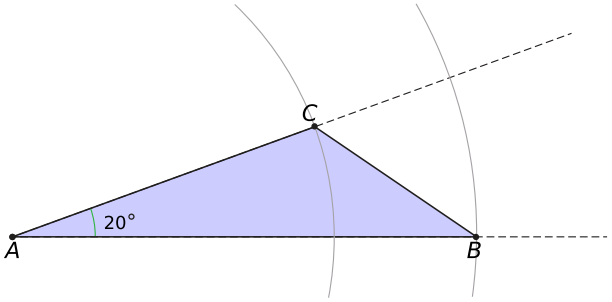
Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.



Figuur 13.6

Voorbeeld 1

Bekijk de constructie van ΔABC met $\angle A = 20°$, $AB = 6$ en $AC = 4$. Bereken de lengte van BC.



Figuur 13.7

Antwoord

Cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Dit geeft: $BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(20°) = 6{,}89....$

Hieruit volgt: $BC \approx 2{,}6$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 512** zie je de constructie van ΔABC als gegeven is $\angle A = 20°$, $AB = 6$ cm en $AC = 4$ cm.

a Construeer zelf deze driehoek.

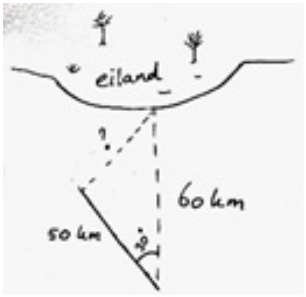
b Controleer met de cosinusregel dat inderdaad $BC \approx 2{,}63$.

Opgave 5

Laat zien dat de stelling van Pythagoras een speciaal geval is van de cosinusregel.

Opgave 6

Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip vergaat. Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren gegaan. Natuurlijk probeer je rechtstreeks naar het eiland te peddelen, maar zodra je begonnen bent, komt er een dichte mist op. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je het in de gaten hebt, staat er een stroming die ervoor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naartoe gepeddeld was. Saskia maakte deze schets van de situatie.



Figuur 13.8

Hoe ver ben je in werkelijkheid van het eiland af?

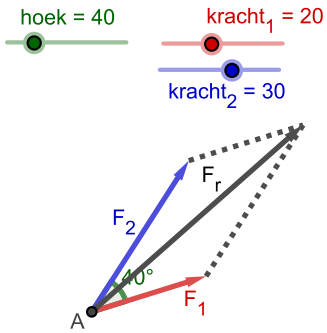
Opgave 7

Van een ΔABC is gegeven dat $AB = 10$, $AC = 6$ en $\angle C = 60°$. Gebruik de cosinusregel om de lengte van zijde BC uit te rekenen.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ die beide in hetzelfde punt A aangrijpen.
Ze maken een gegeven hoek met elkaar.
En hun groottes zijn in N gegeven.



Figuur 13.9

Bereken de grootte van de resulterende kracht F_r.

Antwoord
Noem het eindpunt van $\vec{F}_1$ punt B en dat van $\vec{F}_r$ punt C.

In ΔABC is $\angle B = 180° - 40° = 140°$

Cosinusregel: $F_r^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos(140°)$.

Dus: $F_r \approx 47{,}1$ N.

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 514** de berekening van de grootte van de resultante F_r.

a Waarom is $\angle B = 180° - 40°$?

b Voer zelf de berekening uit.

c Bereken ook de hoek die $\vec{F}_r$ met $\vec{F}_1$ maakt.

Opgave 9

Gegeven de vectoren $\vec{F}_1$ met grootte 35 N en $\vec{F}_2$ met grootte 15 N.
Ze grijpen beide aan in hetzelfde punt onder een hoek van 63°.
$\vec{F}_r$ is hun resultante.

Bereken de grootte van $\vec{F}_r$ en de hoek die $\vec{F}_r$ maakt met $\vec{F}_1$.

Oefenen

Opgave 10

Elke ΔABC heeft zes afmetingen, te weten:

- de lengtes van de zijden $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$
- de hoeken $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

Hier zijn steeds drie maten van ΔABC gegeven. Bereken de andere maten met de sinusregel of de cosinusregel.

a $a = 8$, $b = 5$ en $\gamma = 65°$

b $a = 8$, $b = 5$ en $\alpha = 65°$

c $c = 150$, $\gamma = 120°$ en $\beta = 45°$

d $a = 6, b = 10$ en $c = 8$

e $a = b = 15$ en $\gamma = 20°$

Opgave 11

Laat met een berekening zien dat een gelijkbenige driehoek ABC met $\angle A = \angle B$, $\angle C = 20°$, $AC = 10$ en $AB = 5$ onmogelijk is.

Opgave 12

Gegeven de vectoren $\vec{F}_1$ met grootte 520 N en $\vec{F}_2$ met grootte 340 N.
Ze grijpen beide aan in hetzelfde punt onder een hoek van 100°.
$\vec{F}_r$ is hun resultante.

Bereken de grootte van $\vec{F}_r$ en de hoek die $\vec{F}_r$ maakt met $\vec{F}_1$.

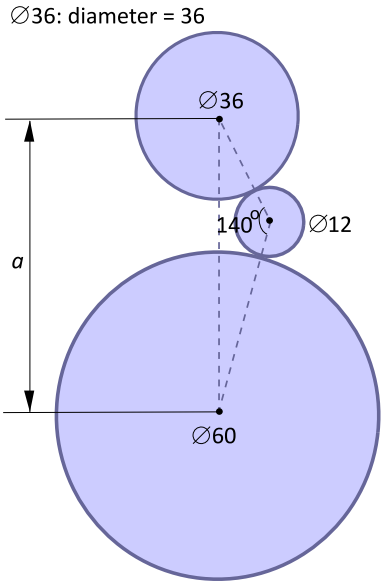
Opgave 13

Je gaat op ballonvaart. De weersvoorspelling geeft aan dat de windrichting je van punt A rechtstreeks naar punt B brengt. Je legt 7 km per uur af. Zonder dat je dat weet, staat de windrichting niet zoals voorspeld, zodat je 25° uit koers raakt. Na 5 uur zou je nog 15 km van punt B verwijderd moeten zijn als je er inderdaad recht naartoe gezweefd was.
Hoe ver ben je er in werkelijkheid vanaf? Maak eventueel eerst een schets.

Opgave 14

Je ziet hier twee tandwielen met een tussentandwiel.
Alle lengtematen zijn in mm.

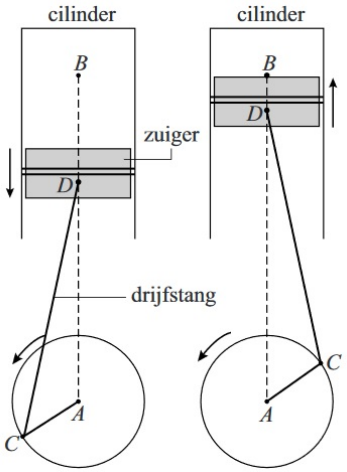
Bereken de grootte van de straal a van het grote tandwiel in mm nauwkeurig.



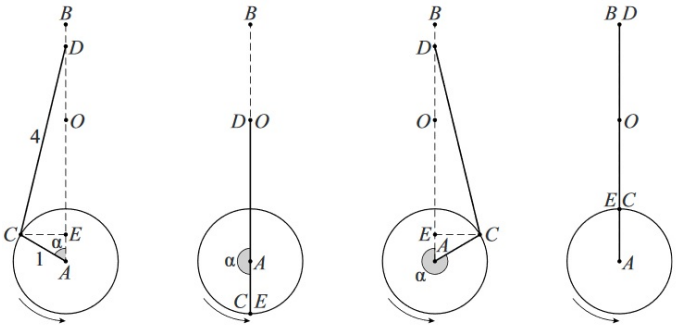
Figuur 13.10

Toepassen

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In de eerste figuur zijn twee standen getekend.
In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.
In de tweede figuur zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 dm heeft.
De grootte van hoek CAD (in graden) is α.
De grootte van hoek ACD (in graden) is γ.
Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.



Figuur 13.11



Figuur 13.12

Je kunt nu de lengte van AD bij allerlei hoeken α of γ berekenen.

Opgave 15

Bekijk de figuren hierboven. Alle afmetingen zijn in dm.

a Bereken AD als $\gamma = 110°$ in mm nauwkeurig.

b Bereken AD als $\alpha = 55°$ in mm nauwkeurig.

Opgave 16

De zuiger kent een stand waarbij AD maximaal is en een stand waarbij AD minimaal is.

a Tussen welke waarden ligt de lengte van AD?

b Hoe groot zijn AD en γ als $\alpha = 100°$?

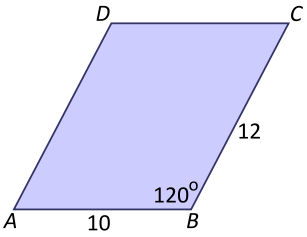
Testen

Opgave 17

Van een driehoek ABC is gegeven $AC = b = 12$, $AB = c = 15$ en $\angle A = \alpha = 55°$. Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

Je ziet hier parallellogram $ABCD$ met $AB = 10$, $BC = 12$ en $\angle B = 120°$.



Figuur 13.13

a Bereken AC in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de oppervlakte van het parallellogram in één decimaal nauwkeurig.

13.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp gaat het over gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel. Dit wordt toegepast op het berekenen van omtrek en oppervlakte en het in componenten verdelen van vectoren.

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- gelijkvormig — stelling van Pythagoras — sinus, cosinus, tangens
- omtrek — oppervlakte — oppervlakteformule
- vector — componenten van een vector
- sinusregel
- cosinusregel

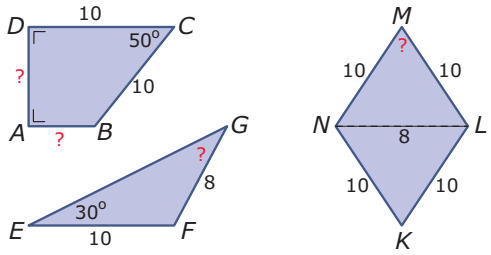
Activiteitenlijst

- in rechthoekige driehoeken gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie gebruiken;
- omtrek en oppervlakte van (samengestelde) figuren berekenen;
- werken met hoeken boven de 90° — vectoren in componenten ontbinden en dit toepassen;
- de sinusregel gebruiken voor berekeningen in (niet-rechthoekige) driehoeken;
- de cosinusregel gebruiken voor berekeningen in (niet-rechthoekige) driehoeken.

Testen

Opgave 1

Bereken in de volgende figuren alle lijnstukken en hoeken waar een vraagteken bij staat. Bereken de lengtes van de lijnstukken in één decimaal en de hoeken in graden nauwkeurig.



Figuur 13.1

Opgave 2

Er wordt op Cape Canaveral een raket gelanceerd. De raket stijgt 8 km loodrecht op en krijgt dan een koerscorrectie, waarna hij 5 km onder een hoek van 40° met zijn oorspronkelijke richting vliegt. Dan wordt een deel van de raket afgestoten. Dit deel keert onder een hoek van 120° met de vorige vliegrichting terug naar de aarde.

Hoe ver van het vertrekpunt komt dit afgestoten deel van de raket in zee terecht? (Neem voor het gemak aan dat de aarde plat is.)

Opgave 3

Twee krachten van 56 N en 31 N grijpen in hetzelfde punt aan en maken een hoek van 141° met elkaar.

Bereken resultante van beide krachten.

Opgave 4

Bereken alle overige zijden en hoeken van ΔABC als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig):

a $a = 5, b = 6$ en $\gamma = 120°$

b $a = 5, b = 6$ en $\beta = 120°$

c $c = 12, \alpha = 50°$ en $\beta = 60°$

d $a = 12, b = 6$ en $\alpha = 90°$

e $a = c = 10$ en $\gamma = 81°$

Opgave 5

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenoverliggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat, zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB. Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65°$ en $\angle ABP = 54°$.

Opgave 6

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan, is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,5 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Toepassen

Opgave 7: Oppervlakte van een rechthoek

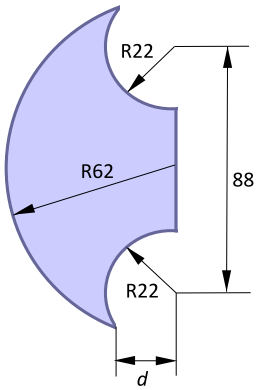
Van een rechthoek is de omtrek 20 cm en maken de diagonalen een hoek van 40° met elkaar.

Hoe groot is de oppervlakte van die rechthoek? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 8: Bijzonder plaatje

Je ziet hier een symmetrische figuur die uit delen van cirkels bestaat.
Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de lengte van d in tienden van mm nauwkeurig.



Figuur 13.2

14

Ruimtelijke figuren

14.1 Lichamen 522
14.2 Aanzichten 530
14.3 Doorsneden 540
14.4 Oppervlakte en inhoud 548
14.5 Totaalbeeld 556

14.1 Lichamen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren.

Voorkennis

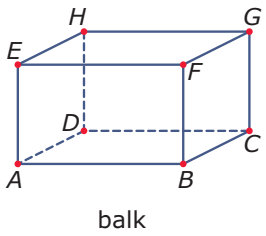
- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- werken met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens, de sinusregel en de cosinusregel.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm en $AE = 5$ cm.

Bereken $\angle CAG$.



balk

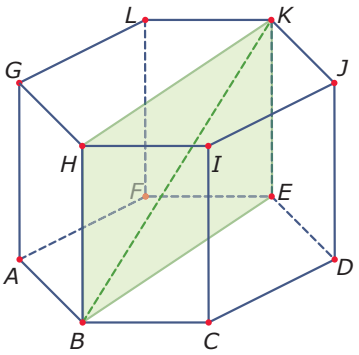
Figuur 14.1

Uitleg

Het probleem bij **Verkennen V1 op pagina 522** heb je waarschijnlijk wel meteen kunnen oplossen. Daarbij heb je dan gebruik gemaakt van kennis over ruimtelijke figuren. Je moet weten wat een balk is, waar de rechte hoeken in een balk zitten, en dergelijke meer.

Je noemt een ruimtelijke figuur vaak een lichaam. Zo'n lichaam heeft één of meer grensvlakken, die vaak plat, maar ook gebogen kunnen zijn. Gebogen grensvlakken heb je bij een bol, een kegel, een cilinder.

Lichamen die alleen uit platte grensvlakken bestaan heten veelvlakken. Deze hebben hoekpunten en ribben. Ook zijn er dan vaak diagonalen in twee soorten: zijvlaksdiagonalen en lichaamsdiagonalen.
Het veelvlak $ABCDEF.GHIJKL$ hiernaast bijvoorbeeld heet een regelmatig zeshoekig prisma. Dat komt omdat van dit lichaam:



Figuur 14.2

- het grondvlak en het bovenvlak congruente regelmatige zeshoeken zijn;
- alle opstaande zijvlakken rechthoeken zijn.

In feite is elke doorsnede van dit lichaam die evenwijdig is met het grondvlak een regelmatige zeshoek. Verder zie je diagonaalvlak $BEKH$ met daarin lichaamsdiagonaal BK.

In de **Theorie op pagina 524** vind je een overzicht van de belangrijkste lichamen en hun eigenschappen. Ook worden er de rekentechnieken die je al kent nog eens genoemd.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 522**. Je ziet er een voorbeeld van een prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn.

a Hoeveel hoekpunten, hoeveel ribben en hoeveel grensvlakken heeft dit prisma?

b Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma? En hoeveel lichaamsdiagonalen?

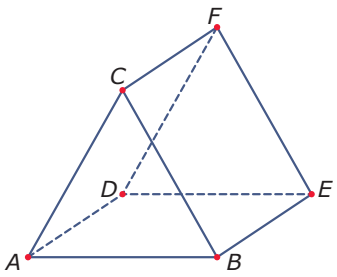
c Teken het grondvlak van dit prisma op ware grootte. Leg uit, waarom diagonaal $BE = 8$ cm en diagonaal $BF = 4\sqrt{3}$ cm.

d Teken het diagonaalvlak $BEKH$ op ware grootte. Bereken de grootte van $\angle EBK$ in graden nauwkeurig.

e Teken het diagonaalvlak $BFLH$ op ware grootte en bereken de grootte van $\angle FBL$ in graden nauwkeurig.

Opgave 2

Je ziet hier een ander prisma, de figuur staat ook op het **werkblad**. Hier zijn het voorvlak en het achtervlak congruente gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm. Alle andere grensvlakken zijn vierkanten.



Figuur 14.3

a Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?

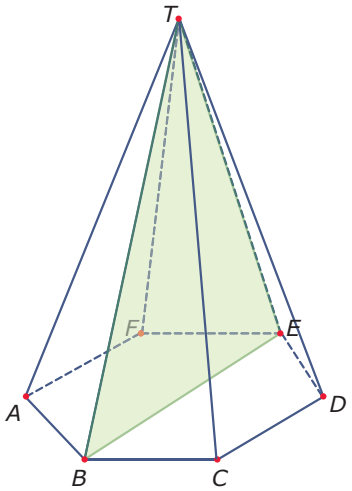
b Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma?

c M is het midden van ribbe CF. Teken ΔABM zowel in de figuur als op ware grootte.

d Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 3

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. Alle opstaande ribben zijn 24 cm.



Figuur 14.4

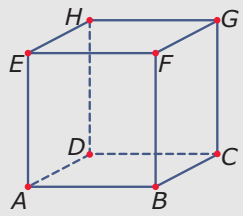
a Heeft deze piramide lichaamsdiagonalen? En zijvlaksdiagonalen? En diagonaalvlakken?

b Bereken de grootte van $\angle BTE$ in graden nauwkeurig.

c Bereken de grootte van $\angle BTF$ in graden nauwkeurig.

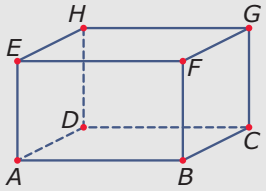
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



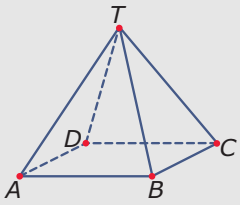
kubus

Alle ribben even lang, alle grensvlakken zijn vierkanten.



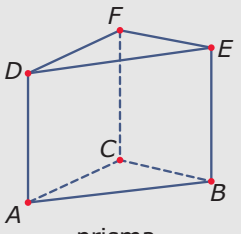
balk

Alle grensvlakken zijn rechthoeken (of vierkanten).



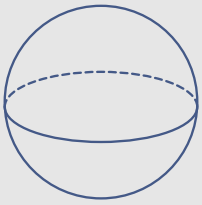
piramide

Eén grondvlak (een veelhoek), alle andere grensvlakken zijn driehoeken die samen komen in de top T.



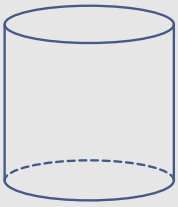
prisma

Twee overstaande congruente veelhoeken, alle andere grensvlakken zijn rechthoeken (of parallellogrammen als het prisma scheef is).



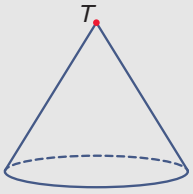
bol

Alle punten op de bol liggen even ver (de straal) van het middelpunt van de bol.



cilinder

Twee grensvlakken zijn congruente cirkels, daartussen zit één gebogen buisvormig grensvlak.



kegel

Het grondvlak is een cirkel en daarop staat één gebogen vlak met top T.

Figuur 14.5

Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken. Je ziet hier een overzicht van enkele veel voorkomende lichamen.

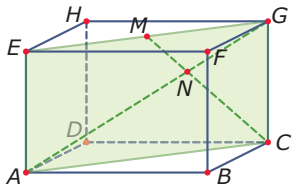
Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**. Piramides en prisma's hebben een **grondvlak** en een **hoogte**.
Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdiagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken;
- de sinusregel en de cosinusregel in willekeurige driehoeken.

Voorbeeld 1

Hier zie je een balk $ABCD.EFGH$. In het diagonaalvlak $ACGE$ is de lichaamsdiagonaal AG getekend. Ook zie je daarin lijnstuk AM, waarbij M het midden van EG is. In deze figuur is $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 5$ cm.



Figuur 14.6

Bereken de lengte van lijnstuk CN in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Het lijnstuk waarvan je de lengte wilt berekenen ligt in diagonaalvlak $ACGE$ en dat is een rechthoek met zijden $AC = 10$ cm en $CG = 5$ cm.

Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je de lengte van zowel AG als CM berekenen. En dan kun je met gelijkvormigheid werken. Zie je al welke driehoeken gelijkvormig zijn?

Je vindt $CN \approx 4{,}71$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 525**.

a Leg uit waarom $AC = 10$ cm.

b Bereken nu zelf de lengtes van AG en CM.

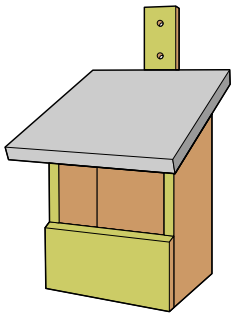
c Welke twee gelijkvormige driehoeken vind je in diagonaalvlak $ACGE$? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

d Bereken de lengte van CN.

e Je kunt de lengte van CN ook berekenen door bijvoorbeeld in ΔACN de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe je dan te werk gaat.

Opgave 5

Je ziet de nestkast van een torenvalk.
Het met zink beklede dak is een vierkant van 6 cm bij 6 cm.
De achterwand is een rechthoek van 5 bij 8 cm en het grondvlak een rechthoek van 5 bij 4 cm. Van de voorkant van de nestkast is de onderste helft dichtgemaakt met een rechthoekig plankje van 5,6 bij 3,3 cm. De plankjes en het zinken dak zijn 3 mm dik.


Figuur 14.7

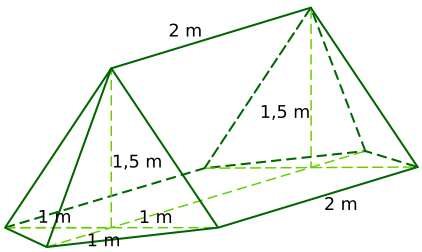
a Welke naam heeft het lichaam dat de binnenruimte van deze nestkast voorstelt?

b Hoe groot zijn de zijden van een zijwand van deze nestkast?

c Hoe groot zijn de hoeken van een zijwand van deze nestkast?

Voorbeeld 2

Deze tekening stelt een tent voor. De afmetingen zijn in de figuur gegeven. Ga er van uit dat de lichter gekleurde stippellijnen in een snijpunt loodrecht op elkaar staan.



Figuur 14.8

Welke ruimtelijke figuren herken je in de vorm van deze tent?
Aan de voorzijde zie je twee schuin staande driehoeken. Bereken daarvan de afmetingen.

Antwoord

De figuur bestaat uit twee halve piramides aan de voorkant en de achterkant. Het middenstuk is een driehoekig prisma.

De afmetingen van de zijden van zo'n driehoek zijn met behulp van de stelling van Pythagoras te berekenen.

Ga na, dat het een gelijkbenige driehoek is met benen van $\sqrt{3{,}25} \approx 1{,}80$ m en een basis van $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ m.

Opgave 6

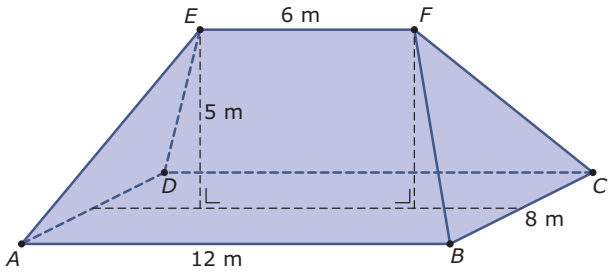
Bekijk de tent in **Voorbeeld 2 op pagina 526**. Hij heeft ook een grondzeil dat de hele bodem bedekt.

a Bereken zelf de afmetingen van één van de driehoeken aan de voorkant.

b Teken een uitslag van de tent.

Opgave 7

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD.



Figuur 14.9

a Laat zien hoe je de figuur kunt verdelen in een prisma en twee piramides die je kunt samenvoegen tot één vierzijdige piramide. Wordt dit een regelmatige vierzijdige piramide?

b Bereken de lengtes van de vier opstaande ribben van dit stolpdak.

c Bereken de drie hoeken van elk van de twee driehoekige dakdelen.

d Bereken de vier hoeken van elk van de twee trapeziumvormige dakdelen.

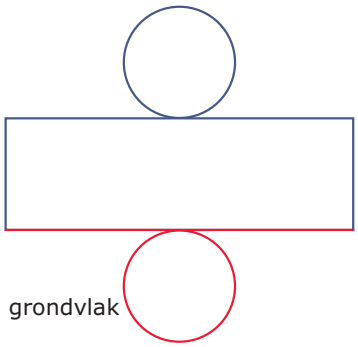
Voorbeeld 3

Een verpakking is vaak een hol lichaam dat in zijn vorm wordt gevouwen vanuit een uitslag. (Meestal is het meer een bouwplaat, een uitslag met plakranden en allerlei extra's om de vorm stevig te houden.)

Hoe ziet een uitslag van een cilindrisch blik met een diameter van 8,6 cm en een hoogte van 8,6 cm er uit?

Antwoord

Als een rechthoek met een lengte die net zo groot is als de omtrek van de grondcirkel en een breedte van 8,6 cm. Daar zitten dan twee cirkels met een diameter van 8,6 cm aan vast, eentje aan de bovenkant en eentje aan de onderkant.



Figuur 14.10

Opgave 8

Teken de uitslag van de cilinder beschreven in **Voorbeeld 3 op pagina 527** op schaal 1 : 2.

Opgave 9

Uit een plaat koper is een halve cirkel gesneden met een diameter van 12 cm.
Deze plaat koper wordt tot een kegelvorm gebogen.
Hoe hoog wordt die kegel en welke diameter heeft het grondvlak?

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ met zijden van 4,5 cm.

Bereken de grootte van de hoeken HBD en FCA.

Opgave 11

Piramide $ABCD.T$ heeft vier gelijke opstaande ribben van 10 cm. Het grondvlak is een rechthoek met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm.

a Bereken de hoogte van deze piramide.

b Bereken de grootte van de hoeken ATC en BAT.

Opgave 12

Balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 4$, $AD = 3$ en $AE = 3$. Punt S is het snijpunt van alle lichaamsdiagonalen.

a Bereken $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.

b Bereken $\angle ASC$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

Figuur 14.11

a Welke ruimtelijke figuur stelt het doosje bij benadering voor?

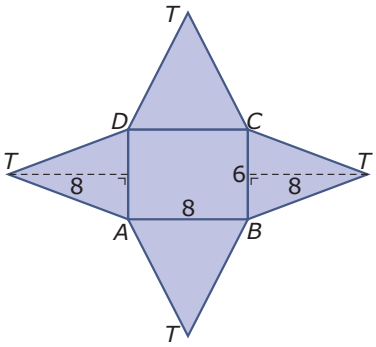
b Hoe groot zijn de hoeken van de achthoekige bodem van zo'n doosje?

c Hoe groot is het langste rechte staafje dat je nog op de bodem van dit doosje kunt leggen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

d Hoe groot is het langste rechte staafje dat in dit doosje past?

Opgave 14

Je ziet hier de uitslag van een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.



Figuur 14.12

a Hoe lang zijn de ribben van deze piramide?

b Hoe hoog wordt deze piramide?

Opgave 15

Je ziet hier het bovenste deel van een lantaarnpaal.
De diameter van de buis van de lantaarnpaal vlak onder de lamp is 16 cm. De lamp zit in een afgeknotte kegel van kunststof. Daar zit nog een smalle cilindervorm met een diameter van 60 cm boven. De afgeknotte kegel wordt gemaakt uit een kunststofplaat in de vorm van een halve cirkel met een diameter van 120 cm waaruit een kleinere halve cirkel met hetzelfde middelpunt is weggesneden.

Figuur 14.13

Hoe groot is de diameter van die kleinere cirkel en hoe hoog is de afgeknotte kegel?

Toepassen

Deze robotarm kan van alles: lasersnijden, 3D-printen, decoraties aanbrengen, etc.
Je moet op de plek van het oog alleen het juiste instrumentje aanbrengen.

Figuur 14.14

De robotarm kan ronddraaien op zijn voet en heeft drie scharnierpunten.
De posities die het oog zo kan aannemen vormen de werkruimte van de robotarm. Die werkruimte heeft de vorm van een (deel van) een lichaam, een 3D-figuur.

Opgave 16

Bekijk de tekst over de robotarm. De twee delen van de arm zijn 50 cm lang.

a Welk lichaam beschrijft de werkruimte van deze robotarm als de voet ervan bevestigd is op een tafel?

b Welk lichaam beschrijft de werkruimte van deze robotarm als de voet ervan kan bewegen op een stuk rails van 50 cm lengte?

Opgave 17

Deze robotarm bestaat uit de buis die een half rondje om zijn as kan draaien en waarbinnen een voetstuk op en neer kan bewegen. Aan dat voetstuk is een scharnierende arm bevestigd. Aan het eind van die arm bevestig je een een pen, een boor, een naald, een printkop, etc. Enkele afmetingen:

- het op en neer gaande voetstuk kan van 5 cm boven het grondvlak tot 25,4 cm boven het grondvlak bewegen;
- het op en neer gaande voetstuk steekt 6 cm uit vanaf de as van de buis;
- de scharnierende arm is 10 cm lang en heeft een hoogte van 5 cm.

Figuur 14.15

De werkruimte van deze robot bestaat uit alle mogelijke posities van het eindpunt van de scharnierende arm.

a Hoe ver kan het eindpunt van de scharnierende arm vanaf de as van de buis komen?

b Beschrijf de vorm van de werkruimte.

Testen

Opgave 18

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 4 cm. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD en $TS = 10$ cm. Punt M is het midden van TS.

a Teken deze piramide met daarin een lijn door M evenwijdig aan BD. Noem de snijpunten met TB en TD respectievelijk P en Q.

b Bereken de lengte van AP en PQ.

c Teken ΔAPQ op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Opgave 19

Een kegel wordt gevormd uit een halve cirkel met een diameter van 40 cm.
Hoe hoog wordt die kegel in mm nauwkeurig?

14.2 Aanzichten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- aanzichten gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

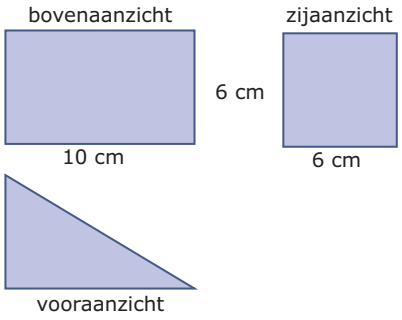
Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Dit zijn drie aanzichten van een lichaam.

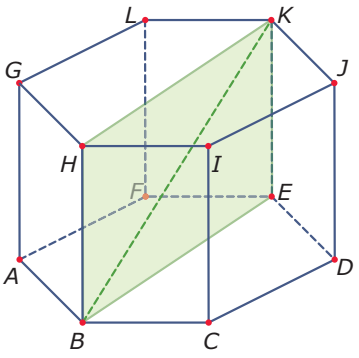


Figuur 14.1

Om wat voor lichaam gaat het hier? Maak er een uitslag van en beschrijf de daarvoor noodzakelijke berekeningen.

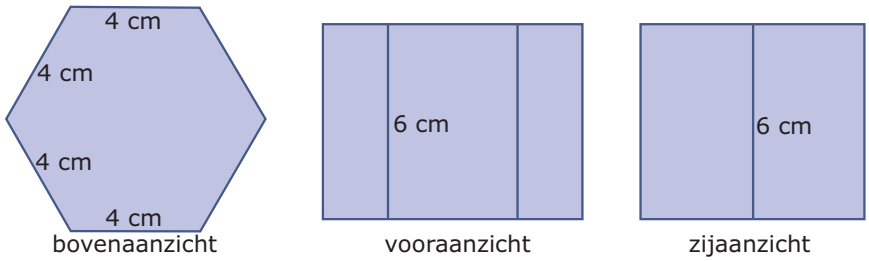
Uitleg

Dit is het regelmatige zeszijdige prisma $ABCDEF.GHIJKL$. In zo'n regelmatig lichaam zijn veel ribben en diagonalen gelijk aan elkaar. Toch blijkt daar in de figuur niet zoveel van. Als je zou gaan meten zijn AB, BC en CD zeker niet gelijk, dat komt door de tekening in parallelprojectie. In een parallelprojectie worden alleen even lange lijnstukken die evenwijdig lopen ook weer even lang.



Figuur 14.2

Soms helpt het om dan aanzichten van een lichaam te gebruiken. Een drieaanzicht zoals dat hieronder laat het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht van het lichaam zien. Daarin zie je allerlei grensvlakken in de juiste vorm en op ware grootte.



Figuur 14.3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 530**. Je ziet er een regelmatig zeszijdig prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn. Op het **werkblad** bij deze opgave zie je de aanzichten van het prisma met enkele hoekpunten erbij aangegeven.

a Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?

b Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?

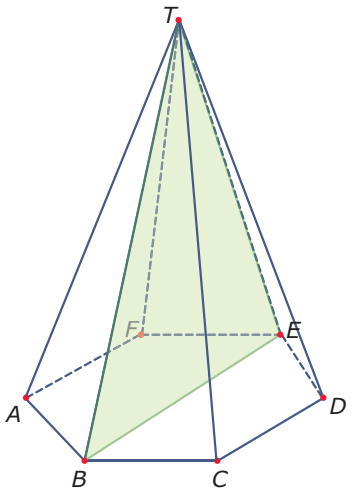
c In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?

d Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.

e Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Opgave 2

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 12 cm.



Figuur 14.4

a Bereken de hoogte van deze piramide.

b Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide op schaal 1 : 2.

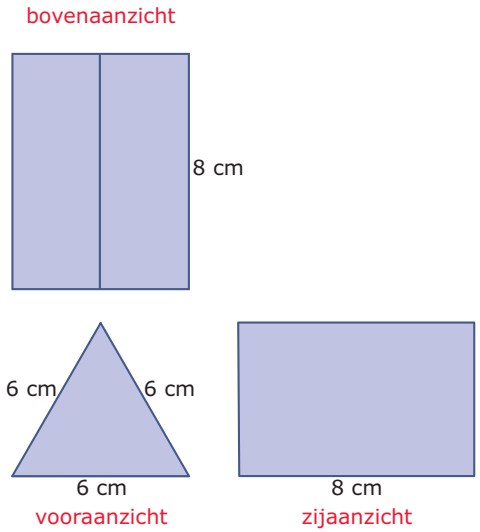
c Zet de letters van de hoekpunten op de goede plaats in de aanzichten.

d Welke opstaande ribben worden op ware grootte weergegeven? En in welk aanzicht?

e Geef het getekende diagonaalvlak in de aanzichten weer.

Opgave 3

Je ziet hier een drieaanzicht van een lichaam. De figuur staat ook op een **werkblad**.



Figuur 14.5

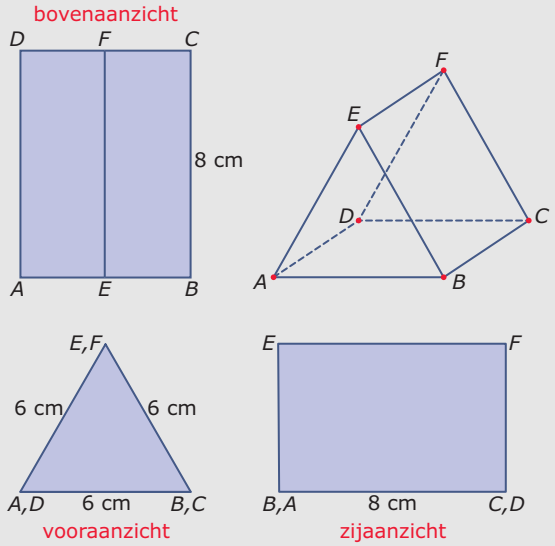
a Om wat voor lichaam gaat het hier?

b Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?

c De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 14.6

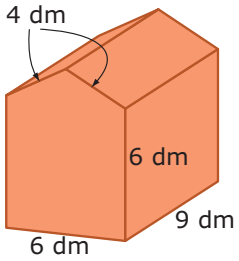
Je ziet hier een regelmatig driezijdig prisma $ABE.DCF$. Dit lichaam is getekend als **parallelprojectie**. Dit betekent dat evenwijdige lijnen ook evenwijdig worden getekend en dat lijnstukken die evenwijdig en even lang zijn ook evenwijdig en even lang worden.

Maar er is ook een **drieaanzicht** van getekend. Dat is een combinatie van een **vooraanzicht**, een **bovenaanzicht** en een **zijaanzicht**. In aanzichten zie je meestal veel afmetingen op ware grootte, je kunt er beter metingen in verrichten dan in een parallelprojectie. Wel is het soms lastig om op basis van aanzichten te herkennen om wat voor figuur het gaat.

Voorbeeld 1

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

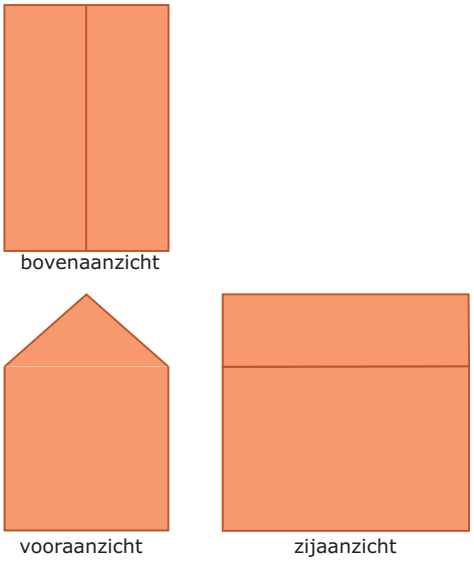
Teken een drieaanzicht van deze doos.



Figuur 14.7

Antwoord

Van het bovenaanzicht weet je alle afmetingen, dus dat kun je meteen tekenen. Van het vooraanzicht weet je ook alle afmetingen en als je dan van de symmetrie gebruik maakt en de passer gebruikt voor de twee zijden van 4 dm, dan kun je ook dat tekenen. Het zijaanzicht vind je door vooraanzicht en bovenaanzicht te combineren.



Figuur 14.8

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 532** wordt een drieaanzicht van een doos getekend.

a Teken dit drieaanzicht zelf op schaal 1 : 20.

De figuur is een prisma $ABCDE.FGHIJ$. Hierin is vijfhoek $ABCDE$ het voorvlak, met $AB = BC = 6$ dm en $AE = 4$ dm.

b Zet de letters in je drieaanzicht op de juiste plek.

c Bereken nu de hoogte van de voorkant van de doos, dus de hoogte van punt E boven lijn BC in mm nauwkeurig.

d Bereken de grootte van $\angle AED$ in graden nauwkeurig.

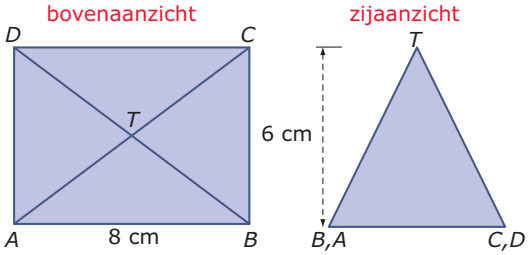
Opgave 5

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ zijn alle ribben 4 cm.

Teken een drieaanzicht van deze piramide.

Voorbeeld 2

Je ziet hier het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak. Welk veelvlak betreft het en hoe groot is de totale oppervlakte van dat lichaam?



Figuur 14.9

Antwoord

Dit betreft een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.
Voor de totale oppervlakte van dit lichaam moet je de oppervlakte van het grondvlak en van de vier opstaande grensvlakken bij elkaar optellen.

De grensvlakken ABT en CDT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 8 cm en een hoogte die je in het zijaanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{45} = 4\sqrt{45}$ cm.

De grensvlakken BCT en DAT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 6 cm en een hoogte die je in het vooraanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{52} = 3\sqrt{52}$ cm.

Nu kun je de totale oppervlakte wel berekenen...

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 534** zie je twee aanzichten van een lichaam.

a Hoe ziet het vooraanzicht van dit lichaam er uit? En waarom weet je dat zeker?

b Waarom is de hoogte van het vooraanzicht niet gelijk aan de hoogte van de driehoek ABT? Laat zien hoe je daarvan de hoogte berekend.

c Bereken de totale oppervlakte van dit lichaam, zowel exact als in mm^2 nauwkeurig.

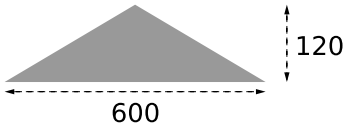
Opgave 7

Van een veelvlak is het bovenaanzicht een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm en het vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm.

Welk veelvlak is dit? Bereken er de totale oppervlakte van.

Voorbeeld 3

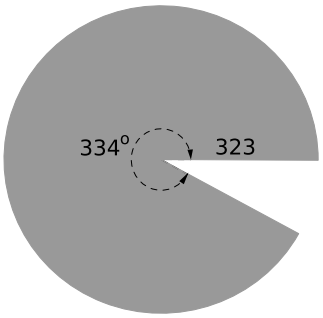
Over het eind van een buis wordt ter afsluiting een kegelvormig kapje geplaatst. Dit wordt gemaakt van buigbare kunststof.
Een zijaanzicht ervan zie je hiernaast, alle afmetingen zijn in mm.
Teken nu zelf een uitslag van deze kegel.



Figuur 14.10

Antwoord

Elke kegel kun je vouwen uit een deel van een cirkel, een cirkelsector.
De straal van die cirkelsector is dan gelijk aan de lengte van een lijnstuk vanuit de top naar de grondcirkel. Die lengte bereken je met de stelling van Pythagoras: $R = \sqrt{300^2 + 120^2} \approx 323$ mm.



Figuur 14.11

Je begint daarom met een cirkel met een straal van 323 mm.
Daar heb je maar een deel van nodig.
De boog die bij dat deel hoort moet even lang zijn als de grondcirkel van de kegel, dus $\pi \cdot 600$ mm.
De cirkel die je hebt getekend heeft een omtrek van $\pi \cdot 646$ mm.
Dus van de 360° die bij een complete cirkel horen, heb je $\frac{\pi \cdot 600}{\pi \cdot 646} \cdot 360° \approx 334°$ nodig.
Dit heet de sectorhoek van de cirkelsector.

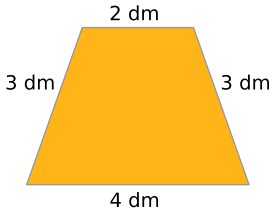
Opgave 8

Teken de uitslag van de kegel beschreven in **Voorbeeld 3 op pagina 535** op schaal 1 : 10.
Maak je tekening op stevig papier en maak een extra plakrand. Vouw de kegelvorm en ga na dat hij klopt met de opgegeven afmetingen.

Opgave 9

Je ziet hier het zijaanzicht van een lampekap met de vorm van een afgeknotte kegel.

Teken een uitslag van deze afgeknotte kegel.



Figuur 14.12

Oefenen

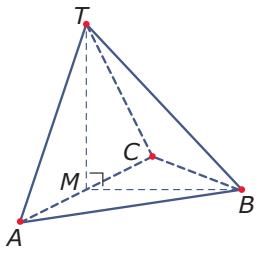
Opgave 10

Je ziet hier een piramide $ABC.T$ waarvan het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm is. De top T ligt recht boven het midden M van ribbe AC. De ribben AT en CT zijn allebei 5 cm lang.

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide.

b Bereken de lengte van ribbe BT.

c Bereken de grootte van $\angle MTB$ in graden nauwkeurig.



Figuur 14.13

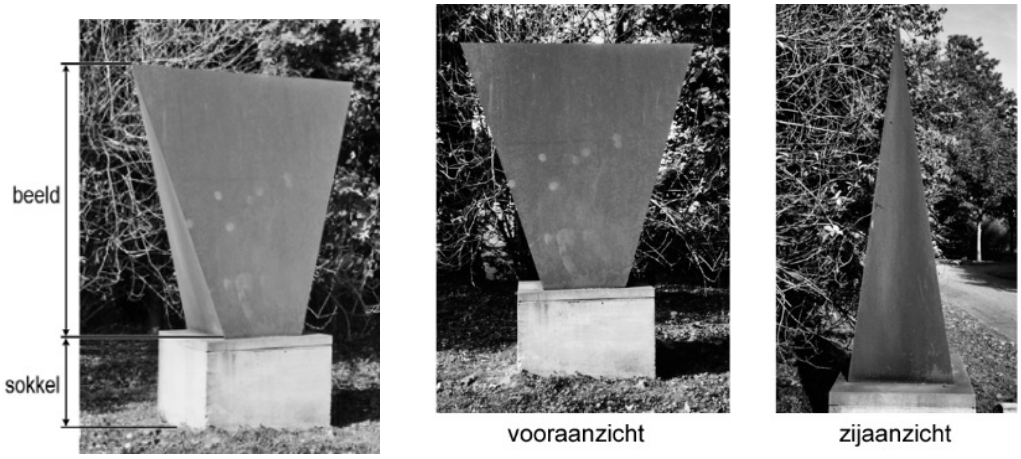
Opgave 11

Een veelvlak $ABC.DEF$ heeft als vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm en als zijaanzicht een gelijkbenige driehoek waarvan de basis ook 4 cm is.

Teken het bovenaanzicht van dit veelvlak en bereken de oppervlakte van het veelvlak.

Opgave 12

In het beeldenpark in Zwijndrecht staan verschillende beelden. Eén van die beelden is het beeld op de foto hieronder. De onderkant van het beeld dat op de sokkel staat, is een vierkant met zijden van 50 cm. Het beeld is 100 cm hoog en de lengte van de bovenkant is 100 cm lang. Het vooraanzicht en het zijaanzicht zijn symmetrisch.



Figuur 14.14

a Teken een bovenaanzicht van dit beeld op schaal 1 : 10.

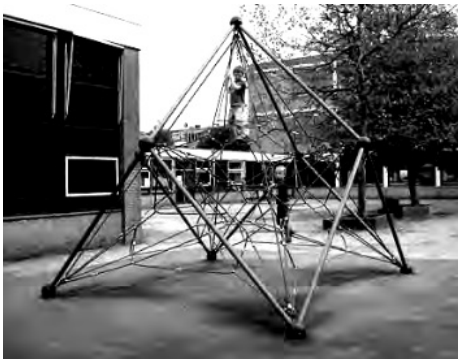
Het grondvlak van dit beeld is een vierkant $ABCD$. De bovenkant is een ribbe EF. In het vooraanzicht zie je de punten B, C en E.

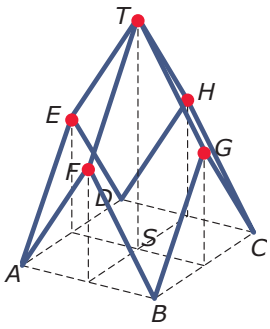
b Bereken de lengte van ribbe BE in mm nauwkeurig.

c Als het beeld in de verf zou worden gezet, hoeveel cm^2 verf is daar dan voor nodig?

Opgave 13

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60°. Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$.





Figuur 14.15

a Teken een bovenaanzicht van de metalen constructie op schaal 1 : 10.

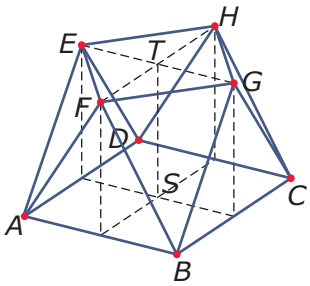
b Bereken hoe hoog punt T boven de grond zit, dus de lengte van TS in cm nauwkeurig.

c Bereken de grootte van $\angle AFB$.

Opgave 14

Dit is een model van een symmetrisch lichaam waarvan het grondvlak een vierkant $ABCD$ is met zijden van 8 cm en ook het bovenvlak $EFGH$ een vierkant is. Alle acht opstaande grensvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm.

Van deze 'achtkanter' liggen alle hoekpunten van het bovenvlak recht boven de middens van de zijden van het grondvlak. Dat maakt alle aanzichten eenvoudig...



Figuur 14.16

a Bereken de zijden van het bovenvlak $EFGH$.

b Bereken de hoeken van ΔBGF.

c Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.

d Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn en moet worden geverfd. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

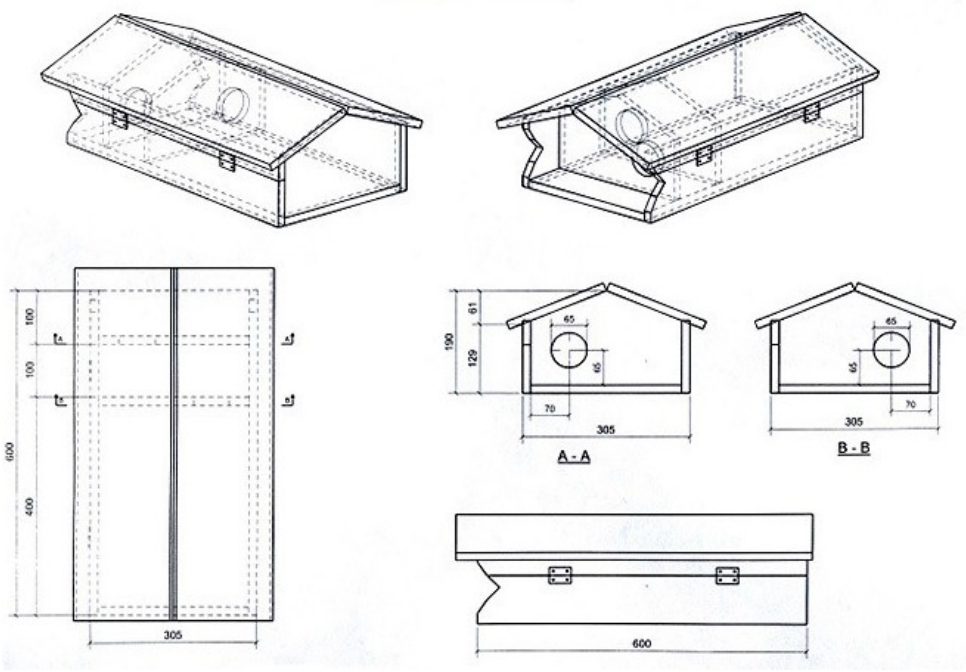
Opgave 15

De uitslag van een kegel is een kwart cirkel met een straal van 10 cm.

Hoe groot is de diameter en hoe hoog is het driehoekige zijaanzicht van die kegel?

Toepassen

Bouwtekeningen zijn tekeningen die worden gebruikt om iets te kunnen bouwen. Dat kan een kastje, een toestel, een huis, een vliegtuig of wat dan ook zijn... Vaak zijn bouwtekeningen aanzichten en plattegronden met veel details of opengewerkte tekeningen.
Hier zie je een **bouwtekening** van een nestkast voor steenuilen.



Figuur 14.17

Opgave 16

Bekijk de bouwtekening van de steenuilenkast.

a In welke eenheid zijn alle afmetingen gegeven?

b Hoe kun je in de bouwtekening zien dat deze nestkast kan worden opengeklapt?

c Hoe kun je zien dat deze nestkast een ingang heeft die bestaat uit twee schotten met gaten met een stuk open ruimte er tussen?

d Teken zelf één zo'n schot op schaal 1 : 2.

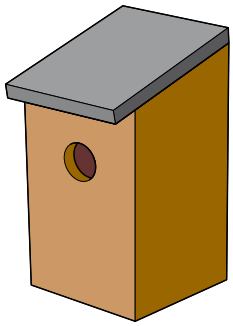
e De twee delen van het schuine dak zijn nergens getekend. Welke vorm en afmetingen hebben die dakdelen?

f Waarom is hier het maken van een uitslag niet goed mogelijk?

Opgave 17

Hier zie je een andere nestkast. Het voorvlak (met het aanvlieggat) is een rechthoek van 20 cm bij 30 cm. Het achtervlak is een rechthoek van 20 cm bij 35 cm. Het grondvlak is een vierkant. Het schuine bovenvlak is aan de voorkant 2 cm langer dan nodig om het hokje dicht te maken. De invliegopening heeft een diameter van 6 cm.

Maak een passend drieaanzicht op schaal 1 : 5.

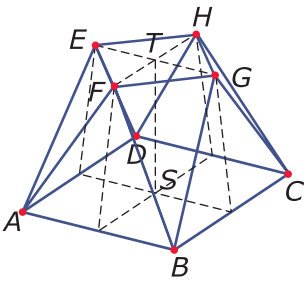


Figuur 14.18

Testen

Opgave 18

Van een symmetrisch lichaam is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 8 cm en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met zijden van 4 cm.
Alle acht de opstaande zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met benen van 6 cm lengte.
S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$ en T is het snijpunt van de diagonalen van $EFGH$.
TS staat loodrecht op zowel het grondvlak als het bovenvlak.



Figuur 14.19

a Bereken van deze achtkanter de hoogte TS in één decimaal nauwkeurig.

b Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet weer de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.

c Hoe groot zijn de hoeken van de opstaande zijvlakken?

d Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot is dan zijn totale buitenoppervlakte?

Opgave 19

Het zijaanzicht van een kegel is een gelijkbenige driehoek met zijden van 6, 6 en 4 cm.

a Hoe ziet een uitslag van deze kegel er uit? Geef ook de belangrijke afmetingen.

b De kegel wordt geschilderd, de bodem niet. Hoeveel bedraagt de buitenoppervlakte?

14.3 Doorsneden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip kruisende lijnen;
- een doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak herkennen en op ware grootte tekenen;
- doorsneden gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

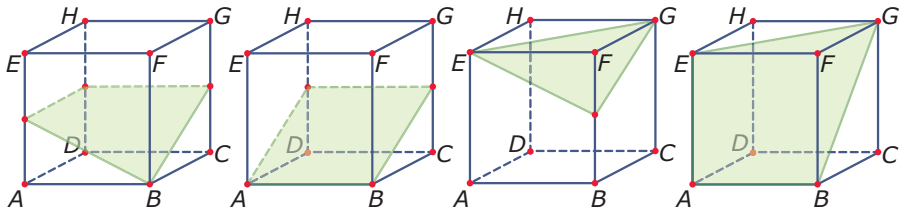
Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren;
- aanzichten gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier en op het **werkblad** vier kubussen met ribben van 2 cm. Joop heeft geprobeerd om in elke kubus te laten zien hoe een bepaald plat vlak de kubus doorsnijdt.



Figuur 14.1

a Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?

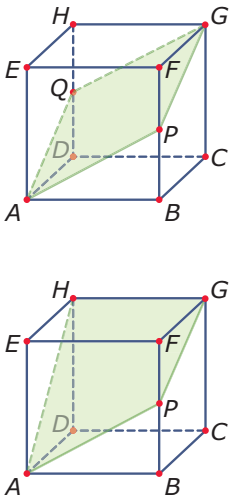
b Verbeter de foute figuren.

c Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Uitleg

Je ziet hiernaast de doorsnede $APGQ$ van een plat vlak met een kubus getekend. De kubus heeft ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Als je de kubus in de richting BD bekijkt zie je A, P, G en Q op één lijn liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QC) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak. Bedenk dat lijnen die in één vlak liggen elkaar altijd snijden of evenwijdig lopen. Lijnen die elkaar niet snijden èn niet evenwijdig lopen noem je kruisende lijnen. In een vlak kunnen nooit kruisende lijnen liggen! En daarom kan de 'vierhoek' $APGH$ nooit een vierhoek in een plat vlak zijn: de lijnstukken AH en PG zijn niet evenwijdig en liggen dus op kruisende lijnen.



Figuur 14.2

Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien moet je de kubus zo draaien dat je loodrecht op dat vlak kijkt. Je ziet dan dat $APGQ$ een ruit is met ribben van $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.

Opgave 1

Bekijk de kubussen in de **Uitleg op pagina 540**. Je ziet dat in de bovenste kubus een vlak $APGQ$ is getekend.

a Teken het aanzicht van de bovenste kubus waarbij je kijkt in de richting van BD met het vlak $APGQ$ er in. Waaraan zie je dat $APGQ$ een plat vlak is?

b Kun je van de onderste kubus een aanzicht tekenen waarbij de punten A, P, G en H op één lijn liggen?

c Waarom zijn de zijden van $APGQ$ in twee overstaande vlakken van de kubus evenwijdig? En waarom zijn ze dus ook gelijk?

d Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

e Bereken de lengte van diagonaal AG.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 540** wordt gesproken over kruisende lijnen.

a Waarom zijn de lijnen AH en PG kruisend?

b Zijn de lijnen AP en HG kruisend, of snijdend? (Denk er om dat deze lijnen ook buiten de lijnstukken AP en HG doorlopen.)

c Zijn de lijnen AP en EF kruisend, of snijdend?

Opgave 3

In kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm is vierhoek $KCGL$ een doorsnede van een plat vlak met de kubus. Punt K is het midden van ribbe AB.

a Waarom is driehoek KCG geen complete doorsnede van een vlak met deze kubus?

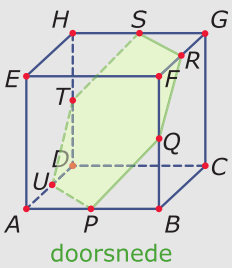
b Waarom moet punt L het midden van ribbe EF zijn?

c Teken de doorsnede $KCGL$ op ware grootte.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Heeft die doorsnede de vorm van een driehoek, dan kun je ervan verzekerd zijn dat het inderdaad om een plat vlak gaat.
Bij vierhoeken, vijfhoeken, etc., moet je nauwkeuriger kijken.
Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, kun je gebruiken dat in een plat vlak alleen evenwijdige of elkaar snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn èn elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Lijnen die elkaar kruisen kunnen nooit in één vlak liggen.

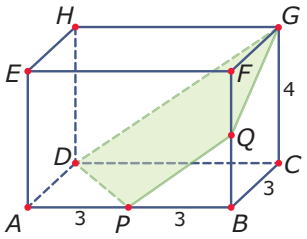


Figuur 14.3

Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**.
Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke vorm hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal getekend). Bij het tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken met behulp van de passer. Teken hulpfiguren (vaak rechthoekige driehoeken) waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6, BC = 3, CG = 4$.
De punten P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.
Waarom is vierhoek $DPQG$ een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk?
Teken doorsnede $DPQG$ op ware grootte.



Figuur 14.4

Antwoord

Vierhoek $DPQG$ is een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk omdat de lijnen PQ en DG evenwijdig lopen.

De lengte van DG kun je halen uit rechthoekige ΔDCG: $DG = \sqrt{52}$.

De lengte van DP kun je halen uit rechthoekige ΔDAP: $DP = \sqrt{18}$.

Omdat $BQ = 2$ kun je de lengtes van PQ en QG ook berekenen: $PQ = QG = \sqrt{13}$.

Om het trapezium $DPQG$ te kunnen tekenen, is het handig om eerst nog de lengte van een diagonaal te berekenen, bijvoorbeeld $PG = \sqrt{34}$. Nu kun je de figuur construeren door twee driehoeken te maken met passer en liniaal.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 542** is een doorsnede van een plat vlak met een balk getekend. Je wilt die doorsnede op ware grootte tekenen.

a Waarom zijn de lijnen PQ en DG evenwijdig?

b Bereken de lengte van DG en die van DP.

c Reken nu de lengtes van PQ en QG na.

d Bereken de lengte van diagonaal PG.

e Teken trapezium $DPQG$ op ware grootte.

Opgave 5

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG.

Er worden nu steeds twee lijnen gegeven. Schrijf op of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

a MH en BN.

b MB en HC.

c AE en HG.

d MF en AB.

e MN en HB.

f CM en AF.

Opgave 6

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG en K ligt op BF met $BK = 1$ cm.

a Is $HMKN$ een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

b Is KEG een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

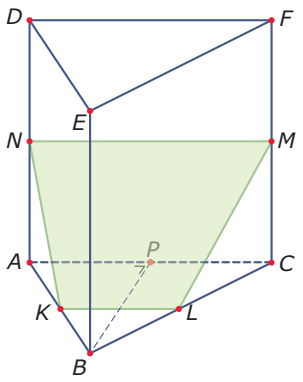
c Is KMN een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

Vierhoek $HMBN$ is een doorsnede van een vlak met de gegeven balk.

d Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 7

Hier zie je een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ waarvan alle zijden 8 cm lang zijn. De punten P, K, L, M en N zijn steeds de middens van de ribben waar ze op liggen.



Figuur 14.5

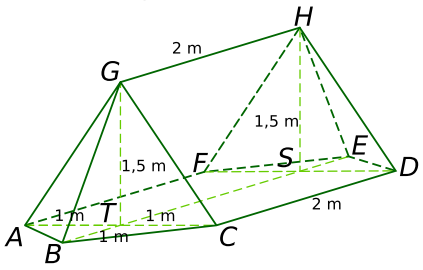
a Waarom is vierhoek $KLMN$ de doorsnede van een vlak met dit prisma?

b Teken vierhoek $KLMN$ op ware grootte. Schrijf alle daarvoor noodzakelijke berekeningen op.

c Bereken (als je dat bij b nog niet hebt gedaan) alle hoeken van vierhoek $KLMN$ in graden nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Deze tekening stelt een tent voor. De afmetingen zijn in de figuur gegeven. Ga er van uit dat de lichter gekleurde stippellijnen in een snijpunt loodrecht op elkaar staan.



Figuur 14.6

GH is de nok van de tent.
Om de hoek die de vlakken $CDHG$ en $FAGH$ met elkaar maken te bepalen moet je in een vlak kijken waar hun snijlijn loodrecht op staat. Die hoek heet de standhoek van beide vlakken. Je kunt hem zien in een vooraanzicht van de tent, maar ook in de doorsnede ΔACG.
Bereken de standhoek van de vlakken $CDHG$ en $FAGH$.

Antwoord

De gevraagde hoek is $\angle AGC$.

Omdat $\tan(\angle AGT) = \frac{1}{1{,}5}$ is $\angle AGT \approx 33{,}7°$.
Dus is $\angle AGC \approx 2 \cdot 33{,}7° \approx 67°$.

Opgave 8

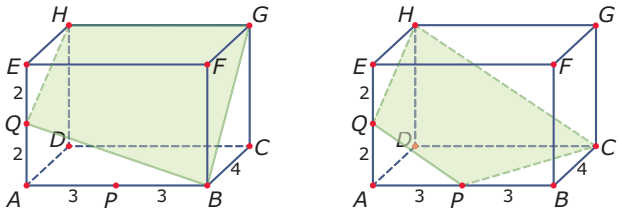
Bekijk het berekenen van de standhoek van de vlakken $CDHG$ en $FAGH$ in **Voorbeeld 2 op pagina 543**.

Bereken zelf de standhoek van de vlakken BCG en het grondvlak $ABCDEF$.

Oefenen

Opgave 9

Je ziet hier in balk $ABCD.EFGH$ twee keer een figuur getekend die vier hoekpunten heeft.

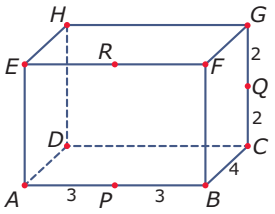


Figuur 14.7

Leg uit bij welke van beide figuren er sprake is van de doorsnede van een plat vlak en de getekende balk. Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P, Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.



Figuur 14.8

Schrijf van de volgende lijnen op of ze elkaar snijden, elkaar kruisen, of evenwijdig zijn. Licht je antwoord toe.

a PQ en BF.

b PQ en RG.

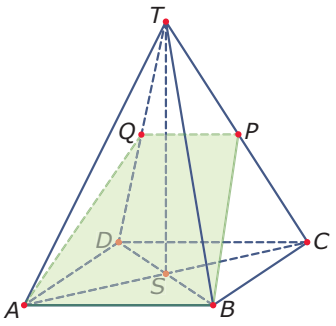
c PR en GH.

d RG en PC.

e PC en AD.

Opgave 11

Van de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is punt P het midden van ribbe CT en punt Q het midden van ribbe DT. Verder is gegeven dat $AB = BC = 8$ cm en $AT = 12$ cm.



Figuur 14.9

a Bereken de lengte van lijnstuk BP.

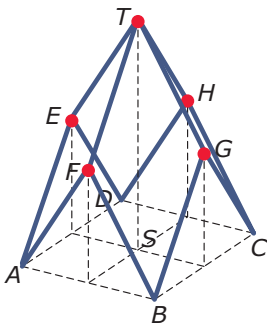
Vierhoek $ABPQ$ is de doorsnede van de piramide met een vlak.

b Teken deze doorsnede op ware grootte.

c Bereken de hoeken van vierhoek $ABPQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 12

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60°. Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$. De vier ruiten vormen samen met de vier opstaande driehoeken en het vierkante grondvlak een lichaam.



Figuur 14.10

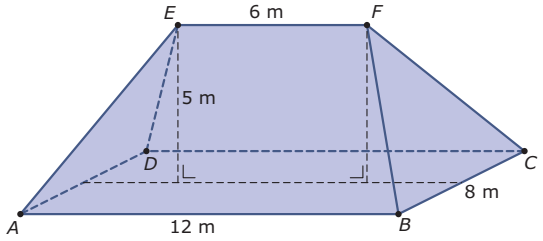
a Bereken de hoeken van dwarsdoorsnede ACT van dit lichaam in graden nauwkeurig.

Neem aan dat M het midden van AD en N dat van BC is.

b Teken de dwarsdoorsnede $MNGTE$ van dit lichaam op ware grootte.

Opgave 13

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD.



Figuur 14.11

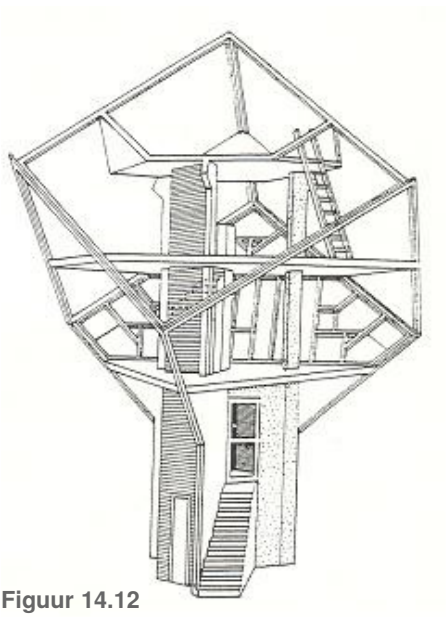
a Bereken de standhoek van de vlakken $ABFE$ en $CDEF$.

b Waarom is $\angle BFC$ niet de standhoek van de vlakken $ABFE$ en $CDEF$?

Toepassen

De **kubuswoning** ontworpen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn van deze kubuswoningen gebouwd. Hiernaast zie je een opengewerkt model. Het betreft daar in grote lijnen een kubus die op zijn punt staat, er zitten dus twee hoekpunten die zijn verbonden met een lichaamsdiagonaal recht boven elkaar. Deze kubus staat op een brede paal waarin zich de toegang bevindt.

In de kubuswoning zitten drie vloeren, de onderste vloer is driehoekig, de middelste zeshoekig en de bovenste eigenlijk weer driehoekig, maar daar zijn opstaande driehoekige wanden gemaakt die evenwijdig lopen met vlakken van de kubus.



Figuur 14.12

Opgave 14

Bekijk het opengewerkte model van een kubuswoning. Je gaat dit model zelf tekenen met behulp van het **werkblad**.

a Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

Neem aan dat de middelste vloer de middens van ribben met elkaar verbindt.

b Teken die vloer in jouw kubus.

Neem aan dat de bovenste vloer halverwege de middelste vloer en de top van de kubus zit. Er zijn drie opstaande driehoekige zijwanden op gemaakt.

c Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.

Opgave 15

Je hebt in de voorgaande opgave zelf een eenvoudige kubuswoning getekend. Ga er weer van uit dat de middelste verdiepingsvloer de middens van ribben verbindt en dat de bovenste verdiepingsvloer halverwege de middelste verdiepingsvloer en de top van de kubus zit. Neem aan dat de hoogte tussen de bovenste twee verdiepingsvloeren 2,50 m is.

a Hoe hoog zit dan de top van de kubus boven de onderste punt ervan?

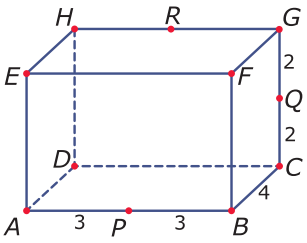
b Hoe groot zijn dan alle ribben van de kubus?

c De hoek tussen de lijnstukken AH en AG is de hoek die alle grensvlakken van de kubus met de verticale lijn AG maken. Bereken deze hoek in tienden van graden nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P, Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.



Figuur 14.13

a Zijn de lijnen ER en FG snijdende lijnen?

b Zijn de lijnen ER en PQ snijdende lijnen?

c Is $ACRE$ een doorsnede van deze balk met een plat vlak?

d Is $EBQR$ een doorsnede van deze balk met een plat vlak?

Opgave 17

In kubus $ABCD.EFGH$ is M het midden van FG en N het midden van GH. De ribben van de kubus zijn 6 cm lang.

a Waarom is $DBMN$ de doorsnede van een vlak met deze kubus?

b Teken deze doorsnede op ware grootte en bereken de hoeken ervan.

c Bereken de standhoek van vlak $DBMN$ en het grondvlak $ABCD$.

14.4 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte en de inhoud van de ruimtelijke basisfiguren berekenen;
- werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactoren.

Voorkennis

- de verschillende ruimtelijke basisfiguren;
- gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie toepassen in ruimtelijke figuren;
- aanzichten en doorsneden gebruiken bij berekeningen in ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel zie je een aantal bekende formules voor het berekenen van een omtrek, een oppervlakte, of een inhoud. Ernaast staan de betekenissen van die formules, maar die staan niet in de juiste volgorde.

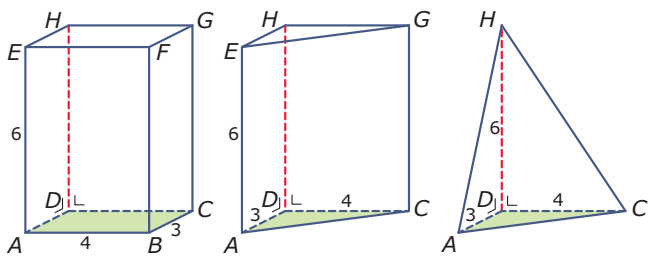
Formule		**Betekenis**	
1	0,5× *basis* × *hoogte*	a	omtrek cirkel
2	*lengte* × *breedte* × *hoogte*	b	oppervlakte rechthoek
3	*grondvlak* × *hoogte*	c	oppervlakte driehoek
4	$\pi \times$ *diameter*	d	oppervlakte parallellogram
5	*lengte* × *breedte*	e	oppervlakte cirkel
6	$\frac{1}{3} \times$ *grondvlak* × *hoogte*	f	inhoud balk
7	*basis* × *hoogte*	g	inhoud prisma
8	$\pi \times$ *straal*^{2}	h	inhoud piramide

Tabel 14.1

Geef bij elke formule de juiste omschrijving.

Uitleg

Je ziet hier drie lichamen die alle drie dezelfde hoogte DH hebben. Het prisma en de piramide hebben ook nog hetzelfde grondvlak ACD en dat is precies de helft van het grondvlak van de balk.



Figuur 14.1

De inhoud van de balk is duidelijk het grootst: $V(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$ eenheden (eenheidskubussen).
Het prisma is de helft van de balk, dus: $V(\text{prisma}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$.
Dit is precies de oppervlakte van het grondvlak (ΔACD) maal de hoogte. Het volume van een prisma is $V(\text{prisma}) = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

De piramide heeft hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte als het prisma. Je kunt laten zien, dat er in het prisma drie van deze piramides passen. De inhoud van de piramide is daarom $\frac{1}{3}$ deel van die van het prisma. Voor de getekende piramide geldt $V(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Van alle drie de getekende lichamen is de totale oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van hun uitslag. En wat gebeurt er met de oppervlakte en de inhoud van zo'n lichaam als alle ribben bijvoorbeeld 3 keer zo groot worden?

Opgave 1

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg op pagina 548**. De inhoud, het volume, van een lichaam is het aantal eenheidskubusjes dat er in past. Bij een balk en een prisma bepaal je dan eerst het aantal eenheidskubussen op het grondvlak en dan vermenigvuldig je met het aantal lagen, de hoogte, van de balk, het prisma. Zo krijg je de formule $V = G \cdot h$, waarin V het volume, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Laat zien, dat de formule $V = G \cdot h$ zowel bij de balk als bij het prisma tot de juiste inhoud leidt.

De oppervlakte van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

b Bereken de oppervlakte van de balk.

c Bereken de oppervlakte van het prisma.

d Neem nu eens aan dat de afmetingen van deze figuren 3 keer zo groot worden. Hoeveel keer zo groot wordt dan hun inhoud? En hun oppervlakte? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg op pagina 548**. Vergelijk de getekende piramide met het getekende prisma.

a Ga na, dat het prisma kan worden verdeeld in de piramides $ACD.H$, $CGH.E$ en $AHE.C$.

b Ga ook na, dat voor elk van deze piramides geldt dat $G \cdot h = 36$ waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

c Leg uit dat de oppervlakte van piramide $ACD.H$ daarom $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ moet zijn. Bereken deze inhoud.

Opgave 3

Er zijn ook lichamen met gebogen grensvlakken. Een cilinder en een kegel bijvoorbeeld hebben ook een grondvlak met oppervlakte G en een hoogte h.

a Waarom zal de formule voor de inhoud van een cilinder $V(\text{cilinder}) = G \cdot h$ zijn?

b Bereken de inhoud van een cilinder met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

c Waarom zal de formule voor de inhoud van een kegel $V(\text{kegel}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ zijn?

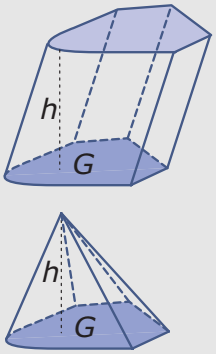
d Bereken de inhoud van een kegel met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **inhoud** of het **volume** van een lichaam wordt het totaal aantal eenheidskubussen dat dit lichaam opvult verstaan.
Voor verschillende soorten lichamen kun je die inhoud berekenen met behulp van een formule.

- De inhoud van een balk, een prisma, of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = G \cdot h$.
- De inhoud van een piramide, of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.



Figuur 14.2

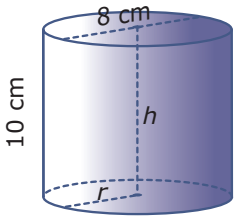
Onder de **oppervlakte** van een lichaam wordt de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam verstaan.

Om zowel de inhoud als de oppervlakte van een lichaam te kunnen berekenen moet je de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren, zoals rechthoek, driehoek en cirkel kennen. Ook de formule voor de omtrek van een cirkel is van belang. Zorg dat je al deze formules goed kent!

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Een cilinder heeft een diameter van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder.



Figuur 14.3

Antwoord

Voor de inhoud V gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

Nu is $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ en $h = 10$.
En dus is $V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi \approx 503$ cm^3.

Voor de oppervlakte A moet je weten hoe de uitslag van een cilinder er uit ziet. Die bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. De rechthoek heeft breedte 10 cm en als lengte de omtrek van de grondcirkel $\pi \cdot 8 = 8\pi$ cm.
Dus krijg je $A = 8\pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 112\pi \approx 352$ cm^2.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 550** worden de inhoud en de oppervlakte van een cilinder met gegeven diameter en straal berekend. Neem nu een cilinder met diameter en hoogte precies 2 keer zo groot.

a Laat zien dat de inhoud van deze cilinder $2^3 = 8$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

b Leg uit hoe de oppervlakte van de cilinder in het voorbeeld wordt berekend.

c Laat zien dat de oppervlakte van de cilinder in deze opgave $2^2 = 4$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

Opgave 5

Een cilindervormig groentenblik heeft een straal van 6 cm en een hoogte van 16 cm. Het blik is gemaakt van metaal met een dikte van 1 mm. De straal en de hoogte zijn gemeten aan de binnenkant van het blik. Je wilt de hoeveelheid metaal die voor dit blik nodig is berekenen als er een plastic deksel op zit.

Je kunt dit op twee manieren doen: de oppervlakte van het blik berekenen en die met de dikte vermenigvuldigen, of van de inhoud van een blik met een straal van 6,1 cm en een hoogte van 16,1 cm de inhoud van een blik met straal 6 cm en hoogte 16 cm aftrekken.

Voer beide berekeningen uit en geef je antwoord in mm^3 nauwkeurig. Waardoor ontstaat het verschil tussen beide antwoorden?

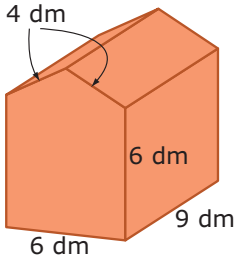
Opgave 6

Van een cilindervormig literblik zijn hoogte en diameter gelijk.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.



Figuur 14.4

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze doos.

Antwoord

Voor de inhoud V van deze doos gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het ‘grondvlak’ het voorvlak van het prisma, de hoogte is 9 dm.

Ga na, dat $G = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36 + 3\sqrt{7}$. Nu kun je met de formule berekenen dat de inhoud van de doos ongeveer 395 dm^3 is.

De oppervlakte van de doos is de oppervlakte van de uitslag van deze doos. Die uitslag bestaat uit twee gelijke vijfhoeken (waarvan je de oppervlakte al hebt berekend) en vijf rechthoeken. De totale oppervlakte is de som van de oppervlaktes van deze vijfhoeken en de vijf rechthoeken.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 551** zie je hoe je de inhoud en de oppervlakte van een prisma kunt berekenen.

a Leg uit hoe de oppervlakte van de vijfhoek die als ‘grondvlak’ dient, kan worden berekend.

b Reken nu de gevonden inhoud van de doos zelf na.

c Bereken de totale oppervlakte van de doos.

Opgave 8

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze piramide.

Voorbeeld 3

Figuur 14.5 Bron: Vlaams Instituut voor de Zee

Bij zandwinning ontstaan grote hopen van verschillende soorten zand. Die hopen zand hebben allemaal dezelfde kegelvorm.

Hoeveel m^3 zand bevat zo'n kegelvormige hoop met een diameter van 4 m en een hoogte van 1,50 m? En hoeveel m^3 zand bevat een hoop zand waarvan de afmetingen 2 keer zo groot zijn?

Antwoord

Voor de inhoud V van een kegel gebruik je de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het grondvlak een cirkel met een straal van 2 m en de hoogte is 1,50 m.

De inhoud is dus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}5 = 2\pi \approx 6{,}28$ m^3.

Van de hoop zand waarvan alle afmetingen twee keer zo groot zijn is de lengtevergrotingsfactor 2 en dus de volumevergrotingsfactor $2^3 = 8$. De inhoud van die zandhoop is daarom $2\pi \cdot 8 = 16\pi \approx 50{,}27$ m^3.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3 op pagina 552** zie je hoe je de inhoud van een kegel kunt berekenen.

a Bereken de inhoud van een kegel waarvan de straal 5 cm en de hoogte 10 cm is.

b Hoeveel bedraagt de inhoud van een kegel waarvan de afmetingen half zo groot zijn als die bij a?

Bekijk opnieuw de kegel met straal 5 en hoogte 10 cm.
De oppervlakte ervan is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag van de kegel.

c Laat zien, dat die oppervlakte $A = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 + 10^2}$ is.

d Welke formule geldt voor de oppervlakte van een kegel met straal r en hoogte h als je het grondvlak niet meerekent?
En als je het grondvlak wel meerekent?

Opgave 10

In een betonblok in de vorm van een kubus met ribben van 50 cm wordt een kegelvormig gat geboord. Dit kegelvormige gat heeft een diameter van 15 cm en een diepte van 40 cm.

Uit hoeveel cm^3 beton bestaat dit betonblok met gat?
Het blok met gat wordt geverfd. Hoeveel cm^2 bedraagt de oppervlakte?

Oefenen

Opgave 11

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave wordt uitgegaan van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Houd geen rekening met de dikte van het blik.

Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

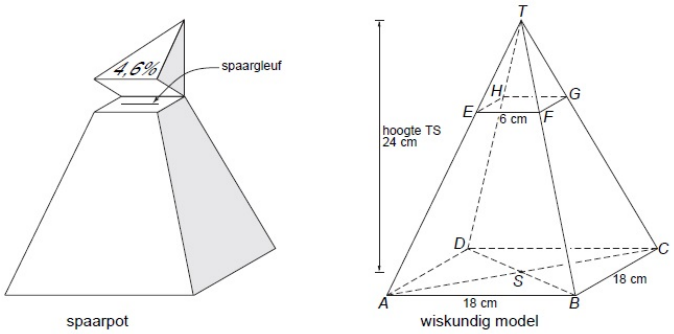
a Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Teken op schaal 1 : 4 de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.

c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de inhoud van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.

Opgave 12

Een spaarpot heeft de vorm van een regelmatige piramide met een vierkant grondvlak. In de linkerfiguur hieronder zie je een tekening van de spaarpot. Daarnaast staat een wiskundig model met de maten van de spaarpot.



Figuur 14.6

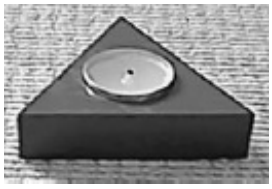
De spaarpot heeft een deksel. Dat is piramide $T.EFGH$. Het scharnier, waarom de deksel omgeklapt kan worden, is lijnstuk HG.

a De bank die deze spaarpot cadeau geeft beweert dat de inhoud van de deksel 4,6% van de inhoud van de hele piramide is. Laat met een berekening zien dat dit niet waar is.

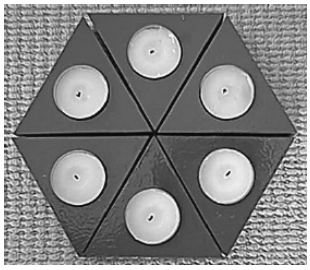
b De spaarpot wordt cadeau gegeven in de vorm van een bouwplaat. Hoeveel oppervlakte aan karton is er nodig voor deze spaarpot? Houd geen rekening met de opening om geld in te doen en geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Op de foto hiernaast zie je een houder waarin een sfeerlichtje zit. Deze sfeerlichthouder heeft de vorm van een prisma met een gelijkzijdige driehoek als grondvlak. Op de foto hieronder zie je het bovenaanzicht van een figuur gemaakt van zes van deze sfeerlichthouders.



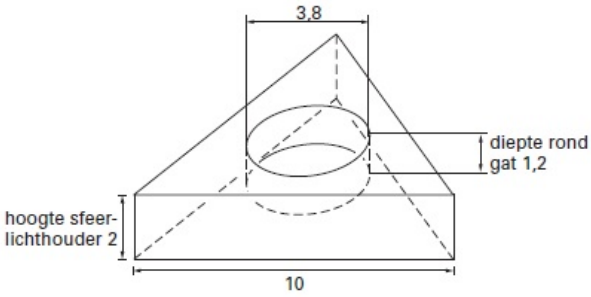
Figuur 14.7



Figuur 14.8

a Geef de kleinste hoek in graden waarover dit bovenaanzicht draaisymmetrisch is.

Hieronder zie je een tekening van de sfeerlichthouder. De sfeerlichthouder is massief en gemaakt van kunststof. De zijden van het driehoekige grondvlak zijn 10 cm. De hoogte van de sfeerlichthouder is 2 cm. Precies in het midden van de sfeerlichthouder zit een rond gat voor het sfeerlichtje. De diameter van dit gat is 3,8 cm en de diepte is 1,2 cm.



Figuur 14.9

b Bereken in hele cm^3 hoeveel kunststof er nodig is om deze sfeerlichthouder te maken.

Opgave 14

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Drostedoosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

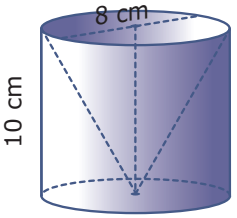
Figuur 14.10

a Bereken de inhoud van het doosje in cm^3 nauwkeurig.

b Een model van dit Drostedoosje is een regelmatig achthoekig prisma met opstaande ribben van 3,3 cm en andere ribben van 7,8 cm. Bereken de oppervlakte van zo'n prisma in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 15

Je ziet hier een cilindervormige plastic bak waar een kegel uit is weggesneden.



Figuur 14.11

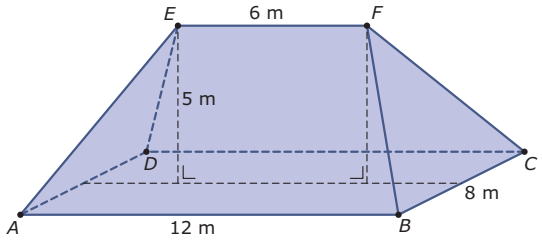
a Bereken de hoeveelheid plastic die hiervoor nodig is.

b Bereken de hoeveelheid plastic die nodig is voor eenzelfde bak waarvan alle afmetingen 1,5 keer zo groot zijn.

c De oorspronkelijke plastic bak wordt groen gespoten. Hoeveel cm^2 moet de verflaag bedekken?

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD. Dit is een samengestelde ruimtelijke figuur, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



Figuur 14.12

De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

Opgave 16

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij. Gebruik de gegevens in de figuur.

Bereken het volume onder dit dak en boven de zoldervloer.

Opgave 17

Gebruik de gegevens in de figuur van het dak van de stolpboerderij hierboven.

Bereken de oppervlakte van het dak.

Testen

Opgave 18

Je ziet hier chocoladeverpakking in de vorm van een prisma.
De twee driehoeken aan de voorkant en de achterkant zijn gelijkzijdig en hebben zijden van 4 cm. De totale lengte van de verpakking is 24 cm.

Figuur 14.13

a Bereken het volume van deze verpakking.

b Je wilt weten hoeveel materiaal ervoor nodig is om zo'n verpakking te maken.
Bereken daartoe de totale buitenoppervlakte ervan.

Voor reclamedoeleinden wordt zo'n verpakking op veel grotere schaal gemaakt.
Alle afmetingen worden 25 keer zo groot gemaakt.

c Hoe groot worden de inhoud en de oppervlakte van deze grotere verpakking?

Opgave 19

Een kegel wordt gevormd uit een halve cirkel met een diameter van 40 cm.
Hoe groot zijn de oppervlakte en de inhoud van die kegel?

14.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp gaat het over meetkundige berekeningen aan ruimtelijke figuren. Daarbij worden gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel toegepast. Ook de oppervlakte en de inhoud van de basisvormen (kubus, balk, prisma, piramide, cilinder en kegel) worden berekend.

Je hebt nu alle theorie van **Ruimtelijke figuren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lichaam — veelvlak, ribbe, hoekpunt — zijvlaksdiagonaal, lichaamsdiagonaal, diagonaalvlak — grondvlak, hoogte
- parallelprojectie — drieaanzicht, voor-, zij-, bovenaanzicht
- doorsnede — kruisende lijnen
- inhoud, volume — oppervlakte — lengte-, oppervlakte-, volumevergrotingsfactor

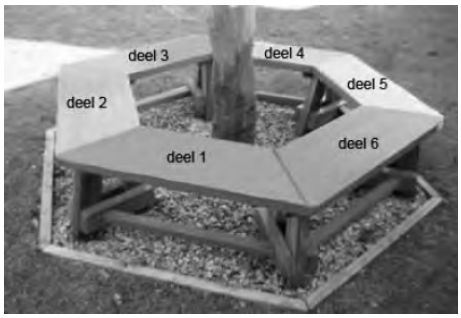
Activiteitenlijst

- in ruimtelijke figuren gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie (ook sinusregel en cosinusregel) gebruiken;
- aanzichten van ruimtelijke figuren tekenen — aanzichten gebruiken bij berekeningen;
- kruisende lijnen herkennen — doorsneden herkennen — doorsneden gebruiken voor berekeningen en ze op ware grootte tekenen;
- inhoud en oppervlakte van de basisvormen berekenen — oppervlakte- en volumevergroting berekenen bij een gegeven lengtevergrotingsfactor.

Testen

Opgave 1

Hieronder zie je een boombank die bestaat uit zes gelijke delen waar je op kunt zitten. De regelmatige zeshoek die de buitenrand van deze boombank voorstelt heeft zijden van 120 cm. De regelmatige zeshoek die de binnenrand van deze boombank voorstelt heeft zijden van 80 cm.

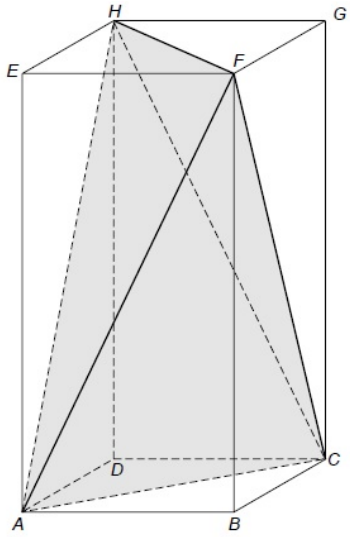


Figuur 14.1

Hoeveel bedraagt de oppervlakte van deze boombank? Geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 2

Hieronder zie je twee foto's van een ijsje. Het model van het ijsje past precies in een balk $ABCD.EFGH$, waarvan de vlakken $ABCD$ en $EFGH$ vierkant zijn. Het model bestaat uit vier even grote, gelijkbenige driehoeken. In deze driehoeken geldt $AF = AH = CF = CH = 9{,}8$ cm en $AC = FH = 6$ cm. Voor het maken van de verpakking wordt eerst een uitslag getekend en daarna de oppervlakte uitgerekend.



Figuur 14.2

a Maak zelf zo'n uitslag en zet de hoekpunten op de juiste plek.

b Bereken de oppervlakte van deze uitslag in cm^2 nauwkeurig.

c Bereken de grootte van $\angle AFC$ in graden nauwkeurig.

Opgave 3

Een groot blik verf heeft een diameter van 24 cm en een hoogte van 30 cm. De gebogen zijkant van het blik is geheel bedekt met papier. Daarop staat (behalve de noodzakelijke informatie) de naam van de fabrikant met letters van wel 12 cm hoog.

a Hoeveel liter verf past er in zo'n blik?

b Hoeveel cm^2 papier gaat er om dit blik?

c Er zijn ook blikken waarvan alle afmetingen maar half zo groot zijn.
Hoe groot is dan het stuk papier dat er omheen gaat en hoe groot worden de letters van de naam van de fabrikant als die naar verhouding worden verkleind?

Opgave 4

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = BC = 10$ en $AE = 12$ cm. Punt P is het midden van ribbe EH en punt Q is het midden van ribbe HG.

a Waarom zijn AP en CQ snijdende lijnen?

b Waarom zijn AP en CG kruisende lijnen?

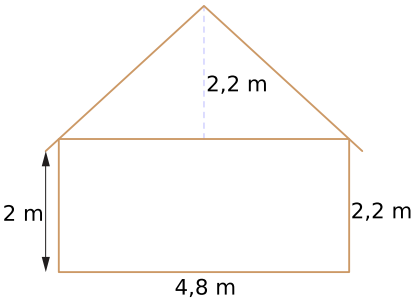
c Bereken de oppervlakte van de doorsnede $ACQP$ van een vlak met de gegeven balk.

d Bereken de hoeken van de doorsnede $ACQP$.

Opgave 5

Bekijk de afbeelding met een woonhuis van het Guragevolk in Ethiopië, dat bestaat uit een cilinder en een kegel. Het vooraanzicht van zo'n woonhuis is afgebeeld.

Figuur 14.3



Figuur 14.4

De dakbedekking loopt wat langer door, waardoor de diameter van de dakbedekking 5,2 meter is.

Bereken de oppervlakte van het woonhuis. Tel de vloer daar niet bij mee.

Geef het antwoord in een geheel aantal m^2.

Opgave 6

Met betonnen elementen kunnen zandbakken van verschillende vormen worden gemaakt. In de foto hieronder zijn vier elementen aangegeven.

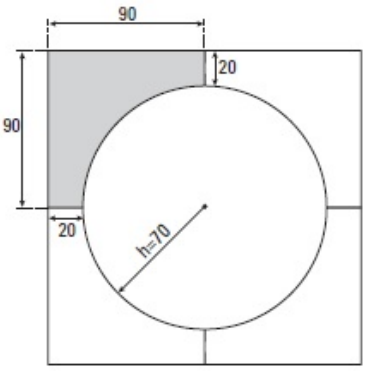
Figuur 14.5

Van zo'n element is hiernaast een bovenaanzicht getekend, met de maten erbij. De hoogte van elk element is 65 cm.

a Hoeveel cm^3 beton is er voor elk element nodig?

Om de elementen tegen graffiti te beschermen wordt het hele element in de fabriek met een vloeistof behandeld.

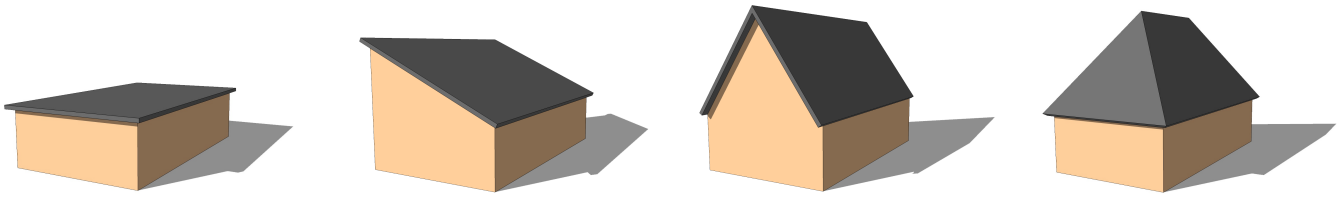
b Bereken in gehele cm^2 nauwkeurig de oppervlakte die per element behandeld moet worden. Schrijf je berekening op.



Figuur 14.6

Toepassen

Hier zie je vier tekeningen van huizen met een bepaald soort dak, gemaakt door Michel Stomphorst van **Dutch Design Studio**.



plat dak | lessenaarsdak | zadeldak | schilddak

Figuur 14.7

De warmte-energie die een gebouw uit kan stralen wordt bepaald door de verhouding

$\frac{A_0}{V}$

Hierin is:

- A_0 de totale oppervlakte van het gebouw in m^2
- V het volume van het gebouw in m^3

Hoe groter de waarde van deze verhouding, hoe meer warmteverlies het gebouw heeft.

Opgave 7: Warmte-energie uitstraling

Bekijk eerst de verhouding $\frac{A_0}{V}$ voor verschillende balkvormen.

a Bereken deze verhouding voor:

- een kubus van 8 × 8 × 8 m
- een balk van 8 × 16 × 4 m
- een balk van 4 × 32 × 4 m

b Welke vorm heeft de gunstigste verhouding $\frac{A_0}{V}$?

c Neem een kubus met ribbelengte r. Hoe hangt de verhouding $\frac{A_0}{V}$ af van r? En wat betekent dit als r groter wordt?

Van een bol met straal r is de oppervlakte $A_0 = 4\pi r^2$ en de inhoud $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

d Is de verhouding $\frac{A_0}{V}$ voor een bol gunstiger dan voor een kubus?

Opgave 8: Warmteverlies van huizen

Ga ervan uit dat van elk van de huizen de begane grond een rechthoek van 5 bij 8 m is en dat de hoogte tot de dakrand 3 m is.
Verder is de standhoek van het lessenaarsdak met een horizontaal vlak 30° en zijn alle standhoeken van het zadeldak en het schilddak met een horizontaal vlak 60°.

Bereken van elk van de vier huizen de verhouding $\frac{A_0}{V}$ in twee decimalen nauwkeurig.

Welk van deze huizen heeft naar verhouding het minste warmteverlies?

15

Beschrijvende statistiek

15.1 Metingen en statistiek 562
15.2 Meetnauwkeurigheid 571
15.3 Diagrammen 579
15.4 Centrummaten 591
15.5 Spreidingsmaten 601
15.6 Totaalbeeld 610

15.1 Metingen en statistiek

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- dat je bij metingen altijd met afwijkingen en dus met statistiek te maken hebt;
- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen;
- manieren om een steekproef uit een populatie te trekken;
- het belang van herhaalbaarheid van een steekproef.

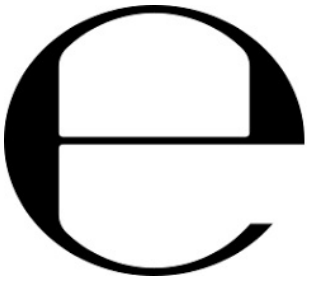
Voorkennis

- rekenen met getallen, ook met procenten;
- tabellen en diagrammen interpreteren.

Verkennen

Opgave V1

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.



Figuur 15.1

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram ℮.
Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt.

a Waarom zal hij niet elk pak wegen?

De fabrikant besluit elk honderdste pak suiker te wegen. Dat zijn er 4 per productieuur.

b Is dat een goede aanpak?

Een medewerker stelt voor om per 1000 pakken een steekproef van 10 pakken te wegen.

c Welke eisen stel je dan aan die steekproef?

d Welk risico heeft het werken met een steekproef?

e Waarom is het van belang om de steekproef steeds te herhalen?

Opgave V2

De geneesmiddelenautoriteit wil in kaart brengen of een bepaald veel verkocht geneesmiddel bijwerkingen heeft.

a Waarom is dat erg moeilijk als het geneesmiddel vrij te koop is?

Het betreffende geneesmiddel is alleen op doktersrecept verkrijgbaar.
Uit het bestand waarin alle huisartsen in Nederland voorkomen, worden er 25 willekeurig gekozen. Hen wordt gevraagd om de patiënten die zij dit geneesmiddel voorschrijven te laten aangeven of één of meer van de volgende bijwerkingen optreden:

- slapeloosheid
- duizeligheid
- hoofdpijn
- maag- en darmklachten

b Hoe zou je dat willekeurig kiezen aanpakken?

c Waarom noem je de statistische variabele 'bijwerking' een kwalitatieve variabele en geen kwantitatieve?

d Hoe zou je het eindresultaat van zo'n onderzoek in beeld brengen?

Uitleg

Bij het vullen van pakken suiker krijg je nooit precies het juiste gewicht. Het vulgewicht is een statistische variabele.

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram ℮. Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt. Hij neemt daartoe regelmatig een steekproef uit de geproduceerde kilopakken suiker. Deze totale hoeveelheid geproduceerde kilopakken heet de populatie.

Zo'n steekproef moet representatief zijn voor de populatie. Dat wil zeggen dat de steekproef dezelfde eigenschappen moet hebben als de populatie. Worden bijvoorbeeld de pakken suiker door twee verschillende machines geproduceerd, dan moeten ook in de steekproef pakken suiker van beide machines voorkomen. Je zou 5 keer per dag willekeurig 10 pakken van machine A en 10 pakken van machine B kunnen wegen. Daarbij mag je dan geen enkele dag een pak aantreffen dat minder dan 970 gram weegt en moet het gemiddelde gewicht $\geq$ 1000 mg zijn. Dat willekeurig pakken noem je aselecte trekking. Het gewicht van de pakken is de statistische variabele. Omdat deze variabele altijd een getal als waarde heeft, noem je het een kwantitatieve statistische variabele. De fabrikant houdt zo een statistisch onderzoek. De uitkomsten ervan noem je de data.

Je kunt ook statistisch onderzoek doen naar mogelijke bijwerkingen van een medicijn. De waarden van de statistische variabele 'bijwerkingen' zijn termen als 'slapeloosheid', 'misselijkheid', en dergelijke. In dit geval spreek je van een kwalitatieve variabele. De variabele bestaat uit kwaliteiten, eigenschappen en niet uit getallen waar je mee kunt rekenen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 563**. Op een fles frisdrank staat 'Inhoud: 1 L ℮'.

a Wat wordt hiermee bedoeld?

b Waarom is de 'hoeveelheid frisdrank in deze fles' een statistische variabele?

c Is de 'hoeveelheid frisdrank in deze fles' een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?

De fabrikant van een bepaalde soort frisdrank produceert er dagelijks 12 . 000 literflessen van. Daarop staat 'Inhoud: 1 L ℮'. Twee keer per dag laat hij van 10 flessen de inhoud controleren.

d Beschrijf wat van dit onderzoek de populatie en de steekproef is.

e Leg ook uit hoe hij er voor zorgt dat de steekproef representatief is.

Opgave 2

De NS heeft enkele jaren geleden de bekende blauw-met-gele OV-fiets ingevoerd. Die kun je huren met behulp van je (persoonlijke) OV-chipkaart.
De NS wil onderzoeken of hun klanten tevreden zijn over het systeem met de OV-fiets.

a Over welke statistische variabele gaat het dan? Is die variabele kwalitatief of kwantitatief?

b Noem een aantal waarden die de variabele 'klantentevredenheid OV-fietssysteem' kan aannemen.

c Over welke populatie gaat dit onderzoek?

d Hoe zou de NS een representatieve steekproef kunnen samenstellen?

Opgave 3

Je kunt op diverse manieren waarnemingen/metingen doen:

1. meten
2. tellen
3. vergelijken met een standaard
4. vragen stellen
5. vaststellen (iets klopt wel of niet)

a Welke van deze manieren gebruik je bij een kwantitatieve variabele?

b Welke van deze manieren gebruik je als je wilt vaststellen of de kleur van de verf in automatisch geproduceerde potten verf correct is?

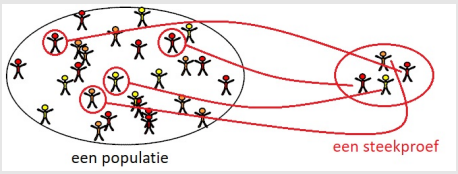
c Welke van deze manieren gebruik je als je wilt vaststellen of het aantal in doosjes met schroeven wel precies 50 is?

d Welke van deze manieren gebruik je als je wilt weten of het aantal in doosjes met schroeven tussen bepaalde vastgestelde waarden ligt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De wetenschap, de methodiek en de techniek van het verzamelen, bewerken en presenteren van gegevens heet **beschrijvende statistiek**. Een statistisch onderzoek kent diverse fasen:



Figuur 15.2

- Je begint een **statistisch onderzoek** met een onderzoeksvraag.
- Je stelt vast over welke **populatie** (doelgroep) het onderzoek gaat. Bij een grote doelgroep neem je een deel van de groep, dit heet een **steekproef**. Deze steekproef moet **representatief** (kenmerkend) zijn voor de populatie en niet te klein. Daarom wordt een steekproef vaak **aselect** samengesteld. Bij aselecte trekking heeft elk lid van de populatie een even grote kans om in de steekproef te komen.
- Je stelt vast op welke **statistische variabele** het onderzoek betrekking heeft.
  Er zijn twee soorten variabelen: **kwantitatieve variabelen** hebben getallen als waarden, **kwalitatieve variabelen** hebben eigenschappen als waarden.
- Je verzamelt de bij die variabele passende **data** (de statistische gegevens). Deze data moet je meestal eerst **ordenen**. De verzamelde data geef je weer in de vorm van tabellen en diagrammen: tabellen zijn nauwkeuriger, diagrammen vaak overzichtelijker.
- Je probeert een (eerlijke) **conclusie** te trekken.

Voorbeeld 1

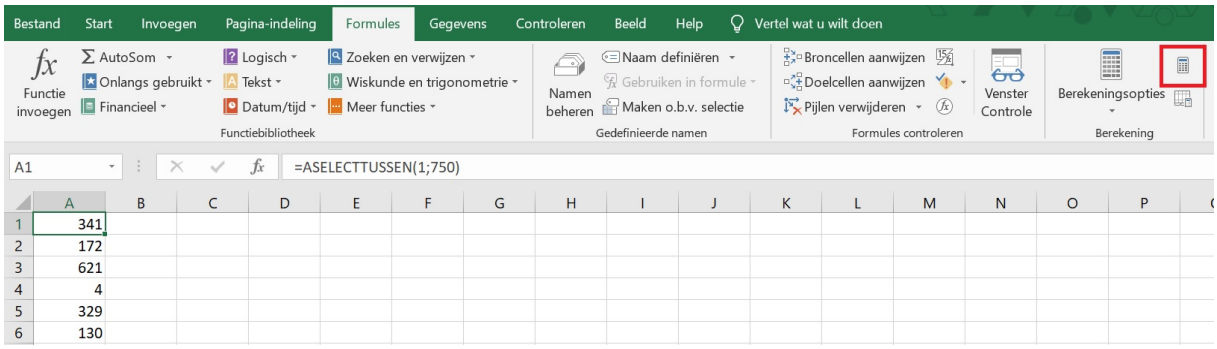
Een bedrijf produceert doosjes schroeven. De 40 mm lange kruiskopschroeven worden door een machine automatisch in doosjes van 100 stuks verpakt. Om te controleren of dit inpakproces goed verloopt, wil de fabrikant dat er dagelijks 50 doosjes gecontroleerd worden.

Hoe ga je dit controleproces uitvoeren? Beschrijf de populatie, de statistische variabele en hoe je de steekproef uitvoert.

Antwoord

De populatie is het aantal dagelijks geproduceerde doosjes van 40 mm lange kruiskopschroeven.
De statistische variabele is het aantal schroeven in een doosje, dit is een kwantitatieve variabele.

De steekproef van 50 doosjes zou je aselect moeten trekken, elk doosje moet dezelfde kans hebben om in de steekproef voor te komen. Dit moet verspreid over de werkdag van 8 uur gebeuren. Stel dat er elk uur 750 van die doosjes worden geproduceerd. Je kunt dan uit die doosjes een steekproef van 6 nemen. Je hebt dan aan het einde van de dag $6 \times 8 = 48$ doosjes gecontroleerd.
In de figuur zie je hoe je in Excel een aselecte steekproef van 6 uit 750 doosjes kunt trekken.
Je gebruikt daarbij de functie ASELECTTussen. Met het knopje 'Nu berekenen' krijg je steeds een nieuwe steekproef.



Figuur 15.3

Zo'n controle moet niet te lang duren. Gewoon tellen of er precies 100 spijkers in zitten kost teveel arbeidstijd. Dus het beste is om het gewicht van een doosje en van één spijker vast te stellen. Daarna kun je het aantal spijkers in een doosje vaststellen door te wegen.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 565**.
Neem aan dat er dagelijks ongeveer 6000 doosjes van die schroeven worden geproduceerd.

a Is de steekproef dan groot genoeg?

b Trek zelf een steekproef van 10 uit de 750 doosjes met behulp van Excel.

c Welk probleem gaat zich waarschijnlijk voordoen bij het meten van het aantal schroeven door weging?

Opgave 5

Voor kinderen vanaf drie maanden bestaat het geneesmiddel paracetamol in vloeibare vorm. Het wordt verkocht in flesjes met inhoud 100 mL ℮. Dit betekent dat in deze flesjes gemiddeld minstens 100 mL moet zitten en dat er nooit minder dan 91 mL in mag zitten. Ook mag maar een klein deel van de flesjes minder dan 95,5 mL vloeistof bevatten.

a Met welke statistische variabele heb je te maken? Is hij kwalitatief of kwantitatief?

b Beschrijf hoe een fabrikant van dit vloeibare geneesmiddel zou kunnen controleren of zijn productieproces goed verloopt. Geef daarbij aan met welke populatie je te maken hebt en hoe je een steekproef kunt samenstellen.

Voorbeeld 2

Als een middelgroot bedrijf wil weten hoe de medewerkers over het bedrijf denken, dan wordt dit vaak onderzocht door middel van een enquête onder alle medewerkers. Daarbij wordt vaak de vijfpunts likertschaal gebruikt.

Bij vragen als:

- Medewerkers weten welk belang het bedrijf hecht aan de kwaliteit.
- Medewerkers volgen regelmatig trainingen op het gebied van kwaliteitszorg.
- Medewerkers hebben een klantgerichte houding.
- Medewerkers volgen regelmatig trainingen op het gebied van klantvriendelijkheid.

kan dan een score van 1 (volledig oneens), 2 (oneens), 3 (niet eens / niet oneens), 4 (eens) of 5 (volledig eens) worden aangegeven.

Beschrijf dit onderzoek door aan te geven hoe de populatie eruit ziet, om welke statistische variabele(n) het gaat, enzovoort.

Antwoord

Het gaat hier om een statistisch onderzoek onder alle medewerkers van een bedrijf. Dat is de populatie van het onderzoek, er wordt geen steekproef gehouden.

De statistische variabele ‘mening medewerkers over het bedrijf’ is kwalitatief.
Maar je kunt zeggen dat door het gebruik van de likertschaal een poging wordt gedaan om een kwalitatieve variabele te kwantificeren.

Opgave 6

Bekijk het werken met de likertschaal in **Voorbeeld 2 op pagina 566**.

a Wanneer kun je met zo'n likertschaal werken?

b Verzin nog twee vragen die in zo'n onderzoek naar de mening van de medewerkers over hun bedrijf kunnen passen.

De vragen in een dergelijke enquête worden vaak zowel in positieve als in negatieve zin geformuleerd. Dus bijvoorbeeld komen vragen voor zoals:

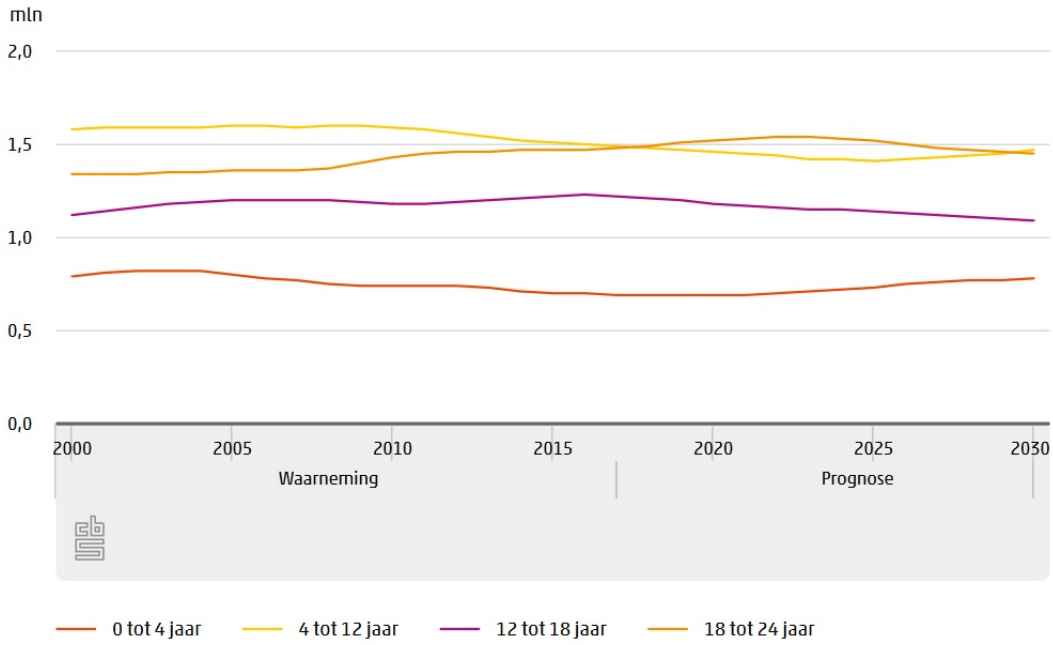
- Ik werk niet graag bij dit bedrijf.
- Ik vind het fijn om bij dit bedrijf te werken.

c Waarom gebeurt dat?

Oefenen

Opgave 7

Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) doet in Nederland veel onderzoek en rapporteert hierover. Deze diagrammen komen uit de Jeugdmonitor 2018.



Figuur 15.4

a Beschrijf de populatie bij dit onderzoek van het CBS.

b Welke definitie van jongeren is er in dit onderzoek gebruikt, denk je?

c Welke deelgroepen zijn onderscheiden?

d Welke statistische variabele is in dit diagram weergegeven?
Is dat een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?

Opgave 8

Om de mate van vervuiling van een groot meer door lozing van afvalstoffen te onderzoeken, zijn er een twintigtal monsters van 1 L water uit dat meer naar het laboratorium gestuurd. Daar kan de mate van vervuiling worden gemeten, uitgedrukt in mg/L.

a Welke populatie hoort bij dit onderzoek?

b Om welke statistische variabele gaat het hier?
Is die variabele kwalitatief of kwantitatief?

c Waarom is het niet verstandig om de 20 monsters op verschillende plaatsen vlak bij de oever te nemen?

d Wat vind je van de steekproefgrootte?

Opgave 9

In een fabriek worden 5000 potten zilvergrijze hoogglanslak (ralnummer 7001) met een inhoud van 2 liter geproduceerd. Er moet op worden gelet dat de potten de juiste inhoud hebben en dat de verf de juiste kleur en glans heeft.
Natuurlijk wil je niet alle potten openmaken om de kleur te controleren. Je neemt dus een steekproef.

a Welke populatie hoort bij dit onderzoek?

b Om welke statistische variabelen gaat het hier?
Geef aan of zo'n variabele kwalitatief of kwantitatief is.

c Hoe ga je de kleur en de glans van de verf vaststellen?

d Hoe ga je het onderzoek uitvoeren?

Opgave 10

Voor een biologiepracticum moet het aantal slakken op een stuk grond worden geteld. Het stuk grond wordt in stukken van 1 m^2 verdeeld. Iedere leerling telt het aantal slakken op vier van die stukken. Hier zie je de resultaten in Excel.

aantal slakken per m^2	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	16	14	7	4	2	3	1	1

Tabel 15.1

a Om welke statistische variabele gaat het hier?

b Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het stuk grond?

c Hoeveel leerlingen hebben er geteld?

d Hoeveel slakken zijn er in totaal geteld?

e Hoeveel slakken zijn er gemiddeld per m^2 gevonden?

Opgave 11

In de jaren 1982-1988 werd onder 22000 mannelijke Amerikaanse artsen onderzoek gedaan naar de invloed van aspirine op hart- en vaatziekten op de gemiddelde Amerikaanse man. De helft gebruikte om de dag 300 milligram aspirine, wat ongeveer gelijk staat aan een 'gewoon' aspirientje. De andere helft slikte een placebo (een middel zonder werkzame stof). Van de aspirineslikkers kregen 104 personen een hartinfarct, van de placeboslikkers waren dat er 189. De conclusie van het onderzoek was dat het risico op een hartinfarct met ongeveer 45% wordt verlaagd door het slikken van aspirine. Dat dit grote verschil aan toeval was te wijten, vond men uitgesloten vanwege het grote aantal mensen dat aan het onderzoek meewerkte.

a Waarom is hier geen sprake van een representatieve steekproef? Hoe had deze steekproef moeten worden samengesteld?

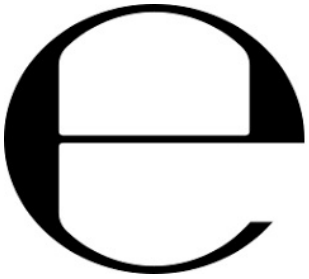
b Waarom werd er van placebo's gebruikgemaakt?

c Hoeveel procent van de 11000 aspirineslikkers heeft baat gehad bij het slikken van aspirine?

d Volgens de tekst wordt de kans op een hartinfarct met 45% verlaagd. Klopt dat?

Toepassen

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.



Figuur 15.5

Volgens Wikipedia geeft het symbool aan:

- het gemiddelde van de werkelijke hoeveelheid product in de verpakkingen in een partij ten minste gelijk is aan de hoeveelheid die op de verpakking staat, en
- slechts een gering aantal verpakkingen een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel, en
- geen verpakking een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus twee keer de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel.

Deze tabel hoort daar bij:

aangeduide hoeveelheid (g of mL)	% fout	absolute fout
van 5 tot 50	9	
van 50 tot 100		4,5
van 100 tot 200	4,5	
van 200 tot 300		9
van 300 tot 500	3	
van 500 tot 1000		15
van 1000 t/m 10 . 000	1,5	

Tabel 15.2

Onder % fout versta je dat de hoeveelheid zoveel procent lager zou kunnen zijn.
Onder absolute fout versta je dat de hoeveelheid zoveel gram of mL lager zou kunnen zijn.

Nu kun je (zeker voor consumentenverpakkingen) zelf nagaan hoeveel de minimale hoeveelheid moet bedragen. En welke hoeveelheden ‘een gering aantal pakken’ mogen hebben.

Opgave 12

Een pak hagelslag bevat 220 gram ℮ hagelslag.
Een supermarkt heeft nog 140 van die pakken hagelslag in voorraad.

a Hoeveel hagelslag moeten die pakken gemiddeld bevatten?

b Hoeveel hagelslag moet elk pak tenminste bevatten?

c Je koopt regelmatig een pak van deze hagelslag bij die supermarkt.
Hoeveel hagelslag moet zo'n pak vrijwel altijd tenminste bevatten?

d De fabrikant van deze hagelslag produceert 50 . 000 van deze pakjes hagelslag per week.
Hoe moet hij ervoor zorgen dat zijn pakjes aan de voorwaarden van het e-teken voldoen?

Opgave 13

Een fles spa-rood bevat 1,5 L ℮ bronwater met koolzuur. De fabrikant van dit bronwater produceert 1,2 mln van deze flessen per week in een volcontinu vulproces.

Hoe moet hij ervoor zorgen dat zijn flessen aan de voorwaarden van het e-teken voldoen?

Testen

Opgave 14

Stel je voor dat een onderzoeker voor een onderzoek naar de filedruk in Nederland naar het waddeneiland Texel gaat en daar 's nachts het aantal auto's op een van de wegen checkt. Hij noteert per voorbijrijdende auto het merk en de snelheid.

a Leg uit waarom dit geen aselect onderzoek is.

b Leg uit waarom dit geen representatief onderzoek is.

c Leg uit waarom de variabele *automerk* een kwalitatieve variabele is.

d Leg uit waarom de variabele *aantal auto's per uur* een kwantitatieve variabele is en waarom hier sprake is van een telling.

e Leg uit waarom de variabele *snelheid* een kwantitatieve variabele is en waarom hier geen sprake is van telling.

Opgave 15

Voor een tevredenheidsonderzoek in ziekenhuizen bedenkt een onderzoeker de volgende manier om een steekproef samen te stellen: een jaar lang wordt bij elk ziekenhuis iedere maandag iedereen die in het ziekenhuis aanwezig is of er arriveert, genummerd. Het maakt niet uit of iemand verplegend personeel is, zieke, bezoeker of schoonmaker, enzovoort. Aan het einde van de dag worden bij elk ziekenhuis uit de groep toegekende nummers vijftien personen met behulp van toevalsgetallen gekozen om mee te doen aan het onderzoek. Stel dat bij een ziekenhuis op zo'n maandag 1250 nummers zijn uitgedeeld, startend met nummer 1.

a Genereer met behulp van Excel een groep van vijftien nummers die die maandag worden geselecteerd voor het onderzoek.

b Is deze steekproef representatief?

15.2 Meetnauwkeurigheid

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- dat je bij metingen altijd met meetfouten te maken hebt;
- onderscheid maken tussen systematische, toevallige en persoonlijke fouten;
- juistheid en precisie kunnen onderscheiden.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- manieren om een steekproef uit een populatie te trekken en het belang van herhaalbaarheid van een steekproef.

Verkennen

Opgave V1

Op kilopakken suiker van een bepaalde fabrikant staat bijvoorbeeld 1000 gram ℮.
Dit betekent dat geen van deze pakken een lager gewicht mag hebben dan 970 gram en dat het gemiddelde gewicht van zijn kilopakken minstens 1000 gram moet zijn. De fabrikant onderzoekt met behulp van aselecte steekproeven of dit voor de pakken die zijn fabriek verlaten klopt.

a Welk probleem doet zich voor als je het gewicht van een pak suiker meet?

Er wordt een weegschaal gebruikt die van klasse 0,5 is. Dit betekent dat elk meetresultaat een afwijking kan hebben van maximaal 0,5% van de totale schaallengte. Er kunnen gewichten mee bepaald worden van 0 tot 5 kg.

b Hoeveel kan elk meetresultaat dus afwijken?

c Je meet 990 gram als gewicht van een pak suiker.
Tussen welke waarden ligt het gewicht van dit pak?

d Wat moet de fabrikant doen om aan de voorwaarden te kunnen voldoen?

e En dan het aflezen van de weegschaal. Kun je die 990 g exact aflezen?

f Het apparaat waarmee je meet, kan op twee manieren meetfouten opleveren. Welke twee?

Opgave V2

De geneesmiddelenautoriteit wil in kaart brengen of een bepaald veel verkocht geneesmiddel bijwerkingen heeft. Het betreffende geneesmiddel is alleen op doktersrecept verkrijgbaar.

Uit het bestand waarin alle huisartsen in Nederland voorkomen, worden er 25 willekeurig gekozen. Hen wordt gevraagd om de patiënten die zij dit geneesmiddel voorschrijven te laten aangeven of één of meer van de volgende bijwerkingen optreden:

- slapeloosheid
- duizeligheid
- hoofdpijn
- maag- en darmklachten

a Wat is er niet goed aan deze vraagstelling?

b Welke probleem kan zich voordoen met deze steekproef? En hoe kun je dat oplossen?

Uitleg 1

Bij kwantitatieve statistische variabelen zijn meten en tellen de twee manieren om aan data te komen.

Bij meten heb je te maken met de meet(on)nauwkeurigheid, met meetfouten.

Bijvoorbeeld bij het wegen van kilopakken suiker (inhoud 1000 gram ℮) gebruik je een weegschaal die van meetklasse 0,4 is. Dit betekent dat elk meetresultaat een afwijking kan hebben van maximaal 0,4% van de totale schaallengte (meetbreedte). Als het meetgebied vanaf 0 tot en met 5 kg is, dan is de afwijking van het gemeten gewicht maximaal $0{,}004 \cdot 5000 = 20$ g.
Als je 990 g afleest, dan ligt het werkelijke gewicht tussen 970 en 1010 g. Dit noem je een toevallige fout, hij is onderdeel van het meetsysteem. Het gaat hierbij om de precisie van je meetinstrument. Je noteert als gewicht 990 ± 20 gram.

Figuur 15.1

Maar je kunt ook zelf afleesfouten maken, bijvoorbeeld omdat je wat scheef staat voor een weegschaal zoals die in de figuur. Een afwijking die ontstaat door scheef aflezen heet parallax. Dat zijn persoonlijke fouten. Die zijn vermijdbaar.

En dan zijn er nog de systematische fouten. Je houdt bijvoorbeeld geen rekening met het gewicht van de verpakkingen zelf en je komt systematisch op een te hoog gewicht. Dan heb je te maken met de juistheid van je metingen.

Ook bij kwalitatieve statistische variabelen komen toevallige fouten voor. Systematische fouten ontstaan bij dergelijke variabelen meestal door zogenaamde 'non-respons', een groep waar je door de wijze van onderzoeken geen antwoord van krijgt. Persoonlijke fouten krijg je hier door slechte vragen, onduidelijkheden, en dergelijke.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 572**. Je ziet een klasse 0,4 weegschaal.

a Op de weegschaal staat 'Sensitivity 20 g'.
Leg uit dat dit in overeenstemming is met een klasse 0,4 weegschaal.

b Hoe precies kun je op de gegeven weegschaal het gewicht aflezen?

Je hebt van een steekproef van 10 kilopakken suiker (inhoud 1000 gram ℮) met deze weegschaal gewogen en het gewicht van de verpakking (10 gram) eraf getrokken. Uitkomsten: 990, 1000, 1010, 1020, 1000, 990, 1020, 1010, 1030, 1010.
Je weet dat alle pakken minstens 970 g moeten wegen en dat slechts enkele minder dan 985 g mogen wegen. Verder moet hun gemiddelde gewicht 1000 g zijn.

c Voldoet deze steekproef aan alle drie de voorwaarden?

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 572**. Je ziet een klasse 0,4 weegschaal.
Neem aan dat deze weegschaal al lang niet geijkt is. Als er geen gewicht op ligt, wijst hij toch 10 gram aan.

a Met welk type fout heb je nu te maken?

b Hoe moet je hiermee met het meten rekening houden?

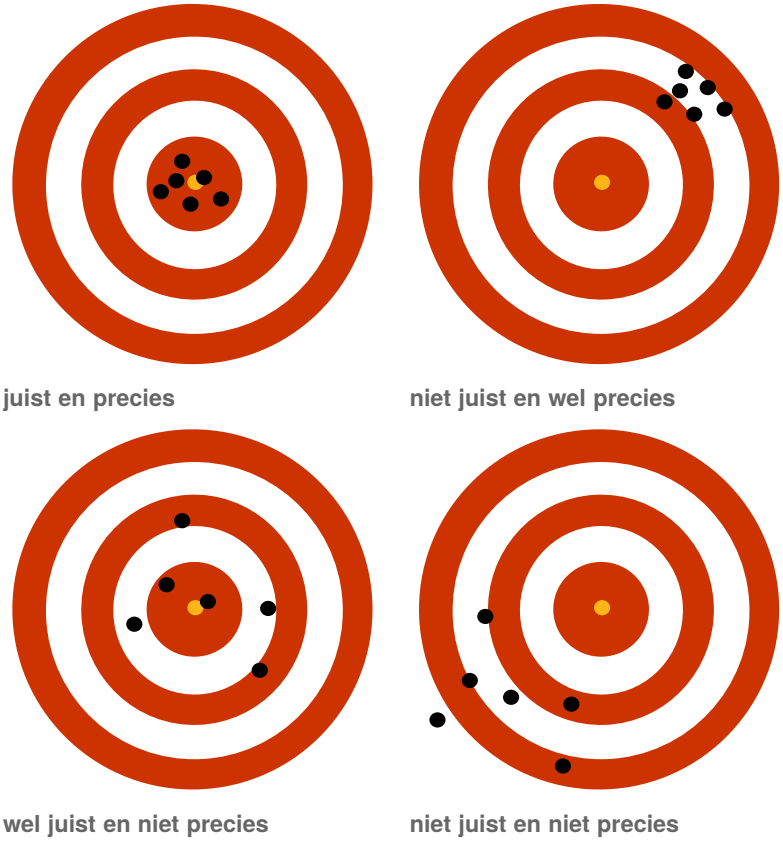
c Gaat het bij deze meetfouten om de precisie van je weegschaal of de juistheid?

Uitleg 2

Je bent in **Uitleg 1 op pagina 572** de begrippen juistheid en preciesie tegengekomen.

- De juistheid zegt iets over hoe dicht je meting (of het gemiddelde van verschillende metingen) zit bij de ‘werkelijke waarde’.
- De precisie zegt iets over hoe dicht je metingen bij elkaar liggen.

In deze figuren wordt dat met behulp van een schietschijf uitgebeeld.
De (oranje) roos is de werkelijke waarde.



Figuur 15.2

Opgave 3

Je beschikt over een weegschaal met een schaallengte van 5 kg van klasse 0,5.

a Welke afwijking van de werkelijke waarde zal een correct afgelezen waarde maximaal hebben?

Op verschillende momenten en door verschillende mensen worden met deze weegschaal vijf keer pakken van 1500 g gewogen.
Je ziet steeds de resultaten van die metingen.
Beschrijf telkens van welke soort fout er sprake is en of de metingen precies en juist zijn uitgevoerd.

b 1530, 1550, 1515, 1525 en 1530.

c 1460, 1550, 1515, 1475 en 1510.

d 1480, 1510, 1495, 1490 en 1515.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

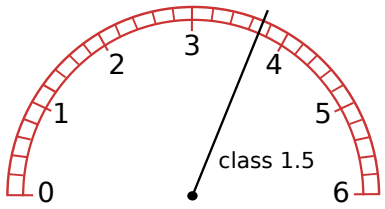
Bij het verrichten van metingen wordt onderscheid gemaakt tussen de volgende **meetfouten** of **meetonnauwkeurigheden**:

- Een **persoonlijke fout** is een fout die je zelf maakt. Dergelijke fouten kun je vermijden.
  Een afleesfout is daar een voorbeeld van.
  Bedenk dat je van een meetwaarde alleen het laatste cijfer mag schatten!
- Een **toevallige fout**. Dit soort fouten treedt altijd op, je kunt ze dus niet vermijden. Een kenmerk is dat je waarden door toevallige fouten soms boven en soms onder de werkelijke waarde liggen.
  Als er op een pipet staat: $\pm$0,01 mL dan gaat het om een toevallige fout.
  Als een meetinstrument van meetklasse 2,0 is dan is er een maximale afwijking mogelijk van 2% van de schaallengte (ook meetbreedte genoemd). Het gaat hierbij om de **precisie** van de metingen, dus hoe dicht je metingen bij elkaar zitten.
- Een **systematische fout** geeft een afwijking in één richting. Je waarden komen allemaal te hoog of juist te laag uit, door een fout in je meetsysteem.
  Dit kan bijvoorbeeld zijn omdat je meetinstrument niet geijkt is. Of je leest systematisch scheef af, er is sprake van **parallax**. Het gaat dan om de **juistheid** van de metingen, dus hoe dicht je bij de 'werkelijke waarde' zit. Dergelijke fouten kun je vermijden.

Bij de precisie van metingen krijg je afwijkingen in twee richtingen. Is je uitkomst bijvoorbeeld $20 \pm 0{,}5$, dan stelt 0,5 de **absolute fout** voor.
Je kunt zo'n meetnauwkeurigheid ook delen door de bepaalde hoeveelheid, je krijgt dan de **relatieve fout**.
In dit geval $\frac{0{,}5}{20} = 0{,}025$, ofwel 2,5%.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een analoge schaalverdeling van een meter van klasse 1,5.
Het meetgebied (of meetbereik) is vanaf 0 tot en met 6.
Het apparaat is lang niet geijkt: de laagste wijzerstand is 0,2.



Figuur 15.3

Je ziet dat deze meter een getal aanwijst. Geef dit zo nauwkeurig mogelijk en leg uit welke mogelijke meetwaarden er bij dit getal horen. Benoem ook de soorten meetfouten die hier optreden. Gaat het om de juistheid of de precisie van de metingen?

Antwoord

Je leest uit de figuur de waarde $\approx 3{,}7$ af.
Eigenlijk moet je zeggen $3{,}7 \pm 0{,}05$, want er is een afleesonnauwkeurigheid.

Bovendien staat er op het instrument dat er een toevallige fout van 1,5% van de schaallengte is, dus van $0{,}015 \cdot 6 = 0{,}09$. De absolute meetfout (of meetonnauwkeurigheid) is daarom $0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}14$.
Je noteert als afgelezen waarde $3{,}7 \pm 0{,}14$.
Dus de mogelijke waarden liggen tussen $3{,}7 - 0{,}14 = 3{,}56$ en $3{,}7 + 0{,}14 = 3{,}84$.
Omdat je maar op één decimaal kunt aflezen, zijn de werkelijk mogelijke waarden 3,6, 3,7 en 3,8.
Hierbij gaat het om de precisie van de metingen.

Verder is er een systematische fout van 0,2.
Dit moet je nog van de mogelijke waarden aftrekken.
Dit gaat over de juistheid van de metingen.
Dus uiteindelijk zijn de mogelijke meetwaarden 3,4, 3,5 en 3,6.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 574**.
Stel je hebt een klasse 2 ampèremeter met een schaal van 0 tot en met 10 A met streepjes om de 0,2 A.
De wijzer geeft ongeveer 7 A aan.

a Hoe groot is de absolute afleesfout? En de relatieve fout?

b Hoe noteer je de afgelezen waarde? Tussen welke waarden ligt de gemeten stroomsterkte?

Als je de meter loskoppelt, ontdek je dat de laagste stand die hij aangeeft 0,4 A is.

c Tussen welke waarden ligt de gemeten stroomsterkte in werkelijkheid?

d Over welk type meetfout gaat het bij a? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?

e Over welk type meetfout gaat het bij b? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?

Opgave 5

In een buret zit een vloeistof. De vloeistofspiegel (meniscus) is hol.
Hiernaast zie je er een foto van.

Figuur 15.4

a Kees leest af dat er 22 mL vloeistof in de buret zit.
Welke fout maakt hij? En welke soort fout? Gaat het om de precisie of de juistheid?

Op elke pipet staan het nominaal volume en de nauwkeurigheid vermeld.
Voor een 20 mL-pipet kan dit bijvoorbeeld 20,00 $\pm$ 0,05 mL zijn.

b Over welke soort meet(on)nauwkeurigheid gaat dit? En welke betekenis heeft 20,00 $\pm$ 0,05 mL?

Bij een holle vloeistofspiegel lees je altijd de waarde van de ondergrens van de vloeistofhoogte af.
Bij bijvoorbeeld een kwikthermometer is de vloeistofspiegel bol.

c Hoe moet je dan aflezen?

Voorbeeld 2

Stel je wilt een lege opslagtank met een capaciteit van 10 . 000 liter voor 80% vullen met olie.
Je zet een pomp aan en ziet dat de vloeistof met 120 L/min naar binnen stroomt.
De flowmeter is van klasse 1,5 en heeft een schaal die loopt van 0 tot 150 L/min.

Hoe lang duurt het vullen van deze tank? Geef een antwoord met de juiste nauwkeurigheid.

Antwoord

Er moet $0{,}80 \times 10\,.\,000 = 8000$ L in de opslagtank komen.

De flowmeter geeft 120 L/min aan dus dat zou $\frac{8000}{120} = 66{,}666...$ minuten moeten duren.

De flowmeter heeft een mogelijke afwijking van 1,5%.
Dat betekent dat de werkelijke flow ligt tussen 117,75 en 122,25. De tijdsduur varieert daarom tussen

- een tijdsduur van $\frac{8000}{117{,}75} \approx 67{,}9$ minuten en
- een tijdsduur van $\frac{8000}{122{,}25} \approx 65{,}4$ minuten.

Dus tussen de 65 en de 68 minuten is nauwkeurig genoeg.

Opgave 6

Bekijk het rekenen met meetfouten in **Voorbeeld 2 op pagina 575**.

a Reken zelf na dat de werkelijke flow zit tussen 117,75 en 122,25 L/min.

b Had je ook kunnen zeggen dat de tijdsduur tussen 65,4 en 67,9 minuten ligt?

Je hebt nog zo'n tank tot je beschikking met een volume van 10 . 000 L.
Die vul je met 7000 L olie.
De pomp heeft nu een nauwkeuriger flowmeter van klasse 0,8 en een schaallengte van 200.

c Hoe lang duurt het vullen bij een afgelezen flow van 150 L/min?

Oefenen

Opgave 7

Geef van de volgende uitspraken aan of ze waar of niet waar zijn.

a Systematische fouten kun je niet vermijden.

b Toevallige fouten treden altijd op.

c De klasse van een meetinstrument geeft een systematische fout aan.

d De afwijkingen van hoeveelheden vastgelegd door het $\ominus$-teken zijn toevallige afwijkingen.

Opgave 8

Om wat voor soort fout gaat het? Kies uit: persoonlijke fout – toevallige fout – systematische fout.

Geef ook aan of het om de precisie of de juistheid van de metingen gaat.

a Door schommelingen in de druk en de temperatuur tijdens de metingen wijken de resultaten onderling af.

b Een instrument heeft een beperkte afleesnauwkeurigheid.

c Een instrument is verkeerd geijkt.

d Een analist heeft door een rekenfout een verkeerde verdunning gemaakt.

e Omdat je scheef voor het instrument zit lees je een verkeerde waarde af.

Opgave 9

Bij het meten van de spanning over een stroomkring gebruik je een voltmeter zoals deze.
De meter wijst 230 V aan.

Figuur 15.5

a Hoe nauwkeurig kun je deze schaalverdeling aflezen?

b Hoe groot is de absolute afleesfout? En de relatieve fout in tienden van procenten?

c Hoe noteer je de afgelezen spanning?
Tussen welke waarden ligt de werkelijke spanning?

Bij nadere controle blijkt dat als de meter niet is aangesloten, hij toch nog een spanning van 20 V aangeeft.

d Wat betekent dit voor je antwoord bij c?

Opgave 10

Je wilt de soortelijke massa bepalen van een bepaald voorwerp om te kijken of het echt zilver is of niet. Je weegt het dus en je bepaalt het volume.

Het wegen doe je met een weegschaal van klasse 1 met een schaallengte van 1000 gram.

Het volume bepaal je door het in een maatbeker met 100 $\pm$ 5 mL water te stoppen.

Je meet een volume van 35 mL en een gewicht van 360 gram.

De soortelijke massa van zilver is 10,5 gram/cm^3.

a Tussen welke waarden ligt het gemeten gewicht?

b Tussen welke waarden ligt het volume?

c Tussen welke waarden ligt de soortelijke massa? Zou het zilver kunnen zijn?

Toepassen

Je ziet hier een digitale pH-meter.
Digitale apparatuur lijkt heel erg nauwkeurig, maar toch kunnen ook bij het gebruik daarvan meetfouten optreden

Figuur 15.6

Bij dit apparaat zijn enkele specificaties gegeven:

1. Kleur: Geel
2. Afmetingen: 15 x 3 x 1,5 cm
3. Beeldscherm: LCD
4. Digitale nauwkeurigheid: 0,01
5. Resolutie: 0,01
6. Werkende Temperatuur: 0 ~ 80 °C
7. Meetbereik: 0,00 ~ 14,00
8. Sonde type: Precisie glazen bol elektrode
9. Calibratiemethode: 2 punten automatische kalibratie
10. Voeding: 2x 1.5V Knoopcelbatterijen (Inbegrepen!)

Opgave 11

Bekijk de digitale pH-meter en zijn specificaties.

a Welke specificaties gaan over de meetnauwkeurigheid?

b Gaat het dan om de precisie of de juistheid van de metingen?

c Tussen welke twee waarden ligt de afgelezen waarde 4,00?

Je gebruikt deze meter om in een zwembad de zuurgraad van het water te meten. Je loopt naar de rand van het bad en houdt deze meter in het water en leest de zuurgraad af. Deze waarde geef je op als de zuurgraad van het zwembad.

d Welke (soorten) fouten maak je?

Opgave 12

Je ziet hier een digitale weegschaal.

Figuur 15.7

a Welk meetbereik heeft deze weegschaal?

b Met welke meet(on)nauwkeurigheid werkt deze weegschaal?

Je meet met deze weegschaal nadat hij is geijkt het gewicht een stalen spijker: 20 g.
Verder meet je het gewicht van de verpakking van 50 van die spijkers: 15 g.

In een fabriek worden aan de lopende band 50 van die spijkers in hun verpakking gestopt.

c Tussen welke grenzen moet het gewicht van zo'n doos van 50 spijkers komen te liggen?

Testen

Opgave 13

Om wat voor soort fout gaat het in de volgende situaties? Geef ook aan of de fout vermijdbaar is en of het om precisie of juistheid gaat.

a Je gebruikt een weegschaal die zonder dat er gewicht op ligt al 20 g aangeeft.

b Je gebruikt een weegschaal van klasse 2.

c Je wilt het vulgewicht van pakken suiker meten en je meet het gewicht van een gevuld pak suiker.

Opgave 14

Je ziet hier een manometer van klasse 2,5.

Figuur 15.8

a Hoe nauwkeurig kun je de druk aflezen van deze schaalverdeling? Gaat het dan om precisie of juistheid?

b Hoe groot is de druk die de rode wijzer aangeeft?

c Hoeveel bedraagt de absolute meetonnauwkeurigheid? En de relatieve fout?

d Welke waarden kan de druk aannemen als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?

15.3 Diagrammen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- waarnemingen weergeven in tabellen en diagrammen;
- klassenindeling, klassenbreedte, absolute en relatieve frequentie;
- verschillende soorten diagrammen herkennen en benoemen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- manieren om een steekproef uit een populatie te trekken en het belang van herhaalbaarheid van een steekproef.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de voetlengtes van 100 mannen. Erg overzichtelijk weergegeven zijn deze gegevens zo niet.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.1

a Zoek de grootste en de kleinste voetlengtes in deze tabel.

Door afronden op gehele cm verdeel je deze voetlengtes in klassen van $20{,}5- < 21{,}5$, $21{,}5- < 22{,}5$, enzovoorts. Je kunt dan tellen hoeveel voetlengtes er in elke klasse voorkomen.

b Maak daarvan een tabel.

c Wat is er aan zo'n tabel overzichtelijker dan aan de gegeven meetwaarden?

d Hoe kun je deze gegevens grafisch weergeven?

Uitleg

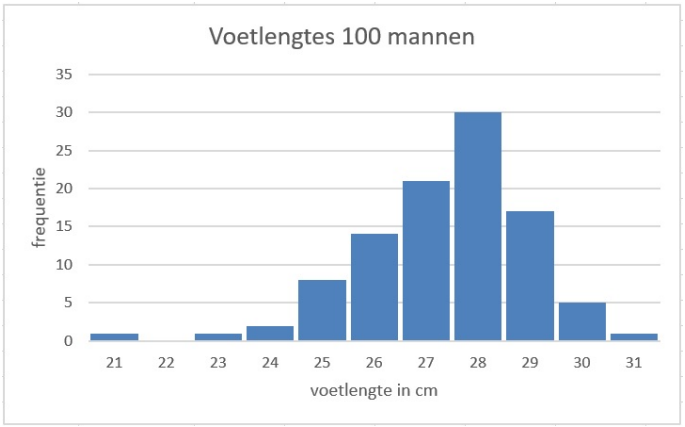
Je ziet hier de voetlengtes van 100 mannen. Erg overzichtelijk weergegeven zijn deze gegevens zo niet.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.2

Ruwe data zoals deze probeer je overzichtelijker weer te geven.

Daarbij gebruik je vaak een frequentietabel. In dit geval ligt het voor de hand om de voetlengtes onder te brengen in klassen met een klassenbreedte van 1,0 cm, dus klassen als 20,5– < 21,5, 21,5– < 22,5, enzovoort. De klassenmiddens zijn dan 21, 22, ...
Het aantal keer dat een bepaalde voetlengte in zo'n klasse voorkomt heet de absolute frequentie.
Je krijgt zo een goed overzicht van de verschillende voetlengtes en kunt er eenvoudig een staafdiagram bij maken. Een staafdiagram met op de horizontale as aaneengesloten oplopende getallen en op de verticale as frequenties heet ook wel een histogram.



Figuur 15.1

Er bestaan nog veel meer soorten diagrammen.
Met behulp van Excel kun je de meeste eenvoudig maken.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 579**. Je ziet **de voetlengtes van 100 mannen**.

a Maak een frequentietabel met de aangegeven klassenbreedte en het bijbehorende staafdiagram.

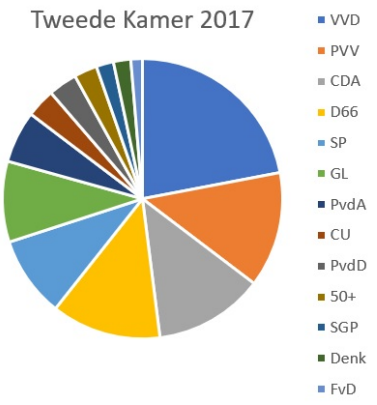
b In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.
Maak ook daarvan een staafdiagram. Gebruik dezelfde klassenbreedte.

c Is het gemakkelijk om beide staafdiagrammen te vergelijken en daar conclusies uit te trekken?

d Je kunt ook in plaats van een staafdiagram een lijndiagram maken. Daartoe verbind je de middens van de bovenkanten van de staven door rechte lijnstukjes met elkaar. Maak voor de voetlengtes van de mannen zo'n lijndiagram.

Opgave 2

De uitslag van de Tweede Kamer verkiezingen van 2017 zie je in dit cirkeldiagram.
Er zijn 150 zetels te verdelen en de grootste partij (de VVD) heeft er 33 gekregen.



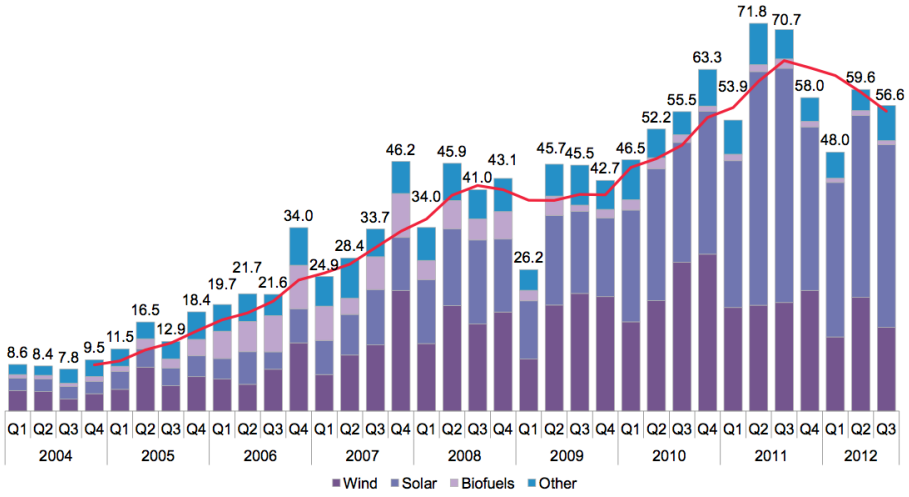
Figuur 15.2

a Reken na dat dit (ongeveer) met de figuur klopt.

b Zie je in een cirkeldiagram absolute of relatieve frequenties?

Opgave 3

Je ziet een gestapeld staafdiagram over de wereldwijde investeringen (in miljarden dollars) per type duurzame energiebron. De rode lijn geeft het gemiddelde van de investeringen in het voorgaande jaar.



Figuur 15.3

a Waarom zou hier een gestapeld staafdiagram zijn gebruikt?

b Welke informatie vind je, buiten de investeringen in dollars die boven de staven staan, nog meer in het diagram?

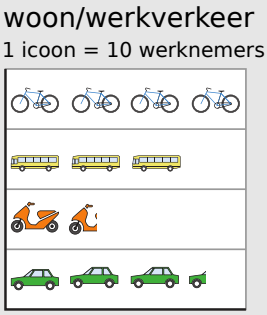
c Wat betekent het als in een bepaald kwart de totale staaf onder de rode lijn ligt?
Laat dit voor het eerste kwart van 2009 met een berekening zien.

Theorie en voorbeelden

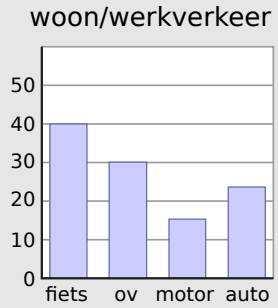
Om te onthouden

Bij veel statistische variabelen kun je een **frequentietabel** maken. Door te tellen hoe vaak een bepaalde waarde van die variabele voorkomt, krijg je de **absolute frequentie** van die waarde. Deel je die absolute frequentie door het totale aantal waarden, dan krijg je de **relatieve frequentie** van die waarde. Relatieve frequenties (vaak in procenten uitgedrukt) maken het vergelijken van twee datasets gemakkelijker.

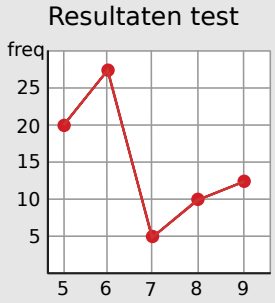
Vaak gebruik je daarbij een **klassenindeling**. Bij metingen heb je vanwege de meetonnauwkeurigheid eigenlijk altijd met klassen te maken.



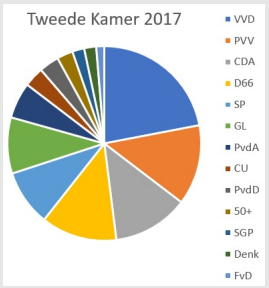
beelddiagram



staafdiagram



lijndiagram

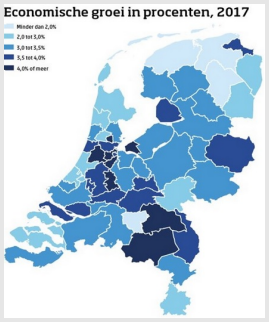


cirkeldiagram

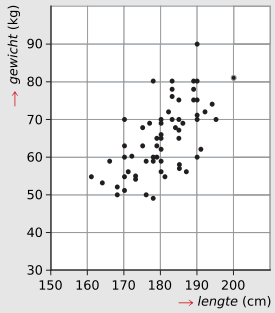
snelheidsmeting binnen de bebouwde kom

	auto's km/h					
4	1	3	5			
5	0	3	5	6	6	9
6	1	3				
7	5					

steelbladdiagram



kaartdiagram



puntenwolk

Figuur 15.4

In een tabel heb je vaak alle data nauwkeurig voorhanden, maar een **diagram** geeft vaak beter overzicht en duidelijker een bepaald verloop weer. Er zijn veel soorten diagrammen:

- in een **beelddiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door figuren;
- in een **staafdiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de lengtes van rechthoekige staven;
- in een **lijndiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door punten in een assenstelsel die door rechte lijnstukken met elkaar worden verbonden;
- in een **cirkeldiagram** worden de waarden of de frequenties weergegeven door de oppervlakte van een cirkelsector; je rekent daarbij relatieve frequenties in procenten om naar hoeken (100% is 360°);
- in een **steelbladdiagram** worden in de steel de waarden aangegeven, behalve hun laatste cijfer; die laatste cijfers staan naast de steel in oplopende volgorde vanaf de steel;
- in een **kaartdiagram** worden de gegevens in de vorm van een kaart gepresenteerd;
- in een **puntenwolk** of **spreidingsdiagram** worden twee variabelen tegen elkaar uitgezet en worden de gegevens aangeduid door punten in een assenstelsel.

Bij statistiek probeer je de gegevens zo eerlijk en overzichtelijk mogelijk weer te geven en de lezer/kijker niet te beïnvloeden of voor de gek te houden.

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.3 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

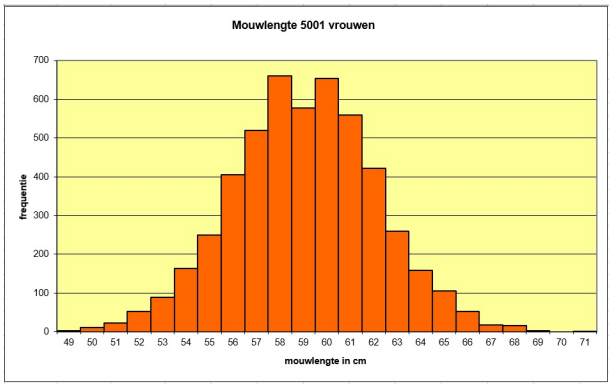
kniehoogte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.4 Kniehoogte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de mouwlengte en de kniehoogte van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek. Maak een staafdiagram van de mouwlengtes. Wat zijn de voordelen van een tabel en wat die van een staafdiagram?

Antwoord

Werk met het bestand in Excel en je krijgt dit staafdiagram.



Figuur 15.5

Bij een tabel staan de exacte aantallen waar je mee kunt gaan rekenen. Bijvoorbeeld absolute of relatieve frequenties.

Bij een staafdiagram zie je het verloop van de mouwlengte beter. Je kunt heel makkelijk zien welke lengtes veel of weinig voorkomen.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 583**.

a Welke klassenindeling wordt hier vanwege de meetnauwkeurigheid in hele cm gebruikt?

Je kunt ook een staafdiagram van de mouwlengtes maken met relatieve frequenties.

b Leg uit hoe dat gaat.

c Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de mouwlengtes.

d Maak een lijndiagram van de relatieve frequenties van de kniehoogtes.

Opgave 5

Je wilt de concentratie nitraat in landbouwgrond op een bepaald stuk land vaststellen.
Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

Tabel 15.5

a Waarom is het nu niet gemakkelijk om een goede waarde voor de nitraatconcentratie door te geven?

b Maak een frequentietabel en een staafdiagram bij deze gegevens.
Welke klassenbreedte is daarbij handig?

c Welke waarde voor de concentratie nitraat geef je voor dit stuk landbouwgrond op?

Je kunt de gegevens van de 50 monsters ook in een steelbladdiagram weergeven. Je ziet dat hiernaast.

d Hoe vaak is er 24,6 mg/L gemeten?

e Wat is het grote voordeel van zo'n diagram?
Waarom worden er dan niet steeds van deze diagrammen gemaakt?

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L	
20	4
21	4
22	0 9
23	5 7 8 9
24	0 1 2 3 3 4 5 6 6 6 7 8 8 9
25	0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8
26	0 1 1 3 3 4
27	0 1 5
28	1 9
29	0
30	1

Figuur 15.6

Voorbeeld 2

Biogas is een gasmengsel dat ontstaat als gevolg van biologische enzymatische processen.
De samenstelling ervan ziet er meestal zo uit:

product	formule	percentage
methaan	CH_4	60
koolstofdioxide	CO_2	35
waterstofdisulfide	H_2S	0 – 2
ammoniak	NH_3	0 – 2
waterdamp	H_2O	0 – 2

Tabel 15.6

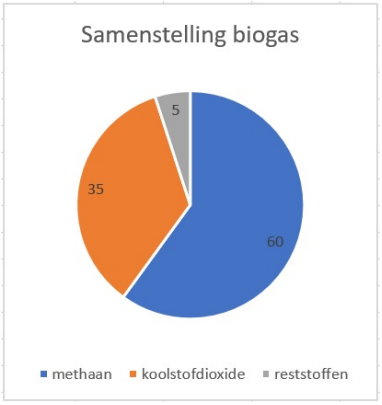
Geef deze samenstelling weer in een cirkeldiagram.
Voeg daarin alle stoffen die voor minder dan 5% voorkomen samen tot 'reststoffen'.

Antwoord

Je tabel wordt:

product	formule	percentage	sectorhoek
methaan	CH_4	60	216°
koolstofdioxide	CO_2	35	126°
reststoffen	H_2S	5	18°

Tabel 15.7



Figuur 15.7

Je kunt natuurlijk ook gewoon Excel gebruiken, dan hoef je geen sectorhoeken om te rekenen.

Opgave 6

Bekijk het maken van een cirkeldiagram in **Voorbeeld 2 op pagina 584**.

a Hoe bereken je de sectorhoeken?

b Maak zelf het cirkeldiagram in het voorbeeld.

Van 15 gram tin en 80 gram koper kun je 95 brons maken.

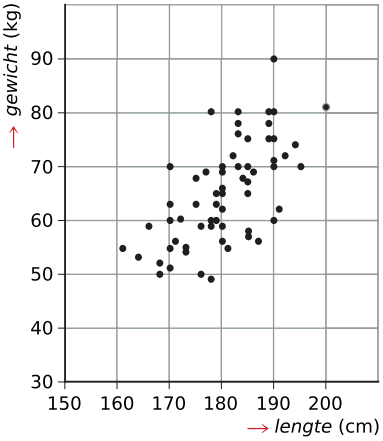
c Geef de samenstelling van brons weer met een cirkeldiagram.

Voorbeeld 3

Een spreidingsdiagram (puntenwolk) gebruik je als je twee statistische variabelen wilt vergelijken. Hier gaat het om het vergelijken van de lengtes in cm met de gewichten in kg van een groep jonge mannen.

Tussen welke waarden ligt het gewicht van een jonge man van 180 cm?

Kun je zeggen dat een langer iemand altijd zwaarder is dan een kleiner iemand?



Figuur 15.8

Antwoord

Allereerst moet je aannemen dat deze steekproef representatief is voor alle jonge mannen om zo'n uitspraak te kunnen doen.

Je ziet dat bij de mannen die 180 cm het laagste gewicht 56 kg en het hoogste gewicht 70 kg is. Maar bij net iets kortere en net iets langere mannen zijn gewichten te vinden van 49 kg en 80 kg.
Een redelijke schatting zou dus zijn: tussen 50 en 80 kg.

Je kunt niet zeggen dat een langer iemand altijd zwaarder is dan een kleiner iemand. Maar er lijkt wel een tendens dat langere jonge mannen ook in het algemeen zwaarder zullen zijn dan kleinere.

Je zult later nog meer leren over hoe je uit spreidingsdiagrammen conclusies kunt trekken.

Opgave 7

Bekijk het werken met een spreidingsdiagram in **Voorbeeld 3 op pagina 585**.

a Is deze steekproef van 100 jongeren representatief als hij bestaat uit alle jongeren van één opleiding?

b Verwacht je bij jonge vrouwen net zo'n spreidingsdiagram?

c Hoe zwaar zal een jonge man van 1,65 m ongeveer zijn?

Oefenen

Opgave 8

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Een laborant meet daarin de volgende percentages eiwit afgerond op gehele procenten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65

Tabel 15.8

a Je wilt hier voor de overzichtelijkheid een staafdiagram bij maken.
Welke klassenindeling gebruik je?

b Maak een frequentietabel.
Gaat het om absolute of relatieve frequenties?

c Maak het bijbehorende staafdiagram.

d Welk percentage eiwit bevat deze eiersalade?

Opgave 9

Je ziet de medaillespiegel van de Olympische Spelen van 2012 in Londen, met alleen de beste twaalf landen.

a Welke statistische variabelen zie je in het diagram?

b Zijn de variabelen kwantitatief of kwalitatief?

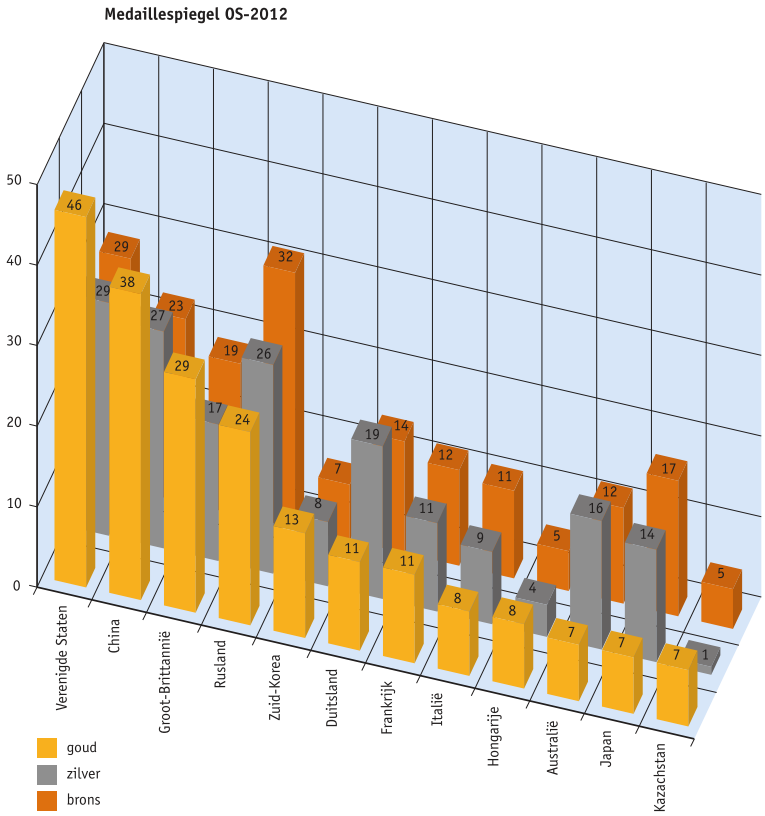
c Wat geeft elke staaf in het diagram weer?

d Waarom is er een 3D-diagram gebruikt?

e Welk land heeft de meeste gouden medailles gewonnen?

f Welk land won de meeste bronzen medailles?

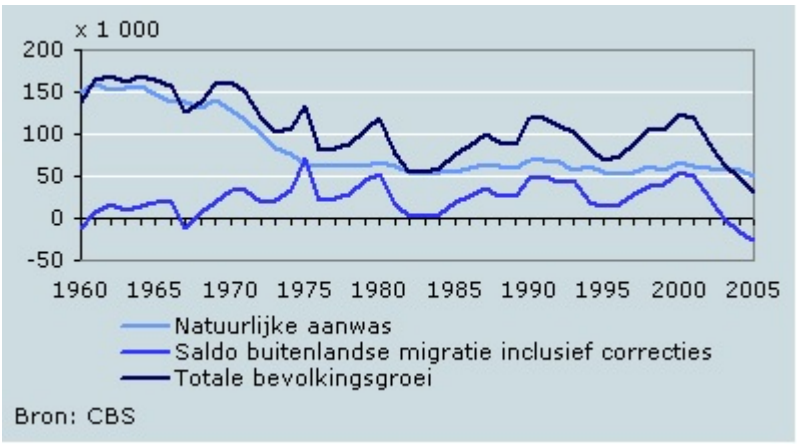
g Deze gegevens kun je ook in een (gestapeld) staafdiagram weergeven. Wat is daarvan het voordeel? En wat is het nadeel?



Figuur 15.9

Opgave 10

De diagrammen geven een beeld van de groei van de Nederlandse bevolking.



Figuur 15.10

a Wat voor soort diagrammen zijn het?

b Beschrijf wat je hieruit kunt aflezen.

c Hoe leid je het diagram van de totale bevolkingsgroei uit de andere twee diagrammen af?

d Welke conclusie kun je trekken uit het diagram?

Opgave 11

In deze twee cirkeldiagrammen wordt het bodemgebruik per hectare van Zuid-Holland met dat van heel Nederland vergeleken.

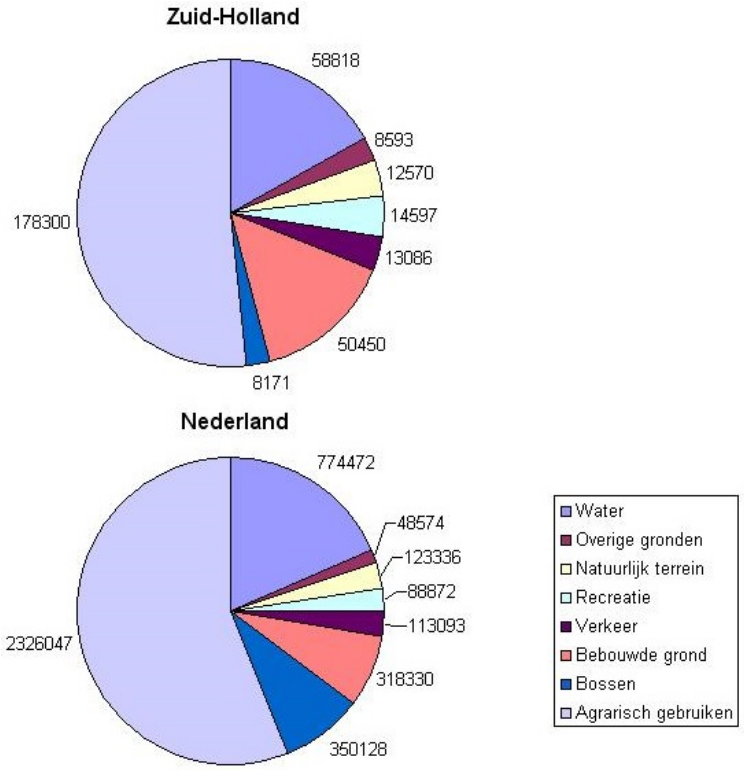
a Welke statistische variabele zie je? Is deze variabele kwantitatief of kwalitatief?

b Laat met een berekening zien hoe groot de relatieve frequentie en de sectorhoek van 'bebouwde grond' in Zuid-Holland is.

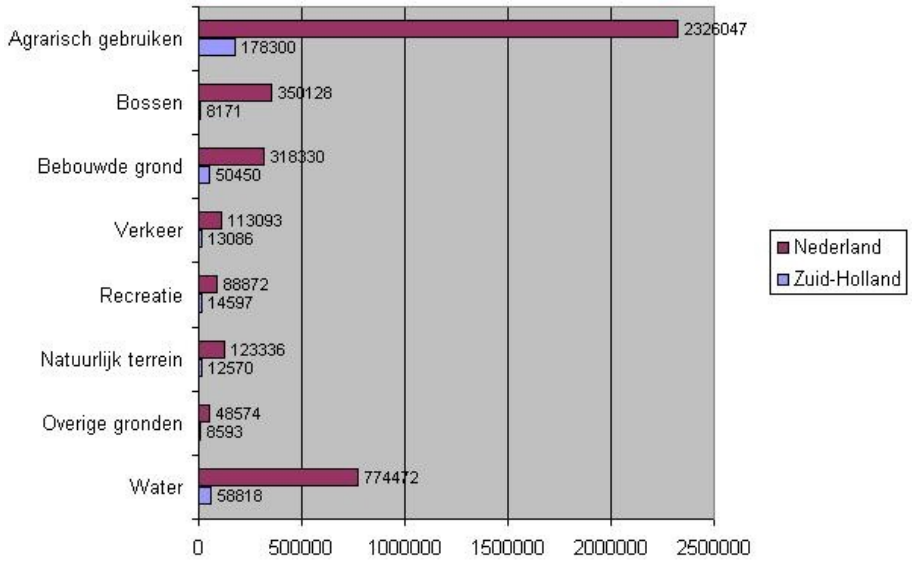
c De getallen in beide diagrammen verschillen nogal, toch kun je in één oogopslag zien dat er in Zuid-Holland relatief gezien veel minder bossen zijn dan in Nederland. Hoe zie je dat?

d Bij een cirkeldiagram gaat het eigenlijk om de oppervlakte van een cirkelsector. Wat is er dan mis als je de eerste figuur met de tweede figuur vergelijkt?

e Dezelfde gegevens kun je ook in een staafdiagram met absolute frequenties weergeven. Wat geeft deze figuur beter weer?



Figuur 15.11



Figuur 15.12

Opgave 12

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meetonnauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters							auto's km/h					
				5	4	4	1	3	5			
	6	4	2	2	1	5	0	3	5	6	6	9
					0	6	1	3				
						7	5					

Figuur 15.13

a Hoeveel metingen zijn er verricht?

b Hoeveel overtredingen van de maximumsnelheid waren daar bij?

c Hoeveel procent van de snelheidsovertreders reed meer dan 5 km/h te snel?

d Hoeveel procent van de snelheidsovertreders reed op een scooter of een motor?

Toepassen

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Op grond van deze verschillende uitslagen doen twee laboranten de uitspraak dat er ongeveer 65% eiwit in de eiersalade zit. Ze baseren zich op hun staafdiagrammen.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.9

Opgave 13

Bekijk de gegevens van de drie laboranten.

a Maak bij alle drie de resultaten een staafdiagram.

b Welke twee laboranten komen tot de uitspraak van ongeveer 65% eiwit?

c Welke laborant heeft waarschijnlijk precieser gewerkt?

d Welke verklaring zou een grotere spreiding van de resultaten kunnen hebben?
Over welke soort fout gaat het dan?

Opgave 14

Bekijk de gegevens en het staafdiagram van de laborant die een hoger percentage eiwit aantrof.

a Wat kan hier aan de hand zijn?
Wat voor soort fout maakt hij waarschijnlijk?

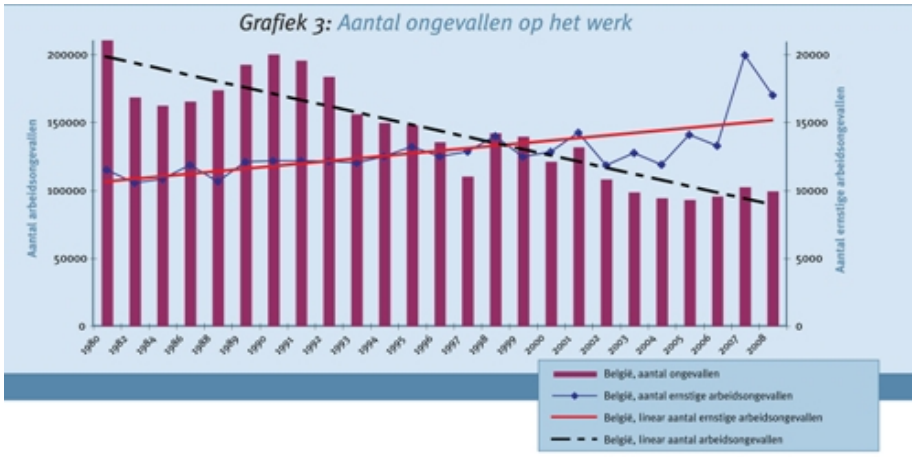
b Gaat het hier om de precisie of om de juistheid van de metingen?

c Wat doe je met deze gegevens?

Testen

Opgave 15

Bekijk het diagram van het aantal ongevallen op de werkplek in Vlaanderen in de periode 1980-2008.



Figuur 15.14

a Welk soort diagrammen zie je in dit overzicht?

b Om welke populatie en om welke statistische variabelen gaat het?

c Hoeveel bedroeg het aantal ongevallen op de werkplek in 2000? Hoeveel daarvan waren ernstig? Hoeveel procent is dat?

d Welk misverstand kan bij het diagram heel snel ontstaan?

e Tussen welke statistische variabelen probeert het diagram een verband te leggen?

f Noem een voor- en een nadeel van het diagram.

Opgave 16

RVS (roestvast staal) van een bepaald type bestaat uit 16% chroom, 10% nikkel, 2% molybdeen en de rest ijzer met een heel klein beetje koolstof.

a Hoeveel procent ijzer met koolstof bevat dit RVS?

b Teken een bijpassend cirkeldiagram.

15.4 Centrummaten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- datasets karakteriseren door getallen die het centrum ervan aangeven;
- modus (modale klasse), mediaan en gemiddelde bepalen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- de begrippen juistheid en precisie van een steekproef;
- waarnemingen weergeven in tabellen en in verschillende soorten diagrammen;
- klassenindeling, klassenbreedte, absolute en relatieve frequentie.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

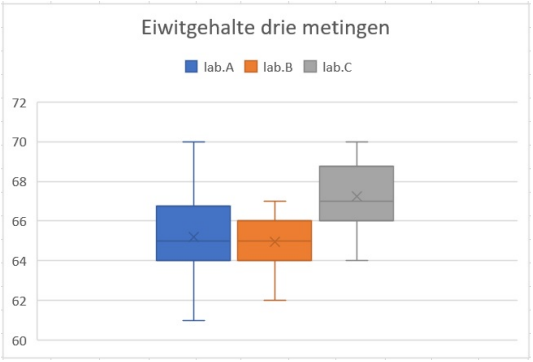
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.1

a Het modale eiwitgehalte is de waarde die het vaakst voorkomt.
Bepaal het modale eiwitgehalte bij elk van de drie laboranten.

b Bereken het gemiddelde eiwitgehalte bij elk van de drie laboranten in gehele percentages.

Je kunt de resultaten van deze laboranten ook samenvatten in boxplots. Daartoe zet je de data op volgorde van klein naar groot en je verdeelt ze in vier stukken met evenveel gegevens. De middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee) heet de mediaan.



Figuur 15.1

c Bepaal de mediaan bij elk van de drie laboranten.

d Zeggen getallen zoals gemiddelde, mediaan en modus iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?

Uitleg

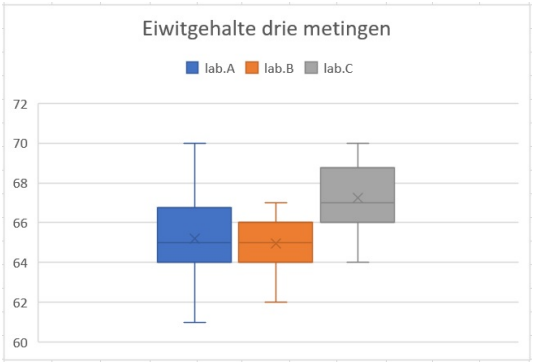
In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.2

Je wilt deze resultaten kunnen vergelijken. Zo is dat nogal lastig, zeker als de datasets groter worden. Een manier is het gebruik van frequentietabellen en diagrammen. Maar je kunt ook werken met centrummaten. Dan vat je de meetgegevens met één getal samen. Er worden drie van die centrummaten gebruikt:

- de modus: de meest voorkomende waarde (bij een klassenindeling zeg je: modale klasse);
- de mediaan: de middelste waarde als de gegevens op volgorde van grootte staan;
- het gemiddelde: alle waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal waarden.



Figuur 15.2

Bij laborant A zijn de modale eiwitgehaltes 65% en 66%, is de mediaan 65% en is het gemiddelde eiwitgehalte 65,2 ≈ 65%.
Je noteert het gemiddelde van een steekproef wel als $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.
In plaats van x mag je natuurlijk ook een andere letter gebruiken, zoals E voor eiwitgehalte.
De mediaan is het middelste getal in een boxplot.

Al deze centrummaten zeggen iets over de juistheid van de metingen. Als bijvoorbeeld het gemiddelde van de steekproef $\overline{x}$ afwijkt van het werkelijke gemiddelde μ van de populatie, dan is de juistheid $|\overline{x} - \mu|$, waarbij de verticale streepjes aangeven dat dit getal altijd positief wordt genomen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 592**. Je ziet meetgegevens van drie laboranten. De gemiddelde eiwitgehaltes zijn:

- Laborant A: 65,20 ≈ 65%.
- Laborant B: 64,95 ≈ 65%.
- Laborant C: 67,25 ≈ 67%.

Je kunt deze getallen zelf narekenen.

a Doe dat (als je dit bij **Verkennen V1 op pagina 591** nog niet hebt gedaan) en leg uit wat deze gemiddelden met de juistheid van de metingen te maken hebben.

Neem aan dat van de totale populatie kuipjes eiersalade van deze fabrikant het eiwit gehalte 65% is.

b Hoe zit het nu met de juistheid van de metingen?

Je ziet de gegevens ook in de vorm van boxplots terug.
Een boxplot maak je door de gegevens eerst op volgorde van klein naar groot te zetten en dan in vier delen met gelijke aantallen data te verdelen, in vier kwarten. De mediaan is de middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee), het eerste kwartiel is de mediaan van de eerste helft en het derde kwartiel de mediaan van de tweede helft.

Laborant C ijkt zijn meetinstrument en doet de meting opnieuw. Bekijk de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C tweede meting na ijking																			
64	67	65	66	66	62	65	66	68	65	65	66	63	68	67	67	64	65	64	63

Tabel 15.3

c Maak zelf een boxplot van deze controlemeting. Is het resultaat precieser of juister?

Opgave 2

Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.4

a Is het gemakkelijk om uit de figuur het gemiddelde, de modus en de mediaan van deze gegevens te bepalen?

b Bereken de gemiddelde voetlengte, de modale voetlengte en de mediaan van de voetlengtes van deze mannen.

In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.
Met behulp van boxplots kun je de voetlengtes van de mannen en de vrouwen met elkaar vergelijken.

c Maak deze twee boxplots.

d Kun je door deze boxplots te vergelijken conclusies trekken?

e Bereken de drie centrummaten bij de voetlengtes van de vrouwen.
Wat hebben die voor invloed op je conclusies?

Opgave 3

Je hebt gezien dat centrummaten bij kwantitatieve variabelen betekenis hebben.
Maar hoe zit het met kwalitatieve variabelen?

a Bij de zetelverdeling in de Tweede Kamer heb je te maken met de kwalitatieve variabele ‘partij’, de behaalde zetels zijn de frequenties.
Hebben de centrummaten hier betekenis?

b Bij het keuren van een bepaalde drank kan het gaan om variabelen als ‘geur’, ‘smaak’, etc.
Heb je hier iets aan de centrummaten?

c Veel bedrijven (met name in de horeca) vragen om hen te waarderen met een cijfer.
En dan zie je op hun website een gemiddelde van bijvoorbeeld 8,3 staan. Is dat een zinnig getal?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Kwantitatieve statistische gegevens (data) kun je samenvatten met **centrummaten**:

- de **modus**: de meest voorkomende waarde (bij een klassenindeling zeg je: modale klasse);
- de **mediaan**: de middelste waarde als de gegevens op volgorde van grootte staan;
- het **gemiddelde**: alle waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal waarden.

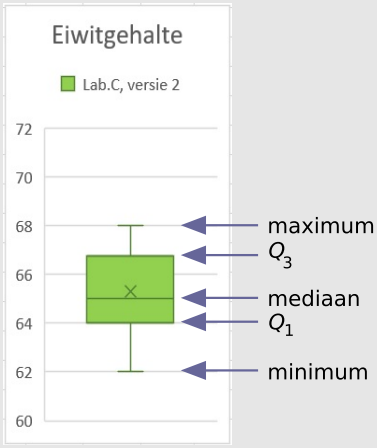
Je noteert het gemiddelde van een steekproef wel als $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Als het gemiddelde van de populatie μ is, dan is de **juistheid** $|\overline{x} - \mu|$, dus het positieve verschil van $\overline{x}$ en μ.

De relatieve juistheid is dan $\frac{|\overline{x}-\mu|}{\mu} \cdot 100\%$.

De mediaan speelt een belangrijke rol in een **boxplot**.
Daarin worden alle gegevens in vier kwarten van klein naar groot verdeeld met evenveel gegevens. De mediaan is de middelste waarde (of het gemiddelde van de middelste twee), het eerste kwartiel Q_1 is de mediaan van de eerste helft en het derde kwartiel Q_3 is de mediaan van de tweede helft. De mediaan zelf is het tweede kwartiel.
Boxplots zijn geschikt om datasets te vergelijken.

Bij kwalitatieve data hebben centrummaten vaak geen betekenis.



Figuur 15.3

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.5 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

kniehoogte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.6 Kniehoogte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bepaal modus, mediaan en het gemiddelde van de mouwlengtes m_i.

Antwoord

Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele *mouwlengte* de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de modus aflezen: de modale lengte is 58 cm want die klasse heeft de grootste frequentie.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is de mediaan het 2501-ste getal. En dat is 59 cm.

Het gemiddelde berekenen is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden. Bijvoorbeeld een mouwlengte van 53 cm komt 89 keer voor. Je kunt dit het beste in het Excelbestand doen en Excel voor je laten rekenen.

Ga na dat $\overline{m} = \frac{49 \cdot 3 + 50 \cdot 11 + ... + 71 \cdot 1}{5001} \approx 59{,}05 \approx 59$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 594**.

a Ga zelf na dat de modale lengte 58 cm, de mediaan 59 cm en het gemiddelde 59 cm is.

b Stel je voor dat je zou weten dat de werkelijke gemiddelde mouwlengte van alle vrouwen die de Bijenkorf bezoeken 59 cm is. Hoe groot is dan de juistheid van deze steekproef? Hoeveel procent is de relatieve juistheid?

Je kunt van de data van de mouwlengtes een boxplot maken als je de vijf daarvoor benodigde getallen handmatig bepaald.

c Leg uit hoe dat gaat en maak zo'n boxplot.

Voorbeeld 2

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.
Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

Tabel 15.7

Bereken de modale concentratie, de mediaan en de gemiddelde concentratie.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen: de modale concentratie is 24,6, de mediaan is 25,1 en de gemiddelde concentratie is ≈ 25,2.

Je kunt ook eerst een frequentieverdeling maken door afronden op gehele getallen.
Je werkt dan met klassenindeling 19,5− < 20,5, 20,5− < 21,5, ... 29,5− < 30,5.
Maak met Excel een frequentietabel, zie het.
En nu kun je de drie centrummaten bepalen op de manier van het **Voorbeeld 1 op pagina 594**.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 595**.

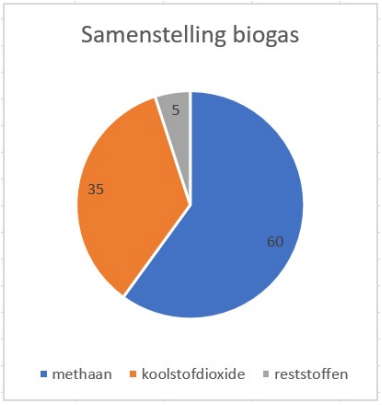
a Bereken zelf de drie centrummaten.

b Maak een frequentietabel bij deze gegevens op de manier van **Voorbeeld 2 op pagina 595**. Bereken hiermee opnieuw de drie centrummaten.

c Wat betekent het voor de frequentieverdeling dat de drie centrummaten hetzelfde zijn?

Opgave 6

Biogas is een gasmengsel dat ontstaat als gevolg van biologische enzymatische processen.
De samenstelling ervan wordt in dit cirkeldiagram weergegeven.



Figuur 15.4

a Hebben de centrummaten hier enige betekenis?

b Hoeveel reststoffen bevat 120 m^3 biogas?

Oefenen

Opgave 7

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120 °C. Voor gebakken frites is 750 µg/kg de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in µg/kg							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 15.8

a Bereken de gemiddelde hoeveelheid acrylamide in hun frites.
Zegt dit gemiddelde iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?

b Kun je op grond van dit gemiddelde vaststellen of de fastfoodketen aan het referentieniveau voldoet?

c Maak een bijbehorend boxplot.

d Welke aanbeveling zou je deze fastfoodketen doen?

Opgave 8

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

lichaamslengte	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	...
frequentie	0	1	1	4	3	2	8	4	17	18	32	51	54	71	78	115	149	170	208	...
...	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	...
...	208	231	301	302	321	313	290	294	291	261	222	184	157	167	109	86	65	62	...
...	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187						
...	29	49	28	17	5	10	6	3	1	2	0	1	0						

Tabel 15.9 Lichaamslengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

lichaamsgewicht	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	...
frequentie	3	0	4	2	4	21	19	26	41	56	73	87	89	121	140	146	162	185	182	...
...	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	...	
...	197	185	214	187	190	185	204	171	152	181	162	147	130	109	107	121	94	86	...	
...	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	...	
...	84	72	77	59	77	52	39	51	41	28	34	32	28	16	21	18	9	12	...	
...	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113		
...	4	11	7	8	9	4	5	4	0	6	1	1	1	1	2	0	1	3		

Tabel 15.10 Lichaamsgewicht van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de lichaamslengte en het lichaamsgewicht van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

a Bereken de gemiddelde lengte, de modale lengte en de mediaan van de lengtes.

b Maak een bijbehorend staafdiagram. Leg uit waarom de drie centrummaten zo dicht bij elkaar liggen.

c Maak een boxplot bij de lengtes van de vrouwen.

d Welke lengtes hebben de 25% langste vrouwen?

In de tijd dat dit onderzoek werd gehouden was de populatie vrouwen in Nederland gemiddeld 161 cm lang.

e Hoe groot is de juistheid van dit onderzoek?
Bereken ook de relatieve juistheid.

Opgave 9

Bij een test met e-readers worden door vijf testers deze apparaten onder andere beoordeeld op ‘gebruiksgemak’, ‘leesgemak’, ‘boeken toevoegen’ en ‘accuduur in dagen’.

a Welke van deze statistische variabelen zijn kwalitatief?

b Kun je een gemiddeld ‘leesgemak’ berekenen?

Opgave 10

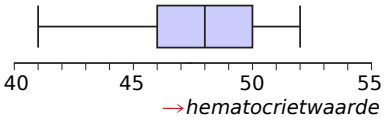
Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erytropoëtine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren.
De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.
Bij een wielerwedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 15.11

a Bereken de gemiddelde hematocrietwaarde van deze wielrenners.

Ook in 1998 en 1999 heeft men bij deze wielerwedstrijd van een aantal wielrenners de hematocrietwaarde gemeten. In 1998 was de gemiddelde hematocrietwaarde 45,9. De hematocrietwaarden uit 1999 zijn verwerkt in deze boxplot.



Figuur 15.5

b Toon aan dat, op grond van de boxplot, de gemiddelde hematocrietwaarde in 1999 groter was dan in 1998.

Opgave 11

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meetonnauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters							auto's km/h					
				5	4	4	1	3	5			
	6	4	2	2	1	5	0	3	5	6	6	9
					0	6	1	3				
						7	5					

Figuur 15.6

a Bereken het gemiddelde van de gemeten snelheden.
Is dit getal voor de politie van belang?

b Bepaal de modale snelheid.

c Maak een boxplot van de gemeten snelheden.

d Hoeveel procent van de snelheidsovertreders had een gemeten snelheid van meer dan 57,5 km/h?

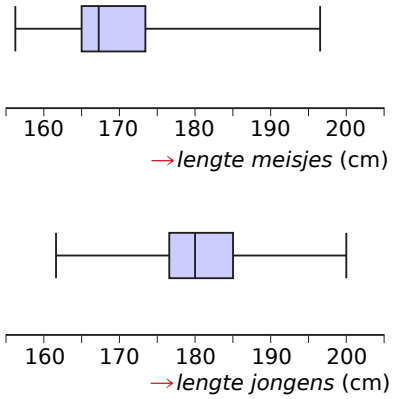
Toepassen

Boxplots zijn goed te gebruiken om datasets te vergelijken.

Je kunt een dataset met de lengte van meisjes en jongens in groepen van 25% verdelen, dus vier kwarten met evenveel data. Deze groepen hebben de volgende vijf grenzen: het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum. Deze boxplots maken dat goed zichtbaar. De beide middelste kwarten vormen de box.

Er bestaan vuistregels voor het vergelijken van twee boxplots:

- als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeg je 'het verschil is groot',
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeg je 'het verschil is middelmatig', en
- in alle andere gevallen zeg je 'het verschil is gering'.



Figuur 15.7

Hoe zit het met deze twee boxplots?

Opgave 12

Bekijk de boxplots in **Toepassen op pagina 598**.

a Hoeveel procent van de meisjes is langer dan 165 cm?

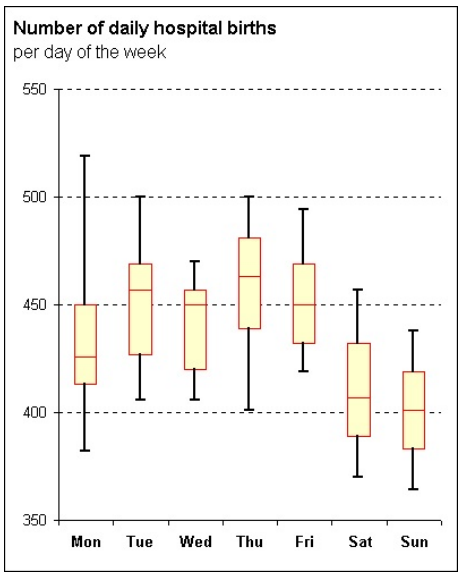
b Hoeveel procent van de meisjes is langer dan het derde kwartiel? En hoeveel procent heeft een lengte tussen de mediaan en het derde kwartiel?

c Waaraan kun je zien dat meer dan 75% van de meisjes kleiner is dan de langste van de 25% kleinste jongens?

d Kun je zeggen dat de jongens in deze populatie duidelijk langer zijn dan de meisjes?

Opgave 13

Bekijk de boxplots van het aantal geboortes in ziekenhuizen per dag voor de verschillende dagen van de week.



Figuur 15.8

a Als je het aantal bevallingen op woensdag en op donderdag met elkaar vergelijkt, welke conclusie kun je dan trekken?

b Bedenk een verklaring voor het verschil in geboortes tussen de zondag en de maandag.

c Hoeveel procent van de zondagen zijn er minder dan vierhonderd geboortes in ziekenhuizen?

d Benader het gemiddelde aantal bevallingen op donderdagen.

Testen

Opgave 14

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

Percentage rookworst				
12,4	12,7	12,8	12,6	13,0
12,6	12,8	12,7	12,4	12,1
12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 15.12

a Bereken de drie centrummaten.

b Waarom zeggen deze centrummaten iets over de juistheid en niet over de precisie van de metingen?

c Hoe groot is de juistheid als Unox echt 12,7% rookworst in zijn soep stopt?

Opgave 15

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.
De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
Totaal	100

Tabel 15.13

a Bereken het gemiddelde aantal bacteriën in de honderd monsters.
Is dit ook het gemiddelde van de gehele dagproductie? Licht je antwoord toe.

b Maak hierbij een staafdiagram en een boxplot.

c De laborante besluit de twee monsters die het laagste scoorden opnieuw te meten. Dat levert in beide gevallen een score van vijftig bacteriën op en daarmee een nieuwe dataset. Beredeneer dat in deze nieuwe set het gemiddelde groter is dan in de oorspronkelijke dataset.

d Beredeneer of er wat verandert aan de mediaan.

15.5 Spreidingsmaten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- datasets karakteriseren door getallen die de spreiding ervan aangeven;
- spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand en standaardafwijking bepalen.

Voorkennis

- onderscheid maken tussen kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen;
- de begrippen juistheid en precisie van een steekproef;
- waarnemingen weergeven in tabellen en in verschillende soorten diagrammen;
- klassenindeling, klassenbreedte, absolute en relatieve frequentie.
- datasets karakteriseren door getallen die het centrum ervan aangeven;
- modus (modale klasse), mediaan en gemiddelde bepalen.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

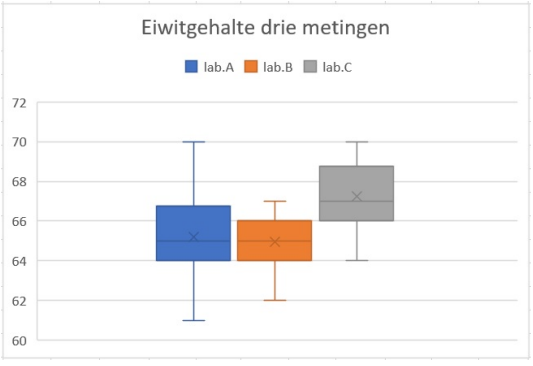
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.1

a De spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogst en de laagst gemeten waarden.
Bepaal de spreidingsbreedte bij elk van de drie laboranten.

b Welke van de drie laboranten is het minst precies?

Je kunt de resultaten van deze laboranten ook samenvatten in boxplots. Daartoe zet je de data op volgorde van klein naar groot en je verdeelt ze in vier stukken met evenveel gegevens. De box is het gebied tussen het eerste kwartiel Q_1 en het derde kwartiel Q_3. De lengte van de box heet de interkwartielafstand IQR (‘Inter Quartile Range’).



Figuur 15.1

c Bepaal de IQR bij elk van de drie laboranten.

d Zeggen getallen zoals spreidingsbreedte en interkwartielafstand iets over de precisie of over de juistheid van de metingen?

Uitleg 1

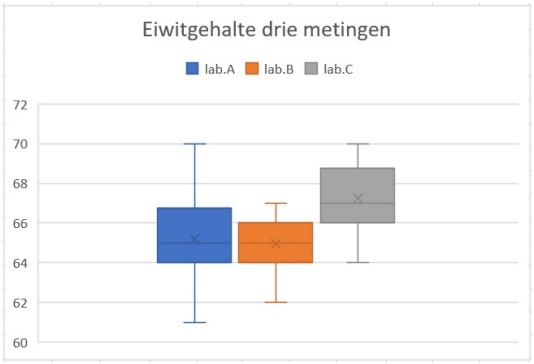
In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.2

Je wilt deze resultaten kunnen vergelijken. Zo is dat nogal lastig, zeker als de datasets groter worden. Een manier is het gebruik van frequentietabellen en diagrammen. Maar je kunt ook werken met centrummaten en spreidingsmaten. Dan vat je de meetgegevens met twee getallen samen.
Er worden meerdere spreidingsmaten gebruikt:

- de spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde;
- de (inter)kwartielafstand IQR is de lengte van de box in een boxplot: $IQR = Q_3 - Q_1$;
- de gemiddelde absolute afwijking is de som van alle (positieve) afwijkingen van het gemiddelde gedeeld door het aantal waarden.



Figuur 15.2

Bij laborant A is de spreidingsbreedte $70 - 61 = 9\%$, is de kwartielafstand $IQR = 67 - 64 = 3\%$ en is het gemiddelde absolute afwijking $\approx 1{,}82\%$.
Je noteert de gemiddelde absolute afwijking wel als

$$GAA = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}.$$

Hierin is $|x_i - \bar{x}|$ het positieve verschil van een waarde met het gemiddelde.
In plaats van x mag je natuurlijk ook een andere letter gebruiken, zoals E voor eiwitgehalte.

Al deze spreidingsmaten zeggen iets over de precisie van de metingen. De relatieve spreidingsbreedte is daar (op dit moment) een goede maat voor. Je deelt dan de spreidingsbreedte door het gemiddelde van de steekproef.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 602**. Je ziet meetgegevens van drie laboranten.

a Reken de gemiddelde absolute afwijking van laborant A zelf na.

b Waarom zegt de relatieve spreidingsbreedte iets over de precisie van de metingen?
Bereken die relatieve spreidingsbreedte voor laborant A.

c Bereken ook van de andere twee laboranten de spreidingsbreedte, de IQR en de GAA.
Bereken ook de precisie van die metingen.

Je ziet de gegevens ook in de vorm van boxplots terug.

Laborant C ijkt zijn meetinstrument en doet de meting opnieuw. Bekijk de resultaten.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C tweede meting na ijking																		
64	67	65	66	66	62	65	66	68	65	65	66	63	68	67	67	64	65	64	63

Tabel 15.3

d Bereken hierbij de spreidingsbreedte, de *IQR* en de gemiddelde absolute afwijking.
Is het resultaat precieser of juister?

Opgave 2

Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.4

a Is het gemakkelijk om uit de figuur het de drie spreidingsmaten van deze gegevens te bepalen?

b Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes van deze mannen.

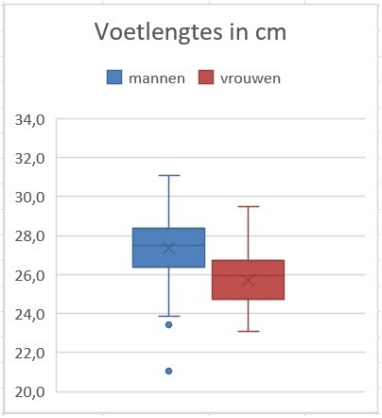
In het bijgevoegde bestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.

c Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes van deze vrouwen.

d Kun je door deze spreidingsmaten bij de mannen en de vrouwen te vergelijken conclusies trekken?

Uitleg 2

Je ziet hier twee boxplots van de gemeten voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen. Bij de mannen zijn er twee losse datapunten te zien. Dat zijn echte uitschieters, in dit geval beide naar beneden.



Figuur 15.3

In een boxplot is een uitschieter (of uitbijter) een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit. Hier zijn het de waarden 21,1 en 23,4.
Ga na dat deze waarden beide meer dan 1,5 de kwartielafstand onder Q_1 zitten.

In speciale gevallen bij kleine steekproeven kun je uitschieters opsporen met behulp van Dixon's Q-test. Bij n meetwaarden ga je zo te werk:

- Je zet eerst alle meetwaarden op volgorde van klein naar groot en bepaalt de spreidingsbreedte.
- Je berekent het grootste verschil tussen twee waarden naast elkaar.
- Dit getal deel je door de spreidingsbreedte en je krijgt Q_{data}.
- Je vergelijkt Q_{data} met de Q-waarde in **Dixon's tabel** die je vindt bij de juiste n en de gewenste betrouwbaarheid. Als $Q_{\text{data}} > Q$ dan heb je met een uitschieter te maken.

Ze kun je met een zelf gekozen (of voorgeschreven) betrouwbaarheid vaststellen of een waarde een uitschieter is.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 603**.
Hier zie je de **de voetlengtes van 100 mannen**.

voetlengte 100 mannen in cm											
27,5	26,4	28,0	26,2	23,4	21,1	26,8	27,3	27,8	26,5	27,6	27,4
29,4	28,5	29,3	25,5	27,7	28,0	27,2	28,3	25,8	28,6	28,8	26,9
28,0	29,9	31,1	26,9	27,8	26,5	23,9	29,1	27,7	26,1	29,1	27,7
27,3	26,8	27,6	28,9	26,9	26,3	29,4	27,8	28,3	28,7	28,1	30,4
28,6	29,1	25,1	27,5	25,4	24,7	25,3	26,1	29,4	28,1	28,5	24,3
24,9	27,1	25,5	28,4	29,9	26,9	28,1	28,7	29,7	26,3	27,3	28,7
27,3	26,0	26,2	28,0	29,7	27,7	27,4	28,1	28,1	26,7	24,5	25,7
26,6	27,9	26,4	24,8	28,4	27,5	25,2	26,4	28,1	27,2	28,1	27,8
28,9	26,8	27,3	27,5								

Tabel 15.5

a Ga zelf na dat de waarden 21,1 en 23,4 uitschieters zijn bij de voetlengtes van de mannen.

b In het bijgevoegde Excelbestand vind je ook de voetlengtes van 100 vrouwen.

Ga ook na, dat er bij de voetlengtes van de vrouwen geen uitschieters zijn.

Neem aan dat je op de gegevens in het Excelbestand ook **Dixon's Q-test** kunt toepassen.

c Onderzoek, of de waarde 31,6 cm bij de mannen ook volgens deze testmethode een uitschieter is met een betrouwbaarheid van 95%.

Je denkt dat de uitschieter bij c het gevolg kan zijn van een meetfout.
Je verwijdert hem uit de data.

d Onderzoek daarna of er nog een andere uitschieter is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Kwantitatieve statistische gegevens (data) kun je - behalve met centrummaten - samenvatten met **spreidingsmaten**:

- de **spreidingsbreedte** of absolute spreiding: het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde;
- de **(inter)kwartielafstand** in een boxplot: $IQR = Q_3 - Q_1$;
- de **gemiddelde absolute afwijking**: het gemiddelde van alle positieve afwijkingen van het gemiddelde.

Je noteert de gemiddelde absolute afwijking wel als

$$GAA = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}.$$

De **precisie** van de data kun je aangeven met de relatieve spreidingsbreedte. Daarbij deel je de spreidingsbreedte door het gemiddelde en rekent dit getal om naar procenten. Later zul je nog andere maten voor de precisie leren kennen.

Bij kwalitatieve data hebben spreidingsmaten vaak geen betekenis.

Soms is er sprake van een **uitschieter** (of uitbijter), een waarde die wel erg veel afwijkt.

- In een boxplot is een uitschieter een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.
- Bij kleine steekproeven kun je (onder bepaalde omstandigheden) **Dixon's Q-test** toepassen.

Er kunnen meerdere uitschieters zowel naar boven als naar beneden zijn.

Voorbeeld 1

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

mouwlengte	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
frequentie	3	11	22	53	89	163	250	405	519	660	578	653	560	421	260	159	106	52	18	15	3	0	1

Tabel 15.6 Mouwlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

kniehoogte	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
frequentie	1	3	19	34	76	178	313	495	632	738	675	665	466	343	195	88	45	18	12	2	3

Tabel 15.7 Kniehoogte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bepaal de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de mouwlengtes m_i.

Antwoord

Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele *mouwlengte* de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de spreidingsbreedte aflezen: $71 - 49 = 22$ cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is het eerste kwartiel is het 1251-ste getal en het derde kwartiel het 3751-ste getal. De kwartielafstand is daarom $61 - 57 = 4$ cm.

Het berekenen van de gemiddelde absolute afwijking is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden.
Bijvoorbeeld bij een mouwlengte van 53 cm hoort een absolute afwijking van $|53 - 59{,}1| = 6{,}1$ en die komt 89 keer voor. Je kunt dit het beste in het Excelbestand doen en Excel voor je laten rekenen.

Ga na dat $GAA \approx 1{,}6$ cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 605**.

a Ga zelf na dat de spreidingsbreedte 22 cm, de kwartielafstand 4 cm en de gemiddelde absolute afwijking $\approx 1{,}6$ cm is.

De mouwlengte van 71 cm lijkt een uitschieter.

b Onderzoek met behulp van de kwartielafstand of dit ook zo is.

Voorbeeld 2

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.
Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

Tabel 15.8

Bereken de spreidingsbreedte, de interkwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking.
Onderzoek ook met behulp van Dixon's Q-test of de waarde 30,1 met een betrouwbaarheid van 95% een uitschieter is.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen: de spreidingsbreedte is 30,1 – 20,4 = 9,7, de kwartielafstand is 26,0 – 24,3 = 1,7 en de gemiddelde absolute afwijking is ≈ 1,2.

Om te na te gaan of 30,1 een uitschieter is, bepaal je het verschil met het getal er direct onder en dit deel je door de spreidingsbreedte: $Q_{\text{data}} = \frac{30{,}1-29{,}0}{9{,}7} \approx 0{,}1134$.
Je pakt nu Dixon's tabel er bij, zie het **Practicum**. Daar vind je bij $n = 50$ onder 95% de waarde $Q = 0{,}2206$.
De meetwaarde 30,1 is dus geen uitschieter.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 606**.

a Bereken zelf de drie spreidingsmaten.

b Voer ook zelf Dixon's Q-test uit op de meetwaarde 30,1 met een betrouwbaarheid van 95%.

c Met welke betrouwbaarheid is 30,1 volgens Dixon's tabel wel een uitschieter?

d Bepaal de precisie van deze metingen door de relatieve spreiding te berekenen.

Oefenen

Opgave 6

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120 °C. Voor gebakken frites is 750 µg/kg de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in µg/kg							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 15.9

a Bereken de precisie van deze metingen door de relatieve spreiding te berekenen.

b Bereken de interkwartielafstand IQR.

c Is er volgens de interkwartielafstand een uitschieter bij deze metingen?

d Is er volgens Dixon's Q-test met een betrouwbaarheid van 95% een uitschieter bij deze metingen?

Opgave 7

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

lichaamslengte	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	...
frequentie	0	1	1	4	3	2	8	4	17	18	32	51	54	71	78	115	149	170	208	...
...	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	...	
...	208	231	301	302	321	313	290	294	291	261	222	184	157	167	109	86	65	62	...	
...	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187							
...	29	49	28	17	5	10	6	3	1	2	0	1	0							

Tabel 15.10 Lichaamslengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

lichaamsgewicht	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	...
frequentie	3	0	4	2	4	21	19	26	41	56	73	87	89	121	140	146	162	185	182	...
...	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	...	
...	197	185	214	187	190	185	204	171	152	181	162	147	130	109	107	121	94	86	...	
...	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	...	
...	84	72	77	59	77	52	39	51	41	28	34	32	28	16	21	18	9	12	...	
...	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113		
...	4	11	7	8	9	4	5	4	0	6	1	1	1	1	2	0	1	3		

Tabel 15.11 Lichaamsgewicht van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de lichaamslengte en het lichaamsgewicht van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

a Bereken de spreidingsbreedte, de kwartielafstand en de gemiddelde absolute afwijking van de lengtes.

b Hoe groot is de relatieve spreiding van deze gegevens?

Opgave 8

Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erytropoëtine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren.
De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.
Bij een wielerwedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 15.12

a Bereken de relatieve spreiding van de hematocrietwaarden van deze wielrenners.

b Onderzoek of 57 een uitschieter is met behulp van Dixon's Q-test en een betrouwbaarheid van 90%.

Opgave 9

Je ziet hier een steelbladdiagram van een aantal snelheidsmetingen binnen de bebouwde kom van A. De maximale snelheid binnen de bebouwde kom is 50 km/h. De politie accepteert een meetonnauwkeurigheid van 3 km/h.

motoren/scooters							auto's km/h					
				5	4	4	1	3	5			
	6	4	2	2	1	5	0	3	5	6	6	9
					0	6	1	3				
						7	5					

Figuur 15.4

a Bereken spreidingsbreedte en de kwartielafstand van de gemeten snelheden.

b Kun je op grond van de kwartielafstand spreken van uitschieters bij deze gemeten snelheden?

Toepassen

In een laboratorium wordt de hoeveelheid eiwit in eiersalade gemeten. Van een bepaalde fabrikant worden 20 kuipjes eiersalade onderzocht. Er gaan drie laboranten mee aan het werk. Van dezelfde 20 kuipjes meten ze onafhankelijk van elkaar het eiwitgehalte. Je ziet hiernaast de resultaten.
De fabrikant geeft aan dat er 64% eiwit in hun eiersalade is verwerkt.

Op grond van deze verschillende uitslagen kun je iets zeggen over de juistheid en de precisie van de uitslagen.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A									
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66
65	66	63	64	67	68	70	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B									
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66
65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C									
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66
67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 15.13

Opgave 10

Bekijk de gegevens van de drie laboranten.

a Bepaal bij alle drie de resultaten de juistheid en de relatieve juistheid in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken van elke laborant de precisie door de relatieve spreiding te berekenen in één decimaal nauwkeurig.

c Welke laborant heeft de beste juistheid en de beste precisie?

Opgave 11

Gebruik Dixon's Q-test en een betrouwbaarheid van 95%.

Onderzoek of er bij deze drie laboranten van uitschieters sprake is.

Testen

Opgave 12

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

Percentage rookworst				
12,4	12,7	12,8	12,6	13,0
12,6	12,8	12,7	12,4	12,1
12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 15.14

a Bereken de drie spreidingsmaten in één decimaal nauwkeurig.

b Zeggen deze spreidingsmaten iets over de juistheid of over de precisie van de metingen?

c Bereken de relatieve spreiding.

d Onderzoek met behulp van Dixon's Q-test of 12,1 met een betrouwbaarheid van 90% een uitschieter is.

Opgave 13

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een 'dagproductie'.
De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
Totaal	100

Tabel 15.15

a Bereken de relatieve spreiding van het aantal bacteriën in de honderd monsters.
Zegt dit getal iets over de juistheid of over de precisie van de metingen?

b De laborante besluit de twee monsters die het laagste scoorden opnieuw te meten. Dat levert in beide gevallen een score van vijftig bacteriën op en daarmee een nieuwe dataset. Beredeneer dat in deze nieuwe set de spreidingsbreedte kleiner is dan in de oorspronkelijke dataset.

c Laat met behulp van de kwartielafstand zien, dat er in de oorspronkelijke dataset geen uitschieters voorkomen.

15.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met statistische variabelen, diagrammen en verdelingen voorbij gekomen. Het gaat daarbij vooral om metingen, waarnemingen, waarbij het toeval een rol speelt. De juistheid en de precisie van data zijn aan de orde geweest.

Je hebt nu alle theorie van **Beschrijvende statistiek** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwalitatief, kwantitatief — statistische variabele — steekproef en populatie — aselecte trekking — herhaalbaarheid
- systematische, toevallige en persoonlijke fouten — juistheid en precisie
- absolute en relatieve frequentie, frequentietabellen — klassenindeling, klassenbreedte — lijn-, staaf-, cirkel-, steelbladdiagram
- centrummaten: modus, mediaan, gemiddelde — boxplot, kwartielen — juistheid
- spreidingsmaten: spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand, gemiddelde absolute afwijking — precisie en relatieve spreiding — uitschieter

Activiteitenlijst

- kwalitatieve en kwantitatieve statistische variabelen herkennen — herhaaldelijk een aselecte steekproef uit een populatie trekken;
- soorten fouten herkennen — juistheid en precisie van elkaar onderscheiden;
- waarnemingen weergeven in tabellen en diagrammen — waarnemingen indelen in klassen — verschillende soorten diagrammen maken en interpreteren — werken met Excel;
- de centrummaten modus, mediaan en gemiddelde berekenen — een boxplot maken en interpreteren — werken met Excel;
- de spreidingsmaten spreidingsbreedte, (inter)kwartielafstand, gemiddelde absolute afwijking berekenen — de relatieve spreiding berekenen — uitschieters vaststellen met behulp van de kwartielafstand of met behulp van Dixon's Q-test.

Testen

Opgave 1

Van een partij kunstmest zijn 10 monsters genomen en daarvan is het stikstofgehalte bepaald.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)									
13,8	14,0	13,9	14,2	14,5	14,5	14,8	14,1	13,9	13,7

Tabel 15.1

a Beschrijf de bijbehorende populatie en hoe de steekproef getrokken zou moeten zijn.

b Is ‘stikstofgehalte’ een kwantitatieve of een kwalitatieve statistische variabele?

c Bereken de relatieve spreiding van deze meetserie.
Zegt dit getal iets over de precisie of de juistheid van de metingen?

In het lab wordt vaak de norm gehanteerd dat de relatieve spreiding kleiner moet zijn dan 3%.

d Voldoen deze metingen aan die norm?

Opgave 2

Dit zijn de resultaten van toetsen over hetzelfde onderwerp in twee verschillende groepen studenten.

Resultaten test A	6,7	6,4	4,9	3,8	4,0	5,6	5,8	6,8	8,2	4,7	3,4	8,5	4,1	6,9	7,3	6,1	7,5	6,7	6,2	3,4	7,9	4,5	8,3		
Resultaten test B	4,0	6,2	4,9	3,9	5,9	7,3	4,7	6,7	7,6	9,4	8,3	5,7	7,2	8,7	7,1	7,0	6,5	7,4	5,0	4,8	7,7	6,5	4,9	8,8	6,3

Tabel 15.2

a Bereken van beide groepen de gemiddelde score in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken mediaan en beide kwartielen Q_1 en Q_3.

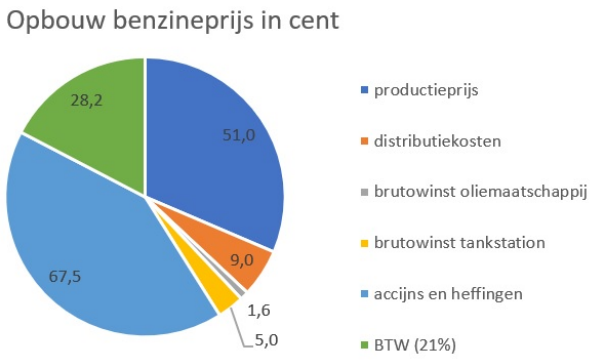
c Vergelijk beide groepen met elkaar door twee boxplots te tekenen.

d Laat met behulp van de interkwartielafstand zien dat er in beide groepen geen uitschieters voorkomen.

e Kun je vaststellen welke groep de toets het best heeft gemaakt?

Opgave 3

Dit cirkeldiagram geeft een beeld van de opbouw van de benzineprijs op een zeker moment.



Figuur 15.1

a Hoe groot is de sectorhoek die hoort bij 'productieprijs'?
Hoeveel procent van de totale prijs is dat?

b Is hier sprake van een kwantitatieve of een kwalitatieve variabele?

c Hoeveel procent van deze benzineprijs gaat naar de overheid?

Opgave 4

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

voetlengte (in 0,5cm)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
frequentie	1	7	13	20	76	179	303	532	848	968	718	582	419	213	68	33	11	6	4

Tabel 15.3 Voetlengte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

voetbreedte (in 0,5cm)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
frequentie	2	19	250	1039	1705	1292	553	122	16	3

Tabel 15.4 Voetbreedte van 5001 vrouwen met leeftijd > 18 jaar (uit: Statistisch onderzoek 1947, De Bijenkorf — Amsterdam)

Bekijk de tabel van de voetlengte en de voetbreedte (in halve cm) van 5001 vrouwen die Freudenthal en Sittig maakten bij hun onderzoek.

a Maak een staafdiagram van de voetlengtes.

b Bereken de modale voetlengte en de gemiddelde voetlengte.

c Bereken de gemiddelde absolute afwijking van de voetlengtes in één decimaal nauwkeurig.

d Waarom kun je uit deze twee tabellen geen verband afleiden tussen voetlengte en voetbreedte?

Opgave 5

Bij een diabetespatiënt is het bloedsuiker gemeten:

Bloedsuiker (mmol/L)											
5,65	4,08	7,02	6,15	7,15	6,40	5,25	6,85	6,61	6,44	5,81	6,34

Tabel 15.5

Onderzoek met de Dixon's Q-test of er met een betrouwbaarheid van 95% één of meer uitschieters tussen zitten.

Opgave 6

Je ziet hier een manometer die de luchtdruk in bar en in psi (pounds per square inch) weergeeft. Het instrument is van klasse 1.
Je meet nu een druk van 950 bar.

Figuur 15.2

a Hoe nauwkeurig kun je deze schaalverdeling in bar aflezen?

b Welke fout maak je als je zo afleest als in deze figuur?

c Gaat de meetklasse over een systematische of een toevallige fout?

d Neem aan dat die druk van 950 bar correct is afgelezen, tussen welke waarden ligt dan de werkelijke druk?

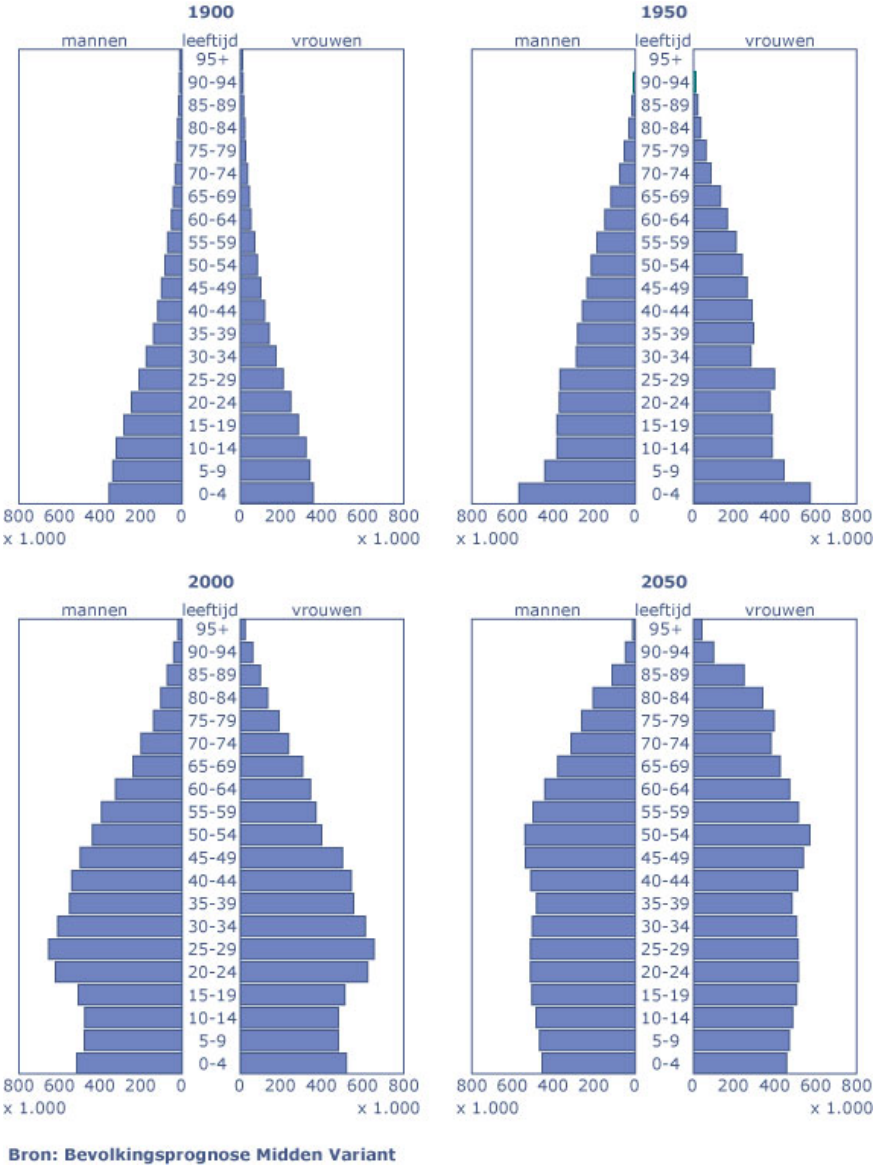
Volgens de wet van Boyle zijn bij een constante temperatuur druk en volume omgekeerd evenredig.
Je hebt de druk gemeten in een cilinder gevuld met gas, waarvan je het volume kunt vergroten en verkleinen. Het volume bij de meting van 950 bar is 10 L.

e Als de druk volgens deze meter toeneemt van 950 bar naar 980 bar, hoeveel neemt het volume dan af?

Toepassen

Opgave 7: Leeftijdsdiagrammen (bevolkingspiramides)

Bekijk de vier leeftijdsdiagrammen van Nederland.



Bron: Bevolkingsprognose Midden Variant

Figuur 15.3

a Wat voor soort diagrammen zijn dit?

b Hoeveel kinderen van 0-4 jaar waren er naar schatting in 1900, 1950 en 2000?

c Waar vind je de kinderen die in 1950 in de klasse 0 – 4 jaar zaten terug in de piramides van 2000 en 2050?

d Noem in elk van de vier diagrammen de modale klasse. Wat valt je op?

e Hoe onderbouw je de uitspraak met getallen dat het percentage 85-plussers sinds 1900 flink is toegenomen en nog verder zal toenemen?

16

Normale verdeling

16.1 Soorten verdelingen 616
16.2 Normaalkromme 626
16.3 Rekenen met de normale verdeling 635
16.4 Betrouwbaarheidsintervallen 645
16.5 De Shewhartkaart 654
16.6 Totaalbeeld 664

16.1 Soorten verdelingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de vorm van frequentieverdelingen (ook met klassenindelingen) te typeren;
- met behulp van de mediaan en het gemiddelde de scheefheid van een verdeling benoemen.

Voorkennis

- de begrippen data, populatie, steekproef, aselect en representatief, kwantitatief en kwalitatief, absolute en relatieve frequentie, discrete en continue variabele, klassenbreedte, klassenmidden en klassengrens;
- werken met statistische (frequentie)tabellen en allerlei diagrammen;
- centrum- en spreidingsmaten van frequentieverdelingen bepalen en die in verband brengen met de juistheid en de precisie van meetresultaten.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet diagrammen van de lengteverdeling van sporters. De lengtes zijn ingedeeld in klassen met een klassenbreedte van 5 cm. Eén ervan gaat over volleyballers, één over hardlopers en één over gewichtheffers.

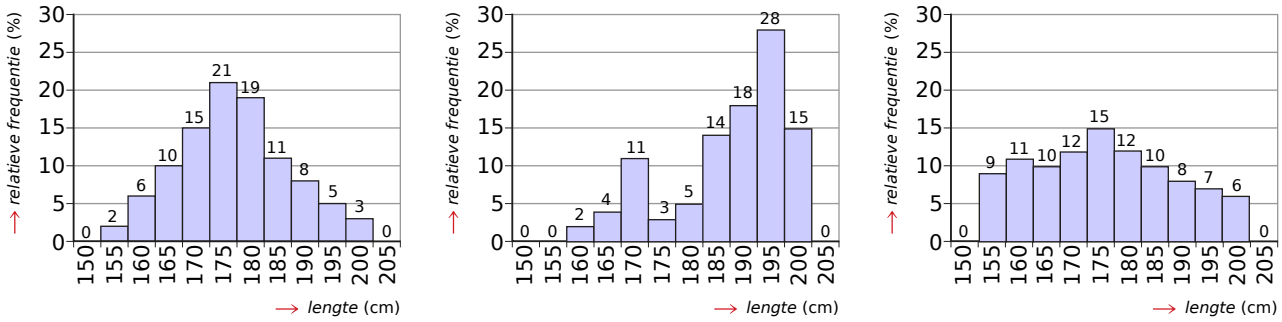


diagram I diagram II diagram III

Figuur 16.1

a Welk diagram is het meest gelijkmatig, welk diagram heeft meerdere toppen en welk diagram vind je het meest symmetrisch?

b Welk diagram hoort bij de volleyballers, welk bij de hardlopers en welk bij de gewichtheffers? Licht je antwoord toe.

c Bij welk van deze diagrammen zitten de mediaan en het gemiddelde beide ongeveer in het midden van de verdeling?

Uitleg

Bij een statistische variabele zijn veel verschillende verdelingen mogelijk.
Als je frequentieverdelingen bij datasets in beeld brengt, dus in diagrammen verwerkt, krijg je soms mooie symmetrische plaatjes, maar lang niet altijd. Sommige verdelingen zijn scheef, sommige erg grillig. Maar ook kun je met meerdere toppen te maken hebben.
Let bijvoorbeeld eens op de vorm en de verdeling van een staafdiagram. Is het diagram scheef of juist symmetrisch? Zijn er meerdere toppen of is er juist sprake van een opvallende gelijkmatigheid? Zijn er veel uitschieters?

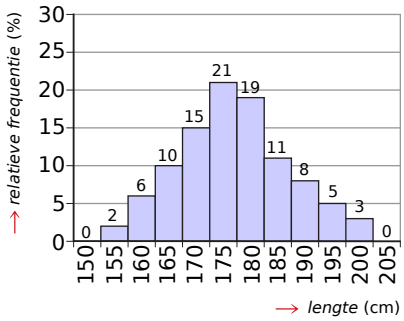


diagram I

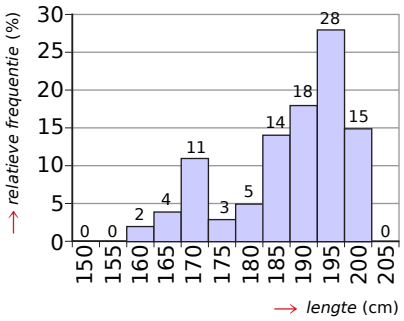


diagram II

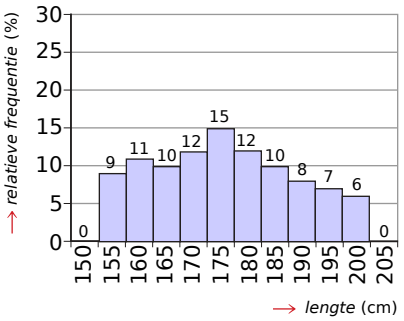


diagram III

Figuur 16.2

En aan de hand van deze centrummaten kun je goed vaststellen of een verdeling symmetrisch is of juist scheef: van een symmetrisch staafdiagram zijn gemiddelde en mediaan gelijk en zitten ze in het midden van het meetgebied, van een scheef staafdiagram zijn ze meestal verschillend en zitten ze niet in het midden van het meetbereik.

Voor lijndiagrammen en boxplots iets vergelijkbaars.

Opgave 1

Bekijk de drie staafdiagrammen in de **Uitleg op pagina 617**.

a Waarom kun je van zo'n frequentieverdeling het gemiddelde en de mediaan alleen schatten?

b Uit welke klassen bestaan deze drie lengteverdelingen?

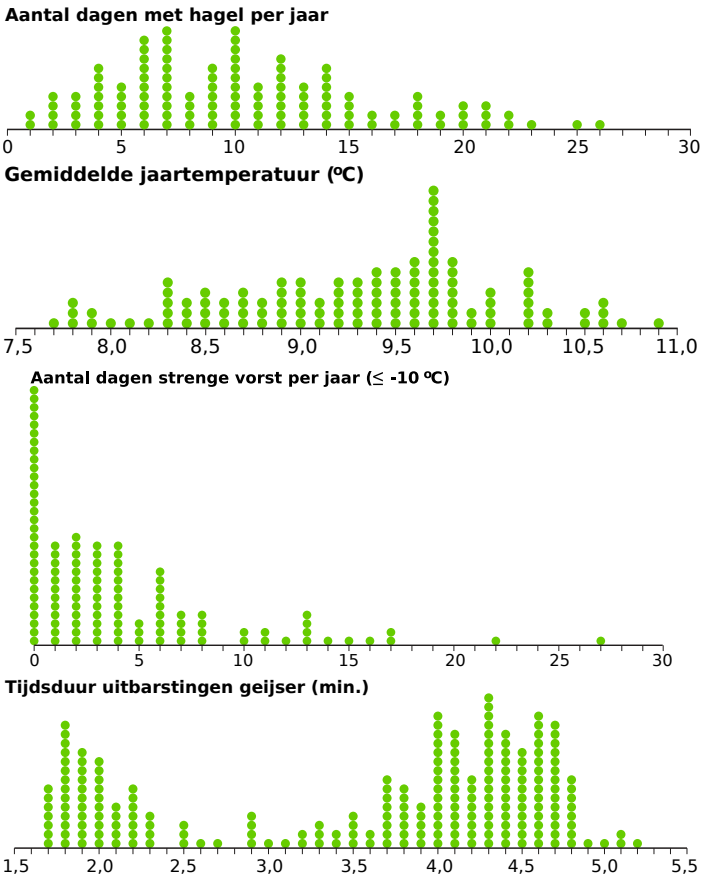
c Schat met behulp van de klassenmiddens bij elk van deze drie lengteverdelingen de mediaan en het gemiddelde.

d Welke van de drie verdelingen is het meest scheef?
Licht je antwoord toe met de berekende waarden voor mediaan een gemiddelde.

e Welke van deze drie lengteverdelingen is meertoppig?
Waarom zal die bij de volleyballers horen?

Opgave 2

Je ziet hier vier zogenaamde dotplots van datasets. Elk gegeven, elk datapunt, heeft zijn eigen dot.



Figuur 16.3

Beschrijf van elke dataset de vorm van de verdeling, gebruik daarbij de mediaan en het gemiddelde. Is er sprake van symmetrie, een gelijkmatige verdeling, meerdere toppen of uitschieters?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

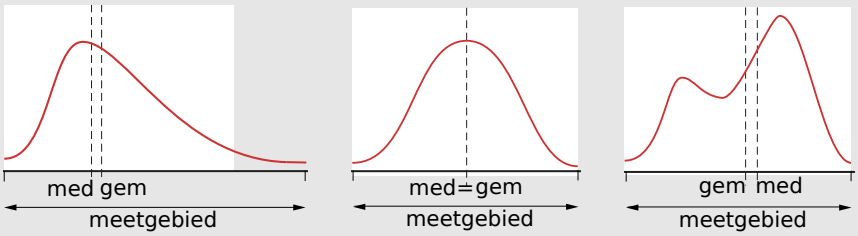


diagram I diagram II diagram III

Figuur 16.4

Bij de **vorm van een frequentieverdeling** let je op:

- de symmetrie
- de scheefheid
- het aantal toppen
- de uitschieters
- de gelijkmatigheid

Bij een symmetrische verdeling vallen mediaan (med) en gemiddelde (gem) vrijwel samen en zitten ze in het midden van het meetgebied (meetbereik). Dat zie je in diagram II. Soms is de verdeling scheef zoals in diagram I en soms zijn er meer toppen zoals in diagram III.

Belangrijk is wel dat je bij een frequentieverdeling met een klassenindeling de mediaan en het gemiddelde alleen nog kunt schatten met behulp van de klassenmiddens. (Tenzij je de werkelijke gegevens nog hebt!)

Voor uitschieters heb je vooralsnog een tweetal tests:

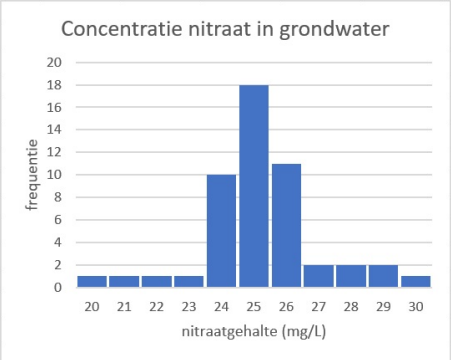
- In een boxplot is een uitschieter een waarde die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste kwartiel of boven het derde kwartiel zit.
- Bij kleine steekproeven kun je (onder bepaalde omstandigheden) **Dixon's Q-test** toepassen.

Voorbeeld 1

Je wilt de concentratie nitraat in landbouwgrond op een bepaald stuk land vaststellen. Je neemt 50 monsters, waarvan je het nitraatgehalte in mg/L op één decimaal nauwkeurig vaststelt.

Om de metingen overzichtelijk weer te geven rond je ze af op gehele getallen en maak je dit staafdiagram.

Schat met behulp van dit staafdiagram de mediaan en het gemiddelde.
Is deze frequentieverdeling redelijk symmetrisch?



Figuur 16.5

Antwoord

Er zijn 50 metingen verricht, dus de mediaan is het gemiddelde van het 25ste en het 26ste getal. Beide getallen zijn 25, dus de mediaan is 25.

Voor het schatten van het gemiddelde maak je een frequentieverdeling.
En daarvan bereken je het gemiddelde. Ga na, dat je vind dat $\overline{N} = 25{,}2$ mg/L.

Het meetgebied loopt van 19,5 tot 30,5 en het midden daarvan is 25,0.
Zowel de mediaan als het gemiddelde zitten daar vlak bij.
De frequentieverdeling is eentoppig en redelijk symmetrisch.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 619**.

a Waarom kun je nu het gemiddelde en de mediaan alleen nog schatten?

b Bepaal zelf de mediaan en het gemiddelde.
Ga na dat de in het voorbeeld gegeven waarden kloppen.

c Hoeveel procent van de meetwaarden is kleiner dan (afgerond) 24 mg/L?

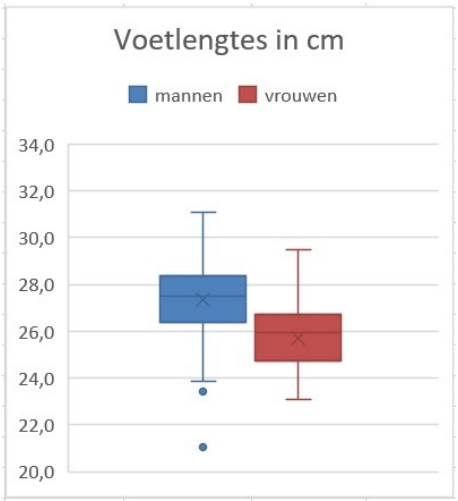
d Voldoet deze verzameling metingen aan de eis dat de relatieve spreiding maximaal 3% ?

e Zijn er uitschieters als je werkt met de kwartielafstand?

Voorbeeld 2

Je ziet hier twee boxplots van de gemeten voetlengtes van 100 mannen en 100 vrouwen. Bij de mannen zijn er twee losse datapunten te zien. Dat zijn echte uitschieters, in dit geval beide naar beneden.
De gemiddelde voetlengte van deze mannen is 27,3 cm, van de vrouwen is dat 25,7 cm.

Als je de uitschieters meerekent, welke van beide frequentieverdelingen is dan het meest scheef? En als je de twee uitschieters weglaat?



Figuur 16.6

Antwoord

Uit deze figuren kun je aflezen - zelfs als je de oorspronkelijke data niet meer zou hebben - dat het meetgebied van de mannen ongeveer vanaf 21 tot en met 31 loopt. Bij de vrouwen is dat vanaf 23 tot en met 29,5.

Je leest af: bij de mannen is de mediaan 27,5 en bij de vrouwen 26,0 cm.

Conclusie:

- Bij de mannen liggen mediaan en gemiddelde ruim boven het midden van het meetgebied. Daar is van een scheve frequentieverdeling sprake.
- Bij de vrouwen liggen mediaan en gemiddelde precies in het midden van het meetgebied. Daar is van een redelijk symmetrische frequentieverdeling sprake.

Laat je bij de mannen de twee uitschieters naar beneden weg, dan ziet dit er anders uit.
Ga dat zelf na.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 620**.
Nu laat je de twee uitschieters weg.

a Wat betekent dit voor de gemiddelden en de medianen?

b Wat betekent dit voor het meetgebied van de mannen?

c Welke conclusie betreffende de verdelingen trek je nu?

Oefenen

Opgave 5

Hieronder zie je een zestal frequentieverdelingen. Als er geen getal voor de frequentie is gegeven, hoort de bijbehorende waarde niet tot het meetgebied van de frequentieverdeling.

waarden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequenties A	0	5	22	46	22	5	0				
frequenties B			0	4	20	52	20	4	0		
frequenties C	0	2	5	10	19	28	19	10	5	2	0
frequenties D	0	11	25	11	3	0	3	11	25	11	0
frequenties E	0	2	11	40	22	12	6	4	2	1	0
frequenties F	0	1	2	4	6	12	22	40	11	2	0

Tabel 16.1

a Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?

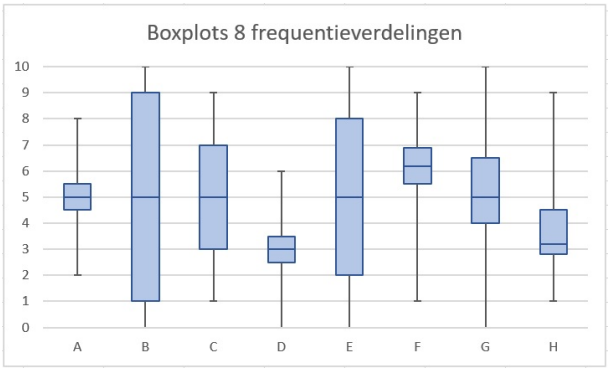
b Welke van deze verdelingen zijn eentoppig?

c Welke van deze verdelingen zijn links scheef?

d Bij welke van deze verdelingen is de mediaan kleiner dan het gemiddelde?

Opgave 6

Bekijk deze boxplots. Ze stellen acht frequentieverdelingen voor waarvan het meetgebied de spreidingsbreedte is.



Figuur 16.7

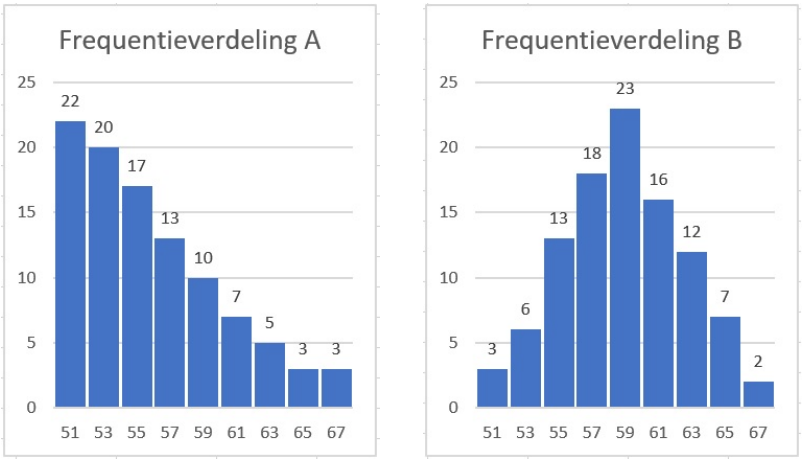
a Welke van deze verdelingen zijn symmetrisch?

b Welke van deze verdelingen zijn links scheef?

c Welke van deze verdelingen bevatten één of meer uitschieters als je kijkt naar de interkwartielafstand?

Opgave 7

Bekijk de twee staafdiagrammen.



Figuur 16.8

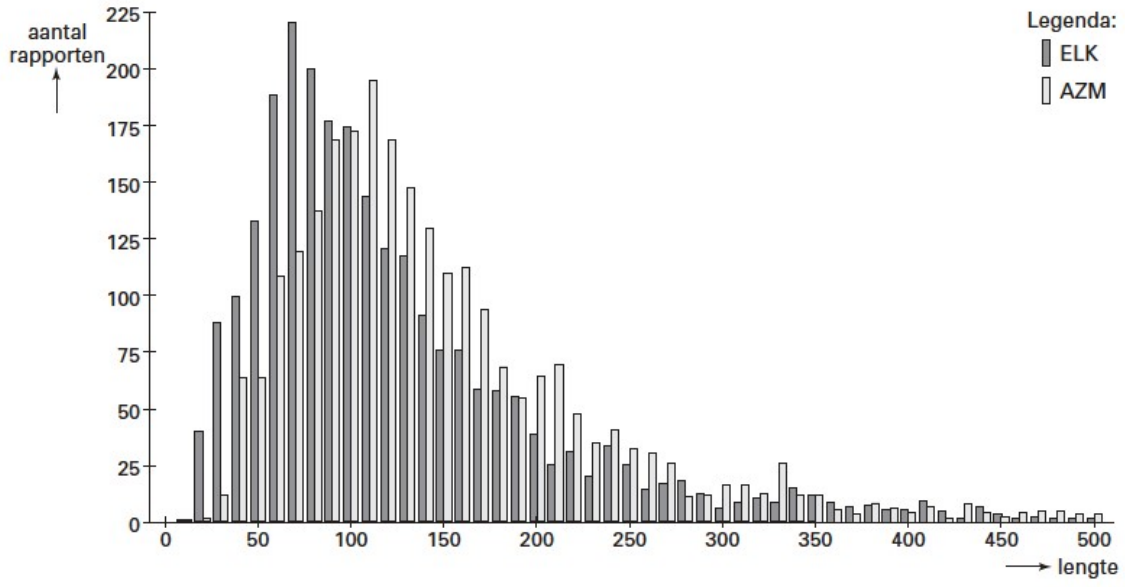
a Welke klassenindeling is er gemaakt?
Welke getallen zijn de klassenmiddens?

b Maak bij elk van deze verdelingen een boxplot.
Bereken eerst de daarvoor noodzakelijke getallen.

c Waarom kun je bij beide verdelingen het gemiddelde alleen schatten?
Bepaal die gemiddelden en laat daarmee zien dat de verdeling B vrijwel symmetrisch is.

Opgave 8

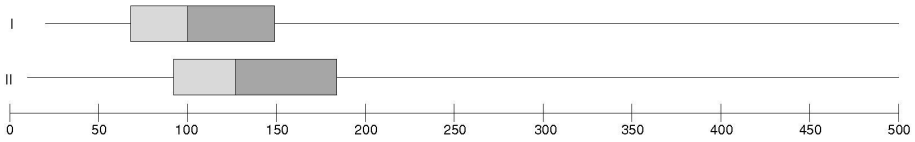
In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) in Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM). Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In de figuur zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10.



Figuur 16.9

a Beschrijf de overeenkomst in de vorm van de twee verdelingen.

b Welke van deze boxplots, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK? Licht je antwoord toe.



Figuur 16.10

c Kun je op grond van de twee boxplots concluderen dat er een verschil is tussen de lengtes van de rapporten in de twee ziekenhuizen? Beargumenteer je antwoord.

d Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn. Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

Toepassen

Bij een afvoerkanaal wordt 24 uur per dag om het uur de pH-waarde gemeten.

Er wordt in ploegendienst gewerkt en elke shift worden er dus 8 metingen verricht. Het meetgebied loopt van 6,0 tot en met 10,0.
Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden														
shift 1	8,5	7,3	7,7	8,1	8,0	7,3	8,4	7,7	7,3	8,2	7,3	6,4	7,0	7,3	7,7
shift 2	6,5	7,0	7,9	7,4	8,4	8,0	9,4	9,3	9,0	9,6	9,0	9,2	8,1	8,3	8,1
shift 3	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,1	6,4	7,0	7,3	7,5	8,1	7,8	7,9	7,4

Tabel 16.2

Nu kun je gaan bekijken of er iets bijzonders aan de hand is.

Opgave 9

Bekijk de meetgegevens bij **Toepassen op pagina 623**.

a Bereken voor elk van de drie shifts de gemiddelde pH-waarde.
Valt er iets op?

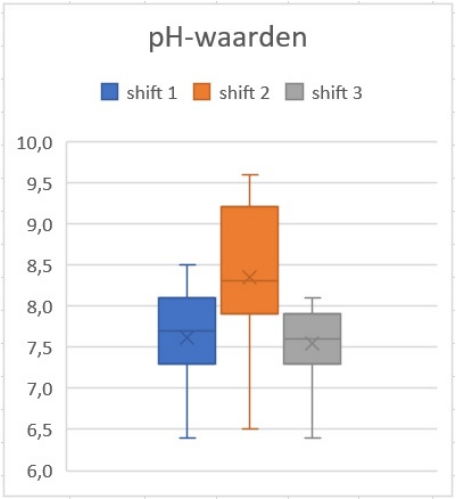
b Verdeel de pH-waarden in vier klassen $5{,}5- < 6{,}5$, $6{,}5- < 7{,}5$, $7{,}5- < 8{,}5$, $8{,}5- < 9{,}5$ en $9{,}5- < 10{,}5$ en teken bijbehorende frequentieverdelingen.

c Kun je uit deze staafdiagrammen een duidelijke conclusie trekken?

Opgave 10

Bekijk weer de meetgegevens bij **Toepassen op pagina 623**.
Je ziet hier drie boxplots van deze gegevens. De kruisjes stellen de gemiddelden voor.

Trek een conclusie op grond van de scheefheid, de mediaan en het gemiddelde van deze metingen.



Figuur 16.11

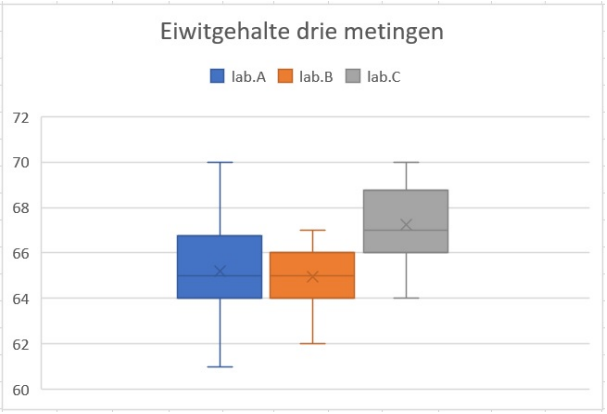
Testen

Opgave 11

Je ziet hier boxplots van de metingen van het eiwitgehalte in eiersalade door drie verschillende laboranten. Het meetgebied is vanaf 60% tot en met 70%. De gemiddelden worden met een kruisje aangegeven.

a Lees van alle drie de metingen de mediaan en het gemiddelde af.

b Welke verdeling is - gezien het meetgebied - het meest scheef?

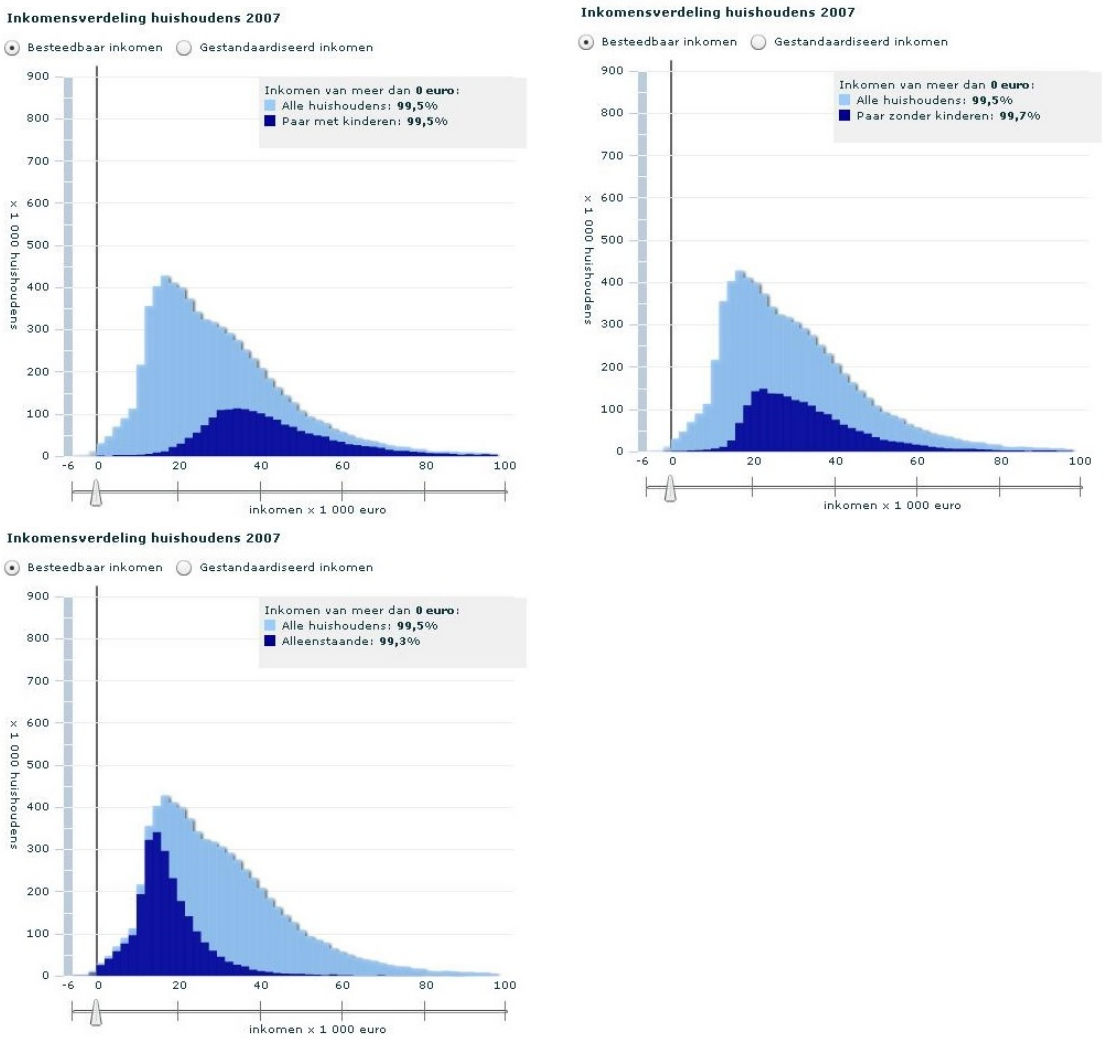


Figuur 16.12

Opgave 12

Je ziet drie grafieken van een animatie van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek). Het zijn staafdiagrammen die de verdeling van het besteedbaar inkomen in Nederland in 2007 in kaart brengen voor verschillende inkomensgroepen.

Het lichtblauwe staafdiagram gaat over het besteedbaar inkomen van alle Nederlanders.



Figuur 16.13 Bron: CBS 2007

a Hoe groot is het modale inkomen van de Nederlanders?
Hoeveel huishoudens betrof dat in 2007?

b Was het gemiddelde inkomen van de Nederlanders hoger of lager?
Licht je antwoord toe.

c Beschrijf de vorm van deze lichtblauwe inkomensverdeling. Geef een verklaring.

Bekijk nu de drie donkerblauwe verdelingen.

d De verdelingen van de inkomens van een paar met en een paar zonder kinderen lijken nogal op elkaar. Wat is het kenmerkende verschil en waardoor komt dat?

e De inkomensverdeling van alleenstaanden is redelijk symmetrisch en zit nogal in de hoek van de lage besteedbare inkomens. Probeer dit te verklaren.

f Beschrijf de klassenindeling die is gebruikt en geef de klassenmiddens.
Leg uit waarom je gemiddelde en mediaan van deze verdelingen alleen kunt schatten.

16.2 Normaalkromme

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de standaardafwijking van een verdeling uitrekenen en interpreteren;
- een normale verdeling herkennen en typeren;
- de vuistregels voor de normale verdeling gebruiken.

Voorkennis

- de belangrijkste principes van de beschrijvende statistiek;
- de vorm van frequentieverdelingen (ook met klassenindelingen) te typeren;
- met behulp van de mediaan en het gemiddelde de scheefheid van een verdeling benoemen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de resulaten van 7 vergelijkbare metingen, verricht door 4 verschillende personen.

	Meetresultaten van 7 metingen						
result A	72	63	70	23	62	81	54
result B	59	74	56	67	61	63	47
result C	88	98	74	88	57	73	42
result D	74	60	60	65	59	59	47

Figuur 16.1

a Bereken het gemiddelde resultaat van elk van deze personen.

b A en B hebben hetzelfde gemiddelde. Toch is de verdeling van hun resultaten nogal verschillend. In welk opzicht? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de resultaten?

c A en C hebben dezelfde spreidingsbreedte. Toch is de verdeling van hun resultaten nogal verschillend. In welk opzicht? En gaat het dan om de precisie of de juistheid van de resultaten?

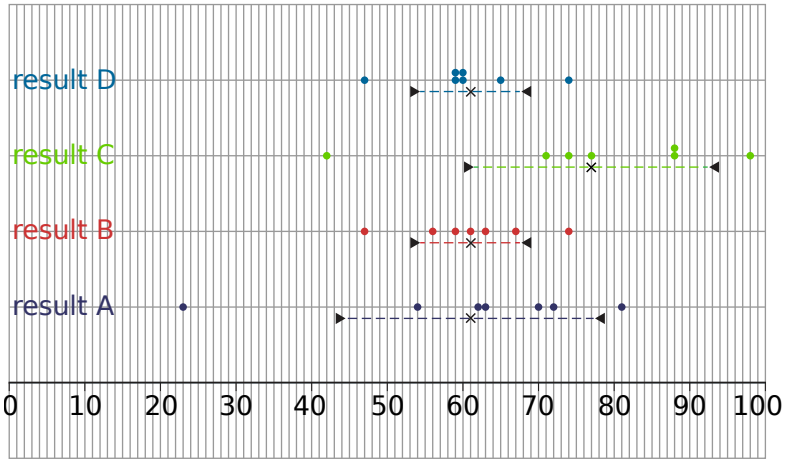
Een nieuwe maat voor de spreiding van deze gegevens is de zogenaamde standaardafwijking. Daarbij bereken je van elk resultaat het kwadraat van de afwijking van het gemiddelde. Van die kwadraten bereken je het gemiddelde en uit dat gemiddelde trek je dan weer de wortel.

d Kun je nu de standaardafwijking van de resultaten van A berekenen?

Uitleg 1

Je hebt naar frequentieverdelingen leren kijken en centrummaten en spreidingsmaten leren gebruiken. Maar er is nog een belangrijke spreidingsmaat, namelijk de standaardafwijking.

Je ziet hier de resultaten van 7 vergelijkbare metingen, verricht door 4 verschillende studenten. De gemiddelden zijn aangegeven met × en je ziet de standaardafwijkingen links en rechts van het gemiddelde.



Figuur 16.2

x_i	$d_i = x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
23	- 37,7	1422,4
54	- 6,7	45,1
62	1,3	1,7
63	2,3	5,2
70	9,3	86,2
72	11,3	127,4
81	20,3	411,5
som van de kwadraten		2099,4

Tabel 16.1

De resultaten van student A zijn: 23, 54, 62, 63, 70, 72 en 81.

De standaardafwijking van de resultaten x_i van A bereken je zo (zie **Tabel 16.1**):

- Bereken eerst het gemiddelde.
  Heb je een complete populatie dan is het gemiddelde $\mu_x \approx 60{,}7$.
  Heb je een steekproef dan is het gemiddelde $\overline{x} \approx 60{,}7$.
- Bepaal van elk resultaat het verschil met het gemiddelde, de zogenaamde deviatie.
- Kwadrateer elke deviatie (om geen negatieve afwijkingen te krijgen) en tel ze op.
- Bereken de variantie.
  Heb je een complete populatie dan is de variantie $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n}$.
  Heb je een steekproef dan is de variantie $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$.
- De standaardafwijking is de wortel uit de variantie.
  Heb je een complete populatie dan is de standaardafwijking $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n}}$.
  Heb je een steekproef dan is de standaardafwijking $s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$.

De resultaten van student A vormen een steekproef van alle mogelijke gelijke metingen en dus is de variantie $\frac{2099{,}4}{6} \approx 349{,}9$ en de standaardafwijking $s_x = \sqrt{\frac{2099{,}4}{6}} \approx 18{,}7$.

Je kunt de standaardafwijking ook met Excel berekenen, zie het practicum.

De standaardafwijking is de meestgebruikte spreidingsmaat bij statistisch onderzoek. Deze afwijking van het gemiddelde wordt links en rechts vanaf het gemiddelde uitgezet.

Opgave 1

Bekijk de resultaten van de steekproeven van 7 metingen door 4 personen in **Uitleg 1 op pagina 627**.

a Bereken zelf de standaardafwijking van de resultaten van B.

b Is de standaardafwijking een maat voor de precisie of voor de juistheid van de metingen?

Bij student A is het resultaat 23 is nogal een uitschieter.

c Hoe groot zijn het gemiddelde en de standaardafwijking van haar resultaten als je deze éne meting weglaat?

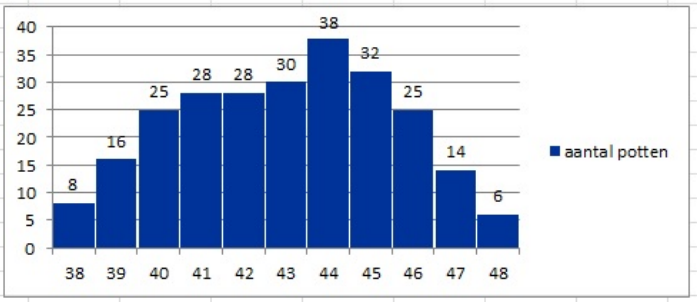
Stel je voor dat de resultaten van student C geen metingen zijn, maar alle resultaten voor zijn toetsen voor een bepaald vak in een bepaalde periode.

d Hoe groot zijn het gemiddelde en de standaardafwijking in dat geval?

Opgave 2

Van 250 potten met augurken (uitlekgewicht 370 gram) is geteld hoeveel augurken de potten bevatten. Van het resultaat zie je een tabel en een staafdiagram.

aantal augurken	aantal potten
38	8
39	16
40	25
41	28
42	28
43	30
44	38
45	32
46	25
47	14
48	6
	250



Figuur 16.3

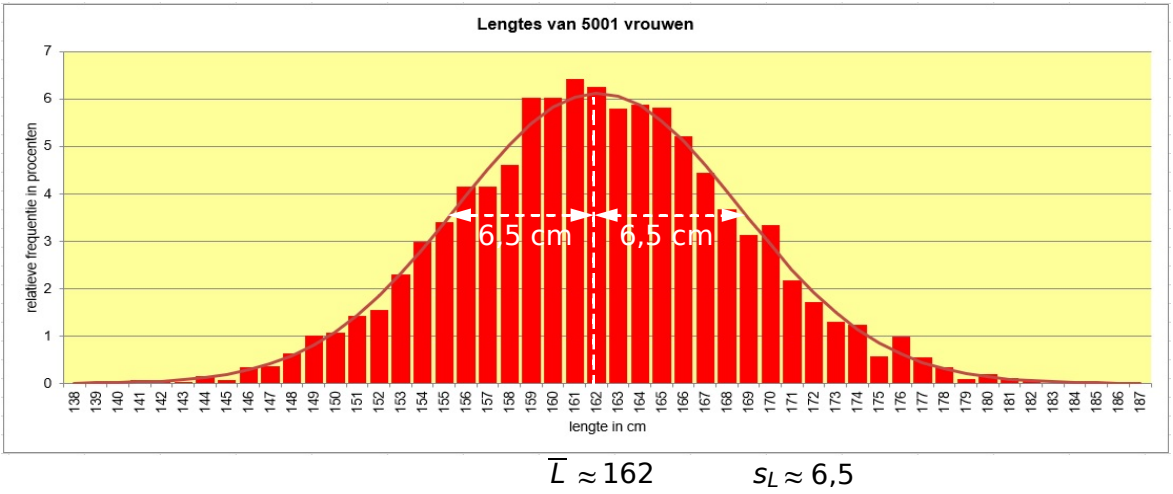
Om van deze steekproef het gemiddelde en de standaardafwijking te berekenen, moet je met de frequenties rekening houden.

Bereken van deze steekproef het gemiddelde en de standaardafwijking.

Uitleg 2

Je ziet een staafdiagram van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen uit de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947**. Er zijn relatieve frequenties gebruikt (in procenten). Daarom spreek je in dit geval wel van een histogram.

Dit histogram heeft een vrijwel zuivere 'klokvorm'. Deze klokvorm heet een normaalkromme. Omdat dit histogram vrijwel een normaalkromme beschrijft spreek je van een normale verdeling van de lengtes. De bijbehorende gemiddelde lengte $\overline{L} \approx 162$ cm en de standaardafwijking $s_L \approx 6{,}5$ cm zijn in de figuur aangegeven.



Figuur 16.4

Beide getallen leggen de normale verdeling volledig vast, ze zijn karakteristiek voor deze normale verdeling.
Op grond van alleen het gemiddelde en de standaardafwijking kan elke normale verdeling worden getekend. En met die normale verdeling kun je gewoon berekenen hoeveel procent van de vrouwen een lengte van bijvoorbeeld meer dan 170 cm hebben.

Vaak worden deze vuistregels voor de normale verdeling met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ gebruikt:

- Ongeveer 68% van alle waarden liggen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van alle waarden liggen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna100% van alle waarden liggen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Voor een steekproef zoals in de figuur gebruik je voor het gemiddelde $\overline{L}$ en voor de standaardafwijking s_L.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg 2 op pagina 629**. Gebruik de dataset **Statistiek Bijenkorf 1947** en het tabblad lengte en gewicht.

a Bereken zelf met behulp van Excel het gemiddelde en de standaardafwijking van deze steekproef.

b Ga na dat bijna alle waarden binnen drie keer de standaarddeviatie van het gemiddelde afwijken.

c Controleer de vuistregel dat 68% van de vrouwen een lengte heeft tussen $\overline{L} - s_L$ en $\overline{L} + s_L$.

d Controleer de vuistregel dat 95% van de vrouwen een lengte heeft tussen $\overline{L} - 2 \cdot s_L$ en $\overline{L} + 2 \cdot s_L$.

Opgave 4

Men heeft ontdekt dat metingen van natuurlijke grootheden vaak normaal zijn verdeeld als je steekproef maar groot genoeg en aselect is.
De lengtes van vrouwen is daar een goed voorbeeld van, net al de lengtes van mannen, de vulgewichten van kilopakken suiker bij automatisch vullen, de gemeten pH-waarden in een vloeistoftank, etc.

a Waarom moet hiervoor de steekproef groot genoeg zijn?

b Waarom zijn bijvoorbeeld de gewichten van mensen in een rijk land als Nederland waarschijnlijk niet normaal verdeeld?

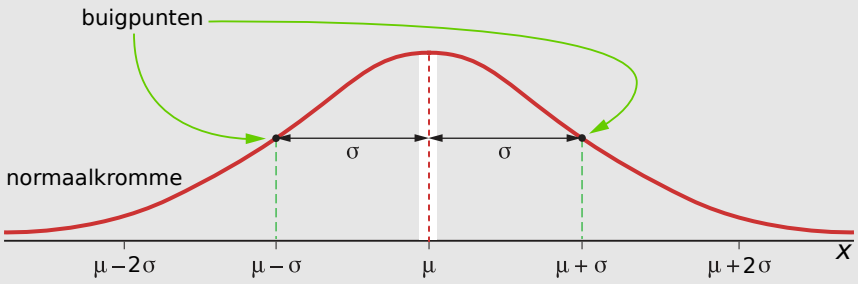
c Waarom zullen lengtes van bijvoorbeeld basketballers niet normaal verdeeld zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Symmetrische frequentieverdelingen van een statistische variabele x met een klokvorm zoals in de figuur, laten zich goed beschrijven door de centrummaat **gemiddelde** en de spreidingsmaat **standaardafwijking** of **standaarddeviatie**.

Die symmetrische verdeling noem je **normale verdeling**, de bijbehorende kromme lijn de **normaalkromme**.



Figuur 16.5

In deze normale verdeling zie je het populatiegemiddelde μ en de bijbehorende standaardafwijking σ aangegeven.

Gaat het om een steekproef dan gebruik je het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ en de bijbehorende standaardafwijking s_x.

Van een variabele x met waarden x_i en frequenties f_i is de **variantie**:
$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot f_i}{n}$ (populatie) of $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i}{n-1}$ (steekproef).

De standaardafwijking is de wortel uit de variantie:
$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot f_i}{n}}$ (populatie) of $s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i}{n-1}}$ (steekproef).

Elke normale verdeling wordt volledig bepaald door het gemiddelde en de standaardafwijking. De buigpunten van de normaalkromme zitten precies één standaardafwijking van de symmetrieas af. Voor elke normale verdeling gelden de vuistregels:

- Ongeveer 68% van alle waarden liggen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van alle waarden liggen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna 100% van alle waarden liggen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

Voorbeeld 1

Je wilt de **concentratie nitraat in landbouwgrond** op een bepaald stuk land vaststellen.
Je neemt 50 monsters, waarvan je hier de resultaten ziet.

Concentratie nitraat in grondwater kleigrond in mg/L									
24,5	25,0	25,4	28,9	22,0	24,8	23,7	24,6	25,3	26,3
25,1	27,0	22,9	25,7	24,4	24,6	28,1	25,5	24,1	24,8
23,9	24,2	21,4	25,6	24,3	29,0	26,0	25,2	24,9	25,1
26,1	23,5	24,0	25,4	25,8	26,4	25,7	24,3	20,4	26,1
30,1	25,3	24,6	24,7	25,2	26,3	23,8	27,1	25,0	27,5

Tabel 16.2

Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze resultaten.

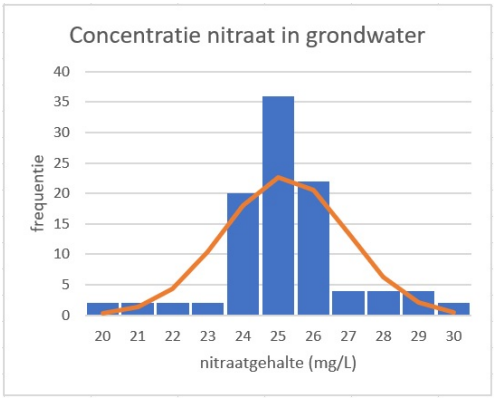
Maak bij deze gegevens ook een histogram met een klassenindeling 19,5− < 20,5, 20,5− < 21,5, ..., 29,5− < 30,5 en zet er een bijpassende normale verdeling bij in.

Antwoord

Je kunt dit gewoon met Excel doen met de ruwe data. Denk er dan wel om dat het om een steekproef gaat. Je gebruikt dus de functies STDEV() of STDEV.S(). Je vindt $\overline{n} \approx 25{,}2$ en $s_n = 1{,}75$.

Je maakt nu een combinatiediagram zoals dat hiernaast.

- Maak eerst een frequentietabel met relatieve frequenties.
- Teken daarvan een staafdiagram, dat is je histogram.
- Maak vervolgens met Excel een tabel van de frequenties volgens de normale verdeling.
- Maak van je histogram een combinatiediagram.



Figuur 16.6

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 631**.

a Voer zelf de berekeningen uit met behulp van Excel.

b Je ziet dat de frequentieverdeling niet precies op een normale verdeling lijkt.
Ga of de 68% vuistregel klopt.

Voorbeeld 2

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de mouwlengtes m_i.
Onderzoek of deze frequentieverdeling voldoet aan de 68% vuistregel voor een normale verdeling.

Antwoord

Nu beschik je niet over de ruwe data, dus je kunt beide alleen schatten.

Het gemiddelde is $\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot f_i}{5000}$.

Dus je maakt in Excel een kolom $m_i \cdot f_i$ en die tel je op.
Delen door 5000 en je vindt $\overline{m} \approx 59{,}1$.

De steekproefstandaardafwijking is $s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (m_i - \overline{m})^2 \cdot f_i}{5000}}$.

Dus je maakt in Excel een kolom $(m_i - \overline{m})^2 \cdot f_i$ en die tel je op.
Delen door 5000 en worteltrekken je vindt $s_m \approx 3{,}06$.

Volgens de 68% vuistregel moet dat percentage van de metingen liggen tussen $\overline{m} - s_m \approx 56{,}0$ en $\overline{m} + s_m \approx 62{,}1$.
Ga na, dat daar 3425 vrouwen tussen zitten. Bedenk dat je van de klasse met klassemidden 56 de helft van het aantal moet nemen. En van de klasse met midden 62 moet je 0,6 keer het aantal nemen.

Het percentage is dan $\frac{3425}{5000} \cdot 100 = 68{,}5$.
Dus deze frequentieverdeling voldoet redelijk goed aan de 68% vuistregel voor een normale verdeling.

Opgave 6

Bekijk het berekenen van gemiddelde en standaardafwijking in.

a Voer zelf deze berekeningen met behulp van Excel uit.

b Controleer dat er inderdaad 3425 vrouwen tussen $\overline{m} - s_m \approx 56{,}0$ en $\overline{m} + s_m \approx 62{,}1$ zitten.

c Controleer ook de 95% vuistregel.

Oefenen

Opgave 7

Acrylamide is een vermoedelijk kankerverwekkende stof die ontstaat in zetmeelrijke producten bij verhitting boven de 120 °C. Voor gebakken frites is 750 µg/kg de aanbevolen maximale hoeveelheid acrylamide. Een grote fastfoodketen laat onderzoeken of zijn frites aan dit referentieniveau voldoet. In een laboratorium worden daartoe 16 porties frites van deze fastfoodketen onderzocht met de volgende resultaten.

Gehalte acrylamide in frites in µg/kg							
780	690	730	750	715	690	710	750
715	735	710	740	730	715	720	725

Tabel 16.3

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze metingen.

b Welke van deze twee waarden zegt iets over de precisie van de metingen?

c Deze steekproef is klein, dus een normale verdeling zal er wel niet in zitten.
Controleer de 68% vuistregel en de 95% vuistregel.

Opgave 8

In 1947 hebben de wiskundigen Freudenthal en Sittig een grootscheeps onderzoek gehouden naar **de lichaamsmaten van 5001 vrouwen** in opdracht van De Bijenkorf. Daaruit wilde het bedrijf conclusies kunnen trekken betreffende de maatvoering van kleding voor hun vrouwelijke klanten.

Bekijk de frequentieverdeling van de kniehoogtes.

a Bereken hiervan het gemiddelde en de standaardafwijking in één decimaal nauwkeurig.

b Maak van deze frequentieverdeling een histogram en zet daar de bijpassende normale verdeling bij in.

c Ga na, of deze frequentieverdeling aan de 68% vuistregel voldoet.

Opgave 9

Uit de wielersport komen regelmatig berichten over dopinggebruik. Wielrenners lijken naar verboden middelen te grijpen om hun prestaties te verhogen. Een van de meest genoemde stoffen is erytropoëtine, kortweg EPO. Dit middel bevordert de aanmaak van rode bloedlichaampjes, waardoor de zuurstoftransportfunctie van het bloed wordt vergroot. Je gaat hierdoor beter presteren.
De hematocrietwaarde is de hoeveelheid rode bloedlichaampjes als percentage van de totale hoeveelheid bloed. Die hematocrietwaarde stijgt als een wielrenner EPO gaat gebruiken.
Bij een wielerwedstrijd in 1997 heeft men de hematocrietwaarde van een aantal wielrenners gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.

hematocrietwaarde	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
frequentie	2	3	5	11	15	8	4	3	2	1	0	0	1	2	0	0	1

Tabel 16.4

a Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de hematocrietwaarden van deze wielrenners.

b Waarom kan hier geen sprake zijn van een normale verdeling?

Opgave 10

De gemiddelde lengte van mannen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de mannen in Nederland 181 cm met een standaardafwijking van 7 cm.

a Schrijf de drie vuistregels op voor de lengte van mannen in 2010.

b Schrijf nog minimaal 2 uitspraken op over de lengte van mannen in 2010, gebaseerd op de vuistregels.

c In 1981 waren mannen gemiddeld 3 cm kleiner. De standaardafwijking was vrijwel hetzelfde, dus 7 cm. Welke getallen in de antwoorden van de vorige twee vragen veranderen wel, en hoe, en welke niet?

Toepassen

Wanneer een laborant dezelfde meting een aantal keren met hetzelfde apparaat herhaalt, dan krijgt hij een serie waarden x_i die meestal iets van elkaar verschillen. De standaarddeviatie is een maat voor de precisie van zijn metingen. Vaak wordt echter de standaarddeviatie gedeeld door het gemiddelde en in procenten uitgedrukt. Je krijgt dan de zogenaamde variatiecoëfficiënt:

variatiecoëfficiënt = $\frac{s_x}{\bar{x}}$

Deze maat voor de preciesie van de metingen wordt wel de **herhaalbaarheid** genoemd.

Maar het kan ook zijn dat dezelfde meting door verschillende laboranten op verschillende momenten op hetzelfde apparaat zijn uitgevoerd. De variatiecoëfficiënt is dan een maat voor de verschillen tussen deze laboranten.
Nu spreek je van de **reproduceerbaarheid** van de metingen.

Opgave 11

Door een laborant wordt 5 keer van een bepaalde vloeistof de pH-waarde berekend.
Zij vond de volgende waarden: 8,2; 8,4; 8,3; 8,0 en 8,4.

a Bereken de variatiecoëfficiënt van deze metingen.

b Wat zegt de variatiecoëfficiënt over deze serie metingen?

Opgave 12

Door een zestal laboranten wordt met hetzelfde instrument van een bepaalde vloeistof op verschillende momenten de pH-waarde berekend.
Zij vonden de volgende waarden: 7,9; 8,4; 8,6; 8,1; 8,0 en 8,5.

a Bereken de variatiecoëfficiënt van deze metingen.

b Wat zegt de variatiecoëfficiënt over deze serie metingen?

c Vergelijk deze variatiecoëfficiënt met die uit de voorgaande opgave.
Kun je het verschil verklaren?

Testen

Opgave 13

De Unox stevige erwtensoep bevat volgens het etiket 12,7% rookworst. In een laboratorium wordt dit onderzocht. Deze waarden werden in 15 monsters aangetroffen.

a Bereken het gemiddelde percentage en de bijbehorende standaarddeviatie.

b Welke van beide maten zegt iets over de precisie van de metingen?

c Onderzoek of alle metingen minder dan drie standaarddeviaties afwijken van het gemiddelde.

Opgave 14

Een bedrijf haalt elke dag melk bij honderd boeren in de regio op. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het lab wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal fecale bacteriën per centiliter geteld. De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een ‘dagproductie’.
De dienst die verantwoordelijk is voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 100 fecale bacteriën per milliliter. In de tabel staan honderd waarden b_i gegeven die het lab in een bepaalde dagproductie heeft gevonden.

a Bereken een schatting van het gemiddelde en de standaardafwijking van deze gegevens.

b Onderzoek of deze frequentieverdeling bij benadering een normale verdeling is door de drie vuistregels te controleren.

Opgave 15

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 2010 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167,5 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm. Maak gebruik van de vuistregels en rond antwoorden af op halve procenten.

a Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 154,5 cm?

b Hoeveel procent van de vrouwen was waarschijnlijk kleiner dan 180,5 cm?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurige vrouw groter is dan 180,5 cm?

16.3 Rekenen met de normale verdeling

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een percentage onder een normale verdeling berekenen;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale kansverdeling te berekenen.

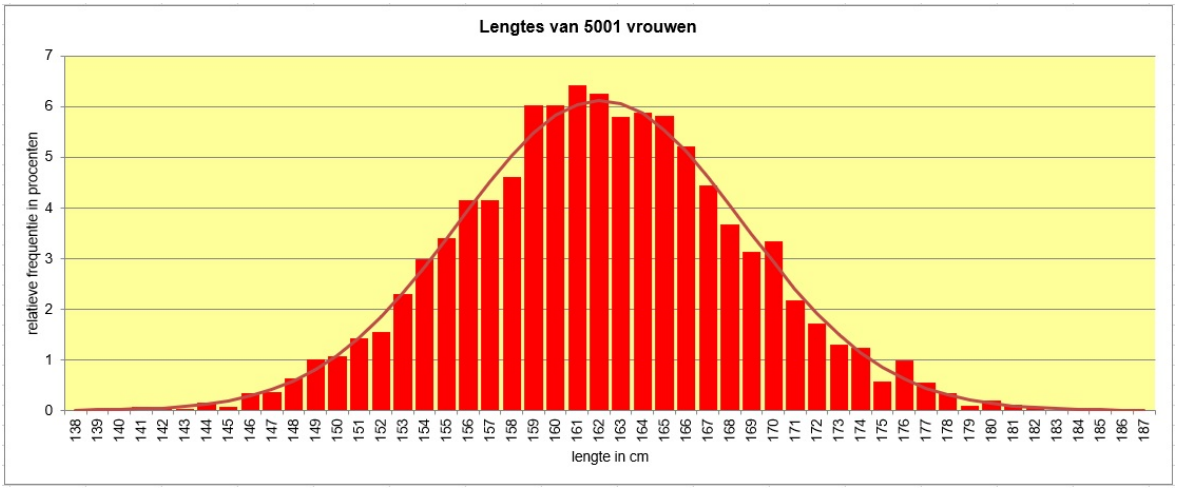
Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een normale verdeling herkennen en typeren;
- de vuistregels voor de normale verdeling gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen in 1947.



Figuur 16.1

Bij dit histogram past een normaalkromme met gemiddelde $\overline{L} \approx 162{,}1$ en een standaardafwijking $s_L \approx 6{,}5$.

Gebruik eerst de vuistregels voor de normale verdeling.

a Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte van minder dan $\overline{L} - s_L = 155{,}6$ cm?

b Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte van meer dan $\overline{L} + 2s_L = 175{,}1$ cm?

c Hoe zou je de percentages die je bij a en bij b hebt gevonden in de figuur aangeven?

Je kunt met behulp van Excel ook percentages bepalen onder een bepaalde lengte.
Daartoe gebruik je de functie NORM.VERD(waarde;gemiddelde;standaardafwijking;1).
De 1 is nodig om aan de geven dat hij alle percentages tot en met die bij de opgegeven waarde bij elkaar telt. Verder moet je om een percentage te krijgen de uitkomst nog met 100 vermenigvuldigen.

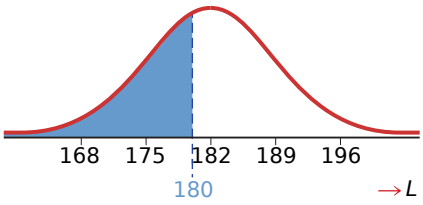
d Bereken hiermee hoeveel procent van deze vrouwen korter is dan 150 cm.

e Hoeveel procent van deze vrouwen heeft een lengte tussen de 150 en de 160 cm?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Statistische variabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak normaal verdeeld. Bijvoorbeeld is de lengte L (in cm) van de populatie volwassen Nederlandse mannen een normale statistische variabele.
Je ziet hier dat de gemiddelde lengte $\mu_L = 182$ cm is met een standaarddeviatie van $\sigma_L = 7$ cm. Je kunt dan het percentage mannen dat kleiner dan 180 cm is berekenen met bijvoorbeeld Excel, zie het **Practicum**.
De uitkomst van de normale verdeling noteer je als: $P(L < 180) \approx 0{,}387$.
Dit levert op: $0{,}387 \cdot 100 = 38{,}7\%$.



Figuur 16.2

Belangrijk is wel om je te realiseren dat de meetnauwkeurigheid hier een rol speelt.
De normale verdeling houdt met de nauwkeurigheid van het meten geen rekening, maar in de praktijk moet je daar wel rekening mee houden. Als je van iemand zegt dat hij 180 cm lang is, dan heeft hij een lengte van 179,5− < 180,5 cm. Dus is het deel van de mannen dat kleiner is dan 180 cm eigenlijk $P(L < 179{,}5) \approx 0{,}360$.

Opgave 1

Bekijk de verdeling van de lengtes van Nederlandse mannen in **Uitleg 1 op pagina 636**.

a Waarom worden hier μ_L en σ_L gebruikt en niet $\overline{L}$ en s_L?

b Ga zelf na, dat $P(L < 180) \approx 0{,}387$. Bekijk indien nodig het **Practicum**.

Bij de lengtes van de mannen is afgerond op gehele cm. Het getal 180 is dus een klassenmidden.

c Van welke klasse?

Je wilt weten hoeveel procent van de mannen kleiner of gelijk aan 180 cm is.
Je houdt ook met de meetnauwkeurigheid rekening.

d Bereken dit percentage.

e Bereken hoeveel procent van de mannen tussen 175 en 189 cm lang is.
Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

f Ga na, dat de 68% vuistregel klopt.

Opgave 2

Ga weer uit van de verdeling van de lengtes van Nederlandse mannen in **Uitleg 1 op pagina 636**.

a Waarom is $P(L = 180) = 0$ als je niet met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?

b Bereken $P(L = 180)$ als je wel met de meetnauwkeurigheid rekening houdt.
Hoeveel procent van de mannen is dus 180 cm?

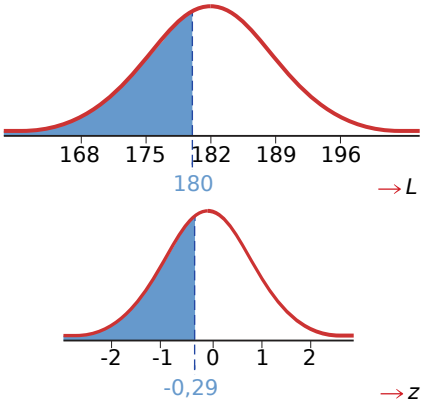
Als je wilt berekenen hoeveel procent van de mannen groter is dan 180 cm, dan gebruik je dat onder de normale verdeling 100% van de mannen valt.

c Bereken hoeveel procent van de mannen langer is dan 180 cm. Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Je ziet hier dat de gemiddelde lengte van mannen $\mu_L = 182$ cm is met een standaarddeviatie van $\sigma_L = 7$ cm. Je kunt dan het percentage mannen dat kleiner dan 180 cm is berekenen met behulp van de z-tabel



Figuur 16.3

Alle normale verdelingen zijn door verschuiven met μ en vermenigvuldigen met $\frac{1}{\sigma}$ in de x-richting te vervormen naar de standaardnormale verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. De waarden van die standaardnormale verdeling heten z-waarden.

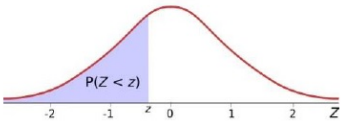
Hier geldt dus $z = \frac{L-\mu_L}{\sigma_L} = \frac{L-182}{7}$.

En dus is:

$$P(L < 180) = P\left(z < \frac{180-182}{7}\right) = P(z < -0{,}29) \approx 0{,}3859.$$

In de **standaardnormale tabel**, of z-tabel, kun je nu de uitkomst aflezen, zie figuur.

Standaardnormale tabel:
bij gegeven z-waarden de uitkomst van P(Z < z)



	tweede decimaal									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121

Figuur 16.4

Je zult zien dat het werken met deze standaardnormale tabel zijn voordelen heeft.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg 2 op pagina 637**. Gebruik de tabel met z-waarden.

a Bereken $P(L < 179{,}5)$.

b Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van 180 cm als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?

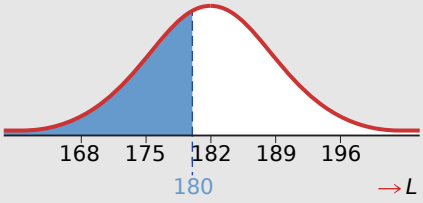
c Bereken hoeveel procent van de mannen langer is dan 180 cm. Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Statistische variabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale statistische variabele**.



Figuur 16.5

De wiskundige **Gauss (1777-1855)** vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. In bijvoorbeeld Excel, maar ook in GeoGebra of een rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je relatieve frequenties bij de normale verdeling berekenen, zie het **Practicum**.

De relatieve frequentie die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:

$P(165 \leq L < 180)$

Omdat $P(L = 165) = 0$ is dit hetzelfde als $P(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de relatieve frequentie is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $P(164{,}5 < X < 165{,}5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

Alle normale verdelingen zijn om te zetten naar de **standaardnormale verdeling**. De waarden hiervan zijn de z-waarden:

$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$

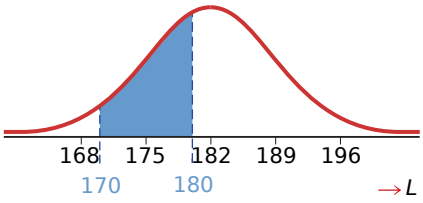
Met de **standaardnormale tabel** kun je de bijbehorende relatieve frequenties bepalen.

Voorbeeld 1

De lengte L van de Nederlandse mannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

Bereken $P(170 < L < 180)$, $P(L < 180)$, $P(L = 180)$.

Bereken het percentage mannen dat langer is dan 1,75 meter als je rekening houdt met de meetonnauwkeurigheid.



Figuur 16.6

Antwoord

Al deze kansen zijn met Excel te vinden. Maar je kunt ook GeoGebra gebruiken, of een rekenmachine. En je kunt werken met de standaardnormale tabel.
Bekijk het **Practicum**.

- $P(170 < L < 180) \approx 0{,}3443$
- $P(L < 180) \approx 0{,}3875$

- $P(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage mannen dat langer is dan 1,75 meter' kun je vertalen naar: $P(L > 175{,}5) \approx 0{,}8234$. Dat is gelijk aan ongeveer 82,3%.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1 op pagina 638**.

a Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?

b Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?

c Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van precies 171 centimeter?

d Hoeveel procent van de mannen heeft een lengte van 171 centimeter als je met de meetnauwkeurigheid rekening houdt?

e Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1{,}5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1{,}5 \cdot \sigma$?

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

a Hoeveel procent van deze appels weegt minder dan 140 gram?

b Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?

Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.

c Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?

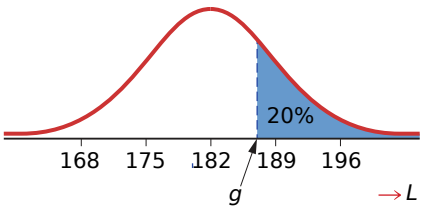
Er wordt gewerkt met een meetnauwkeurigheid van 1 gram.

d Maakt dit verschil voor je antwoord bij c?

Voorbeeld 2

De lengte L van een een grote steekproef Nederlandse mannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\overline{L} = 182$ cm en een standaardafwijking van $s_L = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste mannen in deze steekproef?



Figuur 16.7

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0{,}20$.

Excel, GeoGebra, een rekenmachine hebben hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Je kunt ook werken met z-waarden. Alleen moet je omrekenen naar 'kleiner-of-gelijk'-frequenties.

$P(L > g) = 0{,}20$ betekent dat $P(L < g) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

Dus $P\left(z < \frac{g-183}{7}\right) = 0{,}80$.

In de standaardnormale tabel vind je zo dicht mogelijk bij 0,8000 een z-waarde, namelijk $z \approx 0{,}84$.

Dus: $\frac{g-183}{7} \approx 0{,}84$

De uitkomst is: $g \approx 0{,}84 \cdot 7 + 183 = 187{,}9$.
De 20% langste mannen zijn 187,9 cm of langer.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2 op pagina 639**.

a Welke lengtes hebben de 20% kleinste mannen in deze groep?

b 10% van de mannen zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a.

c Voor welke lengtes is maat S geschikt?
Houd rekening met de meetnauwkeurigheid.

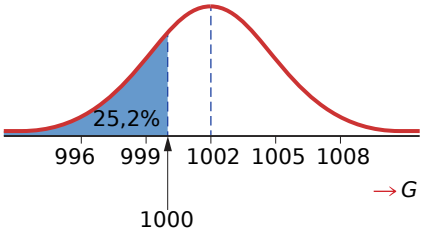
d Voor welke lengtes is maat M geschikt?

Voorbeeld 3

In een suikerfabriek is het vulgewicht van kilopakken suiker ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram.
De fabrikant wil dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.
Hij kan dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen, maar dat is een te dure oplossing.
De fabrikant kan dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: hij verkleint de standaardafwijking σ.

Bekijk de applet.

Hoe bereken je de aangepaste waarde van σ?



Figuur 16.8

Antwoord

G is het gewicht van een pak suiker uit de suikerfabriek.

Nu moet $P(G < 1000) = 0{,}05$, dus $P\left(z < \frac{1000-1002}{\sigma}\right) = 0{,}05$.

De z-waarde bij 0,05 haal je uit de standaardnormale tabel: $z = -1{,}645$.

$\frac{1000-1002}{\sigma} = -1{,}645$ geeft $\sigma = \frac{-2}{-1{,}645} \approx 1{,}22$.

De standaardafwijking moet afnemen van 3 gram naar 1,22 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.

Opgave 7

Gebruik de gegevens van de suikerfabriek in **Voorbeeld 3 op pagina 640**.

a Waarom is het verhogen van het gemiddelde voor de fabrikant een dure oplossing?

b Bereken wat het vulgewicht zou moeten worden om aan de eis te voldoen.
Nu blijft dus de standaarddeviatie hetzelfde.

c Welke mogelijke voor- en nadelen heeft het verkleinen van de standaarddeviatie voor de fabrikant?

De eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen.

d Welke standaarddeviatie moet de fabrikant dan hanteren als hij het gemiddelde gewicht gelijk van zijn pakken suiker houdt?

e Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 uur en een standaardafwijking van 255 minuten.

a De fabrikant vermeldt op de verpakking dat deze batterijen 75 uur meegaan. Hoeveel procent van de batterijen haalt deze levensduur niet?

b Door het verbeteren van het fabricageproces gaan de batterijen gemiddeld langer mee. De standaardafwijking van de levensduur blijft hetzelfde. De fabrikant garandeert nu dat slechts 1% van de batterijen geen 90 uur meegaat. Hoe groot is nu de gemiddelde levensduur van dit soort batterijen?

Oefenen

Opgave 9

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

a Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?

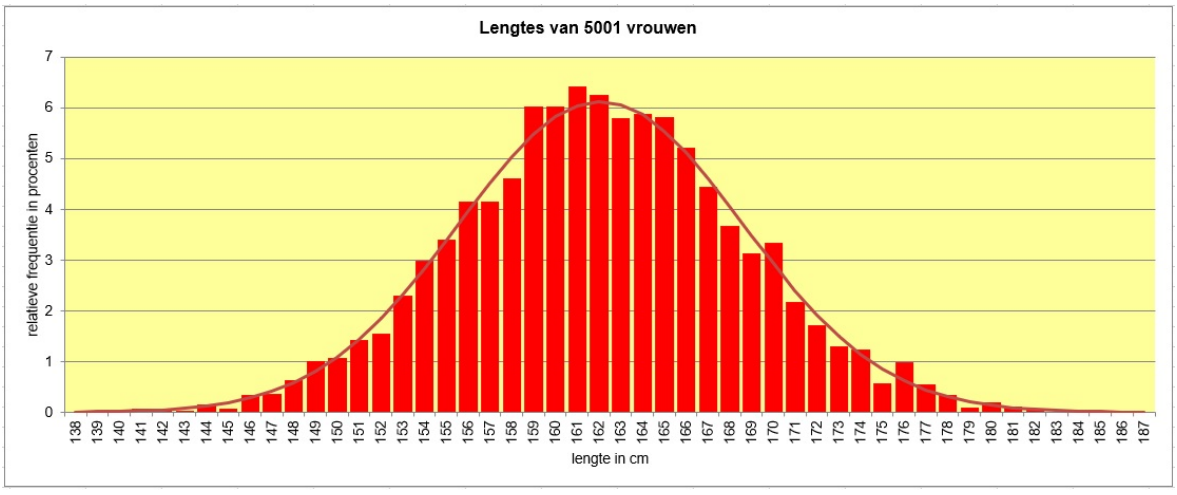
b Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?

c Hoeveel procent van de pakken is meer dan 5 gram zwaarder dan het gemiddelde?

d Hoeveel procent van de pakken weegt tussen de 1005 en de 1015 gram?

Opgave 10

Je ziet hier de relatieve frequentieverdeling van de lengtes van een steekproef van 5001 vrouwen in 1947.



Figuur 16.9

Bij dit histogram past een normaalkromme met gemiddelde $\overline{L} \approx 162{,}1$ en een standaardafwijking $s_L \approx 6{,}5$.

Houd er rekening mee dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.

a Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?

b Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?

c Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte van 160 cm lang?

d Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?

e En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 11

Een bakker bakt kerststollen van 1000 gram.

Er wordt een grote steekproef van deze kerststollen onderzocht. Het gemiddelde gewicht hiervan bedraagt $\overline{G}$ = 1000 g. Echter 5% van de stollen in deze steekproef weegt minder dan 900 gram.

a Hoeveel bedraagt de standaardafwijking van deze steekproef?

b Als de standaardafwijking van de stollen in werkelijkheid 60 gram is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram?

c Hoeveel bedraagt het gewicht van de 3% zwaarste kerststollen als het gemiddelde 1000 gram is met een standaardafwijking van 60 gram?

Opgave 12

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken. De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

a Bereken de bijbehorende standaardafwijking in één decimaal nauwkeurig.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

b Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.

Opgave 13

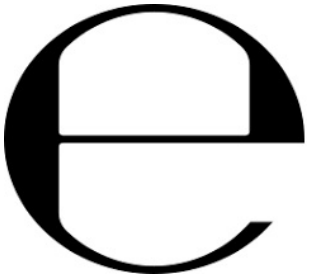
De accu van een tablet van het merk S gaat gemiddeld 2,60 jaar mee met een standaardafwijking van 0,32 jaar. De tableteigenaars zijn hiermee niet tevreden en daarom wil S de productiestraat van deze accu's aanpassen.
Er zijn aanpassingen mogelijk die de gemiddelde levensduur zullen verhogen: per extra levensweek zijn de kosten hiervan € 0,01 per tablet.
Andere aanpassingen zorgen voor een kleinere standaardafwijking, maar deze aanpassingen kosten per extra levensweek € 0,02 per tablet.

S wil de productiestraat zodanig aanpassen dat de kans dat de accu meer dan twee jaar meegaat minstens 97,5% wordt. Echter: de totale extra kosten per tablet door de aanpassingen mogen niet hoger zijn dan 1,4 eurocent.

Onderzoek of er mogelijkheden zijn voor S om de productiestraat zodanig aan te passen dat aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Toepassen

Het **e-teken** hiernaast zie je vaak op verpakkingen staan. Het wordt gebruikt om aan te geven hoeveel de inhoud (in mL) of het gewicht (in g) van zo'n pak mag afwijken van het opgegeven gewicht.



Figuur 16.10

Volgens Wikipedia geeft het symbool aan:

- het gemiddelde van de werkelijke hoeveelheid product in de verpakkingen in een partij ten minste gelijk is aan de hoeveelheid die op de verpakking staat, en
- slechts een gering aantal verpakkingen een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel, en
- geen verpakking een werkelijke hoeveelheid product bevat die lager is dan de hoeveelheid op de verpakking minus twee keer de onnauwkeurigheid uit onderstaande tabel.

Deze tabel hoort daar bij:

aangeduide hoeveelheid (g of mL)	% fout	absolute fout
van 5 tot 50	9	
van 50 tot 100		4,5
van 100 tot 200	4,5	
van 200 tot 300		9
van 300 tot 500	3	
van 500 tot 1000		15
van 1000 t/m 10 . 000	1,5	

Tabel 16.1

Onder % fout versta je dat de hoeveelheid zoveel procent lager zou kunnen zijn.
Onder absolute fout versta je dat de hoeveelheid zoveel gram of mL lager zou kunnen zijn.

Nu kun je (zeker voor consumentenverpakkingen) zelf nagaan hoeveel de minimale hoeveelheid moet bedragen. En welke hoeveelheden een gering aantal pakken mogen hebben.

Opgave 14

Op een zak chips staat: Inhoud 200 g ℮.

a Hoeveel mag de inhoud volgens de tabel in **Toepassen op pagina 643** hiervan afwijken?

Neem aan dat de fabrikant van deze chips een vulmachine heeft met een precisie van 6 gram.
Als maat voor de precisie wordt de standaardafwijking gebruikt.

b Hoeveel % van de zakken chips zal niet voldoen aan de Europese norm als de fabrikant de vulmachine instelt op 200 g?

c De fabrikant besluit om het gemiddelde vulgewicht iets te verhogen.
Op welk gemiddelde moet hij de vulmachine instellen om het aantal pakken dat meer dan 9 g te licht is naar minder dan 0,1% terug te brengen?

d Het verhogen van het vulgewicht is een dure oplossing, dus de fabrikant laat de precisie van de vulmachine verbeteren.
Op welke standaardafwijking moet hij de vulmachine instellen om het aantal pakken dat meer dan 9 g te licht is naar minder dan 0,1% terug te brengen?

Opgave 15

Een zakje Cup-a-soup moet 17 g ℮ bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

Figuur 16.11

a Hoeveel gram mag een een heel klein percentage van de zakjes te licht zijn?

b Hoeveel procent van de zakjes weegt minder dan 17 g?

c Laat zien dat de fabrikant toch wel aan de Europese norm voldoet.

Testen

Opgave 16

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

a Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

b Hoeveel procent van de melkpakken bevat meer dan 1,03 liter melk?

Je kunt niet bepalen hoeveel procent van de melkpakken een inhoud van precies 1 liter heeft. Je kunt wel bepalen hoeveel procent van de melkpakken afgerond op twee decimalen 1 liter bevat. Dan zie je dat het gaat om het gebied vanaf de grens 0,995 tot de grens1,005. En daar hoort wel degelijk een bepaald percentage bij.

c Bereken dat percentage.

d 5% van de melkpakken heeft een vulvolume van minder dan g. Bereken g.

Omdat iets minder dan 10% van de melkpakken te weinig melk bevat, besluit de fabrikant het gemiddelde vulgewicht te verhogen tot dit percentage minder dan 1% is.

e Hoeveel moet daarvoor het gemiddelde vulgewicht worden?

Opgave 17

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van $\overline{B}$ = 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van s_B = 12,5 mm Hg.

a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?

c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

16.4 Betrouwbaarheidsintervallen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de wortel-n-wet voor het verband tussen de standaardafwijking van steekproefgemiddelden en de populatiestandaardafwijking;
- werken met betrouwbaarheidsintervallen rondom de schatting van het populatiegemiddelde.

Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een percentage onder een normale verdeling berekenen;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale verdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

De Robinia is een boom die in het najaar peulvruchten heeft van zo'n 5 cm tot 15 cm lengte. De lengtes R van deze peulen is normaal verdeeld en heeft een gemiddelde van $\mu_R = 11{,}08$ cm met een standaardafwijking van $\sigma_R = 0{,}85$ cm.

Je ziet hier gemiddelde lengtes en de standaardafwijkingen van 10 steekproeven van 30 uit de normaal verdeelde populatie peulen.

10 steekproeven van 30	
gemiddelde	s.d.
10,95	0,65
11,05	0,78
11,05	1,16
10,84	0,66
11,26	0,82
11,07	0,81
11,05	0,97
11,24	0,91
11,18	0,78
11,10	0,82

Tabel 16.1

a Kijk naar de resultaten $\overline{R} = 10{,}95$ en $s_R = 0{,}65$ van de eerste steekproef van 30. Kun je uit alleen deze gegevens het gemiddelde van de populatie schatten?

b Bereken het gemiddelde van de 10 steekproefgemiddelden.
Zit dit dicht bij het populatiegemiddelde?

De steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling.
Wiskundigen hebben aangetoond dat een steekproevenverdeling altijd een normale verdeling is met standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ als n de grootte van elke steekproef is.

c Hoe groot is de standaardafwijking S van de steekproevenverdeling?

Is dit ongeveer gelijk aan $\frac{\sigma_R}{\sqrt{30}}$?

d Leg uit waarom 95% van de steekproefgemiddelden tussen $11{,}08 - 2 \cdot 0{,}13$ en $11{,}08 + 2 \cdot 0{,}13$ zou moeten liggen.

e Je wilt op grond van de steekproeven een schatting maken van het populatiegemiddelde. Wat zou je doorgeven?

Uitleg

De Robinia is een boom die in het najaar peulvruchten heeft van zo'n 5 cm tot 15 cm lengte. De lengtes R van de peulen in een bepaald gebied is normaal verdeeld.

Het populatiegemiddelde wordt bepaald door in een steekproef van 30 peulen het gemiddelde te berekenen. Het probleem daarbij is dat het gemiddelde in een steekproef toevallig kan afwijken van het werkelijke gemiddelde, zelfs als de steekproef behoorlijk groot is. Je zou dus meerdere of hele grote steekproeven moeten doen. Vaak is dat in de praktijk te veel werk (en dus te duur).

10 steekproeven van 30	
gemiddelde	s.d.
10,95	0,65
11,05	0,78
11,05	1,16
10,84	0,66
11,26	0,82
11,07	0,81
11,05	0,97
11,24	0,91
11,18	0,78
11,10	0,82

Tabel 16.2

Je ziet hier gemiddelde lengtes en de standaardafwijkingen van 10 steekproeven van 30 uit de normaal verdeelde populatie peulen.

De steekproefgemiddelden vormen een steekproevenverdeling S.
Wiskundigen hebben aangetoond dat een steekproevenverdeling altijd een normale verdeling is met standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ als n de grootte van elke steekproef is en σ de populatiestandaarddeviatie is. Dit heet de wortel-n-wet.

Ga zelf na dat in de steekproevenverdeling van de gemiddelden de standaardafwijking $s \approx \frac{0{,}84}{\sqrt{30}}$ is.

Stel nu dat je alleen de eerste steekproef van 30 peulen zou hebben gedaan.
Op grond van het gemiddelde $\overline{R} = 10{,}95$ cm kun je natuurlijk niet zeker weten dat het populatiegemiddelde ook 10,95 is. Maar omdat je weet dat steekproefgemiddelden normaal zijn verdeeld, kun je op grond van de vuistregels van de normale verdeling zeggen:

- 95% van de gemiddelden ligt tussen $10{,}95 - 2 \cdot \frac{0{,}65}{\sqrt{30}} \approx 10{,}71$ en $10{,}95 + 2 \cdot \frac{0{,}65}{\sqrt{30}} \approx 11{,}19$.

En op grond hiervan schat je dat $10{,}71 < \mu_R < 11{,}19$ met een betrouwbaarheid van 95%.
Je noemt $10{,}71 < \mu_R < 11{,}19$ het 95% betrouwbaarheidsinterval van μ_R.

Opgave 1

Bekijk het schatten van het populatiegemiddelde van de lengtes van peulen van de Robinia in de **Uitleg op pagina 646**. Je ziet de resultaten van 10 steekproeven van 30 peulen.
De gemiddelden vormen een steekproevenverdeling.

a Bereken zelf het gemiddelde en de standaardafwijking van deze steekproevenverdeling.

b Laat zien dat voor de standaarddeviatie van de steekproevenverdeling van de gemiddelden inderdaad de wortel-n-wet geldt.

c Je weet nu dat de steekproevenverdeling van de gemiddelden een normale verdeling is met een bij a berekend gemiddelde en standaarddeviatie. Bereken met de **standaardnormale tabel** de waarden van g waarvoor geldt: $P(11{,}08 - g < S < 11{,}08 + g) < 0{,}95$.

d Schrijf het 95% betrouwbaarheidsinterval op dat hierbij hoort.

In de praktijk gebruik je maar één steekproef. Ga uit van de eerste steekproef. Je neemt dan aan dat hier een steekproevenverdeling bij hoort met $\overline{S} = 10{,}95$ en $s = \frac{0{,}65}{\sqrt{30}}$.

e Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval dat dan bij een schatting van het populatiegemiddelde hoort op dezelfde manier als bij d.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 646** wordt een vuistregel gebruikt om het betrouwbaarheidsinterval op te schrijven. In de voorgaande opgave wordt dit met behulp van z-waarden gedaan.

a Wat is het voordeel van het werken met z-waarden?
Laat zien dat 95% van de z-waarden tussen - 1,96 en 1,96 ligt.

b Tussen welke twee waarden ligt 99% van de z-waarden?
Welk 99% betrouwbaarheidsinterval voor de steekproef met $\overline{R} = 10{,}95$ krijg je?

Een 99% betrouwbaarheidsinterval lijkt beter dan een 95% betrouwbaarheidsinterval.

c Wat is het nadeel ervan?

Opgave 3

In de **Uitleg op pagina 646** wordt de gemiddelde lengte van een populatie peulen van de Robinia geschat.

a Waarom liggen in dit geval zowel het populatiegemiddelde als de populatiestandaarddeviatie niet vast?

b Welke aanname moet je dan doen om een betrouwbaarheidsinterval te kunnen vaststellen?

Bij het meten van de pH-waarde van een vloeistof in een bepaald vat heb je te maken met een vooraf bekende meetnauwkeurigheid.

c Waarom zal nu de standaardafwijking van bijvoorbeeld 10 metingen vooraf bekend zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek is vaak het **populatiegemiddelde**, het gemiddelde van een statistische variabele van de hele populatie belangrijk. Dat gemiddelde wordt meestal geschat door een steekproef te nemen en daarvan het **steekproefgemiddelde** te berekenen. Maar door het nemen van een steekproef ontstaat een toevalsfout. Deze toevalsfout ontstaat in het gemiddelde, maar ook in de standaardafwijking. Met de toevalsfout in de standaardafwijking wordt geen rekening gehouden.

Als er veel steekproeven worden genomen zal de **steekproevenverdeling** van de gemiddelden $\overline{X}$ altijd normaal verdeeld zijn. (Let op: De variabele zelf kan en hoeft dus niet normaal verdeeld te zijn!) De standaardafwijking S van deze steekproevenverdeling is:

$$S_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

waarin n de grootte van de steekproeven en σ de populatiestandaarddeviatie is.

Omdat de steekproefgemiddelden normaal verdeeld zijn, kunnen met behulp van de z-tabel grenzen worden bepaald waarbinnen een bepaald percentage van de waarden ligt. Daarmee kun je het gebied waarin het populatiegemiddelde ligt berekenen.

Dit gebied heet het **betrouwbaarheidsinterval**. De grootte ervan hangt af van de gewenste **betrouwbaarheid**.

- De grenswaarden van het 95%-betrouwbaarheidsinterval bereken je zo
  ondergrens $= \overline{X} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en bovengrens $= \overline{X} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- De grenswaarden van het 99%-betrouwbaarheidsinterval bereken je zo
  ondergrens $= \overline{X} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en bovengrens $= \overline{X} + 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

De conclusie is dan:

Met een betrouwbaarheid van 95 of 99% ligt het gemiddelde van de populatie tussen de ‘ondergrens’ en de ‘bovengrens’.

Voorbeeld 1

In een ziekenhuis wordt onderzoek gedaan naar het gemiddeld geboortegewicht van alle baby's die het afgelopen jaar zijn geboren. Er wordt een steekproef genomen van $n = 30$ baby's.

Het gemiddelde gewicht van de baby's in de steekproef is het steekproefgemiddelde $\overline{G} = 3{,}516$ kg.
De standaardafwijking van het gewicht in de steekproef is $s_G = 0{,}509$ kg.

Tussen welke twee grenzen ligt met 95% betrouwbaarheid het gemiddelde geboortegewicht van alle baby's in dit ziekenhuis?

Antwoord

De gemiddelden (hier van geboortegewichten) van veel steekproeven zijn normaal verdeeld. Als schatting voor het gemiddelde van deze steekproevenverdeling wordt nu genomen:

$\mu = \overline{G} = 3{,}516$ kg.

De standaardafwijking van deze gemiddelden is

$$S_{\overline{G}} = \frac{0{,}509}{\sqrt{30}} \approx 0{,}093.$$

Met 95% betrouwbaarheid ligt het gemiddeld geboortegewicht van alle baby's die het afgelopen jaar zijn geboren tussen $3{,}516 - 1{,}96 \cdot 0{,}093$ en $3{,}516 + 1{,}96 \cdot 0{,}093$, dus tussen 3,334 en 3,698 kg. Dit is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 648**.

a Bereken de standaardafwijking van de steekproevenverdeling als er steeds steekproeven van 50 baby's zouden zijn onderzocht. Neem aan dat de standaardafwijking in de steekproef niet veranderd zou zijn.

b Hoe groot is in de uitleg het verschil tussen de bovengrens en de ondergrens van het gebied waarin het gemiddelde gewicht van alle baby's ligt?

Opgave 5

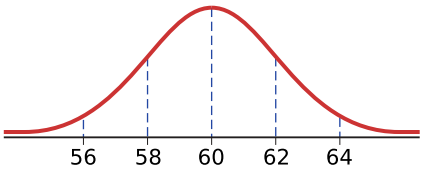
Soms wil een onderzoeker een kleiner betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde in een populatie.

a Wat kan een onderzoeker aan de steekproef veranderen om daarvoor te zorgen? Licht je antwoord toe.

b Wordt het gebied groter als een betrouwbaarheid 99% wordt genomen in plaats van 95%?

Voorbeeld 2

Een fabriek voor voedingsmiddelen neemt elke dag 75 monsters van een product. Daarvan meet men het aantal bacteriën per cl. Daarna berekent men het daggemiddelde en de dagstandaardafwijking van deze 75 monsters. De dagstandaardafwijking is steeds 20 bacteriën per cL.



Figuur 16.1

Dit wordt 100 dagen herhaald. Er zijn dan 100 daggemiddelden. Van de 100 daggemiddelden is deze steekproevenverdeling gemaakt.

Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddeld aantal bacteriën per cL in het product met behulp van de figuur.

Wat is de betekenis van dit interval?

Als zowel het gemiddelde als de standaardafwijking van het aantal bacteriën per cl in de dagproductie kleiner zijn dan respectievelijk 60 en 20, heeft dat gevolgen voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Beredeneer wat deze gevolgen zijn.

Antwoord

Neem aan dat de populatiestandaardafwijking is $\sigma = 20$ bacteriën per cL.

De figuur is de steekproevenverdeling.

De standaardafwijking daarvan is $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is: $60 \pm 1{,}96 \cdot 2 = 60 \pm 3{,}9$.
Het populatiegemiddelde ligt dus tussen 56,1 en 63,9 bacteriën per cL.

De betekenis is: Van de 100 daggemiddelden, zijn er minstens 95 met een gemiddelde tussen 56 en 64 bacteriën per cl.

Als het gemiddelde afneemt, schuift het interval naar links.
Als de standaardafwijking kleiner wordt, wordt het interval smaller.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 649**.

a Komt de standaardafwijking $S_{\overline{B}} = 2$ overeen met de figuur?

b Wat verandert er aan het betrouwbaarheidsinterval als het gemiddelde toeneemt?

c Wat gebeurt er met het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?

d Wat gebeurt er met de kleinste waarde van het betrouwbaarheidsinterval als de standaardafwijking groter wordt?

Opgave 7

Een ziekenhuis heeft een nieuw computersysteem aangeschaft voor het plannen van onderzoeken voor patiënten. Vóór de aanschaf van het computersysteem was de doorlooptijd (de tijd tussen het eerste en het laatste onderzoek) gemiddeld 3,3 dagen. De standaardafwijking was erg klein.

Uit een representatieve steekproef van 100 patiënten blijkt dat het dat na de aanschaf van het computersysteem de gemiddelde doorlooptijd is gedaald tot 2,9 dagen. De standaardafwijking van de doorlooptijd in de steekproef blijkt 1,8 dagen te zijn.

a Wat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde doorlooptijd van de patiënten na invoering?

b Kan het ziekenhuis met 95% zekerheid zeggen dat de gemiddelde doorlooptijd is gedaald? Licht je antwoord toe.

c Enkele maanden later herhaalt het ziekenhuis het onderzoek. De standaardafwijking van de steekproef blijkt nu 2,2 dagen te zijn. Kan het ziekenhuis nu met 95% betrouwbaarheid zeggen dat het computersysteem het nu niet goed meer doet? Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 3

Een machine vult medicijnverpakkingen met poeder. Het gewenste vulgewicht is 20 mg. De fabrikant bewaakt het vulgewicht. Daarom onderzoekt de kwaliteitsafdeling deze verpakkingen. Het is bekend dat door de nauwkeurigheid van de vulmachine de standaardafwijking van het vulgewicht 0,35 mg is.

De kwaliteitsafdeling wil het vulgewicht met een nauwkeurigheid van 1% van het gewenste vulgewicht bepalen. Daarmee bedoelt hij dat de afwijking van het gewenste vulgewicht maximaal 1% ervan mag zijn. Hoe groot moet de steekproefomvang zijn om dit met een 95%-betrouwbaarheid te kunnen doen?

Antwoord

Voor de steekproefomvang n geldt de formule $S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gegeven is $\sigma = 0{,}35$ mg.

De afwijking van het gewicht mag maximaal 1% van het gewenste gewicht zijn. Dat is 0,2 mg.
Bij een betrouwbaarheid van 95% moet dus $1{,}96 \cdot S = 0{,}2$, zodat $S \approx 0{,}10$ mg.

Dit betekent: $0{,}10 = \frac{0{,}35}{\sqrt{n}}$

Oplossen geeft: $n = 12{,}25$

De steekproefomvang moet dus minstens 13 zijn.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 650**.

a Los de vergelijking $0{,}1 = \frac{0{,}35}{\sqrt{n}}$ op.

b Als de kwaliteitsafdeling met een nauwkeurigheid van 0,5% het gewenste vulgewicht wil bepalen, hoe groot moet dan de steekproefomvang zijn?

c Als de nauwkeurigheid 1% zou zijn en de populatiestandaardafwijking zou verdubbelen, hoe groot zou dan de steekproefomvang moeten zijn?

Oefenen

Opgave 9

De vuilnisdienst van een stad wil weten hoeveel huisvuil een gezin uit deze stad tweewekelijks buitenzet. Er wordt een aselecte steekproef genomen van 250 gezinnen. Het gemiddelde gewicht huisvuil dat door deze gezinnen verbruikt werd was 12,5 kg, met een standaardafwijking van 5,3 kg.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de hoeveelheid huisvuil (in kg) dat per gezin in de hele stad wordt opgehaald.

Opgave 10

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselecte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van 25,1 cL. De standaardafwijking is $s_V = 0{,}4$.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.

b Josephine beweert dat ongeveer 5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.

Rachid beweert dat ongeveer 2,5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.

Wie heeft gelijk?

Opgave 11

Een bedrijf maakt en verkoopt light producten. Ze beweert dat haar producten slechts 140 calorieën per pakje bevatten . De Consumentenbond controleert dit met een aselecte steekproef van 25 pakjes. Ze vinden gemiddeld 147 calorieën. De standaardafwijking van deze steekproef is 15 calorieën.

a De bewering van het bedrijf lijkt niet te kloppen. Onderzoek of de Consumentenbond mag zeggen: met 95% betrouwbaarheid zit er meer dan 140 calorieën in het lightproduct.

b Wat moet het bedrijf aanpassen aan het aantal calorieën zodat de uitspraak van de Consumentenbond niet klopt?

Opgave 12

Bij een statistisch onderzoek wordt het populatiegemiddelde $\mu \approx 44$ geschat. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is $\sigma \approx 1{,}2$.

a Hoe groot zijn de grenzen van het 95% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

b Hoe groot zijn de grenzen van het 99% betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

Opgave 13

Een laborant analyseert de concentratie van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend, deze is 0,0062. De laborant doet drie metingen met als resultaat in g/L: 0,8303, 0,8259 en 0,8330.

a Bereken gemiddelde en standaardafwijking van deze drie metingen. Rond je antwoord af op vier decimalen.

b Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de waarde van de gemiddelde concentratie van de actieve stof.

c Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 95% betrouwbaarheidsinterval kleiner dan 0,01 te krijgen?

Toepassen

Wanneer een laborant dezelfde meting een aantal keren met hetzelfde apparaat herhaalt, dan krijgt hij een serie waarden x_i die meestal iets van elkaar verschillen. De standaarddeviatie is een maat voor de precisie van zijn metingen. Vaak wordt echter de standaarddeviatie gedeeld door het gemiddelde en in procenten uitgedrukt. Je krijgt dan de zogenaamde **variatiecoëfficiënt**:

variatiecoëfficiënt $= \frac{s_x}{\overline{x}}$

Hier zie je hoe door 15 metingen de pH-waarden in drie vloeistoftanks is gemeten.

	gemeten pH-waarden														
tank 1	8,5	7,3	7,7	8,2	8,0	7,3	8,3	7,7	7,3	8,2	7,3	6,4	7,0	7,3	7,7
tank 2	7,3	8,0	7,9	8,3	8,4	8,0	9,1	9,3	9,0	9,6	9,0	8,9	8,1	8,3	8,1
tank 3	7,6	8,2	7,9	6,8	7,4	7,9	8,3	6,4	7,0	7,3	7,5	8,3	7,8	7,9	7,0

Tabel 16.3

Door de gebruikte meetmethode wijken de resultaten maximaal 7,5% af van de werkelijke waarde. De variatiecoëfficiënt is dus 0,075.

Je kunt hiermee voor elke tank een 95% betrouwbaarheidsinterval opstellen voor de geschatte pH-waarde.

Opgave 14

Bekijk de gegevens van de eerste vloeistoftank in **Toepassen op pagina 652**.

a Bereken de gemiddelde pH-waarde in deze tank.

Omdat de variatiecoëfficiënt bekend is, kun je met behulp van dit gemiddelde de standaardafwijking berekenen.

b Laat zien hoe.

c Je gebruikt de gegevens om de werkelijke pH-waarde te schatten.
Geef het bijbehorende 95% betrouwbaarheidsinterval.

Opgave 15

Bekijk de metingen van de pH-waarden in de andere twee tanks.

a Stel ook voor die twee tanks het 95% betrouwbaarheidsinterval voor de schatting van de pH-waarde op.

b Wijkt de pH-waarde van tank 2 duidelijk af van de andere twee pH-waarden?

Testen

Opgave 16

In een steekproef van 500 lampen is de gemiddelde levensduur van de lampen van de straatverlichting in een gemeente $\overline{L} = 1500$ uur met een standaardafwijking van $s_L = 640$ uur.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de schatting van het populatiegemiddelde.

b De gemeente wil alle lampen vervangen als naar schatting 2,5% defect is. Na hoeveel uur gaat de gemeente met de vervanging van lampen beginnen?

Opgave 17

Bij een steekproef onder 30 pasgeboren baby's is de lengte (in cm) gemeten. De gemiddelde lengte is $\overline{L} = 52{,}2$ cm en $s_L = 2{,}38$ cm.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval.

b Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 48 cm. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor s_L. Nu is $s_L = 1{,}84$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.

c Leg uit waarom een meetfout van één waarde in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft dan een meetfout in een grote steekproef voor het betrouwbaarheidsinterval.

16.5 De Shewhartkaart

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met regelkaarten zoals de Shewhartkaart.

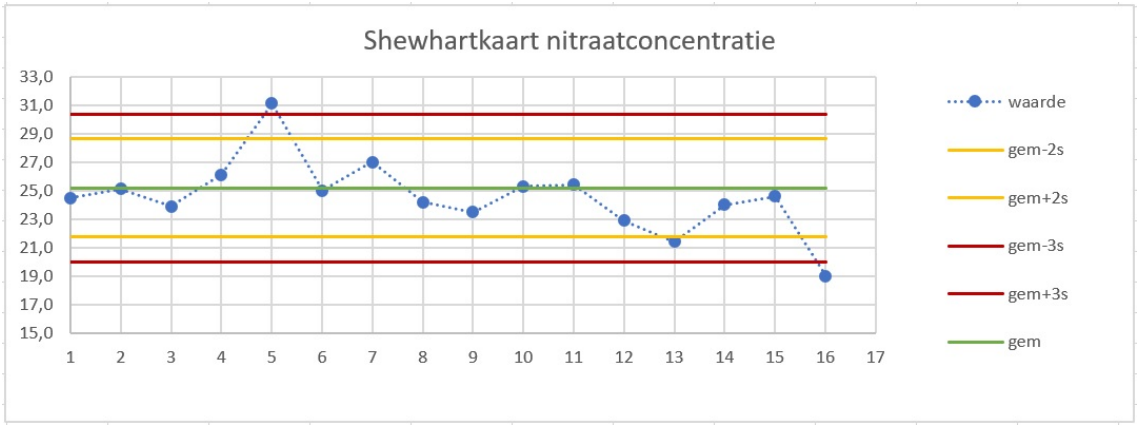
Voorkennis

- de standaardafwijking van een frequentieverdeling uitrekenen en interpreteren;
- een percentage onder een normale verdeling berekenen, werken met de vuistregels van een normale verdeling.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een zogenaamde Shewhartkaart met de resultaten van 16 metingen van de nitraatconcentratie in grondwater van kleigrond in een bepaald gebied in mg/L. De gemiddelde concentratie is 25,2 mg/L met een standaardafwijking van 1,73.



Figuur 16.1

a Wat stelt de horizontale groene lijn voor? En wat stellen de twee oranje lijnen voor?

b Waarom heten de twee oranje lijnen waarschuwingsgrenzen?

c Waarom worden de twee donkerrode lijnen actiegrenzen genoemd?

d Waaraan herken je in dit diagram de vuistregels van de normale verdeling?

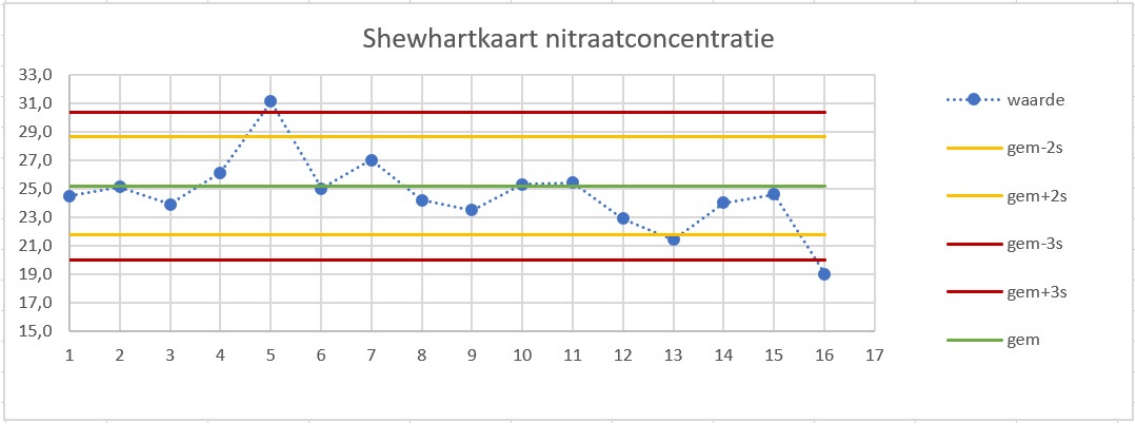
e Welke metingen zorgen hier voor het ondernemen van actie?

f Welke meting zorgt hier voor het in de gaten houden van vervolgmetingen?

Uitleg

Om de kwaliteit van bepaalde processen te bewaken worden vaak controlekaarten gebruikt. Vaak worden ze Shewhartkaarten genoemd naar de Amerikaanse statisticus **Walter Andrew Shewhart (1891-1967)**.

Je ziet hier een Shewhartkaart met de resultaten van 16 metingen van de nitraatconcentratie in grondwater van kleigrond in een bepaald gebied in mg/L. De gemiddelde concentratie is 25,2 mg/L met een standaardafwijking van 1,73.



Figuur 16.2

De groene lijn geeft hier het gemiddelde μ van de nitraatconcentratie weer. De twee oranje lijnen liggen op een afstand van $2 \cdot \sigma$ en de twee donkerrode lijnen liggen op $3 \cdot \sigma$ van het gemiddelde. Deze Shewhartkaart is op de vuistregels van de normale verdeling gebaseerd.
Vaak tref je op de horizontale as de tijdstippen van de metingen aan.

Omdat volgens de vuistregels van de normale verdeling slechts 2,5% van de metingen boven de bovenste oranje lijn ligt, zijn waarden die daar uitkomen bijzonder en wordt je gewaarschuwd dat er iets aan de hand kan zijn. De oranje lijnen heten daarom de waarschuwingsgrenzen van de controlekaart.

Omdat volgens de vuistregels van de normale verdeling vrijwel geen metingen boven de bovenste donkerrode lijn liggen, zijn waarden die daar uitkomen heel bijzonder en is het vrijwel zeker dat er iets aan de hand is. De donkerrode lijnen heten daarom de actiegrenzen van de controlekaart.

Bij dergelijke controlekaarten heeft **James Westgard (1941-heden)** regels opgesteld om aan te geven wanneer actie gewenst is. Dat zijn de Westgardregels, zie **Toepassen op pagina 661**.

Een Shewhartkaart kun je zelf maken, zowel met de hand als met behulp van Excel, zie het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk de controlekaart in de **Uitleg op pagina 654**.

a Welke waarde voor de nitraatconcentratie hoort er bij de bovenste waarschuwingsgrens?
En bij de onderste waarschuwingsgrens?

b Welke waarde voor de nitraatconcentratie hoort er bij de bovenste actiegrens?
En bij de onderste actiegrens?

c Waarom moet je bij meting 5 in actie komen?

d Bij welke meting wordt de 2σ-grens overschreden, maar de 3σ-grens niet?

Opgave 2

Het stikstofgehalte van een bepaalde kunstmest is gemiddeld 14,0 m% met een standaarddeviatie van 0,5. Dit stikstofgehalte wordt regelmatig gecontroleerd. Hier zie je een tiental metingen van het stikstofgehalte in controlemonsters.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)									
14,0	13,9	13,6	14,6	14,6	14,5	13,6	14,1	13,7	13,9

Tabel 16.1

a Maak hierbij zelf een Shewhartkaart.

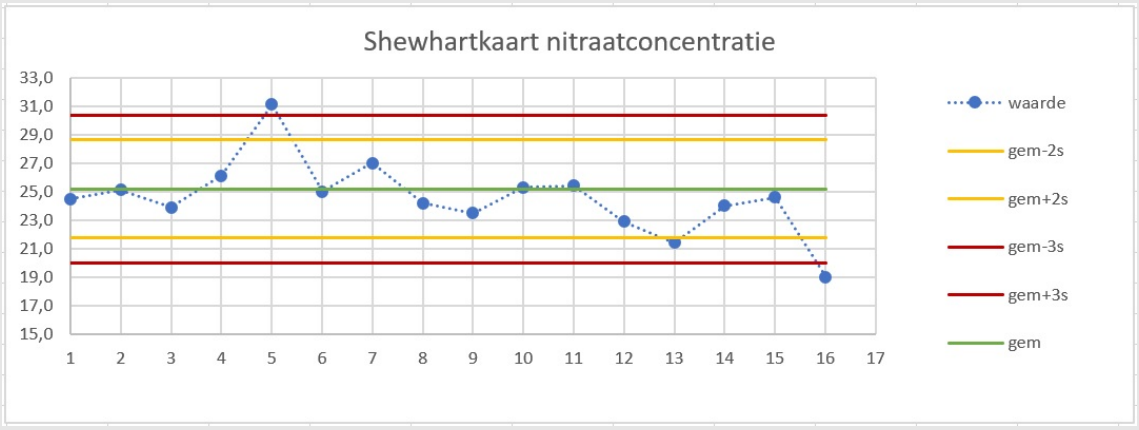
b Waaraan zie je dat deze meetwaarden allemaal aan het opgegeven gemiddelde en standaarddeviatie voldoen?

c Bij welke meetwaarden moet je nagaan of het productieproces wel klopt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om de kwaliteit van bepaalde processen te bewaken worden vaak **controlekaarten** of **regelkaarten** gebruikt. Vaak worden ze **Shewhartkaarten** genoemd naar de Amerikaanse statisticus **Walter Andrew Shewhart (1891-1967)**. Hier zie je er een voorbeeld van.



Figuur 16.3

De horizontale lijnen hebben vaak met de vuistregels van de normale verdeling te maken:

- De middelste (hier groene) lijn bepaalt het gemiddelde μ.
- De onderste en de bovenste **waarschuwingsgrenzen** zijn de twee $\mu \pm 2\sigma$-lijnen.
  Daartussen zit 95% van de metingen.
- De onderste en de bovenste **actiegrenzen** zijn de twee $\mu \pm 3\sigma$-lijnen.
  Daartussen zitten vrijwel alle metingen.
- Soms zijn er ook onderste en de bovenste **tolerantiegrenzen**, dat zijn twee grenzen die absoluut niet mogen worden overschreden.
  Gebeurt dit wel dan is er een onbruikbaar product ontstaan.

Bij dergelijke controlekaarten heeft **James Westgard (1941-heden)** regels opgesteld om aan te geven wanneer actie gewenst is. Dat zijn de Westgardregels, zie **Toepassen op pagina 661**.

Voorbeeld 1

Je moet de productie van een nieuw soort kunstmest controleren op het stikstofgehalte (in m%). Omdat er geen gegevens vooraf beschikbaar zijn, doe je eerst een steekproef van 20 monsters. Daarvan is het gemiddelde stikstofgehalte $\overline{N} = 14{,}5$ m% met een standaarddeviatie van $s_N = 0{,}4$. Deze waarden gebruik je om je controlekaart te maken.

Daarna ga je het proces bewaken, om het uur meet je het stikstofgehalte van een monster. Hiernaast zie je de eerste 10 metingen.

Maak een bijpassende controlekaart.

meting	waarde
1	14,6
2	15,1
3	15,9
4	14,6
5	14,3
6	14,5
7	13,6
8	13,5
9	14,0
10	14,2

Tabel 16.2

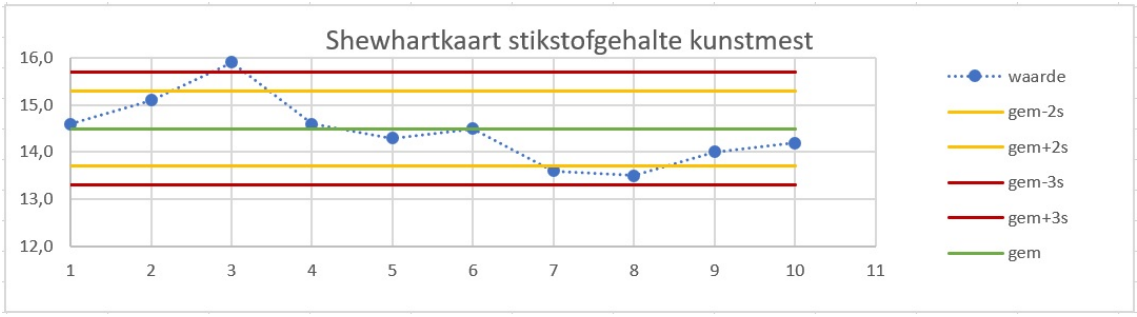
Als een meting meer dan 3 standaardafwijkingen van het gemiddelde zit spreek je van het overtreden van de $1_{3\sigma}$-regel. Bij welke meting is dat het geval?

Als twee metingen na elkaar tussen de 2 en 3 standaardafwijkingen van het gemiddelde zitten spreek je van het overtreden van de $2_{2\sigma}$-regel. Bij welke metingen is dat het geval?

Antwoord

Je neemt nu aan dat $\mu_N = \overline{N} = 14{,}5$ m% en $\sigma_N = s_N = 0{,}4$.

Dat levert deze Shewhartkaart op:



Figuur 16.4

De $1_{3\sigma}$-regel wordt overtreden bij de derde meting.

De $2_{2\sigma}$-regel wordt overtreden bij de zevende en de achtste meting.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 656**.

a Maak zelf deze controlekaart.

b Welke acties ga je ondernemen bij het overtreden van de $1_{3\sigma}$- of de $2_{2\sigma}$-regel?

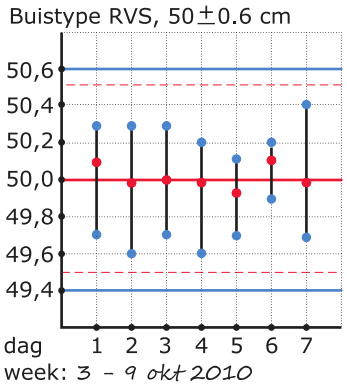
c Als 4 metingen direct na elkaar allemaal meer dan 1σ onder of boven het gemiddelde liggen, spreek je van het overtreden van de $4_{1\sigma}$-regel. Is daar sprake van?

Voorbeeld 2

Een buizenfabriek produceert buizen van 50 cm met een toegestane tolerantie van 6 mm, zowel naar boven als naar beneden. Elke dag wordt steekproefsgewijs de lengte van 10 van die buizen nagemeten. De meetresultaten van de afgelopen week uitgedrukt in cm zijn:

datum	lengtes van 10 buizen									
3-okt-10	50,0	49,9	50,1	50,0	50,2	49,7	50,3	50,3	50,2	50,0
4-okt-10	50,0	49,6	50,0	50,3	49,8	50,3	49,9	49,7	49,9	50,3
5-okt-10	49,8	50,2	50,0	50,1	50,0	50,0	49,7	50,3	50,0	49,9
6-okt-10	49,9	49,9	49,8	50,1	50,2	49,6	49,9	50,1	50,2	50,0
7-okt-10	50,1	50,1	49,9	49,8	49,9	50,0	49,7	50,1	49,9	49,8
8-okt-10	50,2	50,2	49,9	50,4	49,9	50,0	50,1	50,0	50,0	50,2
9-okt-10	50,1	50,4	49,6	50,1	49,7	49,8	50,1	49,8	50,0	50,0

Tabel 16.3



Figuur 16.5

Een samenvatting van de meetresultaten zie je in deze regelkaart. De rode stippen zijn de berekende gemiddelden en de verticale lijntjes geven de minima en de maxima aan. Op de verticale as staat de buislengte. De blauwe lijnen zijn tolerantiegrenzen, de rode stippellijnen de actiegrenzen.

Met welke gemiddelde buislengte en welke standaardafwijking wordt hier gerekend?
Wat is de betekenis van de tolerantiegrenzen?

Antwoord

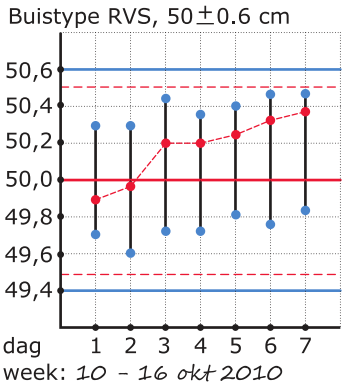
De gemiddelde buislengte wordt met de rode lijn weergegeven, dus $\mu = 50{,}0$.

De actiegrenzen liggen op een afstand van 3σ van het gemiddelde.
De bovenste actiegrens is ongeveer 50,5, dus $3\sigma = 0{,}5$ en $\sigma \approx 0{,}17$.

De tolerantiegrenzen zijn waarden die absoluut niet mogen worden overschreden. Bijvoorbeeld is een buis die dikker is dan 50,6 cm niet bruikbaar. Hetzelfde geldt voor een buis die dunner is dan 49,4 cm.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 657**.
Een week later ziet de regelkaart er uit zoals hiernaast.



Figuur 16.6

a Waarom is er nu reden tot zorg, terwijl de minima en maxima toch binnen de regelgrenzen liggen? Is er nog steeds sprake van een statistisch beheerst proces?

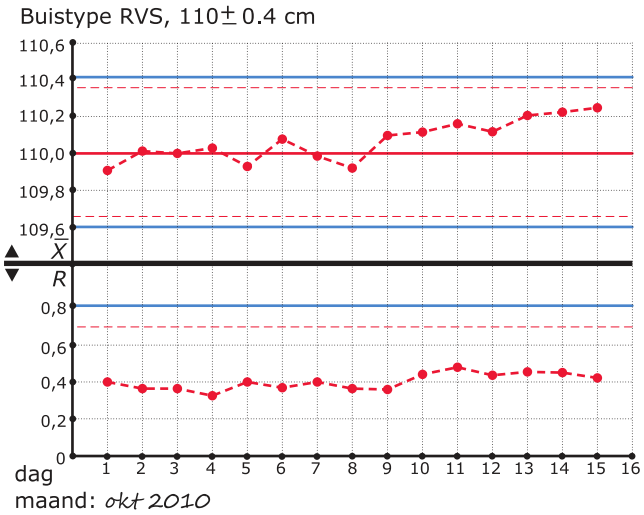
b Frederik zegt dat het proces statistisch beheerst verloopt als er maar één meting van de steekproef buiten de regelgrenzen valt. Klopt dat?

c Als 4 metingen direct na elkaar allemaal meer dan 1σ onder of boven het gemiddelde liggen, spreek je van het overtreden van de $4_{1\sigma}$-regel. Is daar sprake van?

Opgave 5

In de praktijk worden ook regelkaarten zoals hieronder gebruikt:

- met een diagram waarop alleen het gemiddelde $\overline{X}$ staat;
- daaronder een diagram met alleen de spreidingsbreedte R.



Figuur 16.7

a Waarom heeft de spreidingsbreedte maar één actiegrens?

b Op welke hoogte ligt die actiegrens? Waarom deze hoogte? Leg uit dat die hoogte overeen komt met de actiegrenzen voor het gemiddelde.

c Beredeneer dat het proces in het gedeelte van de regelkaart van dag 1 tot dag 11 statistisch beheerst is.

d Waarom kun je zeggen dat het proces in het tweede deel van de regelkaart statistisch onbeheerst wordt?

e Beschrijf een paar situaties waarin een regelkaart van deze soort aanleiding geeft om te denken dat het productieproces statistisch onbeheerst is.

Oefenen

Opgave 6

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselecte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van $\overline{V} = 25{,}1$ cL. De standaardafwijking is $s_V = 0{,}4$.

Vervolgens wordt er elk uur een flesje onderzocht op de inhoud. Hier zie je de metingen van één dag.

tijd	waarde
8:00	26,0
9:00	25,4
10:00	24,1
11:00	26,1
12:00	26,0
13:00	25,8
14:00	24,8
15:00	25,1
16:00	25,3
17:00	25,7

Tabel 16.4

a Maak een Shewhartkaart voor het vulproces van deze machine, gebaseerd op deze gegevens en de verrichte metingen.

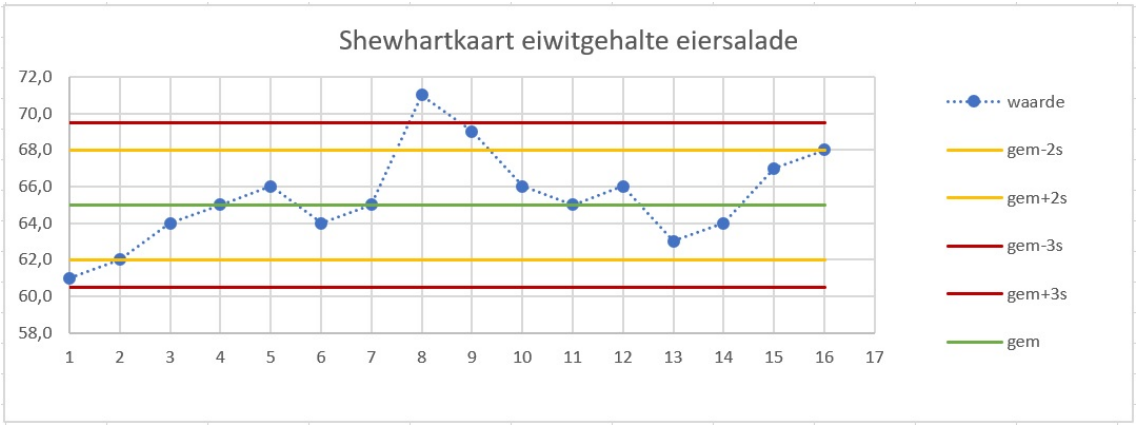
b Op welke hoogte liggen beide waarschuwingsgrenzen?

c Op welke hoogte liggen beide actiegrenzen?

d Als twee opeenvolgende metingen meer dan 2σ van het gemiddelde afwijken dan wordt er normaal gesproken actie ondernomen. Op welk moment is dat hier het geval?

Opgave 7

Je ziet hier een controlekaart voor de productie van eiersalade. Het eiwitgehalte wordt elk half uur gecontroleerd, deze metingen zijn van één dag.



Figuur 16.8

a Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking wordt er gerekend?

b Welke meting is onacceptabel en vereist onmiddellijke actie?

Opgave 8

Bij de productie van literpakken melk is een vulmachine zo ingesteld dat de inhoud van elk pak 1,03 liter is met een standaardafwijking van 0,01 liter.
Om zijn productieproces te bewaken wordt er een regelkaart ontworpen. De actiegrenzen worden zo gekozen dat vrijwel alle vulvolumes daar binnen vallen. Door de wetgever is echter vastgesteld dat het vulvolume van een pak niet meer dan 1% onder de gewenste 1 liter mag zitten.

a Waarom is er nu maar één tolerantiegrens?

b Maak een regelkaart voor deze fabrikant. Neem als tolerantiegrens van het gemiddelde het door de wetgever vastgestelde minimale vulvolume.

Dagelijks laat de fabrikant een steekproef trekken uit zijn pakken melk: hij laat dan van 25 pakken melk het vulvolume bepalen. Deze tabel geeft de gemiddelden en de hoogste en laagste gemeten waarden per dag. In de controlekaart geef je met verticale lijnstukken de spreidingsbreedte van de metingen weer. Daarop zet je ook het gemiddelde.

Vulvolume melkpakken in L			
dagnr	gemiddelde	hoogste	laagste
1	1,023	1,04	1,011
2	1,014	1,039	1,009
3	1,045	1,049	1,008
4	1,012	1,035	1,001
5	0,998	1,028	0,991
6	1,001	1,026	0,995
7	0,997	1,015	0,991

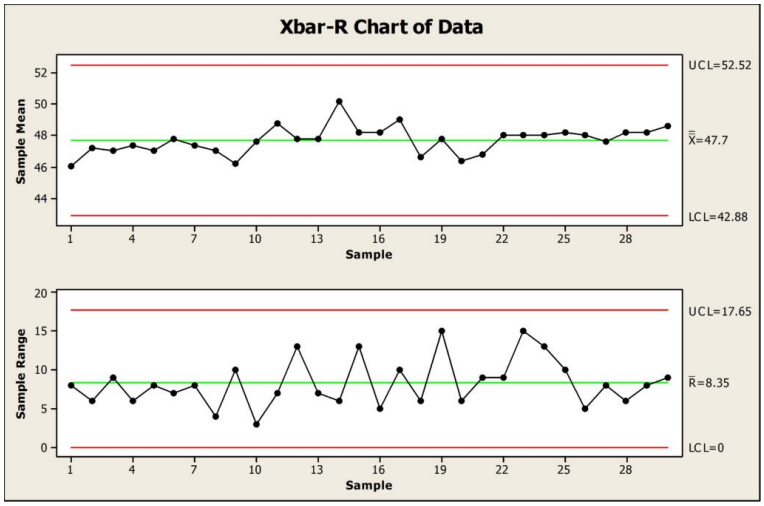
Tabel 16.5

c Maak het complete diagram.

d Welke conclusie zal de fabrikant trekken? Motiveer je antwoord.

Opgave 9

Hier zie je een Engelstalige controlekaart, een $\overline{X}$,R-regelkaart. Sample Mean betekent gemiddelde en Sample Range betekent spreidingsbreedte van de 30 steekproeven. Sample betekent steekproef. De UCL (Upper Control Limit) is de bovenste actiegrens en de LCL (Lower Control Limit) is de onderste actiegrens. Hier is $\mu = \overline{\overline{X}}$, het gemiddelde van de steekproefgemiddelden en $\overline{R}$ het gemiddelde van de spreidingsbreedtes.



Figuur 16.9

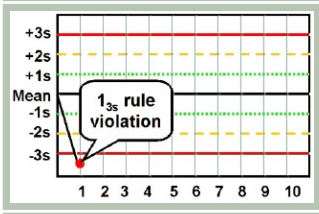
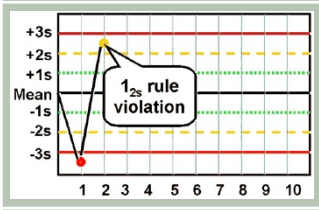
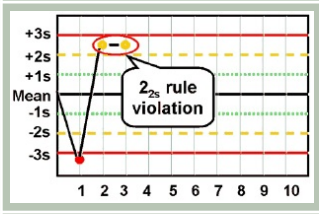
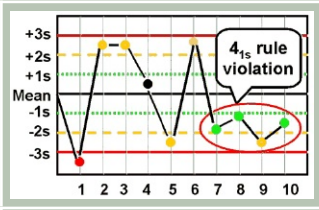
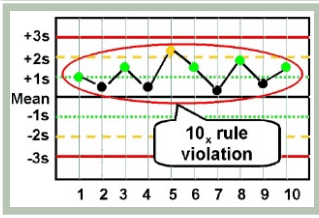
a Hoe groot zijn het gemiddelde en de bijbehorende standaardafwijking die op deze regelkaart worden gebruikt?

b Hoe groot zijn gemiddelde en standaardafwijking van de spreidingsbreedtes R?

c Hier komt de standaardafwijking bij de spreidingsbreedtes niet overeen met de standaardafwijking van de gemiddelden. Hoe kan dat?

Toepassen

Bij een statistische controlekaart, een Shewhartkaart, wordt vaak gebruik gemaakt van de **Westgard-regels**. Dat zijn afspraken die aangeven wanneer je in actie moet komen. Ze zijn opgesteld door **James Westgard (1941-heden)**. Meer erover vind je op zijn website. Daar komen ook de plaatjes in dit overzicht vandaan.

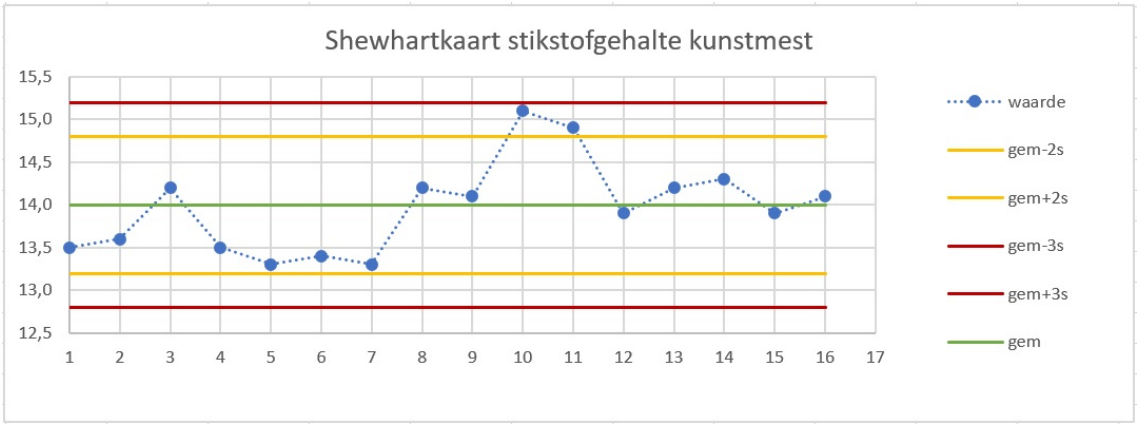
Code	Omschrijving	Plaatje
$1_{3\sigma}$-regel	Actieregel: Als één keer de grens van $\pm 3\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
$1_{2\sigma}$-regel	Waarschuwingsregel: Als één keer de grens van $\pm 2\sigma$ wordt overschreden moet je gaan opletten.	
$2_{2\sigma}$-regel	Actieregel: Als twee keer direct na elkaar de grens van $\pm 2\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
$R_{4\sigma}$-regel	Actieregel: Als direct na elkaar de éne waarde $+2\sigma$ en de andere waarde -2σ overschrijdt moet je actie gaan ondernemen.	
$4_{1\sigma}$-regel	Actieregel: Als vier keer direct na elkaar de $\pm 1\sigma$ wordt overschreden moet je actie gaan ondernemen.	
10_{x}-regel	Actieregel: Als tien keer direct na elkaar de waarden allemaal onder of boven het gemiddelde zitten moet je actie gaan ondernemen. Dit aantal wordt soms nog kleiner genomen, bijvoorbeeld wordt de 8_{x}-regel wel gehanteerd.	

Tabel 16.6

Deze Westgard-regels worden in de volgorde van boven naar beneden toegepast.

Opgave 10

Bekijk de Westgard-regels in **Toepassen op pagina 661**.
Hier zie je een Shewhartkaart met 16 metingen van het stikstofgehalte in kunstmest (in m%).



Figuur 16.10

a Bereken het gemiddelde stikstofgehalte en de bijbehorende standaardafwijking.

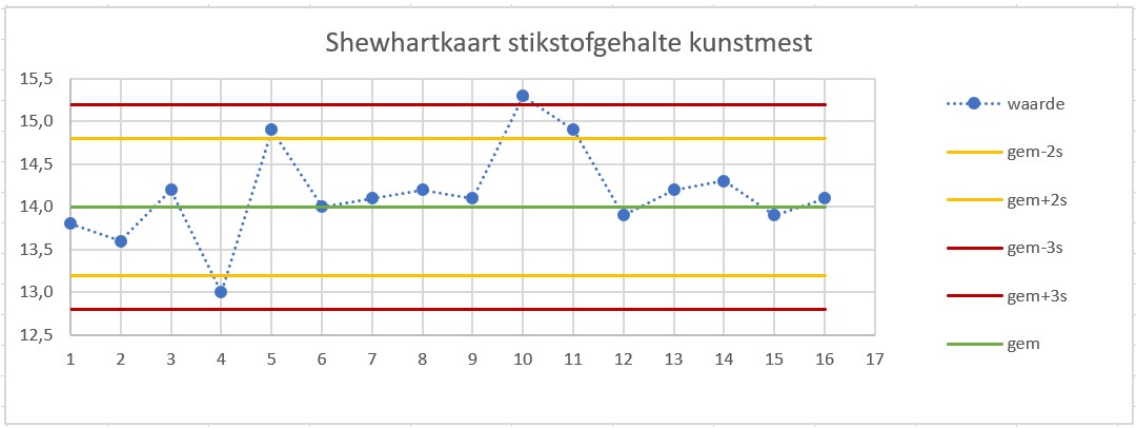
Op grond van de Westgard-regels is hier twee keer actie ondernomen.

b Bij welke meting was dat voor het eerst en op grond van welke regel?

c En bij welke meting is er opnieuw actie ondernomen? En waarom?

Opgave 11

Weer zie je een Shewhartkaart met 16 metingen van het stikstofgehalte in kunstmest (in m%).



Figuur 16.11

Op grond van de Westgard-regels is hier twee keer actie ondernomen.

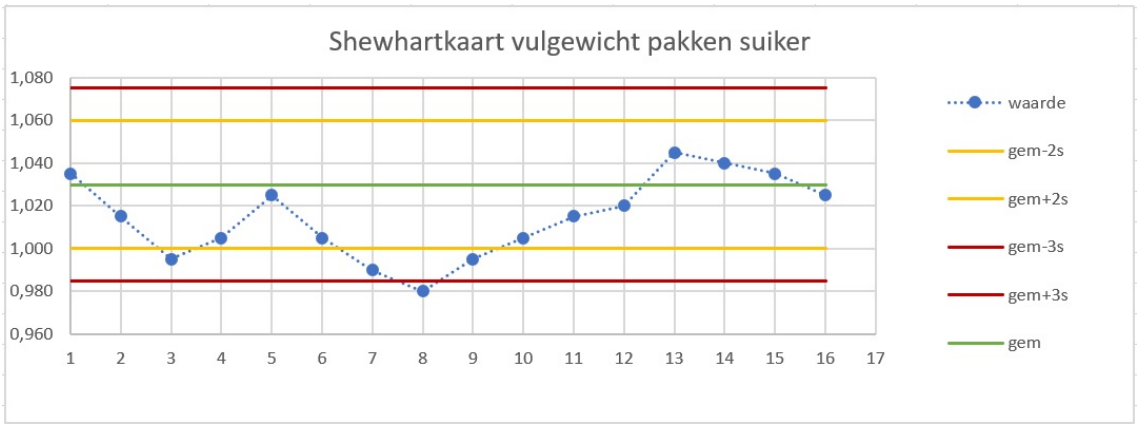
a Bij welke meting was dat voor het eerst en op grond van welke regel?

b En bij welke meting is er opnieuw actie ondernomen? En waarom?

Testen

Opgave 12

Je ziet hier een statistische controlekaart over het vulgewicht (in kg) van pakken suiker.



Figuur 16.12

a Met welk gemiddelde en welke standaardafwijking wordt er gerekend?

b Welke waarden hebben de twee waarschuwingsgrenzen?
In hoeveel procent van de metingen worden die grenzen maximaal overschreden?

c Welke meting is onacceptabel en vereist onmiddellijke actie?

Opgave 13

Een fabrikant van erwtensoep stopt daar 12,5% rookworst in met een standaardafwijking van 0,25.
Ter controle wordt het percentage rookworst regelmatig nagemeten. Hier zie je 15 van die metingen.

Percentage rookworst														
12,4	12,7	12,8	12,6	13,1	13,2	12,8	12,7	12,4	12,1	12,7	12,9	12,7	12,9	12,5

Tabel 16.7

a Teken hierbij een Shewhartkaart.

b De $2_{2\sigma}$-regel wordt overtreden als er twee metingen zijn die meer dan 2σ afwijken van het gemiddelde.
Bij welke metingen is dat het geval?

16.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met verdelingen van vooral relatieve frequenties en dan met name de normale verdeling voorbij gekomen. Het gaat daarbij vooral om berekeningen met de normale verdeling, werken met betrouwbaarheidsintervallen en werken met controlekaarten.

Je hebt nu alle theorie van **Normale verdeling** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- symmetrische en niet-symmetrische frequentieverdelingen
- standaardafwijking, standaarddeviatie — variantie — normaalkromme en zijn vuistregels
- normale verdeling — standaardnormale tabel, z-tabel — z-waarde
- steekproevenverdeling — betrouwbaarheidsinterval
- controlekaart, regelkaart, Shewhartkaart

Activiteitenlijst

- beoordelen of een frequentieverdeling symmetrisch is of niet;
- de standaarddeviatie van een frequentieverdeling berekenen en interpreteren is samenhang met de normaalkromme — de vuistregels bij een normaalkromme toepassen;
- een normale verdeling van relatieve frequenties karakteriseren door gemiddelde en standaarddeviatie — bij een normale verdeling relatieve frequenties (percentages) berekenen — bij gegeven percentages onder een normaalkromme gemiddelde of standaardafwijking berekenen;
- de standaardafwijking van een steekproevenverdeling berekenen (de wortel-n-wet) — een betrouwbaarheidsinterval voor metingen vaststellen;
- werken met Shewhartkaarten.

Testen

Opgave 1

Uit onderzoek van het gemengde boerenbedrijf bleek het houden van kippen een belangrijke rol te spelen bij het tot stand komen van het inkomen van deze boeren. Daarom werd de boeren gevraagd het aantal kippen op hun bedrijf op te geven.

a Waarom kun van deze gegevens het gemiddelde en de standaarddeviatie niet exact berekenen?

b Schat de centrummaten mediaan en gemiddelde. Onderbouw je schatting.

c Schat de standaardafwijking. Onderbouw je schatting.

d Hoeveel procent van de bedrijven heeft meer dan 160 kippen?

e Hoeveel procent van de bedrijven heeft minder dan 41 kippen?

f Hoe kun je de verdeling karakteriseren zonder er een diagram van te maken?

Opgave 2

Bloeddruk wordt gemeten in mm Hg (spreek uit: millimeter kwikdruk).
Bij een groep van duizend Nederlandse mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

a Hoeveel procent van deze mannen hebben naar schatting een bloeddruk van minder dan 141 mm Hg?

b Hoeveel van deze mannen hebben naar schatting een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

c Schat het percentage van deze mannen dat een bloeddruk heeft van meer dan 150 mm Hg.

Op grond van deze steekproef van 1000 mannen wil je de gemiddelde bloeddruk van alle Nederlandse mannen voorspellen.

d Geef het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 3

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

a Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert, is te licht?

De fabrikant voldoet hiermee niet aan bepaalde richtlijnen. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

b De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga ervan uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.

Je koopt een doosje met daarin twintig zakjes van het melkpoeder dat nog het oorspronkelijke gemiddelde van 3,1 gram heeft.

c Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met twintig zakjes? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 4

Bij een steekproef van een flinke populatie is van 100 pasgeboren baby's is de lengte (in cm) gemeten. De gemiddelde lengte in de steekproef is $\overline{L} = 52{,}2$ cm en voor de standaardafwijking van de lengte geldt $s_L = 2{,}38$.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde lengte van de populatie.

b Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 49 cm. Dit heeft gevolgen voor het gemiddelde en voor s. Nu is $s_L = 1{,}84$. Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval opnieuw.

c Leg uit waarom een meetfout in een kleine steekproef grotere gevolgen heeft voor het betrouwbaarheidsinterval dan een meetfout in een grote steekproef.

Opgave 5

Een opdrachtgever eist van een fabrikant dat het gemiddelde gewicht werkzame stof in een partij van 2000 flessen met reinigingsmiddel 12 gram is.

De fabrikant test dit door middel van een steekproef. Hij vindt een betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 2 gram voldoende precies bij een betrouwbaarheid van 95%.

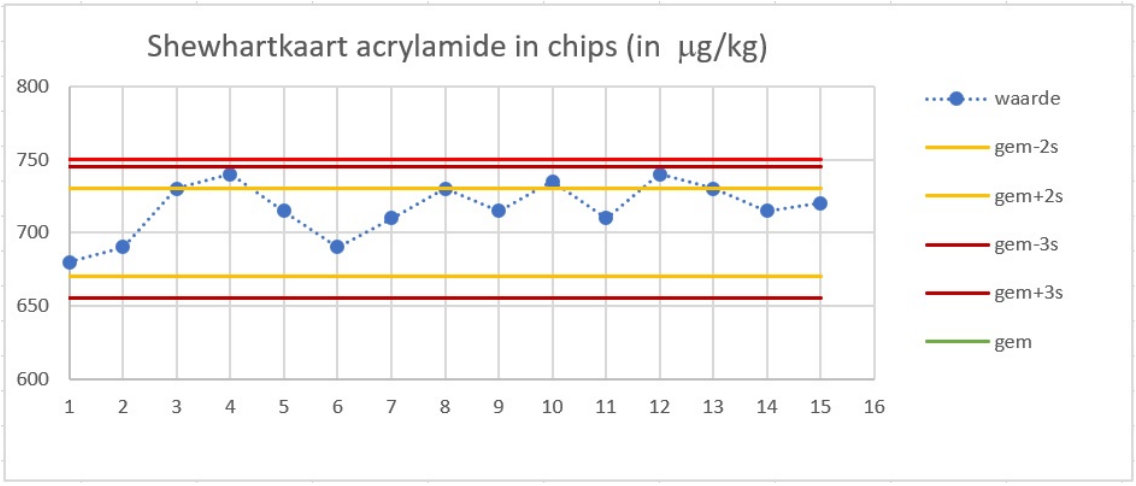
De fabrikant weet dat de standaardafwijking van het gewicht van de werkzame stof bij zijn productieproces 4 gram is.

De fabrikant wil weten hoe groot de steekproefomvang moet zijn om aan deze eisen te kunnen voldoen.

Bereken de minimaal benodigde steekproefomvang.

Opgave 6

Je ziet hier een controlekaart van een fabrikant van chips.
Van alle chips mag volgens een Europese referentierichtlijn de hoeveelheid acrylamide niet hoger zijn dan 750 µg/kg. Deze chipsfabrikant probeert zich aan die richtlijn te houden en meet elk half uur de hoeveelheid acrylamide in een steekproef uit zijn productie.



Figuur 16.1

a Hoeveel acrylamide bevatten zijn chips gemiddeld volgens de fabrikant?

b Met welke standaarddeviatie rekent de fabrikant?

c Waar vind je in de figuur de Europese richtlijn terug?

d Hoe vaak wordt de bovenste waarschuwingslijn overschreden?

e Is er volgens deze Shewhartkaart reden om het productieproces bij te stellen? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Opgave 7: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken,

waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten.
De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

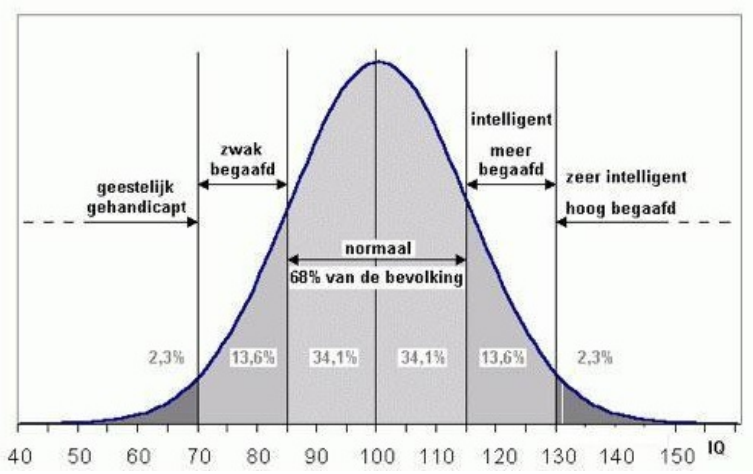
De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.

b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?

c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

Opgave 8: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857-1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 16.2

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

a Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?

b Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?

c Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?

d Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?

e Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

17

Conclusies trekken

17.1 z-toetsen 670
17.2 t-toetsen 678
17.3 f-toetsen 686
17.4 Regressielijnen 693
17.5 Totaalbeeld 704

17.1 z-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- percentages en grenswaardes berekenen met de normale verdeling;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 liter. De fabrikant vult zijn flessen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola.

Figuur 17.1

a Reken na dat inderdaad 5% van zijn flessen te weinig cola bevat.

b Hoe kan deze fabrikant nagaan of zijn flessen inderdaad een gemiddeld volume van 1530 mL hebben met een standaardafwijking van 18 mL?

Uitleg

Op een fles frisdrank staat dat de inhoud 1,5 liter is. Natuurlijk zal de inhoud nooit precies 1,5 liter zijn. De vulmachine is zodanig afgesteld dat het gemiddelde $\mu = 1530$ mL is en de standaardafwijking $\sigma = 18$ mL. Het vulgewicht V is normaal verdeeld. Nu bevat minder dan 5% van de flessen te weinig frisdrank.

De fabrikant controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen de gemiddelde inhoud te meten. De fabrikant voert een hypothesetoets uit:

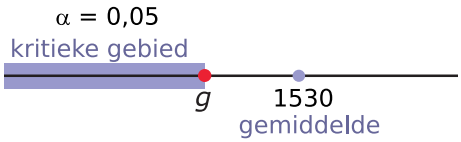
De nulhypothese H_0 is de aanname dat $\mu = 1530$ mL.
De alternatieve hypothese H_1 zegt bijvoorbeeld dat μ veel kleiner is:

- H_0: $\mu = 1530$ mL
- H_1: $\mu < 1530$ mL

Als je $\mu < 1530$ mL als alternatief neemt, voer je een linkszijdige toets uit.
Maar je kunt ook H_1: $\mu > 1530$ mL nemen, dat is een rechtszijdige toets.
Bij H_1: $\mu \neq 1530$ mL, spreek je van een tweezijdige toets.

In een steekproef van 25 flessen zou het gemiddelde $\overline{V}$ dicht bij 1530 mL moeten liggen als de nulhypothese geldt. De standaarddeviatie van de steekproevenverdeling is dan $S_{\overline{V}} = \frac{18}{\sqrt{25}} = 3{,}6$.

Maar er is altijd een kleine kans dat je - ook al geldt de nulhypothese - in je steekproef een gemiddelde vindt dat veel te laag is, onder een bepaalde grens $g < 1530$ ligt. Die kans is het percentage gevallen



Figuur 17.2

$$P\left(\overline{V} < g\right) = P\left(z < \frac{g-1530}{\frac{18}{\sqrt{25}}}\right) = \alpha$$

Dit percentage α heet het significantieniveau. Als de nulhypothese klopt, dan moet het significantieniveau klein zijn. Vaak wordt 5% genomen, of zelfs maar 1%. En dan reken je uit welke waarde van g daarbij hoort met de standaardnormale verdeling, de z-verdeling.

Opgave 1

Bekijk de situatie van het automatisch vullen van 1,5-literflessen in de **Uitleg op pagina 670**. Gebruik het gemiddelde en de standaarddeviatie dat de fabrikant heeft laten instellen.

a Bereken de kans dat in een steekproef van 25 flessen het gemiddelde vulgewicht lager dan 1520 mL is.

b Bereken de waarde van g waarvoor geldt $P\left(\overline{V} < g\right) = 0{,}05$ als je er van uit gaat dat de nulhypothese waar is.

Uit het antwoord bij b kun je nu concluderen dat gemiddelde vulgewichten lager dan 1524 mL maar in 5% van de gevallen mogen voorkomen als de nulhypothese waar is. Tref je toch een gemiddeld vulgewicht aan dat kleiner is dan 1524, dan ga je twijfelen of de nulhypothese wel waar is en sterker nog: je verwerpt hem met een betrouwbaarheid van 95%.
$\overline{V} < 1524$ heet het kritieke gebied van de toets.

c Waarom hoort bij een significantieniveau van 5% een betrouwbaarheid van 95%?

d Je neemt H_0: $\mu = 1530$ mL en H_1: $\mu < 1530$ mL.
Je toetst nu met een significantieniveau van 1%. Bepaal het bijbehorende kritieke gebied.

e Je voert de steekproef uit en vindt $\overline{V} = 1523$ mL.
Kun je de nulhypothese nu met 95% betrouwbaarheid verwerpen? Of met 99% betrouwbaarheid?

Opgave 2

De fabrikant uit de **Uitleg op pagina 670** zet 1,5 L ℮ op zijn colaflessen en dit betekent dat er geen flessen mogen voorkomen die minder cola bevatten dan $1500 - 0{,}015 \cdot 1500 = 1455$ mL.

a Laat zien dat het percentage colaflessen dat niet aan de Europese norm voldoet inderdaad vrijwel 0 is.

De fabrikant krijgt het vermoeden dat hij wel met een lager vulvolume toekan en laat zijn vulmachines instellen op een gemiddelde van 1520 met een standaarddeviatie van 18 mL.

b Voldoet hij nog steeds aan de hierboven beschreven norm?

De fabrikant test het nieuwe ingestelde vulvolume met een steekproef van 36 flessen. Hij wil een betrouwbaarheid van 99%.Het gemiddelde vulvolume in de steekproef is 1528 mL.
Dus hij toetst H_0: $\mu = 1520$ mL tegen H_1: $\mu > 1520$ mL.

c Bepaal het kritieke gebied van deze toets en leg uit welke conclusie de fabrikant moet trekken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Statistische methodes kunnen worden gebruikt om een bewering over een populatie te controleren. Dit heet **een hypothese toetsen**.

De **nulhypothese** H_0 is de gangbare bewering (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek).
De **alternatieve hypothese** H_1 is een bewering die de nulhypothese bestrijdt.

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X.
Iemand vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld) dat het kleiner is dan μ_X. Je hebt dan:

- H_0: $\mu = \mu_X$
- H_1: $\mu < \mu_X$

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n. Je kijkt of het gemiddelde in de steekproef significant van μ_X afwijkt. Het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ is normaal verdeeld met $\overline{X} \approx \mu_X$ en $S_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Bij deze **linkszijdige toets** hoort een **kritiek gebied** dat aangeeft waar $\overline{X}$ zoveel kleiner is dan μ_X dat je de nulhypothese verwerpt: $\overline{X} < g < \mu_X$. De grens g van dat kritieke gebied bepaal je op grond van een vooraf vastgesteld **significantieniveau** α met

$$P\left(\overline{X} < g\right) = P\left(z < \frac{g-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha.$$

Het significantieniveau kies je voordat je de toets uitvoert, bijvoorbeeld $\alpha = 5\%$ of $\alpha = 1\%$.

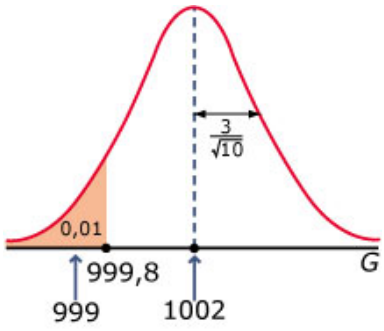
Afhankelijk van de situatie, zijn er nog twee mogelijkheden voor de alternatieve hypothese:

- een **rechtszijdige toets** waarbij H_0 getoetst wordt tegen $H_1 : \mu > \mu_X$
- een **tweezijdige toets** toetst H_0 met $H_1 : \mu \neq \mu_X$

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu_G = 1002$ g en $\sigma_G = 3$ g.
Omdat de consumentenbond veel klachten heeft binnengekregen waarin wordt gemeld dat de pakken suiker van deze fabrikant te weinig suiker bevatten, wordt er door hen getwijfeld aan dit gemiddelde. De consumentenbond stelt dat het gemiddelde lager is dan 1002 g.
In een steekproef van 10 is het gemiddelde $\overline{G} = 999$ g. Is dit bij een significantieniveau van 1% voldoende reden om aan te nemen dat de fabrikant ongelijk heeft?

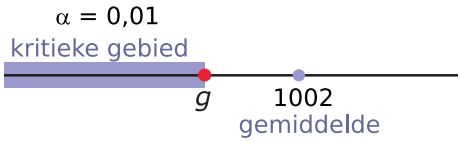


Figuur 17.3

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- H_0: $\mu = 1002$
- H_1: $\mu < 1002$



Figuur 17.4

In de steekproef is $\overline{G} = 999$ g en $S_{\overline{G}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}9487$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0{,}01$ en dit betekent: bereken de grenswaarde g waarvoor $P\left(\overline{G} < g\right) = 0{,}01$.

$P\left(\overline{G} < g\right) = P\left(z < \frac{g-1002}{0{,}9487}\right) = 0{,}01$ geeft: $g \approx 999{,}8$.

Het kritieke gebied wordt daarom: $\overline{G} \leq 999{,}8$.
Het in de steekproef gevonden gemiddelde geeft daarom inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 1%.

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 672** hoe de consumentenbond met een steekproef van 10 pakken het gewicht van kilopakken suiker controleert.

a Voer de beschreven toets zelf uit, laat duidelijk zien hoe je aan $g \approx 999{,}8$ komt.

b Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99,5%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?

c In plaats van een steekproef van 10 pakken wordt een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Bij welke gewichten krijgt de consumentenbond nu met 99% betrouwbaarheid gelijk?

d In het voorbeeld staat dat in een steekproef van 10 het gemiddelde $\overline{G} = 999$ gram is. Laat zien, dat je door $P\left(\overline{G} < 999\right)$ te berekenen ook kunt concluderen dat de consumentenbond gelijk heeft.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 672**.
De fabrikant wil natuurlijk ook niet teveel suiker in zijn kilopakken stoppen, dat kost geld. Hij toetst met een steekproef van 25 pakken of het vulgewicht niet te hoog is. Gebruik het ingestelde gemiddelde met de bijbehorende standaardafwijking in het Voorbeeld.

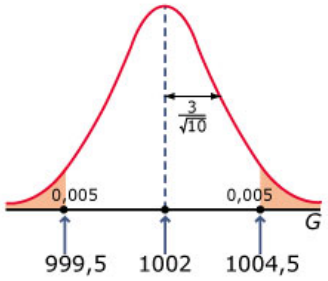
a Hoe ziet zijn hypothesetoets er uit?

b In zijn steekproef vindt de fabrikant een gemiddelde van $\overline{G} = 1003$ g.
Stel met een betrouwbaarheid van 99% vast of de fabrikant zijn vulmachines zal gaan bijstellen.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: normale verdeling gewicht kilopakken suiker

Volgens de fabrikant is het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal verdeeld met $\mu_G = 1002$ en $\sigma_G = 3$.
De fabrikant test zijn vulmachine door van een steekproef van 10 pakken het gemiddelde gewicht te berekenen. Hij doet uiteraard een dubbelzijdige toets.
Wat is het kritieke gebied bij een significantieniveau van 1%?

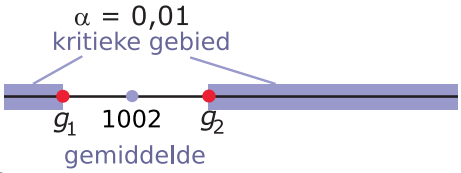


Figuur 17.5

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- H_0: $\mu = 1002$
- H_1: $\mu \neq 1002$



Figuur 17.6

$\overline{G}$ is normaal verdeeld met standaardafwijking $S_{\overline{G}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}9487$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0{,}01$ en dit betekent: bereken de grenswaarden g_1 en g_2 waarvoor $P(\overline{G} < g_1) = 0{,}005$ en $P(\overline{G} > g_2) = 0{,}005$.
Het significantieniveau wordt vanwege de symmetrie van de normale verdeling in twee gelijke delen verdeeld.

$P(\overline{G} < g_1) = P\left(z < \frac{g_1 - 1002}{0{,}9487}\right) = 0{,}005$ geeft: $g_1 = 999{,}557...$

$P(\overline{G} < g_2) = P\left(z < \frac{g_2 - 1002}{0{,}9487}\right) = 0{,}995$ geeft: $g_2 = 1004{,}442...$

Het kritieke gebied wordt daarom: $\overline{G} \leq 999{,}5 \vee \overline{G} \geq 1004{,}5$.

Opmerking: Sommige onderzoekers staan op het standpunt dat je altijd tweezijdig moet toetsen. Er zijn immers altijd afwijkingen naar boven en naar beneden mogelijk!

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 674** zie je hoe je bij een tweezijdige toets te werk kunt gaan.

a Waarom is dit een tweezijdige toets? Wat gebeurt er met de onbetrouwbaarheidsdrempel α?

b Voer de beschreven toets zelf uit.

c Om de grenswaarde g_2 te berekenen, hoef je niet met de standaardnormale tabel te werken. Je kunt deze waarde afleiden uit die van g_1 en de symmetrie van de grafiek.

Bekijk de opmerking onderaan **Voorbeeld 2 op pagina 674**.

d Welke gevolgen heeft het altijd tweezijdig toetsen op de betrouwbaarheid van je uitspraken?

Opgave 6

In een fabriek heeft men het vermoeden dat het koolstofgehalte van een bepaalde staalsoort groter is dan 0,200%. In een steekproef van 80 metingen wordt een gemiddelde gevonden van 0,213%.
De standaardafwijking van het koolstofgehalte is bekend en bedraagt $\alpha = 0{,}041\%$.

a Formuleer een geschikte nulhypothese en een alternatieve hypothese.

b Toets de hypothese met een significantie van 0,01. Wat is je conclusie?

Oefenen

Opgave 7

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijtjes geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat 3600 uur te laten werken. Ze gaan er van uit dat die levensduur normaal is verdeeld met een standaarddeviatie van 600 uur.
In een aselect gekozen groep van 60 rekenmachines stop je de batterijen van deze firma. De gemiddelde levensduur blijkt 3300 uur te zijn.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 8

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van 54,2 kg en een standaarddeviatie van 4,7 kg. Om dit gemiddelde te toetsen wordt van 200 aselect gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald.

a Als het gemiddelde gewicht in de steekproef 53,3 kg is, heeft het tijdschrift dan met een significantie van 2,5% gelijk?

b Bij welk significantieniveau verwerp je de mening van het tijdschrift?

c Bij welk significantieniveau had je de mening van het tijdschrift verworpen als je in een veel kleinere steekproef van 10 zeventienjarigen hetzelfde gemiddelde gewicht had aangetroffen? Kun je een verklaring geven voor het verschil met het antwoord bij b?

Opgave 9

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de keuringsdienst van waren controleren ze dit percentage. Bij de metingen is de standaardafwijking 0,0005%.

a Formuleer de hypothese die getoetst wordt. Je mag aannemen dat het natriumnitrietpercentage normaal verdeeld is.

b Is de toets eenzijdig of tweezijdig? Formuleer ook de alternatieve hypothese.

Bij de nulhypothese zijn er nog meer mogelijkheden voor μ. Omdat zelfs 0,022 toegestaan is, wordt er uitgegaan van $H_0 : \mu = 0{,}022$. In een steekproef van 25 stuks verpakte vleeswaren blijkt het nitrietgehalte 0,0221 te zijn.

c Toets met behulp van deze steekproef of er reden is tot bezorgdheid. Neem een significantieniveau van 5%.

Opgave 10

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehaltes in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn. De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

Is er met een significantie van $\alpha = 0{,}01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt? Neem daarbij aan dat de standaardafwijking van deze controlemetingen overeenkomt met de populatiestandaarddeviatie.

Opgave 11

Op een pak melk staat: “Het natuurlijk vetgehalte van melk - zoals die van de koe komt - varieert van 3,7% tot 4,3%”.
Volle melk wordt in de fabriek altijd afgeroomd tot 3,5%. Een consumentenorganisatie besluit na te gaan of volle melk 3,5% vet bevat. In een aselecte steekproef van 20 pakken volle melk vindt ze de percentages die je in de tabel ziet.
Men veronderstelt dat het vetgehalte van pakken melk normaal verdeeld is.

percentage	frequentie
3,445 –< 3,455	1
3,455 –< 3,465	0
3,465 –< 3,475	4
3,475 –< 3,485	3
3,485 –< 3,495	3
3,495 –< 3,505	4
3,505 –< 3,515	2
3,515 –< 3,525	2
3,525 –< 3,535	1

Tabel 17.1

a Schat met behulp van deze steekproef de standaarddeviatie σ van het vetgehalte van volle melk.

b Toets met significantieniveau 0,05 of de consumentenorganisatie op grond van de steekproef de bewering op het pak kan verwerpen.

Toepassen

Met een z-toets onderzoek je de juistheid van een bewering over het gemiddelde. Het gaat hier over één statistische variabele.

Maar bij statistisch onderzoek wordt soms onderzoek gedaan met meerdere variabelen. Deze worden dan vergeleken. Bijvoorbeeld een onderzoek waarbij je nagaat of de gemiddelden van twee variabelen gelijk zijn. Ga hierbij uit van de volgende veronderstellingen:

- de gemiddelden van beide populaties zijn bekend;
- de beide variabelen zijn normaal verdeeld;
- de standaardafwijkingen van beide verdelingen zijn bekend.

Er geldt altijd: het verschil van twee normale verdelingen is weer een normale verdeling.

Stel dat het aantal sterftegevallen door griep per gemeente normaal verdeeld is.
In 2015 gaf een steekproef $\mu_{15} = 20$ en $\sigma_{15} = 2{,}3$.
In 2016 gaf een steekproef $\mu_{16} = 21$ en $\sigma_{16} = 3{,}0$.

Verschillen deze gemiddelden significant van elkaar?

Noem het verschil van de gemiddelden V.
Dit verschil is normaal verdeeld. Is er geen verschil dan is $\mu_V = \mu_{16} - \mu_{15} = 0$.

Daarbij hoort een standaardafwijking van $\sigma_V = \sqrt{2{,}3^2 + 3{,}0^2} \approx 3{,}8$.

Je ziet dat het combineren van de twee standaardafwijkingen op een speciale manier gebeurd. Dat komt omdat je de varianties van zo'n verschilverdeling moet optellen. En de wortel uit die opgetelde varianties is de standaarddeviatie.

Nu kun je H_0: $\mu = 0$ toetsen tegen H_1: $\mu \neq 0$.

Zo'n toets heet een **verschiltoets voor gemiddelden**.

Opgave 12

Bekijk de verschiltoets in **Toepassen op pagina 676**.

a Waaraan is zichtbaar dat hier een verschiltoets moet worden toegepast en dus geen hypothesetoets zoals eerder beschreven?

b Voer de beschreven toets uit met een significantieniveau $\alpha = 0{,}1$.

Opgave 13

Figuur 17.7 Bron: Wikipedia

De diameters van machinaal geproduceerde bouten en de bijbehorende moeren zijn normaal verdeeld: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 mm en een standaarddeviatie van 0,05 mm. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 mm en een standaardafwijking van 0,03 mm. De bouten passen in de moeren als het verschil in diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 mm is. Er wordt regelmatig gecontroleerd of de machines die deze bouten en moeren maken niet moeten worden bijgesteld, omdat te veel moeren niet op de bouten passen. Wekelijks wordt een steekproef van 100 bouten en moeren getest.

a Waarom is hier sprake van een tweezijdige toets?

b Stel de nulhypothese en de alternatieve hypothese op.

c Welke standaardafwijking moet er worden gehanteerd? Waarom speelt hierbij de wortel-n-wet een rol?

d Voer de toets uit met een significantieniveau van 5%. Bij welk gemiddelde verschil in de steekproef worden de machines bijgesteld?

Testen

Opgave 14

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g. De populatiestandaardafwijking is 2 g.

Toets, met significantieniveau $\alpha = 0{,}05$, H_0 : $\mu = 250$ g tegen H_1 : $\mu \neq 250$ g.

Opgave 15

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Volgens de leverancier is het gehalte 16,4%. Hier zie je de resultaten van de metingen.

Toets met behulp van deze resultaten of de leverancier gelijk heeft. Je mag aannemen dat het gehalte kobalt normaal verdeeld is. Neem als significantieniveau 0,02.

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

Tabel 17.2

17.2 t-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met Student's t-verdeling bij kleine steekproeven;
- betrouwbaarheidsintervallen beschrijven met de t-verdeling;
- hypothese toetsen met de t-verdeling.

Voorkennis

- werken met de normale verdeling;
- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 liter. De fabrikant vult zijn flessen met een volume dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een behoorlijke preciesie.

Figuur 17.1

a Wat betekent een behoorlijke precisie voor de standaardafwijking?

De fabrikant meet in een aselecte steekproef van 25 gevulde flessen het volume. Hij vindt een gemiddeld volume van 1525 mL met een standaardafwijking van 24 mL.

b Zal de standaarddeviatie van de gehele populatie nu gelijk zijn aan 24 mL?

c Hoe kan de fabrikant nu toetsen of zijn vulmachine op het juiste vulvolume is afgesteld? En welk probleem doet zich daarbij voor?

Uitleg

Op een fles frisdrank staat dat de inhoud 1,5 liter is. Natuurlijk zal de inhoud nooit precies 1,5 liter zijn. De vulmachine is zo precies mogelijk afgesteld op een gemiddeld vulvolume van $\mu = 1530$ mL is. Het vulgewicht V is normaal verdeeld.

De fabrikant controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen de gemiddelde inhoud te meten. Hij wil daarmee de nulhypothese H_0: $\mu = 1530$ mL toetsen tegen de alternatieve hypothese H_1: $\mu \neq 1530$.

De fabrikant meet in een aselecte steekproef van 25 gevulde flessen het volume. Hij vindt een gemiddeld volume van 1525 mL met een standaardafwijking van 24 mL.

Hoe nu verder?

Als de nulhypothese klopt is het gemiddelde vulvolume normaal verdeeld met $\overline{V} = 1530$ en $S_{\overline{V}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Maar helaas is de populatiestandaardafwijking σ niet bekend.

De enige standaardafwijking die bekend is, is $s_V = 24$ mL en die zal niet gelijk zijn aan σ, zeker bij kleine steekproeven.
De Britse statisticus **William Gosset** (1876 - 1937) bedacht de zogenaamde t-verdeling. Deze verdeling lijkt op de standaardnormale z-verdeling, alleen wordt de standaardafwijking $S_{\overline{V}} = \frac{s_V}{\sqrt{n}}$ gebruikt.

Omdat deze statisticus onder de naam 'Student' publiceerde, spreek je van Student's t-verdeling. Hier:

$$t = \frac{\overline{V}-1530}{\frac{24}{\sqrt{25}}} = \frac{\overline{V}-1530}{4{,}8}$$

En met behulp van een tabel voor de t-verdeling kun je nu gewoon de hypothese toetsen.

Opgave 1

Bekijk de situatie van het automatisch vullen van 1,5-literflessen in de **Uitleg op pagina 678**.

a Leg uit, dat volgens de t-verdeling $\text{P}\left(\overline{V} < 1525\right) = \text{P}\left(t < \frac{1525-1530}{4{,}8}\right)$.

Omdat de waarde van t afhangt van de steekproefgrootte n, zijn er voor $n = 2{,}3{,}4{,}...$ verschillende t-tabellen. In deze **t-tabel in Excel** kun je eerst n instellen.

b Ga na, dat $\text{P}\left(\overline{V} < 1525\right) = \text{P}\left(t < \frac{1525-1530}{4{,}8}\right) \approx 0{,}1544$.

c Welke conclusie moet de fabrikant nu trekken bij een significantieniveau van 10%?

d Stel je voor dat de steekproef niet 25 flessen, maar 50 flessen betreft en dat hetzelfde gemiddelde en standaarddeviatie zijn gevonden.
Hoe groot is nu $\text{P}\left(\overline{V} < 1525\right)$ volgens de t-verdeling? En welke conclusie moet de fabrikant dan trekken?

e En hoe zit dat bij $n = 100$?

f Vergelijk de standaardnormale z-tabel met een t-tabel met grote waarden voor n.
Is er veel verschil?

Opgave 2

Student's t-verdeling wordt veel gebruikt om bij hypothese toetsen het kritieke gebied te bepalen bij een kleine steekproef van grootte n. Daarbij gebruik je deze **Student-t-tabel**.
Je ziet daarin bij een bepaalde betrouwbaarheid en bij een bepaalde $v = n - 1$ de waarde van t.
v wordt het aantal vrijheidsgraden genoemd.

a In de **Uitleg op pagina 678** gaat het over een dubbelzijdige (tweezijdige) toets. Hierbij moet de t-verdeling worden gebruikt omdat alleen de steekproefstandaardafwijking bekend is. Bepaal het kritieke gebied van de toets bij een significantieniveau van 10%.

De fabrikant krijgt het vermoeden dat hij wel met een lager vulvolume toekan en laat zijn vulmachines instellen op een gemiddelde van 1520. Er mag echter vrijwel nooit te weinig cola in zijn flessen zitten. Hij doet daarom een enkelzijdige toets van H_0: $\mu = 1520$ mL tegen H_1: $\mu < 1520$ mL.
In een steekproef van 16 flessen vindt hij een gemiddelde $\overline{V} = 1515$ met een standaarddeviatie van $s_V = 12$.

b De fabrikant hanteert een significantieniveau van 1%.
Welke conclusie trekt hij?

Opgave 3

De grootte n van de steekproef heeft ook gevolgen voor het weergeven van een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Bij kleine n en onbekende populatiestandaarddeviatie moet je daar ook de t-verdeling gebruiken in plaats van de z-verdeling.
Een fabrikant van colaflessen met een inhoud van 1,5 L wil weten op welk gemiddelde vulvolume zijn machine staat afgesteld. Hij doet daarom een steekproef van 15 flessen en vindt een gemiddelde vulvolume $\overline{V} = 1523$ mL met een standaardafwijking van $s_V = 18$ mL.

a Met welk 95% betrouwbaarheidsinterval kan hij het juiste populatiegemiddelde vaststellen?

b Vergelijk het bij a gevonden betrouwbaarheidsinterval met een betrouwbaarheidsinterval dat je zou vinden door de z-verdeling te gebruiken en (onterecht) aan te nemen dat $\sigma = s_V = 18$.

c Leg uit, waarom voor grote waarden van n er weinig verschil is tussen een betrouwbaarheidsinterval berekend met de t-verdeling en een betrouwbaarheidsinterval berekend met de z-verdeling.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X.
Iemand vertrouwt het gemiddelde niet en vermoedt (bijvoorbeeld) dat het niet gelijk is aan μ_X.

Je toetst H_0: $\mu = \mu_X$ tegen H_1: $\mu \neq \mu_X$ met een bepaald significantieniveau α, dus met een betrouwbaarheid van $(1 - \alpha) \cdot 100\%$.

Dit wordt getoetst met een steekproef van grootte n. Er zijn dan twee mogelijkheden:

- De populatiestandaarddeviatie is bekend.

  Gebruik hierbij de standaardnormale z-verdeling $z = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$

  en de **Standaardnormale tabel**.
- De populatiestandaarddeviatie is niet bekend.

  Gebruik dan **Student's *t*-verdeling** $t = \frac{\overline{X} - \mu_X}{\frac{s_X}{\sqrt{n}}}$

  met de steekproefstandaarddeviatie s_X en **vrijheidsgraad** $v = n - 1$.
  Hierbij hoort deze **Student-t-tabel**.

Ook bij het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen heb je deze twee mogelijkheden:

- De populatiestandaarddeviatie is bekend.

  Het betrouwbaarheidsinterval is $\overline{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- De populatiestandaarddeviatie is niet bekend.

  Het betrouwbaarheidsinterval is $\overline{X} - t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}}$.

Voorbeeld 1

De fabrikant wil dat het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker normaal is verdeeld met $\mu_G = 1002$.
De fabrikant test zijn vulmachine door middel van een aselecte steekproef. Hij doet uiteraard een dubbelzijdige toets.
In een steekproef van 30 pakken is het gemiddelde gewicht $\overline{G} = 1003{,}4$ gram met een standaardafwijking van $s_G = 2{,}6$ gram.
Is de bewering van de fabrikant bij een significantieniveau van 5% terecht?

Antwoord

De hypothesetoets ziet er zo uit:

- H_0: $\mu = 1002$.
- H_1: $\mu \neq 1002$.

Omdat de populatiestandaardafwijking onbekend is, hoort hierbij een t-verdeling met $v = 30 - 1 = 29$ en $S_{\overline{G}} = \frac{2{,}6}{\sqrt{30}} \approx 0{,}4747$.

Het significantieniveau is $\alpha = 0{,}05$.
Uit de **Student-t-tabel** lees je af $t = 2{,}05$.

$\frac{g_1 - 1002}{0{,}4747} = -2{,}05$ geeft $g_1 \approx -2{,}05 \cdot 0{,}4747 + 1002 \approx 1001{,}0$.

$\frac{g_2 - 1002}{0{,}4747} = 2{,}05$ geeft $g_2 \approx 2{,}05 \cdot 0{,}4747 + 1002 \approx 1003{,}0$.

Het kritieke gebied wordt daarom: $\overline{G} < 1001{,}0 \vee \overline{G} > 1003{,}0$.

Het in de steekproef gevonden gemiddelde ligt in het kritieke gebied, dus de fabrikant moet concluderen dat zijn vulmachine beter moet worden afgesteld.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 681** hoe de fabrikant met een steekproef van 30 pakken het vulgewicht van kilopakken suiker controleert.

a Voer de beschreven toets zelf uit, laat duidelijk zien hoe je aan de twee grenswaarden komt.

b Voer de toets nog eens uit, maar nu met een betrouwbaarheid van 99%. Is er nog steeds sprake van een significante afwijking?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 681**.
Ook de Consumentenbond test de pakken suiker. Zij toetsen met een steekproef van 10 pakken of het gemiddelde vulgewicht niet lager is dan 1002 g.

a Hoe ziet hun hypothesetoets er uit?

b In die steekproef is het gemiddelde $\overline{G} = 1000{,}5$ met een standaardafwijking van $S_G = 2{,}5$ gram.
Stel met een betrouwbaarheid van 99% vast of de Consumentenbond mag zeggen dat de pakken gemiddeld minder dan 1002 gram bevatten.

Voorbeeld 2

Een fabrikant controleert het gewicht G (in gram) van zijn pakken suiker. Hij weegt een steekproef van 30 pakken en ziet dat hun gemiddelde gewicht $\overline{G} = 1002$ g is met standaardafwijking $s_G = 3$ g.
Tussen welke grenzen ligt het vulgewicht van al zijn pakken suiker met een betrouwbaarheid van 99%?

Antwoord

Omdat alleen de steekproefstandaardafwijking bekend is, gebruik je de t-verdeling met $v = 30 - 1 = 29$.
Bij een (dubbelzijdige) betrouwbaarheid van 99% hoort $t = 2{,}76$, gebruik de **Student-t-tabel**.

Het 99% betrouwbaarheidsinterval is dus $1002 - 2{,}76 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} < \mu_G < 1002 + 2{,}76 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}}$.
Het gemiddelde gewicht μ_G ligt tussen 1000,5 en 1003,5 gram.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 682** zie je hoe je een betrouwbaarheidsinterval bepaalt met behulp van de t-verdeling.

a Bepaal zelf het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

b Bepaal het 95%-betrouwbaarheidsinterval ook met de z-verdeling waarbij je aanneemt $\sigma_G = 3$ g. Vind je een groot verschil?

Oefenen

Opgave 7

Een firma die batterijen levert voor rekenmachines, beweert dat die batterijtjes geschikt zijn om gemiddeld zo'n apparaat 3600 uur te laten werken.
In een aselect gekozen groep van 10 rekenmachines stop je de batterijen van deze firma. De gemiddelde levensduur blijkt 3300 uur te zijn met een standaardafwijking van 600 uur.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% de bewering van de firma verwerpen?

Opgave 8

Volgens een wetenschappelijk tijdschrift is het gewicht van zeventienjarigen normaal verdeeld met een gemiddelde van 54,2 kg en een standaarddeviatie van 4,7 kg. Om dit gemiddelde te toetsen wordt van 20 aselect gekozen zeventienjarigen het gewicht bepaald. Het gemiddelde gewicht in de steekproef is 53,3 kg met een standaarddeviatie van 5,0 kg.

a Waarom moet je hier met een t-verdeling werken?

b Bevestigt het onderzoek de bewering van het tijdschrift met een significantieniveau van 1%?

Opgave 9

Vacuüm verpakte vleeswaren mogen maximaal 0,022% natriumnitriet bevatten. Bij de keuringsdienst van waren controleren ze dit percentage. Hier vind je de meetgegevens.

0,0219	0,0226	0,0225	0,0225	0,0216
0,0219	0,0220	0,0216	0,0229	0,0226
0,0214	0,0219	0,0226	0,0220	0,0212
0,0225	0,0223	0,0215	0,0221	0,0223
0,0224	0,0215	0,0228	0,0223	0,0223

Tabel 17.1

a Bereken gemiddelde en standaardafwijking van deze gegevens.

b Je toetst $H_0 : \mu = 0{,}022$ tegen $H_1 : \mu > 0{,}022$. Bepaal het bijbehorende kritieke gebied als het significantieniveau $\alpha = 0{,}01$ is.

c Welke conclusie trek je uit deze metingen?

Opgave 10

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehaltes in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apparatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn.
De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

a Waarom kun je in deze situatie geen z-toets toepassen?
Waarom ligt het niet voor de hand om de standaardafwijking van de steekproef als standaardafwijking voor alle metingen te nemen?

b Is er met een significantie van $\alpha = 0{,}01$ reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet goed meer werkt?

Opgave 11

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselecte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van $\overline{V} = 25{,}1$ cL. De standaardafwijking is $s_V = 0{,}4$.

a Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde μ_V.

b Laat zien dat je schatting van μ_V beter wordt als je een grotere steekproef neemt.

Toepassen

Je wilt het gehalte stikstof in een bepaald monster kunstmest meten. Voor de zekerheid meet je dat gehalte 5 keer.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)				
14,0	13,9	13,8	14,2	14,0

Tabel 17.2

Van dit monster is het gemiddelde stikstofgehalte 14,0 m%.

Natuurlijk is er maar één werkelijk gehalte aan stikstof, de verschillen ontstaan hier alleen door de manier van meten en de meetnauwkeurigheid.

Bekend is dat deze metingen van het stikstofgehalte 2% kunnen afwijken van de werkelijke waarde. Je spreekt dan van een **gevalideerde meetmethode**.

Daarbij is die 2% afwijking de variatiecoëfficiënt $\frac{\sigma_x}{\mu_x}$.

De populatiestandaardafwijking van alle metingen is dus $\sigma_N = 0{,}02 \cdot \mu_N \approx 0{,}02 \cdot 14{,}0 = 0{,}28$.

Nu kun je in je uitspraken gewoon van de z-toets gebruik maken.

Opgave 12

Bekijk wat je verstaat onder een gevalideerde meetmethode in **Toepassen op pagina 683**.

a Bereken zelf het gemiddelde en de standaardafwijking van de 5 metingen.

b Waarom wordt deze standaardafwijking bij een gevalideerde meetmethode niet gebruikt?

c Stel een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het stikstofgehalte op.

Opgave 13

Met een gevalideerde meetmethode wordt het zoutgehalte van een oplossing bepaald. Bekend is dat bij deze metingen een standaarddeviatie van $\sigma = 0{,}40$ mg/L moet worden gehanteerd.
In een sessie van 10 metingen wordt een gemiddeld zoutgehalte van $\overline{Z} = 15{,}2$ mg/L gevonden.

a Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het zoutgehalte.

b Is het 99% betrouwbaarheidsinterval groter of kleiner dan het 95% betrouwbaarheidsinterval? Licht je antwoord toe.

Met deze metingen wil je de nulhypothese $\mu_Z = 15{,}0$ mg/L controleren.

c Bepaal het kritieke gebied van de bijbehorende toets als je een significantieniveau van $\alpha = 0{,}05$ hanteert en trek een conclusie.

Opgave 14

Van een monster wordt door middel van vlamemissie-spectrometrie (VES) het gehalte Natrium (mmol/L) bepaald.
De volgende waarden worden gevonden: 140, 133, 144, 148 en 132.

a Is hier sprake van een gevalideerde meetmethode?

b Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het natriumgehalte.

Testen

Opgave 15

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. Bij juiste instelling is de verwachte hoeveelheid 250 g per fles. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 9 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g met een standaardafwijking van 2 g.

Toets, met significantieniveau $\alpha = 0{,}05$, $H_0 : \mu = 250$ g tegen $H_1 : \mu \neq 250$ g.

Opgave 16

16,2	15,8	16,1	15,8	15,9
15,9	16,2	16,1	16,2	16,0
15,8	15,9	16,1	15,8	16,0
16,0	16,0	15,9	16,2	16,2
16,0	16,1	16,0	15,9	16,3

Tabel 17.3

Een partij kobaltchloride wordt bij levering door de ontvanger gekeurd op het gehalte kobalt. Hier zie je de resultaten van de metingen.

Geef een 99% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde kobaltgehalte μ_K.

17.3 f-toetsen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met de f-toets om precisie van metingen te vergelijken.

Voorkennis

- werken met de normale verdeling en Student´s t-verdeling;
- de begrippen hypothese toetsen, nulhypothese, alternatieve hypothese, kritieke gebied, onterecht de nulhypothese verwerpen;
- het begrip significantieniveau en de procedure bij hypothese toetsen;
- linkszijdige, rechtszijdige, tweezijdige toetsen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

In een laboratorium wordt de pH-waarde (zuurgraad) van vloeistof in een tank gemeten. Twee laboranten doen 10 metingen. Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden									
lab.A	8,1	7,1	7,3	7,9	7,5	7,0	8,4	7,4	7,3	8,0
lab.B	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,6	6,4	7,0	7,3

Tabel 17.1

a Bereken van beide laboranten de gemiddelde pH-waarde en de bijbehorende standaardafwijking.

b Welke van beide laboranten heeft de grootste precisie bereikt?
Zie je dat aan het gemiddelde of aan de standaardafwijking?

c Hoe zou je kunnen toetsen of de standaarddeviaties van beide meetsessies significant van elkaar verschillen?

Uitleg

In een laboratorium wordt de pH-waarde (zuurgraad) van vloeistof in een tank gemeten. Twee laboranten doen 10 metingen. Je ziet hier de resultaten.

	gemeten pH-waarden									
lab.A	8,1	7,1	7,3	7,9	7,5	7,0	8,4	7,4	7,3	8,0
lab.B	7,6	8,0	7,9	6,9	7,4	7,9	8,6	6,4	7,0	7,3

Tabel 17.2

De gemiddelden van deze metingen verschillen niet veel.
Maar de standaarddeviaties lopen wel wat uiteen, je vindt:

- Laborant A: $\overline{pH1} = 7{,}6$ en $s_{pH1} \approx 0{,}47$.
- Laborant B: $\overline{pH2} = 7{,}5$ en $s_{pH2} \approx 0{,}64$.

Toetsen van het gemiddelde, of betrouwbaarheidsintervallen voor de schatting van het populatiegemiddelde opstellen kun je met de t-verdeling doen. Je zegt dan iets over de juistheid van je metingen.

Maar om vast te stellen of laborant B significant minder precies is dan laborant A gebruik je een verdeling die is bedacht door de Britse statisticus **Ronald Fisher** (1890 - 1962) en daarom de f-verdeling heet. Daarbij gaat het om relatieve percentages die horen bij de grootheid:

$$f = \frac{s_A^2}{s_B^2}$$

waarin s_A en s_B de standaardafwijkingen zijn van twee metingen van dezelfde grootheid. Daarbij is altijd $s_A \geq s_B$.

Je kunt er de f-toets voor standaardafwijkingen mee uitvoeren.
Daarbij is:

- H_0: $s_A = s_B$ (beide standaardafwijkingen verschillen niet);
- H_1: $s_A \neq s_B$ (beide standaardafwijkingen verschillen) of H_1: $s_A > s_B$.

Hierbij bestaat een ***f*-tabel** waarin je de grenswaarde van f kunt opzoeken bij een gegeven betrouwbaarheid en de steekproefgroottes van de metingen A en B. Bij A hoort een vrijheidsgraad $v_A = n - 1$ bij steekproefgrootte n. Bij B hoort een vrijheidsgraad $v_B = m - 1$ bij steekproefgrootte m. In de gegeven tabel is de betrouwbaarheid 95%.

Opgave 1

Bekijk de metingen van beide laboranten in de **Uitleg op pagina 686**.
Je gaat nu een f-toets uitvoeren.

a Leg uit, waarom hier $f = \frac{s_{pH2}^2}{s_{pH1}^2}$ en bereken de f-waarde.

In dit geval is $v_{pH1} = 10 - 1 = 9$ en $v_{pH2} = 10 - 1 = 9$.
Gebruik de ***f*-tabel met betrouwbaarheid 95%**.

b Bepaal met een dubbelzijdige f-toets of de precisie van beide metingen significant van elkaar verschilt.

Omdat bij de gegeven metingen al meteen zichtbaar is dat $s_{pH2} > s_{pH1}$ is ook als alternatieve hypothese H_1: $s_{pH2} > s_{pH1}$ denkbaar.

c Bepaal met een enkelzijdige f-toets of s_{pH2} significant groter is dan s_{pH1}.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 686** vind je de f-verdeling.

a Welke waarde heeft f als beide metingen even precies zijn gedaan, dus als $s_A = s_B$?

Bekijk de ***f*-tabel met betrouwbaarheid 95%**.

b Welke waarde benadert f als zowel n als m heel groot worden?
Geef hiervoor een verklaring.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je met behulp van twee series metingen A en B een bepaalde grootheid X wilt vaststellen, krijg je bij A een steekproefgrootte n, een gemiddelde $\overline{X_1}$ met standaardafwijking s_{X_1} en bij B een steekproefgrootte m, een gemiddelde $\overline{X_2}$ met standaardafwijking s_{X_2}.

Met een ***f*-toets** kun je de precisie van beide metingen vergelijken.
Neem aan $s_{X_1} \geq s_{X_2}$, dan toets je

- H_0: $s_{X_1} = s_{X_2}$;
- H_1: $s_{X_1} \neq s_{X_2}$ (dubbelzijdige toets)
  of
  H_1: $s_{X_1} > s_{X_2}$ (enkelzijdige toets).

Daarbij gebruik je de f-verdeling

$$f = \frac{s_{X_1}^2}{s_{X_2}^2}$$

omdat $s_{X_1} > s_{X_2}$.

Meestal neem je een betrouwbaarheid van 95% en daarbij hoort deze ***f*-tabel**.

Je kunt ook de juistheid van beide series metingen vergelijken. Daartoe gebruik je een t-toets, zie **Voorbeeld 2 op pagina 689**.

Voorbeeld 1

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,0	13,9	13,8	14,2	14,0	
manier 2	13,6	14,4	13,2	14,0	14,6	14,1

Tabel 17.3

Bereken van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking. Bepaal met behulp van een f-toets of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.

Antwoord

Ga na:

- Manier 1: $\overline{N1} \approx 14{,}0$ en $s_{N1} \approx 0{,}15$ m%.
- Manier 2: $\overline{N2} \approx 14{,}0$ en $s_{N2} \approx 0{,}52$ m%.

Dit betekent dat $f = \frac{s_{N2}^2}{s_{N1}^2} \approx 12{,}02$.

Gebruik de ***f*-tabel met betrouwbaarheid 95%**.

In dit geval zijn de vrijheidsgraden $v_{N1} = 4$ en $v_{N2} = 5$.
Een enkelzijdige toets ligt voor de hand: H_0: $s_{N1} = s_{N2}$ tegen H_1: $s_{N2} > s_{N2}$.
De tabel geeft daarbij $f = 6{,}26$.

De tweede manier is daarom significant minder precies.

Opgave 3

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 688** hoe de precisie van twee series metingen van het stikstofgehalte van een portie kunstmest kan worden vergeleken.

a Bereken zelf de gemiddelden en de standaardafwijkingen van beide series metingen.

b Voer de (enkelzijdige) toets zelf uit met een betrouwbaarheid van 95%.

Ook hier zou je kunnen zeggen dat er tweezijdig getoetst moet worden. Het gaat immers alleen om het vergelijken van de precisie van twee meetseries, je hoeft niet van te voren al te weten dat de tweede serie minder precies is.

c Laat zien, dat dit hier niet tot een andere conclusie zou hebben geleid.

Voorbeeld 2

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Telkens wordt een monster eerst op de éne manier en dan op de andere manier gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,1	13,8	13,7	14,3	14,0	14,1
manier 2	13,4	14,5	13,3	14,7	14,5	14,6

Tabel 17.4

Bereken van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking. Bepaal met behulp van een f-toets of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.
Bepaal met behulp van een t-toets of de juistheid van beide metingen met dezelfde betrouwbaarheid significant verschilt.

Antwoord

Ga na:

- Manier 1: $\overline{N1} \approx 14{,}0$ en $s_{N1} \approx 0{,}22$ m%.
- Manier 2: $\overline{N2} \approx 14{,}2$ en $s_{N2} \approx 0{,}64$ m%.

Eerst toets je de precisie: $f = \frac{s_{N2}^2}{s_{N1}^2} \approx 8{,}46$.

De enkelzijdige f-tabel geeft (denk om de juiste vrijheidsgraden): $f = 5{,}05$.
De tweede manier is daarom weer significant minder precies.

Nu toets je de juistheid.
Je kijkt daarvoor naar de serie verschillen van elk paar metingen $N1 - N2$. Zijn beide series metingen even juist, dan is $\overline{N1 - N2} = 0$. Zijn ze niet even juist dan is $\overline{N1 - N2} \neq 0$. Je toetst dus:

H_0: $\overline{N1 - N2} = 0$ tegen H_1: $\overline{N1 - N2} \neq 0$

in een steekproef van $n = 5$ met standaardafwijking $s_{N1-N2} \approx 0{,}57$.
De significantie is $\alpha = 0{,}05$.
Voer deze dubbelzijdige toets zelf uit en trek de juiste conclusie.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 2 op pagina 689** hoe niet alleen de precisie, maar ook de juistheid van twee series metingen kan worden vergeleken.

a Waarom heb je nu twee even grote series metingen?

b Voer zelf de f-toets uit met een betrouwbaarheid van 95%.

c Voer zelf de t-toets uit met een betrouwbaarheid van 95%.

Oefenen

Opgave 5

Twee laboranten hebben de nitraatconcentratie X in mg/L van het grondwater op een bepaald perceel gemeten. Hier zie je de resultaten.

Kun je op grond van dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% beweren dat laborant B minder precies is geweest? Gebruik een f-toets.

	lab.A	lab.B
aantal	8	10
$\overline{X}$	25,2	24,9
s_X	1,8	2,9

Tabel 17.5

Opgave 6

De pH (zuurgraad) van zwemwater wordt regelmatig gemeten.
In een zwembad is de spreiding binnen de gevonden pH-waarden nogal groot en men besluit een nieuwe manier van meten te gaan hanteren. Hier zie je het verschil tussen de oude meetwaarden en de nieuwe op twee opeenvolgende dagen.

	gemeten pH-waarden						
oud	7,9	6,8	7,2	7,6	7,2	6,9	7,9
nieuw	7,2	7,3	7,5	7,2	7,1	7,4	7,3

Tabel 17.6

a Bereken van beide series metingen het gemiddelde en de standaardafwijking.
Lijkt de nieuwe meetmethode precieser te zijn?

b Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de nieuwe meetmethode precieser is?

Opgave 7

Van een tiental personen worden reactietijden gemeten.
Het is de bedoeling om de reactietijd tG op een geluidssignaal te vergelijken met de reactietijd tL op een lichtsignaal. Beide reactietijden zijn in milliseconden.

persoon	tL	tG
1	305	280
2	240	205
3	360	350
4	230	230
5	430	340
6	250	220
7	310	290
8	420	390
9	260	265
10	295	245

Tabel 17.7

a Bereken gemiddelde en standaardafwijking van beide reactietijden.

b Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de reactietijden op geluid dichter bij elkaar liggen dan de reactietijden op licht? Gebruik een f-toets.

c Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat de reactietijden op geluid kleiner zijn dan de reactietijden op licht? Gebruik een t-toets.

Opgave 8

In een medisch laboratorium worden voortdurend cholesterolgehaltes in bloedmonsters bepaald. De gebruikte apperatuur wordt elk uur gecontroleerd met behulp van een ijkmonster. Hiervan is bekend dat het gemiddelde 175 mg per 100 mL zou moeten zijn met standaardafwijking 10 mg/dL.
De controlemetingen aan het ijkmonster leveren op: 168, 170, 188, 170, 174, 190, 188, 171.

a Waarom kun je in deze situatie een f-toets toepassen om na te gaan of de controlemetingen even precies zijn als de standaardmetingen?

b Is er met een betrouwbaarheid van 95% reden om aan te nemen dat de meetapparatuur niet nauwkeurig meer werkt?

Toepassen

Het gehalte stikstof in massaprocenten in een zak kunstmest is op twee manieren gemeten. Je ziet hier de resultaten:

	Gehalte stikstof in kunstmest (m%)					
manier 1	14,0	13,9	13,8	14,2	14,0	
manier 2	13,6	14,4	13,2	14,0	14,6	14,1

Tabel 17.8

Je kunt van beide metingen het gemiddelde en de standaardafwijking berekenen en met een f-toets nagaan of de tweede manier significant minder precies is dan de eerste manier met een betrouwbaarheid van 95%.

Maar het vergelijken van de juistheid van beide metingen met een t-toets is nu lastig, de metingen van $N1$ en $N2$ gaan over verschillende steekproeven, dus je kunt niet naar $N1 - N2$ kijken omdat de waarden van $N1$ en $N2$ niet over hetzelfde monster hoeven te gaan. Dit zijn **geen gepaarde waarnemingen**.

Maar je kunt wel de twee verdelingen combineren.
Je toetst H_0: $\overline{N1} - \overline{N2} = 0$ tegen H_1: $\overline{N1} - \overline{N2} \neq 0$.
De bijbehorende standaardafwijking is een soort van gewogen gemiddelde van de twee standaardafwijkingen s_{N1} en s_{N2}:

- Als s_{N1} en s_{N2} weinig van elkaar verschillen, bepaal je de grens g van het kritieke gebied door bij de gegeven betrouwbaarheid en $v = n_{N1} + n_{N2} - 1$ de waarde van t op te zoeken:

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{v_{N1} \cdot s_{N1}^2 + v_{N2} \cdot s_{N2}^2}{v_{N1} + v_{N2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_{N1}} + \frac{1}{n_{N2}}}}$$

- Als s_{N1} en s_{N2} significant van elkaar verschillen, bepaal je de grens g van het kritieke gebied door bij de gegeven betrouwbaarheid en $v = \text{minimum}\,(n_{N1}, n_{N2}) - 1$ de waarde van t op te zoeken:

$$t = \frac{g}{\sqrt{\frac{s_{N1}^2}{n_{N1}} + \frac{s_{N2}^2}{n_{N2}}}}$$

Het aannemelijk maken van deze formules voert te ver.
Je gaat ze alleen toepassen.

Opgave 9

In **Toepassen op pagina 691** heb je te maken met twee onafhankelijke steekproeven. Je weet al, dat hun standaardafwijkingen significant verschillen, zie **Voorbeeld 1 op pagina 688**. Nu wil je nog onderzoeken of hun gemiddelden significant verschillen met een betrouwbaarheid van 95%.

a Welke van beide t-toets methoden moet je gebruiken, de eerste of de tweede?

b Voer deze t-toets voor de gegeven steekproeven uit.
Zoek de gemiddelden en de standaardafwijkingen van de afzonderlijke steekproeven in het voorbeeld op.

Ook de gegevens in **Voorbeeld 2 op pagina 689** moet je op deze manier behandelen als het onafhankelijke steekproeven zouden zijn geweest. Neem aan dat dit het geval is. Weer verschillende de standaardafwijkingen significant van elkaar.

c Vergelijk met een t-toets de juistheid van beide steekproeven.
Zoek de gemiddelden en de standaardafwijkingen van de afzonderlijke steekproeven in het voorbeeld op.

Opgave 10

Twee laboranten hebben de nitraatconcentratie X in mg/L van het grondwater op een bepaald perceel gemeten. Hier zie je de resultaten.
Na het toepassen van een f-toets blijkt laborant B niet significant minder precies te zijn geweest. Je wilt nu hun juistheid vergelijken met een betrouwbaarheid van 95%.

	lab.A	lab.B
aantal	8	10
$\overline{X}$	25,2	24,9
s_X	1,8	2,9

Tabel 17.9

a Welke van beide t-toets methoden in **Toepassen op pagina 691** moet je gebruiken, de eerste of de tweede?

b Voer deze t-toets voor de gegeven steekproeven uit.

Testen

Opgave 11

In een melkfabriek worden flessen machinaal gevuld. De gedoseerde hoeveelheid per fles is normaal verdeeld. De acht flessen die de laatste uren zijn gemeten gaven een gemiddelde van 250 g met een standaardafwijking van 2 g. Een kwaliteitsinspecteur neemt een steekproef van 5 flessen en vindt voor het gemiddelde 252 g met een standaardafwijking van 6 g.

Is er reden om aan te nemen dat deze inspecteur niet precies genoeg heeft gewerkt?
Gebruik een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 12

Messing is een legering van koper en zink, met soms (om bepaalde eigenschappen te bereiken) toevoegingen. In een metaalfabriek wordt messing geproduceerd met een kopergehalte dat 65% zou moeten bedragen.
Het kopergehalte van de geproduceerde hoeveelheid messing wordt bepaald door hetzelfde monster op twee manieren te meten.

	kopergehalte messing				
manier 1	64,30	65,20	64,90	64,80	65,30
manier 2	65,00	64,10	65,70	65,90	64,30

Tabel 17.10

a Bepaal met 95% betrouwbaarheid of beide metingen even precies zijn.

b Bepaal met 95% betrouwbaarheid of beide metingen even juist zijn.

17.4 Regressielijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen twee statistische variabelen in beeld brengen als spreidingsdiagram;
- de correlatiecoëfficiënt gebruiken om de sterkte van het (statistisch) verband tussen twee variabelen te berekenen;
- het verband tussen twee statistische variabelen beschrijven met behulp van een regressielijn.

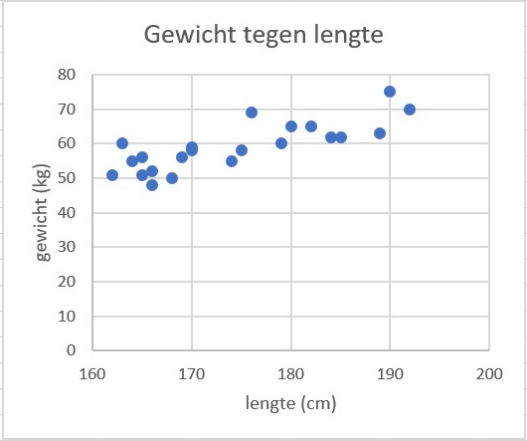
Voorkennis

- gemiddelde en standaardafwijking van een dataset bepalen (ook met behulp van Excel);
- werken met grafieken in Excel.

Verkennen

Opgave V1

Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud heb je gegevens nodig. Op het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls** vind je de gegevens van een groep van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.



Figuur 17.1

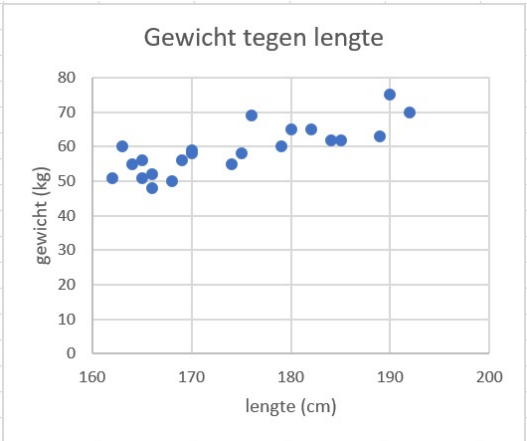
a Welke drie gegevens zijn er verzameld?

b Welke afspraken moet je maken bij het verzamelen van deze gegevens? Beschrijf er een paar. (Denk om de manier van meten!)

c Bekijk het spreidingsdiagram. Trek je op grond van de gegevens op het werkblad de conclusie dat er zo'n verband bestaat? En is dat dan uitsluitend een statistisch verband of is het ook een oorzakelijk verband, m.a.w. wordt een groter gewicht veroorzaakt door een grotere lengte?

Uitleg 1

Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls** vind je de gegevens van een steekproef van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.
Is er binnen deze groep studenten sprake van een verband tussen lengte en gewicht?



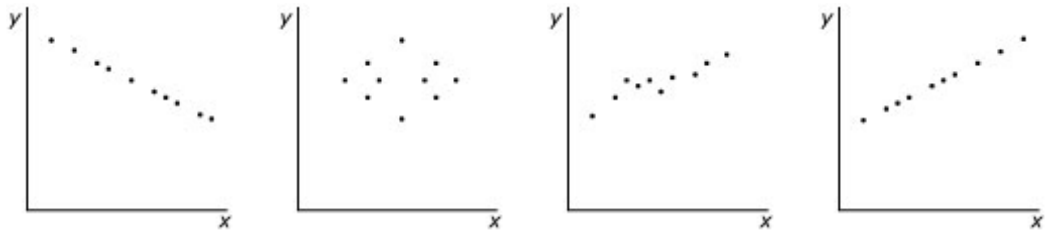
Figuur 17.2

Als je de figuur bekijkt, zie je dat bij grotere lengtes vaak ook grotere gewichten horen.
Er lijkt dus een zeker verband te zijn.
Maar de getekende punten liggen zeker niet op één lijn, dus hoe sterk is het verband?

De sterkte van het verband wordt uitgedrukt in de correlatiecoëfficiënt r_{lG}, waarin l de lengte in cm en G het gewicht in kg is. r_{lG} is een maat voor de gemiddelde van de afstanden van de punten tot het punt $(\overline{l},\overline{G})$:

$$r_{lG} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(l_i-\overline{l})(G_i-\overline{G})}{(n-1)\cdot s_l \cdot s_G}$$

Hierin is n het aantal metingen van combinaties (l,G).
Met behulp van Excel kun je een correlatiecoëfficiënt r_{xy} berekenen.
Hij kan alleen waarden aannemen vanaf - 1 tot en met 1. Hoe dichter bij - 1 of 1, hoe beter de correlatie.
Bij $r_{xy} = 0$ is er geen enkele correlatie en dus geen verband tussen x en y.



$r_{xy} = -1$ $r_{xy} = 0$ $r_{xy} = 0{,}6$ $r_{xy} = 1$

Figuur 17.3

Opgave 1

Gebruik het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls** in **Uitleg 1 op pagina 693**.

a Maak zelf zo'n spreidingsdiagram.

b Hoe zie je in het spreidingsdiagram dat er een zeker verband tussen l en G bestaat?

c Bereken de correlatiecoëfficiënt r_{lG} in twee decimalen nauwkeurig.

Je hebt de waarde van r_{lG} berekend. Maar hoe weet je nu of deze correlatie genoeg is om vast te stellen dat er een verband is?
Daarvoor gebruik je deze **r-tabel**. Als jou waarde van r_{lG} groter is dan die in de tabel, dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.

d Kun je vaststellen dat er een duidelijk verband is tussen lengte en gewicht van deze jongeren met een betrouwbaarheid van 99%?

Opgave 2

Je hebt in de voorgaande opgave een verband aangetoond tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud.
Daarbij gebruikte je een steekproef van 22 studenten.

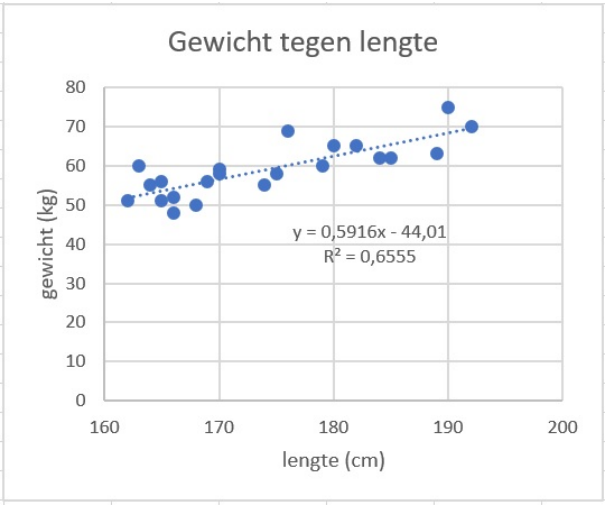
a Geef commentaar op deze steekproef.

Stel je voor dat je met een aselecte steekproef te maken hebt. En neem ook aan dat de groep representatief is voor studenten van 15 tot 17 jaar oud. Er is een duidelijk verband gevonden.

b Is er nu sprake van een oorzakelijk verband, dus is de lengte oorzaak van het gewicht?
Of is er alleen een statistisch verband? Licht het antwoord toe.

Uitleg 2

Je wilt onderzoeken of er een verband bestaat tussen lengte en gewicht bij mensen van 15 tot 17 jaar oud. Op het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls** vind je de gegevens van een steekproef van 22 studenten. Hiernaast is een spreidingsdiagram van die gegevens getekend.
Er is binnen deze groep studenten sprake van een verband tussen lengte en gewicht, maar hoe beschrijf je dit verband?



Figuur 17.4

Je ziet in de figuur hoe Excel automatisch het kwadraat van de correlatiecoëfficiënt berekend en een best passende lijn door de puntenwolk trekt. Deze lijn heet de regressielijn. En r^2 heet de determinatiecoëfficiënt.

De regressielijn gaat door $(\overline{l},\overline{G}) = (174{,}3; 59{,}1)$ en de hellingwaarde (richtingscoëfficiënt) is:

$$a = r_{lG} \cdot \frac{s_G}{s_l} = 0{,}81 \cdot \frac{7{,}0}{9{,}5} \approx 0{,}60$$

Daarmee vind je de formule voor de regressielijn: $G \approx 0{,}60 \cdot l - 45{,}48$.
In Excel vind je afwijkende waarden omdat daar met veel meer decimalen wordt gerekend.

De determinatiecoëfficiënt $r^2_{lG} \approx 0{,}66$ geeft aan dat ongeveer 66% van het gewicht wordt veroorzaakt door de lengte.

Opgave 3

Je ziet in **Uitleg 2 op pagina 695** hoe Excel een lijn door de puntenwolk trekt en de bijbehorende formule berekent.

a Doe dit zelf met het werkblad **LengteGewicht22Studenten.xls**.

b Je ziet in de uitleg hoe je zelf de formule voor de trendlijn kunt berekenen.
Voer die berekening uit.

Je kunt nu met behulp van de gevonden regressielijn (trendlijn) voorspellingen doen.

c Hoe zwaar zou iemand van 2,00 m volgens de regressielijn moeten zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In een **spreidingsdiagram** van twee statistische variabelen x en y zet je alle combinaties (x,y) als een **puntenwolk** in een assenstelsel. Of er een sterk **lineair statistisch verband** bestaat tussen de variabelen wordt bepaald door de **correlatiecoëfficiënt** r_{xy}. Er geldt in een steekproef van grootte n:

$$r_{xy} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)\cdot s_x \cdot s_y}.$$

- Als $r_{xy} = 1$ dan is er een perfecte positieve correlatie tussen x en y. De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een stijgende lijn.
- Als $r_{xy} = 0$ dan is er geen enkele correlatie tussen x en y.
- Als $r_{xy} = -1$ dan is er een perfecte negatieve correlatie tussen x en y. De punten van de puntenwolk liggen dan precies op een dalende lijn.

De correlatie tussen x en y wordt beter naarmate r_{xy} dichter bij 1 of - 1 ligt.

Gebruik de **r-tabel**.
Als bij positieve correlatie $r_{xy} > r_{\text{tabel}}$ dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.
Als bij negatieve correlatie $r_{xy} < r_{\text{tabel}}$ dan is het verband aangetoond, afhankelijk van de gewenste betrouwbaarheid.
In Excel wordt vaak de determinatiecoëfficiënt r_{xy}^2 gegeven.

Een verband waarbij de toename (of afname) van de éne variabele een gevolg is van een toename (of afname) van de andere heet een **causaal verband**: er is dan sprake van oorzaak en gevolg. Een statistisch verband tussen twee variabelen hoeft niet causaal te zijn. Andere variabelen kunnen de oorzaak zijn dat er bij twee variabelen een statistisch verband optreedt. Het is zeker niet zo, dat een grotere lengte veroorzaakt dat je daardoor automatisch ook een groter gewicht hebt.

Als de correlatie tussen de variabelen x en y groot genoeg is, kun je een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen die het verband tussen x en y weergeeft. Deze formule heeft als grafiek een rechte lijn, de **regressielijn** van y op x. Zo'n regressielijn gaat door het punt $(\bar{x},\bar{y})$ en heeft als richtingscoëfficiënt (hellingsgetal):

$$a = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Deze richtingscoëfficiënt heet wel de **regressiecoëfficiënt** van y op x. Met behulp van deze regressiecoëfficiënt en het feit dat de regressielijn door $(\bar{x},\bar{y})$ gaat, kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

De makers van een veelgebruikte weerapp en de uitbaters van een dierentuin doen een onderzoek naar een eventueel verband tussen de kans op regen die de weerapp voor een zaterdag voorspelt en het aantal dierentuinbezoekers op die zaterdag.

Na een aantal weken hebben ze de volgende gegevens verzameld.

Aantal bezoekers dierentuin tegen de regenkans								
regenkans (%)	95	5	20	95	85	55	5	30
aantal bezoekers	876	3102	3263	1278	1491	2984	4312	4916

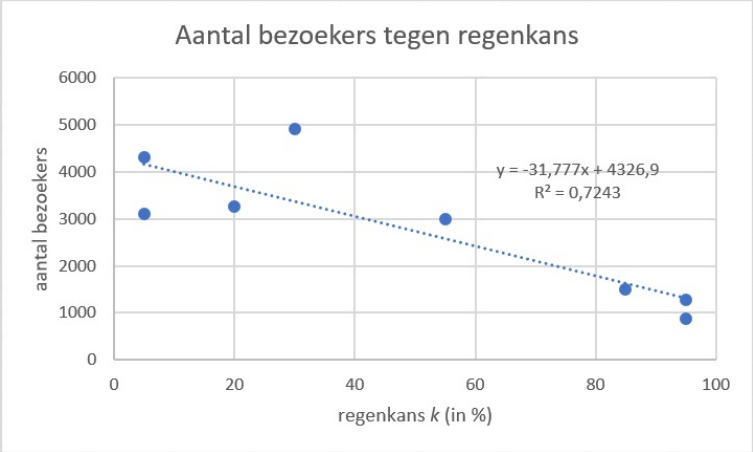
Tabel 17.1

Maak hiervan een spreidingsdiagram en stel een formule op voor de regressielijn.

Hoe groot is de correlatiecoëfficiënt van de kans op regen k en het aantal bezoekers a in deze steekproef?

Antwoord

Laat Excel de determinatiecoëfficiënt r_{ka}^2 berekenen en de formule voor de trendlijn opstellen.



Figuur 17.5

De regressielijn is $a = -32 \cdot k + 4327$. (Afronden op gehele bezoekers lijkt logisch.)

Je vindt: $r_{ka} \approx -0{,}851$.

Opgave 4

Gebruik de gegevens in **Voorbeeld 1 op pagina 697**.

a Maak zelf het spreidingsdiagram en laat Excel de formule van de regressielijn opstellen en de determinatiecoëfficiënt berekenen.

b Bereken de correlatiecoëfficiënt.

c Wat betekent het dat de correlatiecoëfficiënt een negatief getal is?

d Je kunt de formule van de regressielijn ook berekenen met behulp van de correlatiecoëfficiënt en de gemiddelden en de standaarddeviaties. Laat zien hoe.

e Is er met een betrouwbaarheid van 95% een verband tussen k en a?

f Voorspel op basis van de regressielijn het aantal bezoekers bij een regenkans van 100%.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 697**.

Behalve de regenkans wordt ook het voorspelde aantal uren zon bijgehouden. Bij de dierentuin zit ook een vennetje waarin kinderen kunnen zwemmen en dit aantal kinderen heeft men bijgehouden:

aantal uren zon	0,7	7,6	2,3	1,1	2,4	4,9	8,1	3,6
aantal zwemmende kinderen	6	802	121	6	48	123	964	32

Tabel 17.2

a Bereken de correlatiecoëfficiënt.

b Is dit een betekenisvol correlatieonderzoek? Zegt de correlatiecoëfficiënt in dit geval ook echt iets over een mogelijk verband tussen het voorspelde aantal uren zon en het aantal kinderen dat gaat zwemmen?

Voorbeeld 2

Om bij iemand bloedarmoede aan te tonen wordt vooraf spectrofotometrisch het ijzergehalte in serum bepaald.
Van een kalibratielijn worden de absorptiewaarden gemeten, zie tabel.

monster	concentratie in µmol/L	absorptie
1	20	0,150
2	40	0,313
3	60	0,471
4	80	0,631
5	100	0,774
6	120	0,951

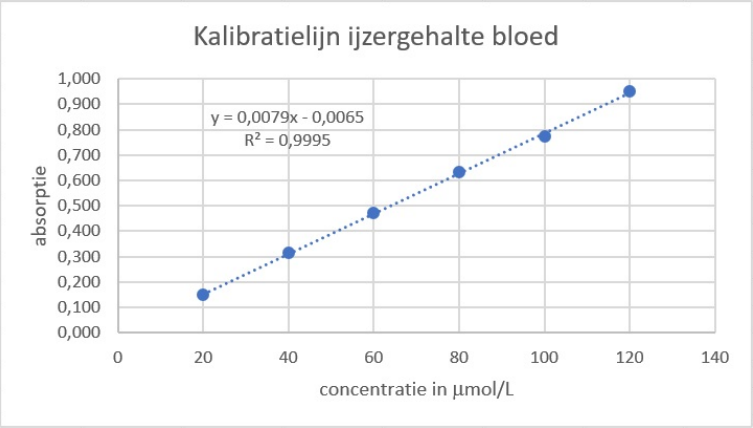
Tabel 17.3

Maak hiervan een spreidingsdiagram en bereken de bijbehorende correlatiecoëfficiënt.

Stel een formule op voor de regressielijn van de absorptiewaarde a afhankelijk van de concentratie C in µmol/L en bepaal met behulp daarvan het ijzergehalte van iemand waarbij een absorptiewaarde van 0,814 wordt gemeten.

Antwoord

Gebruik Excel en je vindt dit.



Figuur 17.6

De correlatiecoëfficiënt is daarom $r_{Ca} \approx \sqrt{0{,}9995} \approx 0{,}9997$ en er is een vrijwel perfecte positieve correlatie.

Het verband tussen a en C is: $a \approx 0{,}0079 \cdot C - 0{,}0065$.

Als bij iemand $a = 0{,}814$ wordt gemeten, dan is $0{,}814 \approx 0{,}0079 \cdot C - 0{,}0065$.
Dit geeft $C \approx 103{,}9$ µmol/L.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 698** zie je hoe je een kalibratielijn opzet om het ijzergehalte in het bloed te meten.

a Voer zelf de berekening van de correlatiecoëfficiënt en de formule voor de regressielijn uit.

b Laat zien dat als $a = 0{,}814$ het ijzergehalte $C \approx 103{,}9$ µmol/L is.

c Waarom vind je hier een r_{Ca} die vrijwel 1 is?

Oefenen

Opgave 7

Van 100 vrouwen zijn de lichaamsmaten opgemeten en vergeleken met hun lengtes. Hier zie je een tabel met de gevonden correlatiecoëfficiënten.
Gebruik de **r-tabel**.

	gewicht	bovenwijdte	taille	heup	ruglengte	rugbreedte	vuistomvang	kniehoogte	voetlengte
lengte	0,2124	- 0,0779	- 0,1578	- 0,0107	0,5933	0,0647	0,2668	0,8263	0,6737

Tabel 17.4

a Welke variabele heeft de sterkste samenhang met de lengte?

b Welke variabelen hebben met een betrouwbaarheid van 99% een positieve correlatie met de lengte?

c Welke variabelen hebben vrijwel geen correlatie met de lengte?

Opgave 8

Om te onderzoeken of er enig verband bestaat tussen de lengte van een vader en die van zijn zoon zijn de lengtes van 12 vaders en die van hun oudste zoons gemeten op het moment dat die zoons volwassen werden. De gegevens staan in deze tabel.

a Teken een spreidingsdiagram (een puntenwolk) bij deze gegevens.

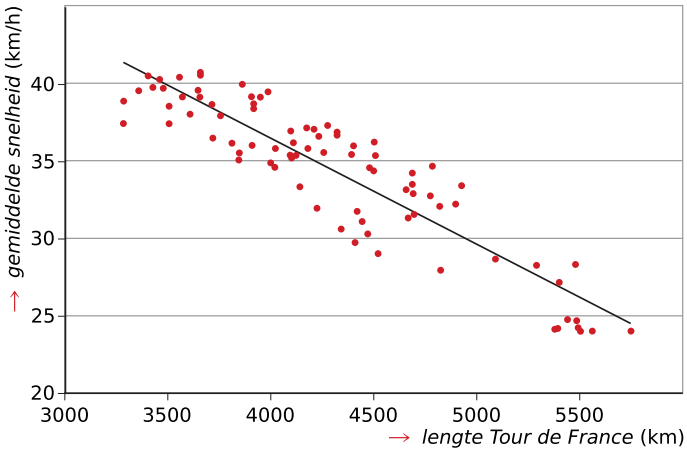
b Bereken de correlatiecoëfficiënt in drie decimalen nauwkeurig.
Is er met 95% betrouwbaarheid sprake van een positieve correlatie?

c Stel een vergelijking op voor de regressielijn van z afhankelijk van v.

d Een vader van 1,95 m lengte krijgt een zoon.
Hoe lang zal die zoon naar verwachting worden?

Opgave 9

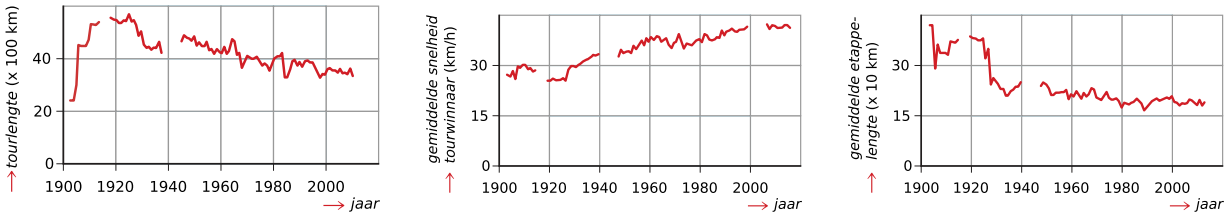
In deze figuur staan twee statistische variabelen. Op de horizontale as staat de totale lengte van de Tour de France in kilometer. Op de verticale as staat de gemiddelde snelheid van de winnaar.



Figuur 17.7

a Welke samenhang is er tussen de lengte van de Tour de France en de gemiddelde snelheid van de winnaar?

Bekijk de drie grafieken:



I II III

Figuur 17.8

Twee van de grafieken kun je combineren tot een spreidingsdiagram.

b Hoe komt het dat je deze grafieken kunt combineren tot een spreidingsdiagram?

c De drie grafieken hebben allemaal twee gaten. Wat betekent dit en wat is de oorzaak?

d Welke twee (van de drie) grafieken tonen gecombineerd het spreidingsdiagram?

e Geef drie redenen waarom de gemiddelde snelheid van de winnaar los staat van de tourlengte.

Opgave 10

Bekijk de tabel. In een Amerikaans laboratorium heeft men proeven gedaan waarbij gelet werd op het verband tussen de hoogte van de bewaartemperatuur T in graden Fahrenheit en de werkzaamheid W van een bepaald geneesmiddel. Bij temperaturen van 30°, 50°, 70° en 90° (Fahrenheit) werden drie porties van gelijk gewicht uit eenzelfde productie 20 dagen bewaard. Na deze periode werd op identieke wijze de werkzaamheid van de porties vastgesteld. De werkzaamheid werd uitgedrukt in percentages van de werkzaamheid zoals die was voor het bewaren.

bewaartemperatuur T (°F)	30	50	70	90
werkzaamheid W (%)	39, 42, 35	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21

Tabel 17.5

a In hoeverre is er met een betrouwbaarheid van 99% sprake van correlatie tussen bewaartemperatuur T en werkzaamheid W?

b Geef een statistisch verantwoorde schatting voor de werkzaamheid van het geneesmiddel bij een bewaartemperatuur van 0° Fahrenheit.

Toepassen

Je kunt met behulp van correlatie en een regressielijn ook **meetmethoden vergelijken**.

Hier zie je de resultaten van drie laboranten die de concentratie eiwit in eiersalade elk op hun eigen wijze hebben gemeten vanuit dezelfde 20 monsters.

Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant A																			
61	62	64	65	66	64	65	61	69	66	65	66	63	64	67	68	65	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant B																			
62	63	64	65	66	64	65	62	67	66	65	66	64	65	67	66	64	67	66	65
Concentratie eiwit in eiersalade in procent, laborant C																			
66	64	67	68	68	69	67	68	70	66	67	68	65	66	69	69	70	67	66	65

Tabel 17.6

Je kunt hierbij een spreidingsdiagram maken en de correlatiecoëfficiënt en de regressielijn berekenen.

Als beide meetmethoden vergelijkbare resultaten hebben zal er een hoge positieve correlatie tussen beide bestaan.

Opgave 11

Bekijk de twee sets gepaarde gegevens in **Toepassen op pagina 701** van de laboranten A en B.

a Maak een bijpassend spreidingsdiagram en zet daarin de regressielijn.
Zet de resultaten van laborant A op de horizontale as.

b Bereken de correlatiecoëfficiënt en stel met een betrouwbaarheid van 95% vast of beide meetmethoden overeen komen.

c Maakt het verschil als je de gegevens van laborant A op de verticale as van het spreidingsdiagram zet?

De 17e meting van laborant A lijkt nogal een uitschieter te zijn.
Hij doet die meting over en vindt nu 65% eiwit.

d Laat zien dat dit een grote invloed heeft op de correlatiecoëfficiënt.

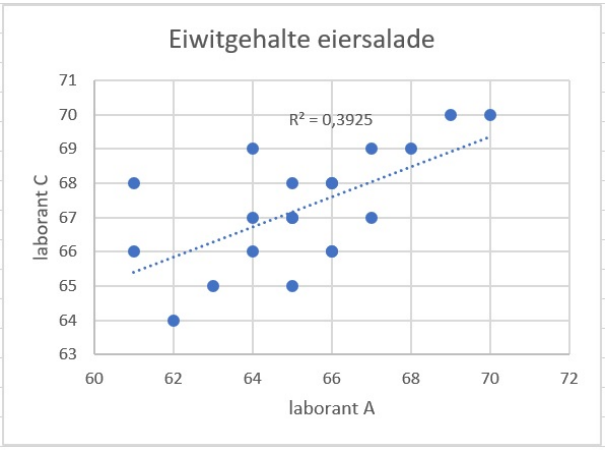
Opgave 12

Hier zie je het spreidingsdiagram met de gegevens van laborant C vergeleken met die van laborant B.

a Bereken de correlatiecoëfficiënt en ga na dat ook deze correlatie nog steeds voldoet aan de 95%-betrouwbaarheidsgrens.

Kijk je echter naar de gegevens, dan kun je moeilijk volhouden dat de metingen overeen komen.

b Leg dat uit en verklaar wat er waarschijnlijk aan de hand is.

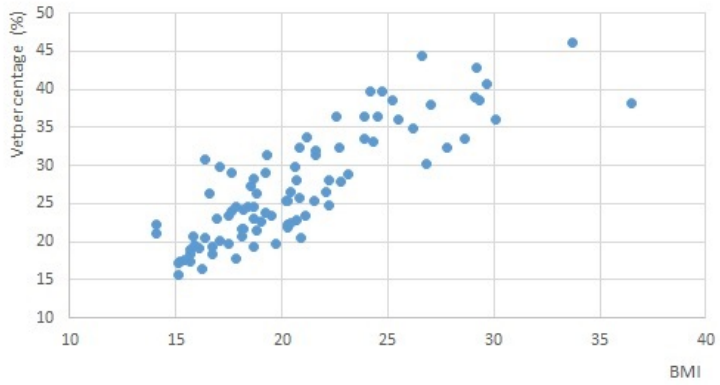


Figuur 17.9

Testen

Opgave 13

Bekijk de puntenwolk BMI-Vetpercentage. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek onder 90 jongeren. BMI is een getal dat samenhangt met lengte en gewicht, vetpercentage is het percentage van het lichaamsgewicht dat bestaat uit vet.



Figuur 17.10

a Is er een statistische samenhang? Geef een schatting van de correlatiecoëfficiënt.

b Is er een oorzakelijk verband?

c Bij deze puntenwolk kun je een trendlijn tekenen die door (15,17) en (30,42) gaat. Welke formule hoort bij deze trendlijn?

d Voorspel met behulp van de gevonden trendlijn het vetpercentage van iemand met een BMI van 21.

Opgave 14

Van een tiental personen worden reactietijden gemeten.
Iemand onderzoekt of de reactietijd *tG* op een geluidssignaal afhangt van de reactietijd *tL* op een lichtsignaal. Beide reactietijden zijn in milliseconden.

persoon	tL	tG
1	305	280
2	240	205
3	360	350
4	230	230
5	430	340
6	250	220
7	310	290
8	420	390
9	260	265
10	295	245

Tabel 17.7

a Teken een bijpassend spreidingsdiagram en bepaal de correlatiecoëfficiënt.

b Kun je met een betrouwbaarheid van 95% vaststellen dat er inderdaad een positieve correlatie bestaat?

c Iemand reageert op een geluidssignaal na 300 ms.
Hoe snel zal zij op een lichtsignaal reageren?

17.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het trekken van conclusies uit metingen in steekproeven aan bod gekomen. Bij het doen van een uitspraak over één statistische variabele gaat het bij de juistheid om een z-toets of een t-toets en bij de spreiding om een f-toets. Bij twee statistische variabelen gaat het om het vinden van een lineair verband tussen beide en het vaststellen van de sterkte van de samenhang.

Je hebt nu alle theorie van **Conclusie trekken** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- hypothese toetsen, enkelzijdig of dubbelzijdig — significantieniveau — kritieke gebied — nulhypothese en alternatieve hypothese — normale toets van het gemiddelde, z-toets
- Student's t-verdeling — vrijheidsgraad — t-toets van het gemiddelde
- Fisher's f-verdeling — f-toets van de spreiding
- spreidingsdiagram, puntenwolk — correlatiecoëfficiënt — regressielijn

Activiteitenlijst

- het gemiddelde van een normaal verdeelde populatie toetsen met een bepaalde betrouwbaarheid als de populatiestandaarddeviatie bekend is met behulp van een steekproef;
- het gemiddelde van een normaal verdeelde populatie toetsen met een bepaalde betrouwbaarheid als de populatiestandaarddeviatie niet bekend is met behulp van een kleine steekproef;
- de standaarddeviaties van twee steekproeven uit een normaal verdeeld populatie met een bepaalde betrouwbaarheid vergelijken;
- bij een spreidingsdiagram de correlatiecoëfficiënt berekenen en interpreteren — bij een spreidingsdiagram een regressielijn berekenen en daarmee voorspellingen doen.

Testen

Opgave 1

Volgens de informatie op een pakje drinkyoghurt zou dit gemiddeld 12,5 gram suiker bevatten. Een onderzoeksbureau beweert dat er in werkelijkheid veel meer suiker in de pakjes zit.

De leverancier van de pakjes besluit een steekproef van 50 pakjes te nemen. De pakjes uit de steekproef bevatten gemiddeld 16,4 gram suiker.

Neem aan dat de hoeveelheid per pakje normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 3,1 gram.

Onderzoek of dit resultaat voldoende aanleiding is om de informatie die op de pakjes staat te verwerpen. Neem een significantieniveau van 1%.

Opgave 2

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald en in een tabel gezet.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

Tabel 17.1

Je mag aannemen dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.

a Formuleer de hypothesen in deze situatie.

b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het percentage rietsuiker in de steekproef. Rond af op drie decimalen.

c Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0{,}10$.

Opgave 3

Artsen schrijven aspirines voor aan hartpatiënten om te voorkomen dat bloedklonters aderen zullen verstoppen. Bij 12 volwassen mannen is onderzocht of het gebruik van aspirines een positieve invloed heeft op klontervorming in het bloed, dat wil zeggen, dat de stollingstijd groter wordt.

De stollingstijd (in minuten) werd gemeten vóórdat de mannen aspirines innamen en drie uur na het innemen van twee aspirines, zie de tabel.

stollingstijd vooraf	11,3	10,9	11,0	11,2	11,8	11,3	12,3	12,8	13,0	12,0	12,0	12,3
stollingstijd achteraf	11,7	11,3	11,5	11,5	11,6	10,7	12,7	13,5	12,0	12,5	12,3	12,5

Tabel 17.2

a Onderzoek met behulp van een f-toets of beide steekproeven even precies zijn met een betrouwbaarheid van 95%.

b Onderzoek met behulp van een t-toets of de stollingstijd van het bloed significant is toegenomen. Gebruik een betrouwbaarheid van 95%.

Opgave 4

Bekijk de tabel met de (geschatte) woordenschat die eentalige Nederlandse kinderen hebben.

leeftijd	woordenschat
4	3000
5	3800
6	4500
7	5200
8	6000
9	8500
10	11000
11	14000
12	17000

Tabel 17.3

Wat mag je, op basis van de gegevens uit deze tabel, concluderen omtrent het verband tussen de leeftijd en de woordenschat van een eentalig Nederlands kind? En kun je hiermee bijvoorbeeld voorspellen hoe groot de woordenschat van een volwassene is?

bron: www.cbsdeakker.nl

Opgave 5

In 1947 hielden de wiskundigen Freudenthal en Sittig een statistisch onderzoek ten behoeve van een nieuw maatsysteem voor vrouwenkleding in opdracht van het warenhuis De Bijenkorf. Zij lieten daarbij een grote verscheidenheid aan lichaamsmaten opmeten van 5001 vrouwen. Zij vonden onder andere een sterke correlatie tussen de taille (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de navel) en de bovenwijdte (de omtrek van het lichaam gemeten ter hoogte van de borst). De gevonden correlatiecoëfficiënt bedroeg ongeveer 0,9058.
In hun rapport 'De juiste maat' geven zij voor de bovenwijdte b een gemiddelde van 97,99 cm met een standaardafwijking van 10,12 cm en voor de taille t een gemiddelde van 80,45 cm met een standaardafwijking van 10,80 cm.

a Welke betekenis heeft deze hoge correlatie tussen b en t voor een spreidingsdiagram van deze twee variabelen?

b Stel een vergelijking op van de regressielijn voor b.

c Geef een statistisch verantwoorde schatting van de bovenwijdte van een vrouw met een taille van 90 cm.

Toepassen

Opgave 6: Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram. Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking σ van 4 gram.

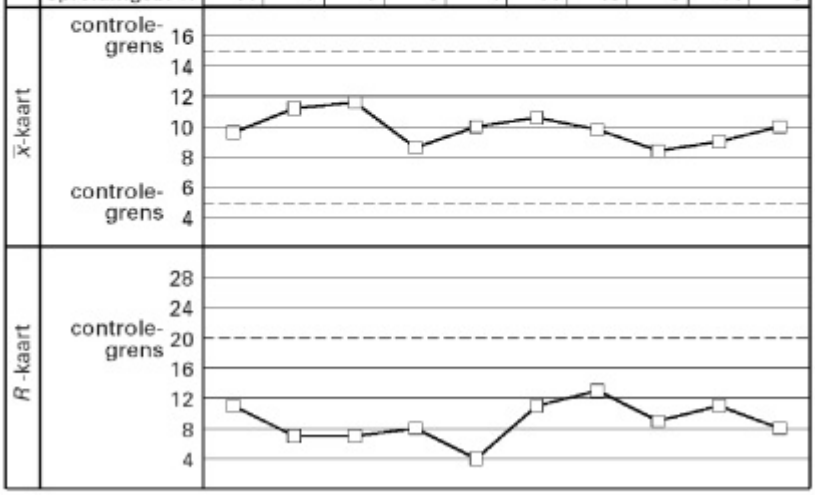
a Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselecte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

b Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting). Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\bar{x}/R$-kaart. Op de $\bar{x}/R$-kaart hieronder staan de meetresultaten van 10 steekproeven. Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5. Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9.
Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6. De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is 515 – 504 = 11 gram.

	steekproefnr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	x_1	12	8	10	8	11	9	12	2	5	12
	x_2	15	12	13	13	12	14	11	11	8	12
	x_3	7	9	15	11	8	●	7	9	7	13
	x_4	4	12	12	6	9	●	16	10	9	8
	x_5	10	15	8	5	10	●	3	10	16	5
	totaal T	48	56	58	43	50	53	49	42	45	50
	gemiddelde $\bar{x}$	9,6	11,2	11,6	8,6	10	10,6	9,8	8,4	9	10
	spreidingsbr R	11	7	7	8	4	11	13	9	11	8



Figuur 17.1

Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.

c Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\bar{x}/R$-kaart let men erop of $\bar{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm.
Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\bar{x}$ niets mis is.

d Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

Register

a

aangrijpingspunt 500
abc-formule 271
absolute frequentie 582
absolute onnauwkeurigheid 574
absolute spreiding 604
actiegrens 656
afhankelijk variabele 106
afronden 32
aftrekken 14, 17
alternatieve hypothese 672
amplitude 402
f-verdeling 688
x_{top} 278, 14

aselect 564
asymptoot 342

b

balansmethode 148
beelddiagram 582
bergparabool 254
beschrijvende statistiek 564
betrouwbaarheid 647
betrouwbaarheidsinterval 647
binair getal 195
binaire complement 201
binaire stelsel 195
bissectrice 474
booglengte 386
bouwtekening 538
bovenaanzicht 532
boxplot 594
breuk 61
breuk vereenvoudigen 61
breuken aftrekken 71
breuken delen 71
breuken met variabelen 169
breuken optellen 71
breuken vermenigvuldigen 71
breukrekenen 71

c

causaal verband 696
centrummaat 594
cirkel 467
cirkeldiagram 582
cirkelsector 467
component 500
conclusie 564
congruent 445
constante functie 331
controlekaart 656
correlatiecoëfficiënt 696
cosinusregel 512
cos-functie 394, 19

d

dalparabool 254
data 564
de t-verdeling 680
decimaal getal 61
decimale getal 10
decimale komma 10, 11
decimale punt 11
decimale stelsel 10
deellijn 474
definities 475
delen 16, 17
diagonaal 435
diagonaalvlakken 524
diagram 582
discriminant 269, 271
doorsnede 541
draaihoek 386
drieaanzicht 532
driehoek 435

e

eenheid 46
eenheidscirkel 386
evenredigheidsconstante 223, 290, 299
evenwichtsstand 402
evenwijdige lijnen 236
exponent 40, 86
exponentiële functie 342
exponentiële groei 331
extreme waarde 254

f

factor 122
formules 106
frequentie 378, 402
frequentietabel 582
frequentieverdeling, vorm 618

g

gaa 604
gebroken functie 318

gelijknamig maken 61
gelijksoortige termen 113
gelijkvormig 445, 486
gemiddelde 594, 630
getallenlijn 10
goniometrische verhoudingen 486
groeifactoren omrekenen 331
grondtal 86
grondvlak 524
grootheid 46

h
haakjes uitwerken 131
halveringstijd 342
hellingsgetal 223, 229, 236
herleiden 86, 113
hexadecimale talstelsel 208
hoekpunt 435
hoekpunten 524
hoogte 524
hoogtelijn 474
horizontale asymptoot 299
horizontale verschuiving 402
hypothese toetsen 672

i
iqr 604
indeling in klassen 582
ingeschreven cirkel 475
inhoud 550
inklemmen 148
inverse functie 357

j
juiste metingen 574
juistheid 594

k
kaartdiagram 582
kritiek gebied 672
kromme van gauss 630
kruisende lijnen 541
kwadraten 86
kwadratische functie 254
kwadratische vergelijking 269, 271
kwalitatieve variabelen 564
kwantitatieve variabelen 564

l
lengte 500
lengtevergrotingsfactor 550
lichaam 524
lichaamsdiagonalen 524
lijndiagram 582
lineair model 243
lineair statistisch verband 696
lineaire functie 229
lineaire groei 331
lineaire vergelijking 243
linkszijdige toets 672
logaritme 350
logaritmische functie 357
logaritmische schaalverdeling 364
logische poorten 214

m
macht van 10 40
machten 86
machtsfunctie 290
machtsverheffen 86
maximum 254
meetfout 574
meetonnauwkeurigheid 574
meter 457
middellijn 467
middelloodlijn 473, 474
midden van een cirkel 467
minimum 254
modale klasse 594
modelleren 413

n
noemer 61
normale statistische variabele 638
normale verdeling 630, 638
nulhypothese 672
nulpunt 243
nulpunten 254, 263
n-de-machts worteltrekken 93

o
omgekeerd evenredig met een macht 299
omgeschreven cirkel 473, 475
omtrek 457, 493
onderzoeksopdrachten 427
ongelijkheid 184
ontbinden in factoren 263
op ware grootte 542
oplossing van een vergelijking 148
oppervlakte 457, 493, 550
oppervlakteformules 457
oppervlaktevergrotingsfactor 550
optellen 14, 17
optimaliseren 421
orde van grootte 32
ordenen 564
overeenkomstige hoeken 445
overeenkomstige zijden 445

p

parabool 253, 254
parallax 574
parallelprojectie 532
percentage 79
periode 378, 402
periodiek verband 378
persoonlijke fout, blunder 574
populatie 564
populatiegemiddelde 647
preciese metingen 574
precisie 604
procent 79
product 16, 17
promillage 79
promille 79
puntenwolk 582, 696

q

quotiënt 16, 17

r

radiaal 386
recht evenredig 223
recht evenredig met een macht 290
recht evenredig verband 223
rechtszijdige toets 672
regelkaart 656
regressiecoëfficiënt 696
regressielijn 696
rekenen 17
rekenen met binaire getallen 196, 201
rekenregels voor machten 162, 290, 300
relatieve frequentie 582
relatieve onnauwkeurigheid 574
representatief 564
rest 18
ribben 524
richtingscoëfficiënt 223, 229, 236
richtingshoek 500

s

shewhartkaart 656
samengestelde eenheid 47
schaalverdeling 10
schatten 32
significante cijfers 32
significantieniveau 672
sinusoïde 401
sinusregel 507
sin-functie 393, 19
snijpunt 243
som 14, 17
spreidingsdiagram 582, 696
spreidingsmaat 604
staafdiagram 582
stam-blad-diagram 582
standaardafwijking 630
standaarddeviatie 630
standaardfunctie 309
standaardnormale verdeling 638
statistisch onderzoek 564
statistische variabele 564
steekproef 564
steekproefgemiddelde 647
steekproevenverdeling 647
stelling van pythagoras 445, 486
straal 467
substitutie 106
symmetrieas 253, 254
systematische onnauwkeurigheid 574

t

tabellen 106
technische notatie 40
tegengestelde 10
teller 61
term 113
terugrekenen 148
toevallige onnauwkeurigheid 574
tolerantiegrens 656
top 253, 254, 263
transformatie van een grafiek 309
translatie 309
twee breuken op elkaar delen 70
tweede kwartiel 594
tweedegraads vergelijking 269, 271
tweezijdige toets 672

u

uitbijter 604
uitdrukken in 176
uitdrukkingen 113
uiterste waarde 254

v

variabele 106
variabelen vermenigvuldigen 122
variantie 630
vector 500
veelhoek 435
veelvlak 524
verband tussen variabelen 106
verdubbelingstijd 342
vergelijking 148
vergelijking van de lijn 229
vergroting 486
vergrotingsfactor 445, 486

verhoudingstabel 445
vermenigvuldigen 16, 17
vermenigvuldiging ten opzichte van een as 309
verschil 14, 17
verschuiving 309
verticale asymptoot 299
vierhoek 435
vierkante meter 457
volume 550
volumevergrotingsfactor 550
vooraanzicht 532
voorrangsregels 24
voorvoegsel bij eenheid 47
vrijheidsgraad 680

w
worteltrekken 93
waarheidstabel 214
waarschuwingsgrens 656
wetenschappelijke notatie 40
wortelfunctie 318

z
zijaanzicht 532
zijde 435
zijvlaksdiagonalen 524
zwaartelijn 474

α
α 672

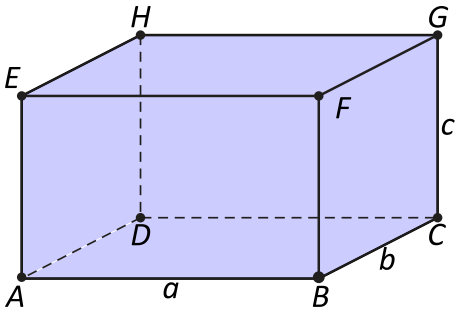
Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website `www.math4all.nl`.
De volgorde van de onderwerpen in dit boek is gekozen door de auteurs van Math4All. Indien u in uw klas een andere volgorde wilt hanteren, maar een boek nog steeds op prijsstelt nodigen we u uit om gebruik te maken van de Math4All maatwerkdienst waarmee u zelf boeken kunt genereren.

Stichting Math4All

Math4all
www.math4all.nl

4Math MBO
www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 2 op pagina 139



a Wat stelt $l = 4a + 4b + 4c$ voor?

b Waarom is $\frac{4a+4b+4c}{4} = a + b + c$?

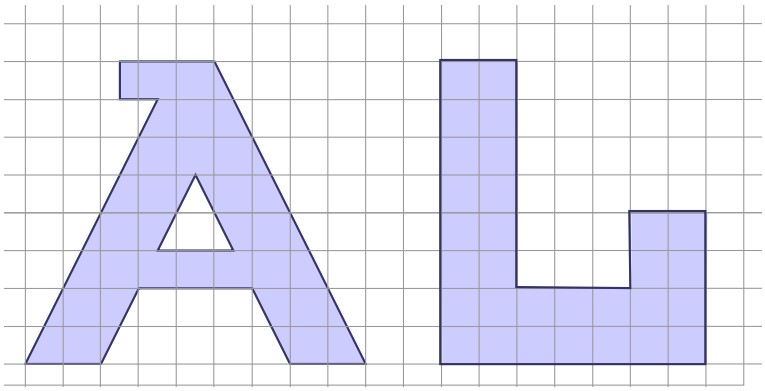
c Wat stelt $V = a \cdot b \cdot c$ voor?

d Leg met behulp van de figuur op het werkblad uit dat $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c$

e Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot c$?

f Waarom is $\frac{a \cdot b \cdot c}{4} = \frac{a}{4} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{4} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{4}$?

Werkblad bij opgave 14 op pagina 462.

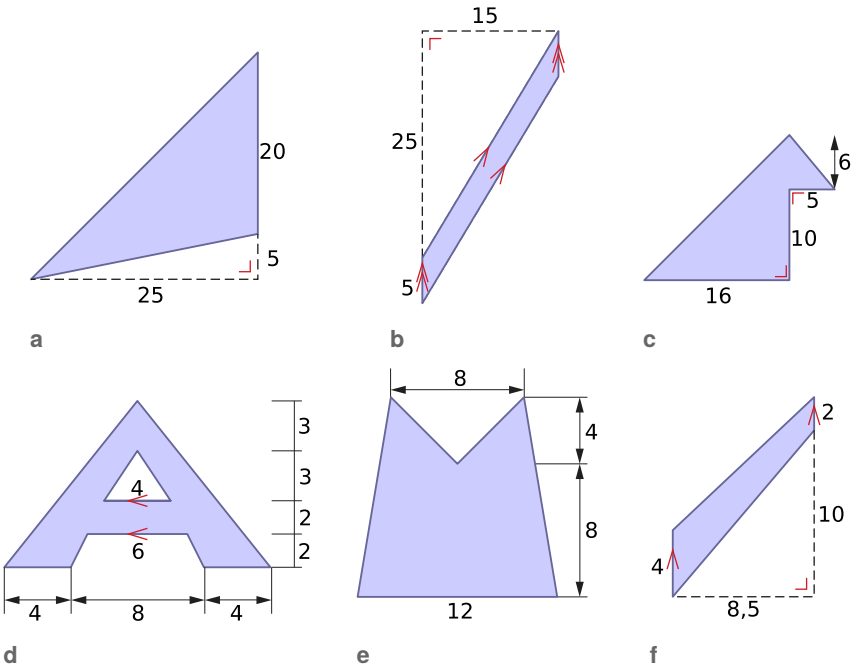


a Bereken van zowel de A als de L de exacte oppervlakte in mm^2.

b Waarom kun je wel van de L, maar niet van de A de exacte omtrek bepalen?

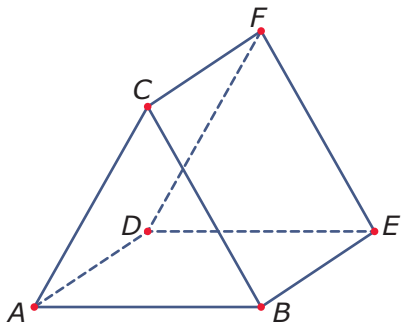
c Bereken de omtrek van de L in mm.

Werkblad bij opgave 15 op pagina 462.



Bereken de oppervlakte van de figuren. Je mag ervan uitgaan dat de figuren d en e lijnsymmetrisch zijn.

Werkblad bij opgave 2 op pagina 523



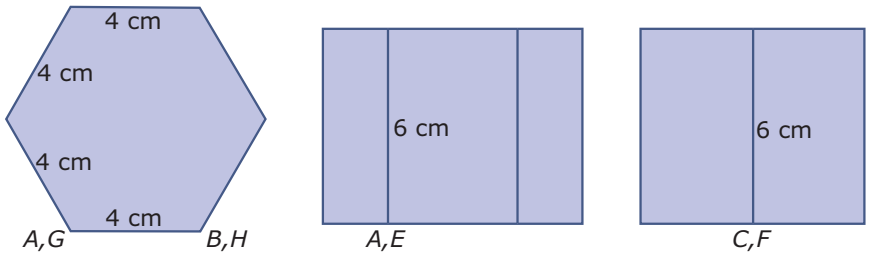
a Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?

b Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma?

c M is het midden van ribbe CF. Teken ΔABM zowel in de figuur als op ware grootte.

d Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

Werkblad bij opgave 1 op pagina 531



a Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?

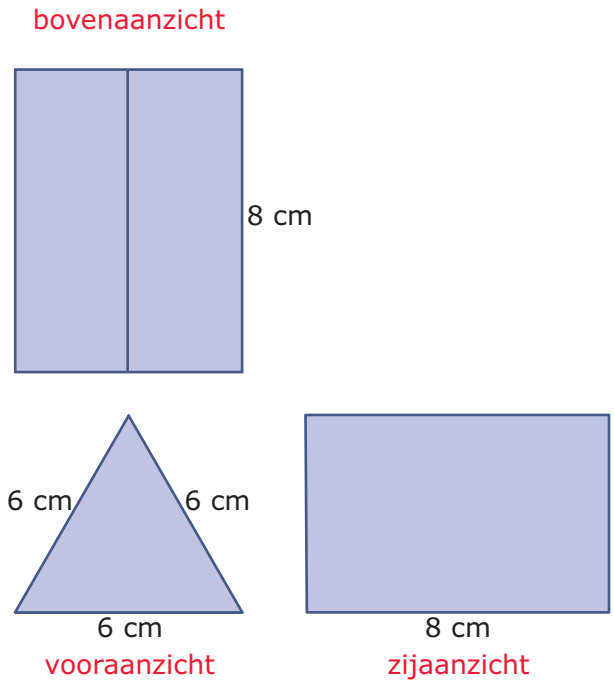
b Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?

c In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?

d Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.

e Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Werkblad bij opgave 3 op pagina 531

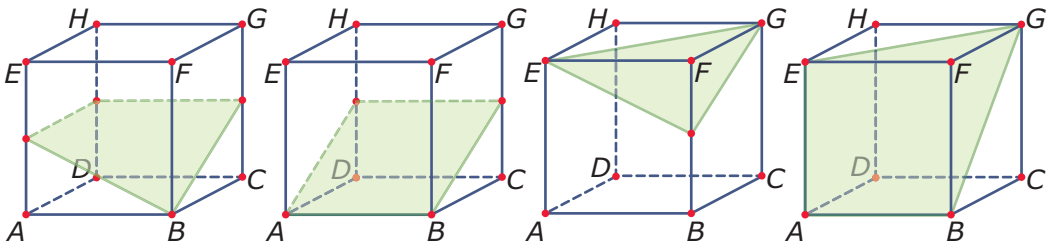


a Om wat voor lichaam gaat het hier?

b Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?

c De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.

Werkblad bij opgave V1 op pagina 540



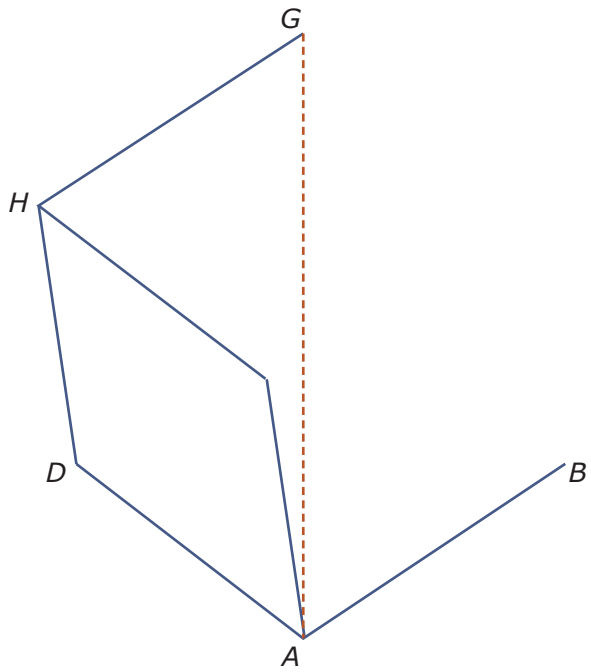
figuur I figuur II figuur III figuur IV

a Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?

b Verbeter de foute figuren.

c Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Werkblad bij opgave 14 op pagina 546



a Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

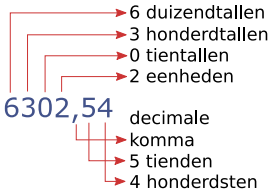
b Teken die vloer in jouw kubus.

c Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.

Spiekbriefjes bij Rekenen 1

Getallen

Getallen schrijf je in het **decimale stelsel**.
Daarbij gebruik je de cijfers $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.
De plaats van het cijfer geeft zijn waarde aan. De **decimale komma** scheidt de eenheden en de tienden.



Gehele getallen hebben geen cijfers achter de komma.

Het **tegengestelde** van $16302{,}54$ is $-16302{,}54$.
Dit is een negatief getal.

Op een **getallenlijn** of **schaalverdeling** zitten de positieve getallen rechts van 0 en de negatieve getallen links van 0.
Hoe groter een getal, hoe verder het naar rechts zit, hoe kleiner een getal hoe verder het naar links zit.
Voor ‘groter dan’ gebruik je het teken >, voor ‘kleiner dan’ het teken <.

meer info

Rekenen

Je kunt met decimale getallen **rekenen**. De vier basisbewerkingen zijn:

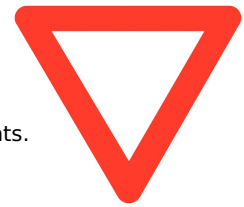
- **optellen**, je krijgt dan de **som** van beide getallen;
- **aftrekken**, je krijgt dan het **verschil** van beide getallen;
- **vermenigvuldigen**, je krijgt dan het **product** van beide getallen;
- **delen**, je krijgt dan het **quotiënt** van beide getallen.

Verder kun je zowel met positieve als negatieve getallen rekenen:

- **optellen, aftrekken**: $a + -b = a - b$ en $a - -b = a + b$.
- **vermenigvuldigen, delen**: getallen met hetzelfde teken hebben een positieve uitkomst en getallen met verschillende tekens een negatieve uitkomst.

meer info

Rekenvolgorde



Bij rekenen gebruik je deze **voorrangsregels**:

1. Eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Dan machtsverheffen en worteltrekken van links naar rechts.
3. Dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
4. Tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Machtsverheffen is het herhaaldelijk met hetzelfde getal vermenigvuldigen:
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
Worteltrekken is het terugrekenen vanuit een kwadraat: $\sqrt{64} = 8$ want $8^2 = 8 \times 8 = 64$.
Worteltrekken levert niet altijd een exact reëel getal op, vaak moet je afronden.

LET OP: Soms vervangt een lange streep de haakjes:
$\frac{6}{5+7} = 6/(5+7) = 6/12 = 0{,}5$ en $\sqrt{16+9} = \sqrt{(16+9)} = \sqrt{25} = 5$.

meer info

Afronden en schatten

Bij **afronden** van een getal op een bepaald cijfer, bekijk je het eerstvolgende cijfer:

- als dit eerstvolgende cijfer 0, 1, 2, 3, of 4 is, blijft het cijfer waarop je wilt afronden gelijk en worden alle cijfers erna nullen: $3{,}94 \approx 3{,}9$;
- als dit eerstvolgende cijfer 5, 6, 7, 8, of 9 is, wordt het cijfer waarop je wilt afronden 1 hoger en worden alle cijfers erna nullen: $3{,}95 \approx 4{,}0$.

Je gebruikt het **ongeveerteken** $\approx$ om aan te geven dat je hebt afgerond.

In praktijksituaties houd je bij het afronden met de omstandigheden rekening.

Soms kun je niet meer zeggen dan dat een getal tussen de 100 en de 1000 of tussen de 1000 en de 10.000 ligt. Je weet dan alleen de **orde van grootte**.

Schatten is grof afronden.

Bij berekeningen en metingen voorkom je fouten door van tevoren de uitkomst te schatten.

meer info

Machten van 10

Bij het werken met hele grote en hele kleine getallen gebruik je **machten van 10** zoals: $10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.
Het getal 4 is de **exponent** van de macht van 10.

Rekenvoorbeelden:
$10^5 \cdot 10^3 = 10^8$
$10^5 / 10^3 = 10^2$
$10^0 = 1$
$0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$

- In de **wetenschappelijke notatie** staat voor de macht van 10 altijd een getal vanaf 1 tot kleiner dan 10.
  153 miljard $= 153000000000 = 1{,}53 \cdot 10^{11}$
  45 miljoenste $= 0{,}000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$
- In de **technische notatie** is de exponent van de macht van 10 altijd een drievoud en staat voor de macht van 10 altijd een getal vanaf 1 tot kleiner dan 1000.
  153 miljard $= 153000000000 = 153 \cdot 10^{9}$
  45 miljoenste $= 0{,}000045 = 45 \cdot 10^{-6}$

Als vermenigvuldigingsteken gebruik je meestal de (hoge) punt.
Bij getallen vanaf 1 tot 1000 gebruik je de gewone schrijfwijze.

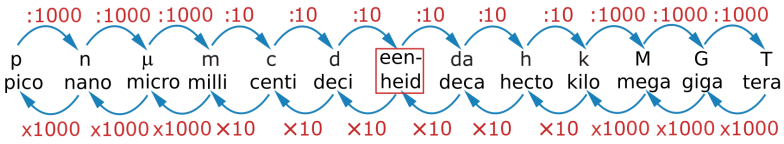
meer info

Eenheden

In het S.I.-stelsel zijn alle gebruikte **grootheden** met hun **eenheden** vastgelegd.
Veel voorkomende grootheden zijn: lengte l in m, oppervlakte A in m^2, inhoud of volume V in m^3 of L, massa m in kg, tijd in s, temperatuur T in °C of in K.

Eenheden die uit meer dan één eenheid bestaan (zoals snelheid in m/s), noem je **samengestelde eenheden**.

Meestal gebruik je **voorvoegsels** om tienvouden van die eenheden aan te geven.

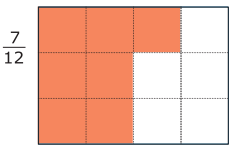


meer info

Spiekbriefjes bij Rekenen 2

Breuken

$\frac{7}{12}$ heet een **breuk**. 7 is de **teller** en 12 is de **noemer**.
Van de rechthoek is $\frac{7}{12}$ deel gekleurd.



$\frac{7}{12}$ en $\frac{14}{24}$ geven hetzelfde deel weer: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.
Je kunt $\frac{14}{24}$ **vereenvoudigen** door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Wil je breuken vergelijken dan moet je ze eerst **gelijknamig maken**. Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk.

Breuken met als noemer 10,100,1000,... kun je als **decimaal getal** schrijven: $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{123}{1000} = 0{,}123$. Bij andere breuken kan dat ook door de deling uit te voeren, met de hand of met een rekenmachine. Bij veel decimalen werk je met een benadering: $\frac{2}{7} \approx 0{,}286$.

meer info

Rekenen met breuken

Je kunt met **breuken rekenen**. De vier basisbewerkingen zijn:

- **breuken optellen**, je maakt ze dan eerst gelijknamig: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$
- **breuken aftrekken**, je maakt ze dan eerst gelijknamig: $\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5}{15} - \frac{6}{15} = -\frac{1}{15}$
- **breuken vermenigvuldigen**, door de tellers te vermenigvuldigen en de noemers te vermenigvuldigen: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$
- **breuken delen** door ze gelijknamig te maken: $\frac{1}{3} \Big/ \frac{2}{5} = \frac{5}{15} \Big/ \frac{6}{15} = \frac{5}{6}$
  Je kunt ook twee breuken delen door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede: $\frac{1}{3} \Big/ \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

Als er ook gehelen voorkomen werk je die eerst weg:
$2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5} = \frac{7}{3} - \frac{7}{5} = \frac{35}{15} - \frac{21}{15} = \frac{14}{15}$.

meer info

Breuken en procenten

1 **procent** is $\frac{1}{100} = 0{,}01$. Dus 1% ergens van is $\frac{1}{100}$ deel daarvan.

Zo bereken je welk **percentage** (hoeveel procent) 50 van de 125 is: $\frac{50}{125} \cdot 100 = 40\%$.

Bij het rekenen met procenten kun je werken met verhoudingstabellen.

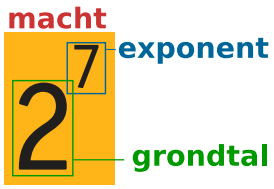
Je gebruikt procenten vooral om te vergelijken.
Om te bepalen of 11 van de 43 een groter of kleiner deel is dan 23 van de 81 bereken je dat $\frac{11}{43}$ om 25,58...% gaat en $\frac{23}{81}$ om 28,39...%.

getal	125		50
procent	100	1	?

1 **promille** is $\frac{1}{1000}$. Het teken daarvoor is ‰. 4‰ is een **promillage** en 4‰ van 500 is $\frac{4}{1000} \cdot 500 = 2$.

meer info

Machten



Je krijgt een **macht** als je met steeds hetzelfde getal vermenigvuldigt: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.

Je spreekt van **machtsverheffen** en je zegt '3 tot de macht 5', of kortweg '3 tot de vijfde'. 3^5 is een macht met **grondtal** 3 en **exponent** 5.

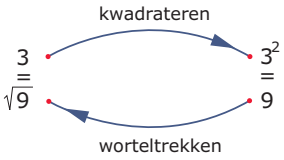
Een **kwadraat** zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.

Rekenregels om machten te **herleiden**:

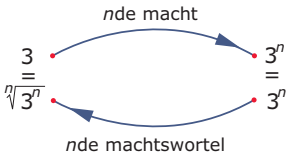
- machten vermenigvuldigen dan exponenten optellen: $10^4 \cdot 10^3 = 10^7$;
- machten delen dan exponenten aftrekken: $10^5 / 10^3 = 10^2$;
- machten van machten dan exponenten vermenigvuldigen: $(10^3)^4 = 10^{12}$;
- grondtal niet 0 en exponent wel: $10^0 = 1$;
- negatieve exponenten kunnen ook voorkomen: $10^3 / 10^5 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$;
- machten gaan in een berekening voor vermenigvuldigen en delen.

meer info

Wortels



Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
n-de-machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een $n$de macht. Zo geldt: $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$ en $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{7^3} = 7$.



Het rekenen met wortels gaat zo:

- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{7 \cdot 5}$ en $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7 \cdot 5}$
- $\sqrt{7} / \sqrt{5} = \sqrt{7/5}$ en $\sqrt[3]{7} / \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7/5}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.
- In de rekenvolgorde komen machten en wortels voor vermenigvuldigen en delen.

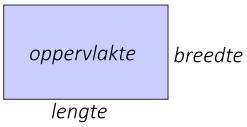
Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

meer info

Spiekbriefjes bij Algebra 1

Wat is een formule?

In een **formule** komen variabelen en een isgelijkteken voor. Bijvoorbeeld:
oppervlakte (rechthoek) = lengte × breedte.
De **variabelen** zijn *lengte*, *breedte* en *oppervlakte*.
Kies voor twee ervan een getal om de derde te berekenen.



Meestal kort je variabelen af tot letters: b voor *breedte*, l voor *lengte* en A voor *oppervlakte (rechthoek)*. De formule wordt dan: $A = l \cdot b$.

Als $l = 10$, dan wordt de formule $A = 10 \cdot b$ of $A = 10b$.
Dan is A **afhankelijk** van b en de formule geeft een **verband tussen twee variabelen** weer.

Je kunt er een **tabel** bij maken. Je **substitueert** voor b telkens een ander getal en rekent de waarde van A erbij uit.
En dan kun je een grafiek maken met A op de verticale as.

meer info

Variabelen optellen/aftrekken

Een formule zoals $P = 3x + 5y + 2x - x$ bestaat uit vier **termen**, waarvan er drie gelijksoortig zijn.

Je kunt de **uitdrukking** $3x + 5y + 2x - x$ **herleiden** door **gelijksoortige termen** samen te nemen: $3x + 2x - 1x + 5y = 4x + 5y$.

De formule is dan herleid tot: $P = 4x + 5y$.

Andere voorbeelden van herleiden zijn:

- $a + a + a = 3 \cdot a = 3a$
- $2a + 3a = 2 \cdot a + 3 \cdot a = a + a + a + a + a = 5a$.
- $2a + 3b$ kun je niet herleiden want er zijn geen gelijksoortige termen.
- $a + b = b + a$ en $a - b = -b + a$.
- $1a = a$ en $-1a = -a$.
- $0a = 0$.

meer info

Variabelen vermenigvuldigen

Je kunt **variabelen vermenigvuldigen**:

- $a \cdot b = ab$
- Vaak gebruik je de wisseleigenschap: $a \cdot b = b \cdot a$, dus $ab = ba$.
- $2a \cdot 3b = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$
- $2a \cdot 3a = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$
- $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

In bijvoorbeeld $2a \cdot 3b$ heten $2a$ en $3b$ de **factoren** van de vermenigvuldiging.

Weer kun je de gelijksoortige termen optellen of aftrekken:

- $3ab + b^2 + 4ab + b^2 = 3ab + 4ab + b^2 + b^2 = 7ab + 2b^2$
- $-4ab + 3ac - 5ac + 3ab = -4ab + 3ab + 3ac - 5ac = -ab - 2ac$
- $(2a)^3 - 2a^2 \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3 - 2a^3 = 6a^3$

meer info

Haakjes wegwerken

Soms komen in uitdrukkingen haakjes voor.

Je kunt die **haakjes wegwerken** door te gebruiken:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  of korter: $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  of korter: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Je kunt dit ook toepassen op aftrekkingen:

- $a \cdot (b - c) = a \cdot (b + \text{-}c) = a \cdot b + a \cdot \text{-}c = a \cdot b - a \cdot c$
  of korter: $a(b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (c - d) = (a + b) \cdot (c + \text{-}d) = a \cdot c + a \cdot \text{-}d + b \cdot c + b \cdot \text{-}d$
  of korter: $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$.
- En op dezelfde manier: $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

meer info

Som, verschil, product delen

Soms wil je een som, een verschil, of een product nog door een getal delen.

- Als je een som of een verschil van meerdere termen door een getal deelt, dan moet je alle termen door dat getal delen:
  $\frac{a \pm b \pm c}{g} = \frac{1}{g} \cdot (a \pm b \pm c) = \frac{a}{g} \pm \frac{b}{g} \pm \frac{c}{g}$
- Als je een product van meerdere factoren door een getal deelt, dan moet je één van die factoren door dat getal delen:
  $\frac{a \cdot b \cdot c}{g} = \frac{1}{g} \cdot a \cdot b \cdot c = \frac{a}{g} \cdot b \cdot c = a \cdot \frac{b}{g} \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{c}{g}$

meer info

Vergelijkingen

In een **vergelijking** zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. De waarden die beide beid uitdrukkingen gelijk maken heten de **oplossingen** van de vergelijking. Voor vergelijkingen met één variabele bestaan verschillende oplossingsmethoden:

- Bij de **inklemmethode** bepaal je de oplossing middels steeds nauwkeuriger tabellen. Dit gebruik je als je al grafieken hebt, of andere methoden niet werken.
- Bij de **terugrekenmethode** vervang je alle rekenstappen door de terugrekenstappen. Deze methode is bruikbaar als de variabele aan één kant van de vergelijking voor komt.
- Bij de **balansmethode** voer je aan beide zijden dezelfde bewerking uit om de vergelijking eenvoudiger te maken.

terugrekenen	
+	−
×	/
$\square^2$	$\sqrt{}$

Een andere handige manier is vergelijken met een berekening die dezelfde structuur heeft als de vergelijking.

meer info

Spiekbriefjes bij Algebra 2

Formules met machten

Je kunt uitdrukkingen waarin machten voorkomen herleiden door deze **rekenregels voor machten** te gebruiken:

- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $a^p / a^q = a^{p-q}$
- $a^0 = 1$

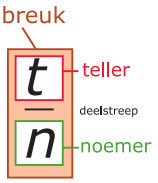
Dit kun je gebruiken bij het werken met machten van 10 en bij het herleiden formules met machten.

Daarbij kun je gebruik maken van gelijksoortige termen samennemen en haakjes wegwerken. Je kunt hiermee formules zo eenvoudig mogelijk schrijven. Vooral bij het oplossen van vergelijkingen heb je dergelijke herleidingen nodig.

meer info

Breuken met variabelen

Breuken kun je vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.



Het rekenen met **breuken met variabelen** gaat net als het rekenen van breuken met getallen:

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken gelijknamig: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je de tellers en de noemers: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig: $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} = \frac{ad}{bc}$

  Of je gebruikt $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling ook $c \neq 0$.

meer info

Formules met breuken herleiden

In formules en vergelijkingen komen regelmatig delingen (breuken) voor.

Bij een formule als $v = \frac{s}{t}$ is v uitgedrukt in s en t.

Dat is handig als je v wilt berekenen. Maar wil je s berekenen, dan kun je beter s **uitdrukken in** v en t.

Door met breuken te rekenen en/of de balansmethode te gebruiken kun je de formule of de vergelijking herleiden:

- $v = \frac{s}{t}$ kun je herleiden naar $s = v \cdot t$. Dan is s uitgedrukt in v en t.
- $v = \frac{s}{t}$ kun je ook herleiden naar $t = \frac{s}{v}$. Nu is t uitgedrukt in s en v.
- $p = \frac{1}{3}q + 4$ kun je herleiden naar $q = 3p - 12$. Nu is q uitgedrukt in p.

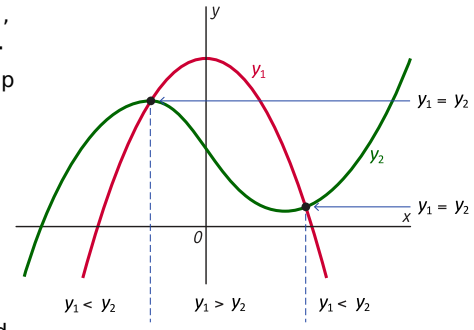
Denk er steeds om dat delen door 0 geen betekenis heeft.

meer info

Formules en ongelijkheden

Een uitdrukking zoals $y_1 > y_2$, $y_1 \geq y_2$, $y_1 \leq y_2$ of $y_1 < y_2$ heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Maak bij de formules voor y_1 en y_2 een grafiek. Snijpunten zichtbaar!
- Bereken de snijpunten door $y_1 = y_2$ op te lossen. Afronden doe je alleen als daarom wordt gevraagd.
- Lees de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let op de gewenste nauwkeurigheid!



meer info

Spiekbriefjes bij Talstelsels en Logica

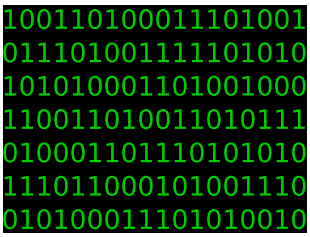
Binaire getallen

In het **binaire stelsel** noteer je getallen alleen met de symbolen 0 en 1. Je spreekt van bits. Het **binaire getal** 1011011 bijvoorbeeld komt overeen met

$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Dus: $1011011_2 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91_{10}$

Het omrekenen van een decimaal getal naar een binair getal doe je door steeds door 2 te delen en de rest (altijd 0 of 1) op te schrijven.



Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

meer info

Binair rekenen

Het **rekenen met binaire getallen** gaat op vergelijkbare wijze als in het decimale stelsel. Voor optellen en vermenigvuldigen gebruik je:

- $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ en $1 + 1 = 10$;
- $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 1$ en $1 \cdot 1 = 1$.

Bij aftrekken en delen werk je binnen een systeem met een vast aantal bits en het **binaire complement** van een getal. Dat is het getal de je krijgt door de nullen in énen en omgekeerd de énen in nullen te verwisselen en daar 1 bij op te tellen.

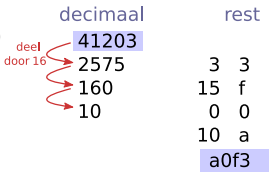
- Omdat $a - b = a + \text{-}\,b$ tel je a en het complement van b op.
- Bij de deling a/b trek je b zo vaak mogelijk af van a. Al die aftrekkingen zet je om in optellen van het complement van b.

meer info

Hexadecimale getallen

Het **hexadecimale talstelsel** is gebaseerd op machten van 16. Er zijn dan ook 16 symbolen nodig om een getal te maken, namelijk 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e en f.

- Van hexadecimaal naar decimaal:
  $5c06_{16} = 5 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 23558_{10}$
- Van decimaal naar hexadecimaal:
  Deel door 16 en schrijf de uitkomst met rest op.
  Herhaal dit tot onder de 16, de resten vormen het hexadecimale getal.

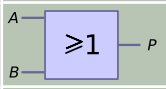
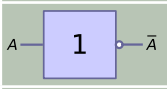
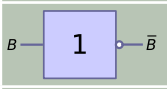


- Van hexadecimaal naar binair:
  Vervang elk teken door de bijbehorende 4-bits binaire code.
  Laat nullen vooraan weg.
- Van binair naar hexadecimaal:
  Verdeel het getal van rechts naar links in 4-bits tekens (eventueel extra nullen vooraan). Vervang elk 4-bits teken door zijn hexadecimale teken.

meer info

Logische schakelingen

Logische poorten zijn met name de EN-functie, de OF-functie en de NIET-functie.
Bij elk van die poorten zie je de bijbehorende **waarheidstabel** en het IEC-symbool.

		EN	OF	NIET	NIET
					
A	B	$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

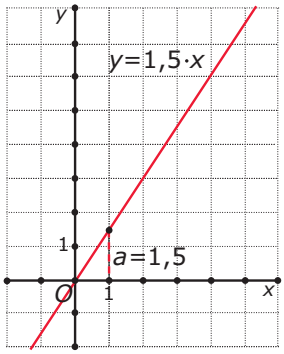
Hierbij geldt de rekenvolgorde: eerst NIET, dan EN en vervolgens OF.
Verder zijn er de **rekenregels van De Morgan**.

meer info

Spiekbriefjes bij Lineaire functies

Recht evenredig

Een variabele y is **recht evenredig** met variabele x als verdubbelen van x ook verdubbelen van y betekent. De bijbehorende formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$ met a een willekeurig reëel getal.
De bijbehorende grafiek is een rechte lijn die door de oorsprong gaat.



- a heet de **evenredigheidsconstante** en bepaalt hoe schuin de lijn loopt. Als $a > 0$ stijgt de lijn, als $a < 0$ daalt de lijn. a wordt ook **hellingsgetal** of **richtingscoëfficiënt** genoemd.

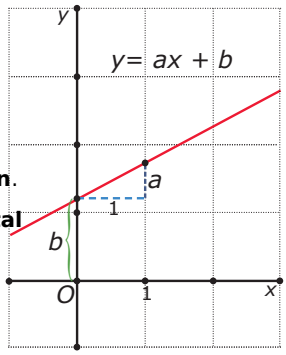
Omgekeerd hoort bij elke rechte lijn door de oorsprong een **recht evenredig verband** tussen x en y.

meer info

Lineaire functie

y is een **lineaire functie** van x als er een formule bijhoort van de vorm $y = a \cdot x + b$ met a en b willekeurige reële getallen.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
De formule $y = a \cdot x + b$ is de **vergelijking van de lijn**.



- a heet de **richtingscoëfficiënt** of het **hellingsgetal** van de lijn. Dit getal geeft de toename of afname van y als x met 1 wordt verhoogd.
- het snijpunt met de y-as is $(0,b)$.

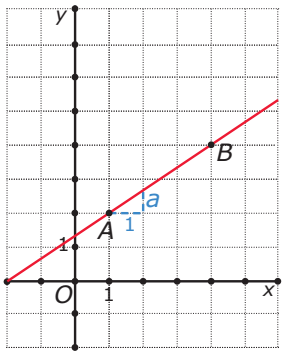
Bij elke rechte (niet verticale) lijn in een xy-assenstelsel hoort een **lineaire functie** die het verband tussen x en y beschrijft. Bij een verticale lijn kun je geen functie maken.

meer info

Hellingsgetal

De algemene formule voor een lineair verband is $y = a \cdot x + b$.

a is het **hellingsgetal**, of de **richtingscoëfficiënt**.



- Als $a > 0$ is de lijn stijgend, als $a < 0$ is de lijn dalend.
- Als $a = 0$ is de lijn evenwijdig aan de x-as.
- Een verticale lijn heeft geen hellingsgetal.
- Twee **evenwijdige lijnen** hebben hetzelfde hellingsgetal.

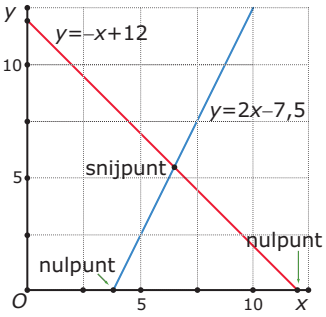
Zijn van een lineaire grafiek twee punten bekend, dan kun je een bijpassende formule opstellen. Je bepaalt dan eerst het hellingsgetal door te berekenen hoeveel de y-waarde toeneemt als de x-waarde met 1 toeneemt. (Dit kan alleen bij lijnen die niet verticaal lopen.)

meer info

Lineaire vergelijkingen

Bij een **lineair model** moet je vaak het **snijpunt** van de grafieken bij twee lineaire formules berekenen. Het snijpunt van de grafieken van $y = -x + 12$ en $y = 2x - 7{,}5$ bereken je zo:

- Je stelt beide formules aan elkaar gelijk: $-x + 12 = 2x - 7{,}5$.
- Deze **lineaire vergelijking** los je op: $x = 6{,}5$.
- De bijbehorende waarde van y vind je door de gevonden x-waarde in één van beide formules te substitueren.



Je krijgt als snijpunt van beide lijnen $(6{,}5; 5{,}5)$.

Een **nulpunt**, dus het snijpunt van de grafiek met de x as, vind je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.

meer info

Spiekbriefjes bij Kwadratische functies

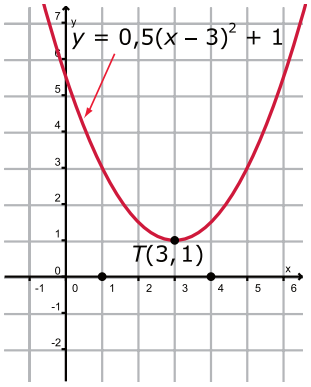
Kwadratische functies

Een **kwadratische functie** heeft een formule als $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ met $a \neq 0$. De grafiek is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$.

- Als $a > 0$ heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van q voor $x = p$.
- Als $a < 0$ heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van q voor $x = p$.

En maximum of een minimum heet een **uiterste waarde** of een **extreme waarde** van een functie.

De **nulpunten** (de x-waarden bij $y = 0$) bereken je door $a(x-p)^2 - q = 0$ op te lossen.

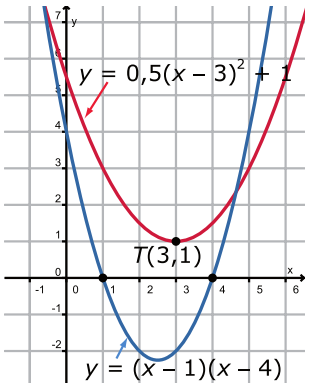


meer info

Soorten kwadratische functies

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen hebben:

- Bij de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x-as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.
- Bij de vorm $y = a(x-m)(x-n)$ kun je de nulpunten meteen zien: $(m,0)$ en $(n,0)$. De top heeft een x-coördinaat midden tussen m en n in.
- De vorm $y = ax^2 + bx + c$ probeer je door **ontbinden in factoren** te herleiden tot $y = a(x-m)(x-n)$. Dat lukt echter niet altijd...



meer info

De abc-formule

De oplossing van de **kwadratische vergelijking** of **tweedegraads vergelijking** $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ V $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Deze oplossing heet de **abc-formule**.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ te berekenen.

- Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D = 0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D < 0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Dus de oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

meer info

De top van een parabool

Elke kwadratische functie van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ heeft een symmetrieas $x = -\frac{b}{2a}$.

Dat is tevens de ***x*-waarde van de top**.
Je vindt de top door deze x-waarde in te vullen in de formule.

Je kunt met die top eenvoudig vaststellen of er nulpunten zijn:

- Als $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
  Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
  Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
  Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.
- Als $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
  Ligt de top dan onder de x-as, dan zijn er geen nulpunten.
  Ligt de top dan boven de x-as, dan zijn er twee nulpunten.
  Ligt de top dan op de x-as, dan is er één nulpunt, namelijk de top zelf.

meer info

Spiekbriefjes bij Machten en wortels

Recht evenredig met een macht

Een **machtsfunctie** heeft de vorm $y = c \cdot x^p$.
De constante c is de **evenredigheidsconstante** en y **recht evenredig met een macht** van x.

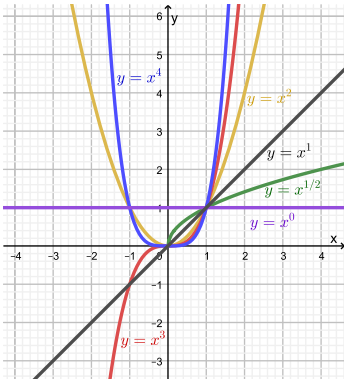
Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

$x = \sqrt[p]{y}$ of $x = y^{\frac{1}{p}}$

Afhankelijk van p heb je één of twee antwoorden.

De **rekenregels voor machten** zijn:

- $x^0 = 1$
- $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$.
- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$



meer info

Omgekeerd evenredig met een macht

y is **omgekeerd evenredig met een macht** van x als $y = \frac{c}{x^p}$. c is de **evenredigheidsconstante**.

Je kunt deze functies als machtsfuncties schrijven: $y = \frac{c}{x^p} = c \cdot x^{-p}$.

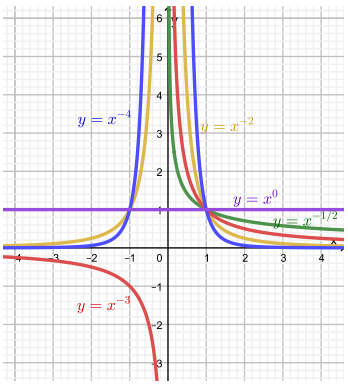
In de buurt van $x = 0$ naderen de grafieken de y-as, de y-as is een **verticale asymptoot**.

Voor x-waarden ver van 0 naderen de grafiek de x-as, de x-as is een **horizontale asymptoot**.

Vanuit deze functies kun je zo terugrekenen:

- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $c \cdot x^{-p} = y$ en dan delen door c en de omgekeerde macht gebruiken;
- $\frac{c}{x^p} = y$ geeft $x^p = \frac{c}{y}$ en dan de omgekeerde macht of de p-de machtswortel gebruiken.

Afhankelijk van de waarde van p heb je één of twee antwoorden.



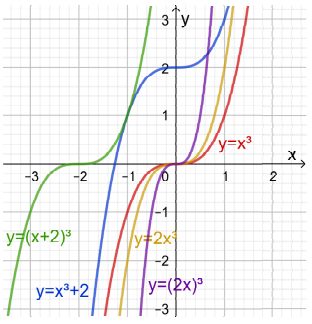
meer info

Grafieken verschuiven en vervormen

Ga uit van een **standaardfunctie** zoals $y = x^3$.

Je kunt daarop **transformaties** toepassen:

- De blauwe grafiek $y = x^3 + 2$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de y-richting 2 eenheden te verschuiven.
- De groene grafiek $y = (x + 2)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de x-richting -2 eenheden te verschuiven.
- De oranje grafiek $y = 2 \cdot x^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de y-richting met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De paarse grafiek $y = (2 \cdot x)^3$ ontstaat door de grafiek van $y = x^3$ in de x-richting met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

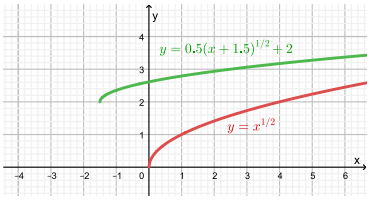


meer info

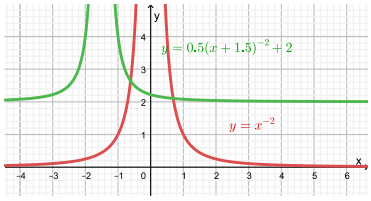
Wortelfuncties en gebroken functies

Als je een **wortelfunctie** kunt schrijven in de vorm $y = a(x+b)^{\frac{1}{n}} + c$, waarin $n = 2,3,4,...$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{\frac{1}{n}}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.

Als je een **gebroken functie** kunt schrijven in de vorm $y = a(x+b)^{-n} + c$, waarin $n = 1,2,3,4,...$, dan kan hij ontstaan door transformatie van $y = x^{-n}$.
Hij heeft dan dezelfde eigenschappen als die machtsfunctie.



wortelfuncties



gebroken functies

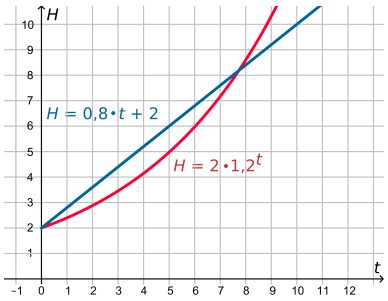
meer info

Spiekbriefjes bij Exponenten en logaritmen

Exponentiële groei

Je ziet hier grafieken bij twee soorten groei:

- **Lineaire groei** met formule: $H = a \cdot t + b$.
  Grafiek: rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal a.
- **Exponentiële groei** met formule:
  $H = b \cdot g^t$.
  Grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0,b)$ als de **groeifactor** $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0,b)$ als $0 < g < 1$.



Als $g^0 = 1$ is, krijg je een **constante functie**.

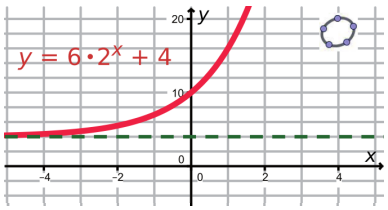
Groeifactor omrekenen: groeifactor 1,5 per dag is $1{,}5^7$ per week en $1{,}5^{\frac{1}{24}}$ per uur.

meer info

Exponentiële functies

Een functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ is een **exponentiële functie**.

- Als $g > 1$ is de grafiek stijgend;
- als $0 < g < 1$ is de grafiek dalend.



Al deze functies hebben een **asymptoot** $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichter bij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Alleen als $a = 0$ is er sprake van exponentiële groei.

De **verdubbelingstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid verdubbelt.

De **halveringstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid halveert.

meer info

Logaritmen

De **10-logaritme** $x = \log(c)$ is de oplossing van $10^x = c$.

Dus geldt dan ook: $\log(10^c) = c$ en $10^{\log(c)} = c$.

De 10-logaritme is de terugrekenbewerking van de exponentiële functie met grondtal 10 en omgekeerd.

De ***g*-logaritme** $x = {}^g\log(c)$ is de oplossing van $g^x = c$.

Ook hier geldt: ${}^g\log(g^c) = c$ en $g^{{}^g\log(c)} = c$.

De logaritme ${}^g\log(c)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $c > 0$.

Het verband tussen ${}^g\log(c)$ en $\log(c)$ is: ${}^g\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

Hiermee kun je logaritmen met een willekeurig grondtal op een rekenmachine berekenen. Soms kan dit rechtstreeks, het grondtal staat dan als: $\log_g(c)$.

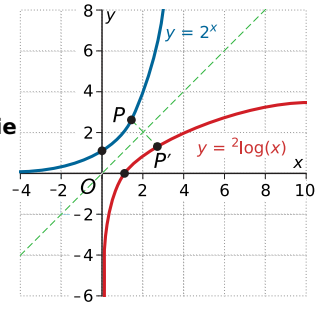
meer info

Logaritmische functies

Een functie van de vorm $y = {}^{g}\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal met: $g > 0$ en $g \neq 1$

$y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** of **inverse** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:



- alleen x-waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

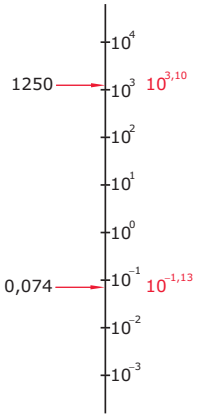
meer info

Logaritmische schaalverdeling

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Met de log-knop op de rekenmachine kun je vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$
  1250 komt 3,10 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$
  0,074 komt 1,13 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-1} en 10^{-2}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn. Er bestaat speciaal enkellogaritmisch papier, wat je gebruikt om na te gaan of er een exponentieel verband is.

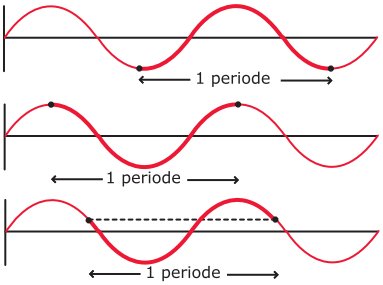


meer info

Spiekbriefjes bij Periodieke functies

Periodiciteit

De **periode** van een **periodiek verschijnsel** is de lengte van het kortste interval op de horizontale as dat hoort bij het deel van de grafiek dat zich steeds herhaalt.
De periode kan lopen:



- van een maximum tot het eerstvolgend maximum,
- van een minimum tot het eerstvolgend minimum,
- van een willekeurig punt tot het volgende punt waarop de grafiek dezelfde hoogte én dezelfde daling of stijging heeft.

Als op tijdstip t een bepaalde uitkomst voorkomt, komt diezelfde uitkomst ook voor op $t + k \cdot$ periode, waarin k een geheel getal is.

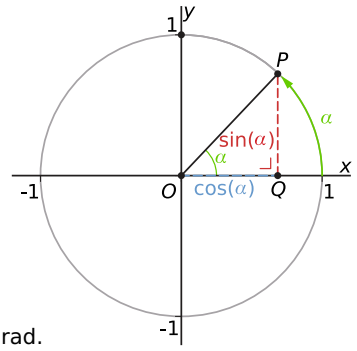
Het aantal periodes per tijdseenheid is de **frequentie**: frequentie $= \frac{1}{\text{periode}}$

meer info

Graden en radialen

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1) met middelpunt in O. Punt P ligt op de eenheidscirkel.

De **draaihoek** α van P is de **booglengte** vanaf $(1,0)$ tot P. Bij linksom draaien is deze hoek positief, bij rechtsom draaien negatief. Er geldt:



$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

De eenheid voor deze hoek heet **radiaal**, afgekort rad.

Op de eenheidscirkel komt $180°$ overeen met π radialen, dus $180° = \pi$ rad

Tenzij anders aangegeven, wordt de hoekeenheid rad gebruikt. Let op de instelling van je rekenmachine.

meer info

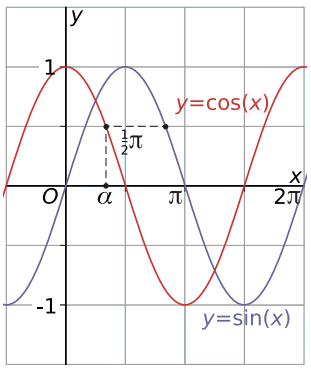
Sinus- en cosinusfuncties

De **standaard sinusfunctie** $y = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$

De **standaard cosinusfunctie** $y = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$



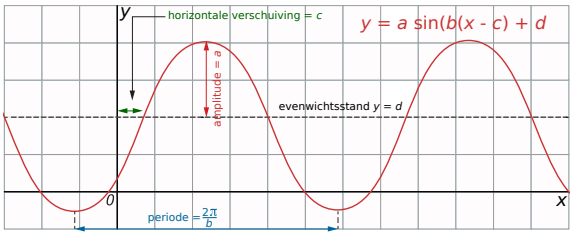
De grafiek van $y = \cos(x)$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

meer info

Periode, amplitude, evenwichtsstand

Door transformaties van $y = \sin(x)$ kun je **sinusoïden** $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.

Voor de grafiek van $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ geldt:



- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a;
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$; de **frequentie** is het aantal periodes per tijdseenheid;
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een verschuiving in de x-richting;
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$.

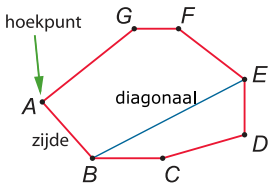
De grafiek van $y = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want

$y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

meer info

Spiekbriefjes bij Vlakke figuren

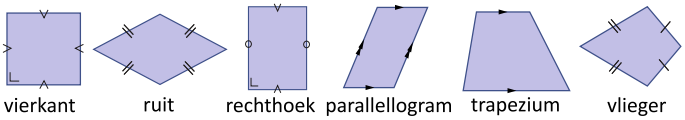
Driehoeken en vierhoeken



Een **veelhoek** bestaat uit **hoekpunten** en lijnstukken die samen een deel van het vlak insluiten. Deze lijnstukken heten **zijden**. Lijnstukken tussen twee hoekpunten die geen zijde zijn, heten **diagonalen**.

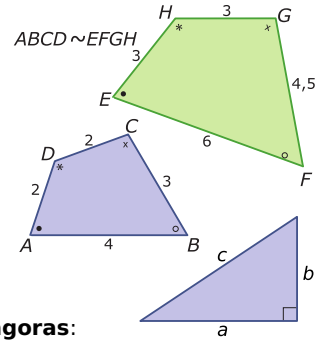
Een **driehoek** heeft drie hoekpunten en drie zijden. De drie hoeken zijn samen $180°$.
Een rechthoekige driehoek heeft één rechte hoek, een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden en een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke zijden.

Een **vierhoek** heeft vier hoekpunten en vier zijden. De vier hoeken zijn samen $360°$. Hier zie je de verschillende vierhoeken met hun eigenschappen.



meer info

Berekeningen in vlakke figuren



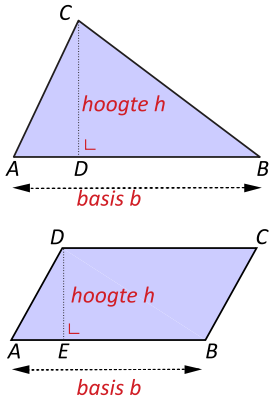
Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting of verkleining van de andere is. Bij veelhoeken moeten dan overeenkomstige hoeken even groot zijn en overeenkomstige zijden met dezelfde **vergrotingsfactor** zijn vermenigvuldigd. Als de vergrotingsfactor 1 is zijn beide figuren gelijk, ze heten dan **congruent**. Bij gelijkvormige veelhoeken kun je een **verhoudingstabel** maken met de overeenkomstige zijden boven elkaar.

In de rechthoekige driehoek geldt **stelling van Pythagoras**:
$a^2 + b^2 = c^2$

Omgekeerd is een driehoek rechthoekig als voor de lengtes van de zijden de stelling van Pythagoras geldt.

meer info

Omtrek en oppervlakte



Elke veelhoek kun je verdelen in (halve) rechthoeken om de **oppervlakte** te bepalen.

Enkele **oppervlakteformules** zijn, zie figuur:

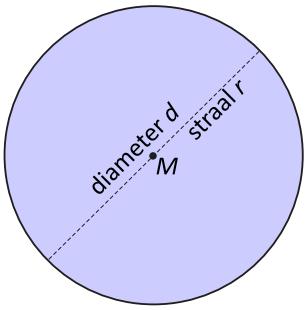
- *opp(rechthoek)* $= l \cdot b$ met lengte l en breedte b.;
- *opp(driehoek)* $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$;
- *opp(parm)* $= b \cdot h$;
- *opp(vlieger)* $= \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$ met p en q de lengtes van de diagonalen;
- *opp(trapezium)* $= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ met a en b de lengtes van de evenwijdige zijden en h de hoogte.

Als een figuur wordt vergroot met vergrotingsfactor k dan wordt ook de omtrek k keer zo groot, maar de oppervlakte wordt $k \cdot k = k^2$ keer zo groot.

meer info

Omtrek en oppervlakte cirkel

Een **cirkel** is een kromme lijn waarvan alle punten dezelfde afstand tot een gegeven **middelpunt** M hebben. Die afstand heet de **straal** r van de cirkel. De **diameter** van de cirkel is twee keer de straal $d = 2r$.



Voor een cirkel met straal r en diameter $d = 2r$ geldt:

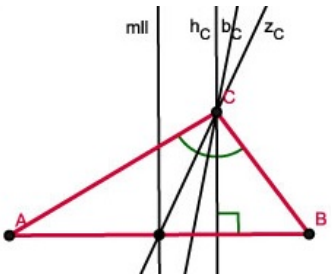
- *omtrek(cirkel)* $= \pi \cdot d$
- *opp(cirkel)* $= \pi \cdot r^2$

Een **cirkelsector** is een deel van de cirkel in de vorm van een 'taartpunt' tot het middelpunt.

meer info

Bijzondere lijnen

Bekijk ΔABC.



- de **middelloodlijn** van AB is een lijn die deze zijde loodrecht middendoor deelt;
- de **deellijn** of **bissectrice** van $\angle C$ is een lijn die deze hoek middendoor deelt;
- de **zwaartelijn** vanuit C is een lijnstuk van C naar het midden van de overstaande zijde;
- de **hoogtelijn** vanuit C is een lijnstuk van C loodrecht op de overstaande zijde.

De **omgeschreven cirkel** van een driehoek is de cirkel door de drie hoekpunten met als middelpunt het snijpunt van de middelloodlijnen.

De **ingeschreven cirkel** van een driehoek is de grootste cirkel die nog precies binnen de driehoek ligt. Het middelpunt ervan is het snijpunt van de deellijnen.

meer info

Spiekbriefjes bij Goniometrie

Goniometrische verhoudingen

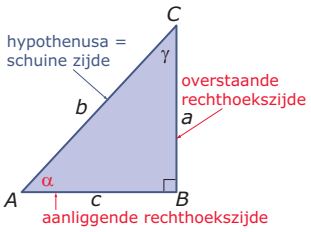
In een rechthoekige driehoek geldt:

De **goniometrische verhoudingen**:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypothenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypothenusa}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

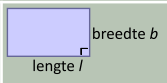
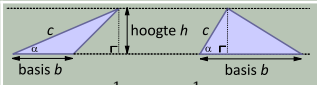
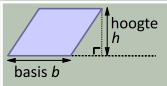
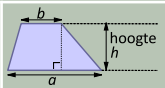
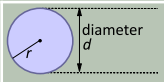
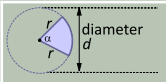


De **stelling van Pythagoras**:

(éne rechthoekszijde)^2 + (andere rechthoekszijde)^2 = (hypothenusa)^2.

meer info

Omtrek- en oppervlakteformules

rechthoek	halve rechthoek	driehoek	
 oppervlakte: $l \cdot b$ omtrek: $2 \cdot l + 2 \cdot b$	oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot l \cdot b$ omtrek: $l + b + \sqrt{l^2 + b^2}$	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ of $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	
parallellogram	**trapezium**	**cirkel**	**cirkelsector**
 oppervlakte: $b \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 oppervlakte: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ omtrek: de lengtes van de zijden optellen	 oppervlakte: $\pi \cdot r^2$ of $\frac{1}{4}\pi \cdot d^2$ omtrek: $2\pi \cdot r$ of $\pi \cdot d$	 oppervlakte: $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$ omtrek: $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r + 2r$

meer info

Vectoren

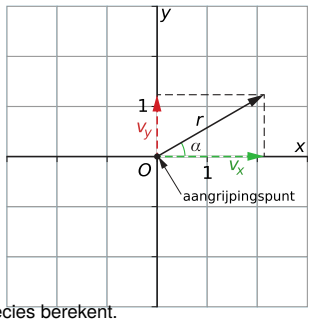
Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met **lengte** r en richting α, de **richtingshoek**.

In de figuur wordt α vanaf positieve x-as en linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten. De vector heeft een x-**component** v_x en y-component v_y:

- $v_x = r\cos(\alpha)$
- $v_y = r\sin(\alpha)$

De lengte van de vector is $r = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

Voor de richtingshoek geldt: $\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}$.



Hierbij gebruik je geen mintekens, maar let je goed op welke hoek je precies berekent.

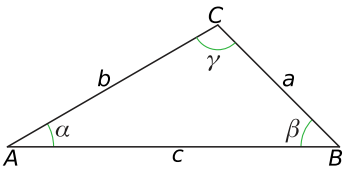
De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. De vector van O naar A is $\overrightarrow{OA}$.

Twee vectoren zijn gelijk als hun lengte en hun richtingshoek gelijk zijn.

meer info

De sinusregel

In elke ΔABC noem je $\angle A = \alpha$ en a is de zijde tegenover $\angle A$. Op dezelfde wijze doe je dit met de andere hoeken en zijden, zie figuur.



In elke ΔABC geldt de **sinusregel**:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

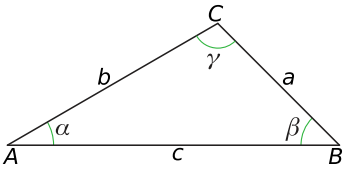
Je gebruikt hem vooral in driehoeken die geen rechte hoek hebben.

meer info

De cosinusregel

In elke ΔABC geldt de **cosinusregel**. Er zijn drie varianten:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$



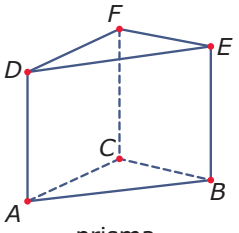
Je gebruikt de cosinusregel in driehoeken die geen rechte hoek hebben en in situaties waarin de sinusregel niet goed werkt.

meer info

Spiekbriefjes bij Ruimtelijke figuren

Lichamen

Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken.
Je kent de lichamen kubus, balk, prisma, piramide, cilinder, kegel en bol al.



prisma

Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**.
Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdiagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

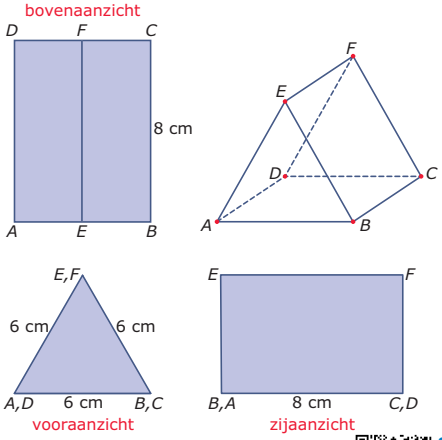
In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken;
- de sinusregel en de cosinusregel in willekeurige driehoeken.

meer info

Aanzichten

Dit regelmatig driezijdig prisma $ABE.DCF$ is getekend in **parallelprojectie**.
Dit betekent dat evenwijdige lijnen ook evenwijdig worden getekend en dat even lange evenwijdige lijnstukken ook evenwijdig en even lang worden.



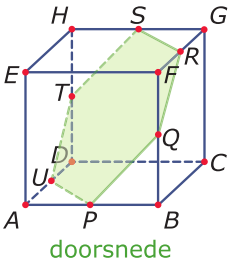
Maar er is ook een **drieaanzicht** van getekend. Dat is een combinatie van een **vooraanzicht**, een **bovenaanzicht** en een **zijaanzicht**.

In aanzichten zie je meestal veel afmetingen op ware grootte, je kunt er beter metingen in verrichten dan in een parallelprojectie.

meer info

Doorsneden

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, gebruik je dat in een plat vlak alleen evenwijdige of snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn èn elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Kruisende lijnen liggen nooit in één vlak.



doorsnede

Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**.
Dan hebben alle hoeken hun werkelijke vorm en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal). Bij tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken met behulp van de passer. Teken hulpfiguren (vaak rechthoekige driehoeken) waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.

meer info

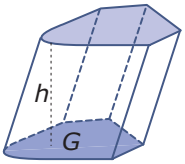
Inhoud

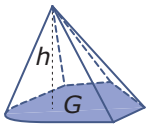
De **inhoud** of het **volume** V verschillende lichamen bereken je zo:

- van een balk, een prisma, of een cilinder met oppervlakte grondvlak G en hoogte h is: $V = G \cdot h$.
- van een piramide, of een kegel met oppervlakte van het grondvlak G en hoogte h is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

De **oppervlakte** van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

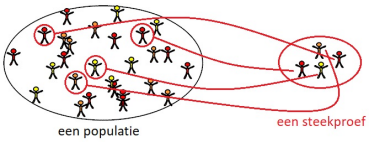




meer info

Spiekbriefjes bij Beschrijvende statistiek

Metingen en statistiek



Het verzamelen en presenteren van gegevens heet **beschrijvende statistiek**.
Een **statistisch onderzoek** kent diverse fasen:

- Je begint met een **onderzoeksvraag**.
- Je bepaalt de **populatie** (doelgroep) en neemt daaruit een **steekproef**. Deze steekproef moet **representatief** (kenmerkend) zijn en niet te klein. Hij is **aselect**, elk lid van de populatie heeft dezelfde kans om in de steekproef te komen.
- Je stelt vast over welke **statistische variabele** het gaat.
  Er zijn **kwantitatieve variabelen** met getallen als waarden en **kwalitatieve variabelen** met eigenschappen als waarden.
- Je verzamelt **data** (statistische gegevens) die je gaat **ordenen** middels tabellen en diagrammen: tabellen zijn nauwkeuriger, diagrammen overzichtelijker.
- Je probeert een (eerlijke) **conclusie** te trekken.

meer info

Meetnauwkeurigheid

Bij metingen wordt worden **meetfouten** of **meetonnauwkeurigheden** gemaakt:

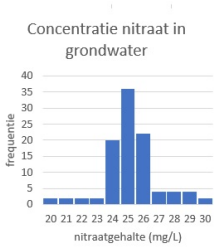
- Een **persoonlijke fout** is een fout die je zelf maakt.
  Bijvoorbeeld een afleesfout. Schat van meetwaarden alleen het laatste cijfer!
- Een onvermijdelijke **toevallige fout**.
  Bij een meetinstrument van meetklasse $2{,}0$ is er een maximale afwijking van 2% van de schaallengte (of meetbreedte). Dit betreft de **precisie** van de metingen.
- Een **systematische fout** geeft een afwijking in één richting, bijvoorbeeld omdat je meetinstrument niet geijkt is. Of je leest systematisch scheef af, er is sprake van **parallax**. Het betreft **juistheid** van de metingen.

Meet je $20 \pm 0{,}5$, dan is $0{,}5$ de **absolute fout**.
Deel je de meetnauwkeurigheid door de hoeveelheid, dan krijg je de **relatieve fout**. Hier $\frac{0{,}5}{20} = 0{,}025$, ofwel $2{,}5\%$.

meer info

Diagrammen

Concentratie nitraat (mg/L)		
klasse	freq	rel.freq
20	1	2
21	1	2
22	1	2
23	1	2
24	10	20
25	18	36
26	11	22
27	2	4
28	2	4
29	2	4
30	1	2
	50	100



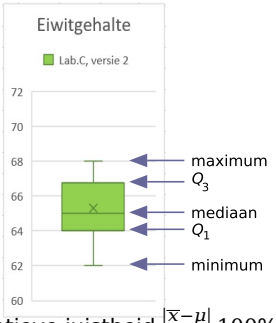
Bij veel statistische variabelen past een **frequentietabel**. Hoe vaak een waarde voorkomt is de **absolute frequentie**. Deel je die door het totale aantal, dan krijg je de **relatieve frequentie**. Relatieve frequenties (vaak procenten) maken vergelijken van datasets makkelijker.
Vaak gebruik je een **klassenindeling**. Bij metingen horen vanwege de meetonnauwkeurigheid altijd klassen.
In een tabel heb je de data nauwkeurig voorhanden, een **diagram** geeft meer overzicht:
Bij één variabele gebruik je een **beelddiagram**, een **staafdiagram**, een **lijndiagram**, een **cirkeldiagram**, een **steelbladdiagram**, een **kaartdiagram**, of...
Om twee variabelen te vergelijken gebruik je een **puntenwolk**.

meer info

Centrummaten

Kwantitatieve gegevens vat je samen met **centrummaten**:

- de **modus** (modale klasse): meest voorkomende waarde;
- de **mediaan**: de middelste waarde met de gegevens op volgorde van grootte;
- het **gemiddelde**: de waarden opgeteld en gedeeld door het totaal aantal.



Bij populatiegemiddelde μ is de **juistheid** $|\overline{x} - \mu|$ en de relatieve juistheid $\frac{|\overline{x}-\mu|}{\mu} \cdot 100\%$.

In een **boxplot** is de mediaan het midden, het eerste kwartiel Q_1 de mediaan van de eerste helft en het derde kwartiel Q_3 de mediaan van de tweede helft. Je kunt zo datasets vergelijken.

Bij kwalitatieve data hebben centrummaten vaak geen betekenis.

meer info

Spreidingsmaten

Kwantitatieve statistische gegevens hebben ook **spreidingsmaten**:

- de **spreidingsbreedte**: het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde;
- de **(inter)kwartielafstand** in een boxplot: $IQR = Q_3 - Q_1$;
- de **gemiddelde absolute afwijking** (GAA): het gemiddelde van alle positieve afwijkingen van het gemiddelde, $GAA = \frac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\ldots+|x_n-\overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i-\overline{x}|}{n}$.

De **precisie** is de relatieve spreidingsbreedte, de spreidingsbreedte gedeeld door het gemiddelde en omgerekend naar procenten. Er zijn ook andere maten voor de precisie.
Bij kwalitatieve data hebben spreidingsmaten vaak geen betekenis.
Soms is er een **uitschieter** (of uitbijter), een waarde die erg veel afwijkt.

- In een boxplot zit een uitschieter meer dan $1{,}5 \times IQR$ onder het eerste of boven het derde kwartiel.
- Bij kleine steekproeven kun je (soms) **Dixon's Q-test** toepassen.

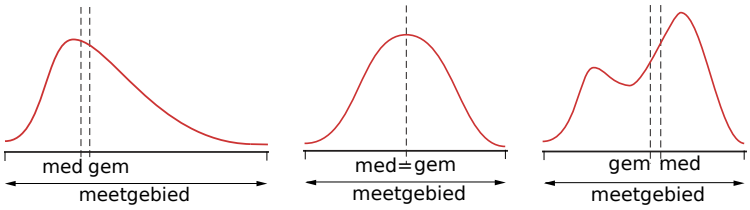
meer info

Spiekbriefjes bij Normale verdeling

Soorten verdelingen

Bij de **vorm van een frequentieverdeling** let je op:

- de symmetrie, de scheefheid, of de gelijkmatigheid
- het aantal toppen
- de uitschieters (meer dan $1{,}5 \times IQR$ vanaf mediaan, of Dixon's Q-test

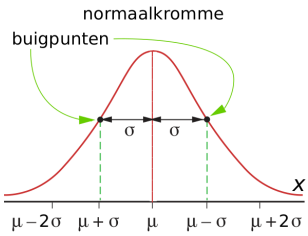


Belangrijk is wel dat je bij een frequentieverdeling met een klasseninde-ling de mediaan en het gemiddelde alleen nog kunt schatten met behulp van de klassenmiddens. (Tenzij je de werkelijke gegevens nog hebt!)

meer info

De normale verdeling

Je ziet een **normale verdeling** van x. De **normaal-kromme** wordt bepaald door het **gemiddelde** μ en de **standaardafwijking** of **standaarddeviatie** σ.



Bij een steekproef geldt het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ en de steekproefstandaardafwijking s_x.

Bij de waarden x_i en frequenties f_i is de standaard-afwijking:

$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \cdot f_i}{n}}$ (populatie) of $s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n-1}}$ (steekproef).

Voor elke normale verdeling gelden de vuistregels:

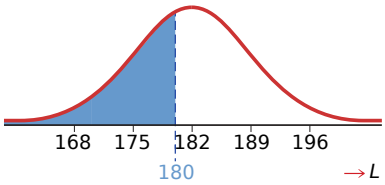
- $\approx 68\%$ van alle waarden liggen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- $\approx 95\%$ van alle waarden liggen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- $\approx 100\%$ van alle waarden liggen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$

meer info

Rekenen met normale verdelingen

Veel statistische variabelen zijn **normaal verdeeld**.

De gekleurde oppervlakte in de figuur stelt het deel voor met een lengte vanaf 165 tot 180 cm. Dat noteer je als: $\mathrm{P}(165 \leq L < 180)$.



Omdat $\mathrm{P}(L = 165) = 0$ is dit hetzelfde als $\mathrm{P}(165 < L < 180)$.

De relatieve frequentie dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, is $\mathrm{P}(164{,}5 < X < 165{,}5)$. Houdt bij een normale verdeling geen rekening met afron-dingen, tenzij dat duidelijk uit de vraagstelling blijkt.

Alle normale verdelingen zijn om te zetten naar de **standaardnormale verdeling** met z-waarden: $z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$.

Met de **standaardnormale tabel** kun je de bijbehorende relatieve fre-quenties bepalen.

meer info

Betrouwbaarheidsintervallen

Het **populatiegemiddelde** wordt vaak geschat door het **steekproefgemiddelde**. Daardoor ontstaat een toevalsfout. (Met de toevalsfout in de standaardafwijking houdt je geen rekening.)
De **steekproevenverdeling** van de gemiddelden $\overline{X}$ is altijd normaal verdeeld.
De standaardafwijking S is: $S_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ met n de grootte van de steekproeven en σ de populatiestandaarddeviatie.
Het populatiegemiddelde ligt in het **betrouwbaarheidsinterval**, afhankelijk van de **betrouwbaarheid**.

- 95%-betrouwbaarheidsinterval: ondergrens = $\overline{X} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en bovengrens = $\overline{X} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- 99%-betrouwbaarheidsinterval: ondergrens = $\overline{X} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en bovengrens = $\overline{X} + 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Conclusie: Met een betrouwbaarheid van 95 of 99% ligt het gemiddelde van de populatie tussen de 'ondergrens' en de 'bovengrens'.

meer info

De Shewhartkaart

Bij het bewaken van de kwaliteit van bepaalde processen worden **controlekaarten**, **regelkaarten** of **Shewhartkaarten** genoemd. Hier zie je er één.

- De middelste (groene) lijn bepaalt het gemiddelde μ.
- **waarschuwingsgrenzen**: $\mu \pm 2\sigma$-lijnen met ertussen 95% van de metingen.
- **actiegrenzen**: $\mu \pm 3\sigma$-lijnen met ertussen vrijwel alle metingen.
- **tolerantiegrenzen**: twee grenzen die absoluut niet mogen worden overschreden.

Bij dergelijke controlekaarten gelden de **Westgardregels**.

meer info

Spiekbriefjes bij Conclusies trekken

Hypothese toetsen, z-toetsen

Hypothese toetsen is een manier om een bewering over een populatie te controleren.

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X.
Iemand denkt dat het gemiddelde het lager is. Je hebt dan een **linkszijdige toets**:

- de **nulhypothese** is H_0: $\mu = \mu_X$ (gemiddelde klopt)
- de **alternatieve hypothese** is H_1: $\mu < \mu_X$ (gemiddelde lager)

Je neemt een steekproef van grootte n en berekent $\overline{X}$.

$\overline{X}$ is normaal verdeeld met $\overline{X} \approx \mu_X$ en $S_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Er hoort een **kritiek gebied** $\overline{X} < g$ bij dat aangeeft wanneer je H_0 verwerpt.

De grens g ervan bepaal uit $P(\overline{X} < g) = P\left(z < \frac{g-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$.

Het **significantieniveau** α kies je voordat je de toets uitvoert, bijvoorbeeld $\alpha = 5\%$ of $\alpha = 1\%$.

Je kunt ook een **rechtszijdige toets** (H_0 tegen $H_1: \mu > \mu_X$ of een **tweezijdige toets** (H_0 tegen $H_1: \mu \neq \mu_X$) uitvoeren.

meer info

t-toetsen

Stel X is normaal verdeeld met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X.
Iemand toetst H_0: $\mu = \mu_X$ tegen H_1: $\mu \neq \mu_X$ met significantieniveau α, dus met een betrouwbaarheid van $(1-\alpha)\cdot 100\%$ en met een steekproef van grootte n:

- Is de populatiestandaarddeviatie bekend, gebruik je de z-verdeling.
- Is de populatiestandaarddeviatie niet bekend gebruik je **Student's**

  ***t*-verdeling** $t = \frac{\overline{X}-\mu_X}{\frac{s_X}{\sqrt{n}}}$

  met de steekproefstandaarddeviatie s_X en **vrijheidsgraad** $v = n-1$.

Bij het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen heb je deze twee mogelijkheden:

- De populatiestandaarddeviatie is bekend.
  Het betrouwbaarheidsinterval is $\overline{X} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- De populatiestandaarddeviatie is niet bekend.
  Het betrouwbaarheidsinterval is $\overline{X} - t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t \cdot \frac{s_X}{\sqrt{n}}$.

meer info

f-toetsen

Je wilt door twee series metingen A en B een bepaalde grootheid X vaststellen. Bij A met steekproefgrootte n, krijg je gemiddelde $\overline{X_1}$ en standaardafwijking s_{X_1}. Bij B met steekproefgrootte m, krijg je gemiddelde $\overline{X_2}$ en standaardafwijking s_{X_2}.

Met een ***f*-toets** kun je de precisie van beide metingen vergelijken.
Neem aan $s_{X_1} \geq s_{X_2}$, dan toets je

- H_0: $s_{X_1} = s_{X_2}$;
- H_1: $s_{X_1} \neq s_{X_2}$ (dubbelzijdige toets) of H_1: $s_{X_1} > s_{X_2}$ (enkelzijdige toets).

Daarbij gebruik je de f-verdeling $f = \frac{s_{X_1}^2}{s_{X_2}^2}$ omdat $s_{X_1} > s_{X_2}$.

Meestal neem je een betrouwbaarheid van 95% en daarbij een ***f*-tabel**.
Je kunt ook de juistheid van beide series metingen vergelijken. Daartoe gebruik je een t-toets.

meer info

Regressielijnen

In een **spreidingsdiagram** van de variabelen x en y zet je alle combinaties (x,y) als een **puntenwolk** in een assenstelsel. Of er een **statistisch verband** bestaat tussen x en y wordt bepaald door de **correlatiecoëfficiënt** r_{xy}.

- $r_{xy} = 1$: perfecte positieve correlatie tussen x en y; de punten liggen op een stijgende lijn.
- $r_{xy} = 0$: geen enkele correlatie tussen x en y.
- $r_{xy} = -1$: perfecte negatieve correlatie tussen x en y; de punten liggen op een dalende lijn.

De correlatie wordt beter naarmate r_{xy} dichter bij 1 of -1 ligt.

Gebruik de **r-tabel**. In Excel wordt vaak de determinatiecoëfficiënt r_{xy}^2 gegeven.

Een verband waarbij de toename (of afname) van de éne variabele een gevolg is van een toename (of afname) van de andere heet een **causaal verband**: er is dan sprake van oorzaak en gevolg. Een **statistisch verband** tussen twee variabelen hoeft niet causaal te zijn.

Bij voldoende correlatie kun je een formule van de vorm $y = ax + b$ opstellen, de **regressielijn** van y op x. Zo'n regressielijn gaat door het punt $(\bar{x},\bar{y})$ en heeft als richtingscoëfficiënt (hellingsgetal): $a = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$

meer info