Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel (K0205)

Alle hoofdstukken / sectorneutraal

Maart 2023

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2023

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website `www.math4all.nl` is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord 5

1 Algebra 7
1.1 Rekenen met variabelen 8
1.2 Breuken 15
1.3 Haakjes 21
1.4 Machten 29
1.5 Wortels 37
1.6 Formules herleiden 44
1.7 Totaalbeeld 51

2 Vergelijkingen 55
2.1 Basistechnieken 56
2.2 Balansmethode 63
2.3 Ontbinden 70
2.4 Breuken in vergelijkingen 77
2.5 Wortels in vergelijkingen 84
2.6 Totaalbeeld 89

3 Lineaire verbanden 93
3.1 Lineaire functies 94
3.2 Lineaire verbanden 101
3.3 Stelsels vergelijkingen 109
3.4 Lineaire modellen 116
3.5 Totaalbeeld 124

4 Kwadratische functies 129
4.1 Kwadratische functies 130
4.2 De abc-formule 139
4.3 Kwadratische modellen 147
4.4 Veeltermen 154
4.5 Ongelijkheden 162
4.6 Totaalbeeld 168

5 Exponenten en machten 173
5.1 Exponentiële groei 174
5.2 Rekenregels voor machten 184
5.3 Exponentiële functies 193
5.4 Machtsfuncties 203
5.5 Totaalbeeld 213

6 Logaritmen 217
6.1 Logaritmen 218
6.2 Logaritmische functies 226
6.3 Logaritmische vergelijkingen 233
6.4 Logaritmische schalen 240
6.5 Totaalbeeld 249

7 Periodieke functies 255
7.1 Sinus- en cosinusfuncties 256
7.2 Vergelijkingen met sin en cos 266
7.3 Sinusoïden 275
7.4 Periodieke modellen 283
7.5 Totaalbeeld 291

8 Modelleren 297
8.1 Een model opstellen 298
8.2 Optimaliseren 306
8.3 Dynamische modellen 313
8.4 Onderzoeksopdrachten 320

9 Differentiëren 325
9.1 Verandering 326
9.2 Het begrip afgeleide 335
9.3 Differentiëren 344
9.4 De kettingregel 354
9.5 De product- en de quotiëntregel 361
9.6 Totaalbeeld 368

10 Werken met e 371
10.1 Het getal e 372
10.2 Exponentiële functies 380
10.3 Logaritmische functies 387
10.4 Groeimodellen 393
10.5 Totaalbeeld 404

11 Goniometrische functies 411
11.1 Goniometrische functies 412
11.2 Goniometrische formules 420
11.3 Differentiëren van goniometrische functies 428
11.4 Harmonische trilling 435
11.5 Totaalbeeld 442

12 Meetkunde in 3D 445
12.1 Parallelprojectie 446
12.2 Hoeken en afstanden 455
12.3 Oppervlakte en inhoud 466
12.4 Doorsneden construeren 476
12.5 Totaalbeeld 486

13 Plaats en beweging 491
13.1 Coördinaten in 2D 492
13.2 Vectoren 500
13.3 Lijnen en snijpunten 511
13.4 Hoeken en inproduct 519
13.5 Bijzondere lijnen 528
13.6 Totaalbeeld 535

Register 537

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit boek kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit boek op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Algebra

1.1 Rekenen met variabelen 8
1.2 Breuken 15
1.3 Haakjes 21
1.4 Machten 29
1.5 Wortels 37
1.6 Formules herleiden 44
1.7 Totaalbeeld 51

1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met variabelen (met letters), variabelen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

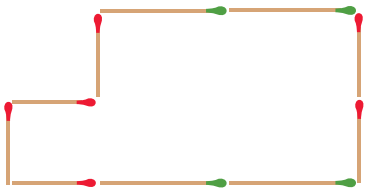
Voorkennis

- het begrip variabele (als letter) gebruiken in formules, in vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers (groen) met een lengte van a cm en korte lucifers (rood) met een lengte van b cm.



Figuur 1.1

a Kies $a = 3$ cm en $b = 2$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.

b Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.

c Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 4$ cm en bereken opnieuw de omtrek en de oppervlakte van de figuur.

d Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.

Opgave V2

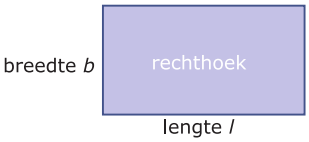
Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm.

a Teken een rechthoek met lengte l en breedte b. Schrijf de formules voor de oppervlakte en de omtrek van deze rechthoek in je figuur.

b Gebruik nu de gegeven waarden voor de oppervlakte en de omtrek en zoek waarden voor l en b die voldoen.

Uitleg

Van een rechthoek zijn lengte en breedte onbekend, je kunt er dus nog verschillende getallen voor kiezen. De lengte en de breedte zijn variabel, veranderlijk. Je noemt de lengte en de breedte daarom variabelen. Variabelen stel je in de wiskunde voor door letters, meestal kleine letters en cursief gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b. Voor deze rechthoek geldt dan:



Figuur 1.2

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de afspraak dat je het maalteken $\cdot$ weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.

Verder gebruik je bij het rekenen met variabelen dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

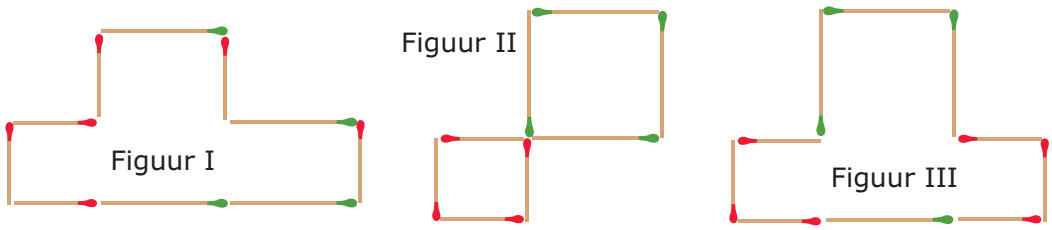
- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De gelijksoortige termen $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken.
- Maar zo kun je $2a + 5b$ niet korter schrijven. De ongelijksoortige termen $2a$ en $5b$ kun je niet optellen of aftrekken.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. (De wisseleigenschap voor optellen en vermenigvuldigen.)
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat herschrijven of herleiden van zo'n uitdrukking. Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 8** hoe je met variabelen rekent. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De lange lucifers hebben lengte a, de korte hebben lengte b.



Figuur 1.3

a Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.

b Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?

c Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?

d Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.

e Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 8** zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

a Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.

b Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.

Herleid nu zelf:

c $18a + 6b + 10a + 4b$

d $12p + 6q + 10p + 4p$

e $x + 3y + 5y + 8x + 7y$

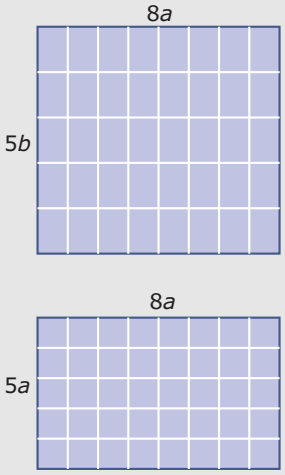
f $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.
Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg.
Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je niet korter schrijven.
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.



Figuur 1.4

Verder maak je regelmatig gebruik van de **wisseleigenschap** van optellen en vermenigvuldigen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en is $0x = 0$ en zo'n losse nul laat je weg.

Voorbeeld 1

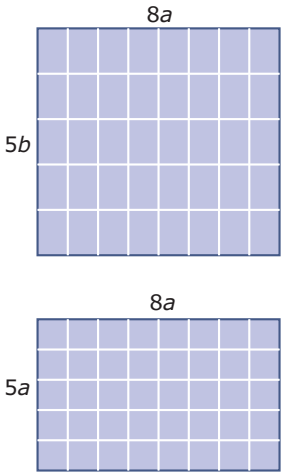
De omtrek van de bovenste rechthoek is $8a + 5b + 8a + 5b = 16a + 10b$.

De omtrek van de onderste rechthoek is $8a + 5a + 8a + 5a = 26a$.

Je ziet hoe gelijksoortige termen worden samengenomen en ongelijksoortige niet.

De oppervlakte van de bovenste rechthoek is $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte ab zijn.

De oppervlakte van de onderste rechthoek is $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte a^2 zijn.



Figuur 1.5

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 10** hoe je variabelen optelt. Herleid nu zelf:

a $3a + 12b + 2a + 4b$

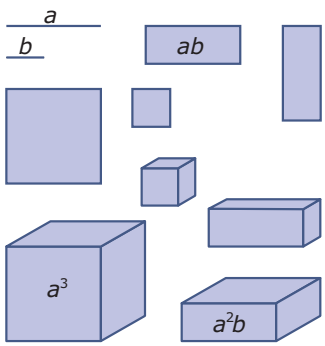
b $8p + q + 2p + q$

c $4a + 3b + 4a + a$

d $p + 6p + 5q$

Opgave 4

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het **werkblad**.



Figuur 1.6

a Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.

b Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.

c Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?

Opgave 5

Herleid:

a $7b + b$

b $2abc + 8abc + bac$

c $12p \cdot 4q + 3qp$

d $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$

e $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$

f $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 10** hoe je variabelen vermenigvuldigt en soms daarna weer optelt. Herleid nu zelf:

a $4a \cdot 3b$

b $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$

c $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$

d $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

Voorbeeld 2

Bij het herleiden van uitdrukkingen met variabelen kun je ook met negatieve getallen werken en/of termen van elkaar aftrekken. Je ziet hier enkele voorbeelden.

- $9a - 7a = 9a + -7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a + -6b + -1a + 5b = 5a + -1a + -6b + 5b = 4a + -1b = 4a - b$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 11** hoe je met mintekens werkt bij het optellen en aftrekken van termen. Herleid nu zelf:

a $-7p - 5p$

b $3a - 5b + 2a + 7b$

c $3 + 2x - 5x - 7$

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 11** hoe je met mintekens werkt bij het herleiden als er ook vermenigvuldigingen voorkomen. Herleid nu zelf:

a $-7p \cdot -5p$

b $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$

c $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 9

Herleid:

a $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$

b $-5xy - 3x \cdot -2y$

c $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$

d $-3 - 2p - 6 - 8p$

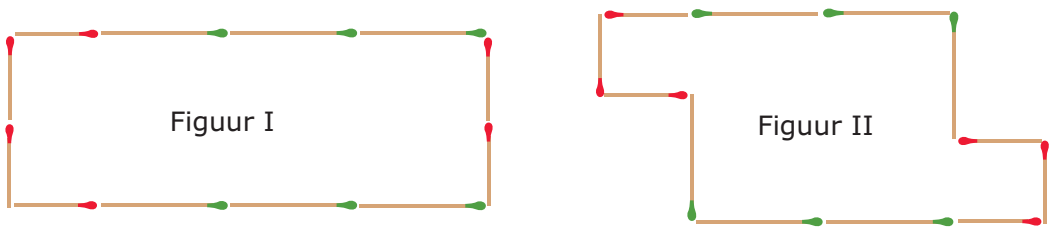
e $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$

f $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a, de lange hebben lengte b.



Figuur 1.7

a Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot ze zo kort mogelijk zijn.

b Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 11

Herleid:

a $7x + 20x$

b $7x \cdot 20x$

c $7x \cdot 20y$

d $6x - x$

e $6x \cdot -10xy$

f $6x \cdot -20x - 15x \cdot -10x$

g $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$

h $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 12

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $r = -2$:

a $4p \cdot -2q + 6q \cdot p$

b $3p \cdot -5q \cdot r$

c $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$

d $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$

e $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$

f $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$

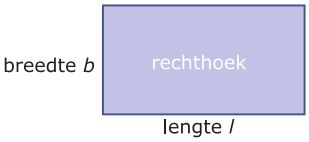
Opgave 13

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het **Practicum** vind je twee oefenvensters. In het linker venster oefen je het samennemen van gelijksoortige termen, in het rechter venster oefen je het vermenigvuldigen van variabelen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

Toepassen

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm. Je wilt de lengte en de breedte bepalen.



Figuur 1.8

Dergelijke problemen kun je oplossen door gewoon getallen te proberen, zeker als de uitkomsten gehele getallen zijn.

Maar ook dan is het vaak handig om de gegevens eerst te ‘vertalen’ naar wiskundige uitdrukkingen. Zowel de lengte als de breedte zijn hier onbekend. Je kunt er daarom variabelen voor invoeren: noem de lengte bijvoorbeeld l en de breedte b.
De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 22$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.

Opgave 14

Het probleem van **Uitleg op pagina 8** wordt nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

a De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.

b Maak een tabel zoals die hiernaast.

c Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?

d Welke twee getallen voldoen aan beide formules?

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2	12	24	14
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

Tabel 1.1

e In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

Opgave 15

Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm.

Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Testen

Opgave 16

Herleid:

a $2x - 3y + 4x + 5y$

b $2x \cdot -3y + 4x \cdot 5y$

c $2x \cdot -3y \cdot 4x \cdot 5y$

Opgave 17

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo kort mogelijk.

a $4a + 5b - 3a - 7b$

b $p^2 - 2pq + p^2 + 3pq$

c $-2ab \cdot b + 2a^2 \cdot b - 2a \cdot -b^2$

d $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

1.2 Breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken met variabelen vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- rekenen met breuken met variabelen.

Voorkennis

- uitdrukkingen met variabelen herleiden;
- rekenen met breuken zonder variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken $\frac{5}{a} / \frac{3}{b}$.

e Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je er voor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 5 en 4 gemeen hebben. Dat is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 6 en 4 gemeen hebben. Dat is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.

- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat b en d gemeen hebben. Dat is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat a en $2a$ gemeen hebben. Dat is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

En nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig, je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12).
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$).

Belangrijk is nog dat bij breuken de noemer niet 0 kan zijn, want delen door 0 heeft geen betekenis. Daar moet je voortdurend van uit gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 15** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} \Big/ \frac{3}{b}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} \Big/ \frac{3}{5a}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

a Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.

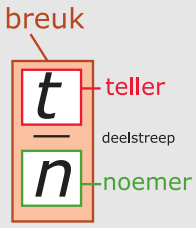
b Tel beide breuken op.

c Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.



Figuur 1.1

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:
  $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\Big/\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b\cdot d$ vermenigvuldigen)

  Je ziet nu dat $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

  Dus is delen door een breuk hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. Ook daarvan kun je gebruik maken bij delen.

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds $b\neq 0$ en $d\neq 0$ en bij de deling moet ook $c\neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** van de noemers van de breuken.

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de breuken $\frac{4ab^2}{3ab}$ en $\frac{5b^2}{bc}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.

Neem aan, dat $a\neq 0$, $b\neq 0$ en $c\neq 0$.

Antwoord

Eerst vereenvoudigen:

$\frac{4ab^2}{3ab}=\frac{4b}{3}$ (teller en noemer delen door ab).

$\frac{5b^2}{bc}=\frac{5b}{c}$ (teller en noemer delen door b).

Nu $\frac{4b}{3}$ en $\frac{5b}{c}$ gelijknamig maken.
Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 3 en c is $3c$.

De eerste breuk wordt $\frac{4b}{3}=\frac{4bc}{3c}$ (teller en noemer keer c).

De tweede breuk wordt $\frac{5b}{c}=\frac{15b}{3c}$ (teller en noemer keer 3).

Opgave 4

Vereenvoudig de breuken $\frac{3pq}{5p^2}$ en $\frac{4r}{2p}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.
Neem aan dat $p\neq 0$.

Opgave 5

Maak de volgende breuken gelijknamig.

a $\frac{16}{4p}$ en $\frac{2}{3}$.

b $\frac{a^2b}{3a}$ en $\frac{ab^2}{2b}$.

c $\frac{3k^2l}{6kl}$ en $\frac{3kl}{2k^2}$.

Voorbeeld 2

Gegeven de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4p+3q}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} \Big/ \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} \Big/ \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 6

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

d Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 7

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.
Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

a $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$

b $\frac{-3b}{ab} \Big/ \frac{2a}{a^2}$

c $\frac{2pq}{p} - \frac{15p}{3}$

d $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Oefenen

Opgave 8

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \Big/ \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 9

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

a $\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}$

b $\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b}$

c $\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

e $\frac{6}{a} \Big/ \frac{1}{2a}$

f $\frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Opgave 10

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$

b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$

c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{2p}{pq} \Big/ \frac{6}{q}$

Opgave 11

Oefen nu het rekenen met breuken met variabelen via **Practicum**.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het 'gewogen gemiddelde' (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden.
In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.
Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Figuur 1.2

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...

Opgave 12

Bekijk hierboven het probleem van het berekenen van de gemiddelde snelheid van de vlucht van Amsterdam naar Moskou over de heen en de terugreis samen gerekend.

a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de **Wikipedia: Harmonisch gemiddelde**: " De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken."

b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Testen

Opgave 13

Reken met de twee breuken $\frac{p}{2q}$ en $\frac{3p}{5q}$.
Neem aan dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Bereken $\frac{p}{2q} - \frac{3p}{5q}$.

c Bereken $\frac{p}{2q} \Big/ \frac{3p}{5q}$.

d Neem $p = 4$ en $q = -5$ en bereken som en product van de gegeven breuken.

Opgave 14

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

a $\frac{2kl}{5lm} - \frac{5lm}{20m^2}$.

b $\frac{2kl}{5lm} \Big/ \frac{5lm}{20m^2}$.

1.3 Haakjes

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de juiste rekenvolgorde gebruiken wanneer er van haakjes sprake is;
- haakjes wegwerken;
- ontbinden in factoren.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve getallen en breuken.
- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) met uitdrukkingen waarin variabelen voorkomen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.

Figuur 1.1

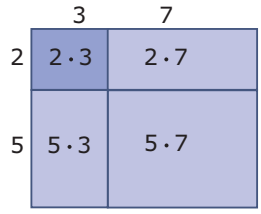
a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.

b Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

c Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.



Figuur 1.2

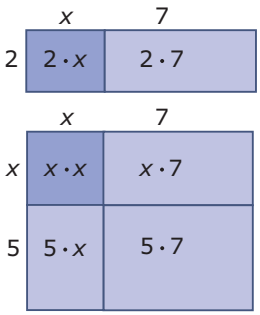
a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.

b Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

c Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

Uitleg

De figuren hiernaast laten zien dat



Figuur 1.3

- $2 \cdot (x + 7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$
  Het product van de factoren 2 en $x + 7$ herleid je zo tot de tweeterm $2x + 14$.
- $(x + 5) \cdot (x + 7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$
  Het product van de factoren $x + 5$ en $x + 7$ herleid je zo tot de drieterm $x^2 + 12x + 35$.

Een product bestaat uit factoren en een optelling (of aftrekking) uit termen. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x + 7$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de verdeeleigenschap of ook wel distributieve eigenschap van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel haakjes wegwerken of haakjes uitwerken. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $2x + 14 = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (x + 7)$
- $x^2 + 12x + 35 = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = (x + 7) \cdot (x + 5)$

Dit heet ontbinden in factoren omdat je nu van een tweeterm of een drieterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de grootste gemeenschappelijke deler van beide termen. Je kunt dan die deler buiten haakjes halen. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 21** hoe je haakjes kunt uitwerken.

a Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.

b Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)(x + 4) = 2x^2 + 14x + 12$.

c Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.

Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes uitwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + -3)$.

d Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?

e Werk van $(x + 5)(2x - 3)$ de haakjes uit.

f Laat met behulp van de verdeeleigenschap zien, dat $-(x - 3) = -x + 3$.

Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

a $5(a + 2b)$

b $5a(a - 2b)$

c $(x + 4)(x + 5)$

d $(2x - 4)(x - 5)$

e $3(2p + 4) + 5(4 - p)$

f $3(2p + 4) - (4 - p)$

Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes uitwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

a Bekijk de uitdrukking $6x + 9$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

b Bekijk de uitdrukking $8x - 6x^2$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

c Bekijk de uitdrukking $2x^2 - 6x + 12$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

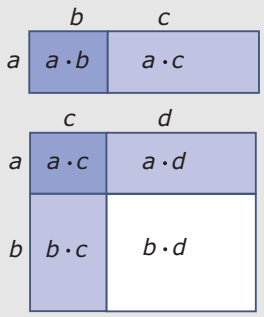
d Bekijk de uitdrukking $x^2 + 5x + 6$. Is er een grootste gemeenschappelijke deler van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De figuren hiernaast laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  Het product van de factoren a en $b+c$ herleid je zo tot de **tweeterm** $ab+ac$.
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  Het product van de factoren $a + b$ en $c + d$ herleid je zo tot de **vierterm** $ac + ad + bc + cd$.



Figuur 1.4

Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de **verdeeleigenschap** of ook wel **distributieve eigenschap** van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel **haakjes wegwerken**. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren** omdat je nu van een tweeterm of een vierterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD **buiten haakjes halen**. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Voorbeeld 1

Hier zie je nog enkele voorbeelden van haakjes wegwerken.

- $3(5 + 2x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2x = 15 + 6x$
- $-2k(k - 4) = -2k(k + -4) = -2k \cdot k + -2k \cdot -4 = -2k^2 + 8k$
- $(p + 3)(p - 4) = (p + 3) \cdot (p + -4) = p \cdot p + -4 \cdot p + 3 \cdot p + 3 \cdot -4 = p^2 - p - 12$
- $2(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - x + x - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$
- $2(q + 1) - 2(2 - q) = 2q + 2 - 4 + 2q = 4q - 2$
- $q(q + 1) - (q - 1) = q^2 + q - q + 1 = q^2 + 1$

Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zo ver mogelijk.

a $2x + 3(4 - x)$

b $(2k + 3)(k + 4)$

c $4x(x - y + 5)$

d $3(2x - 1)(4 - x)$

e $2(x^2 - 3x) - x(2 - x)$

f $(6 - p) \cdot -p + 2(p - 3)$

Opgave 5

Bij het uitwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a Laat zien, dat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

b Laat zien, dat: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller uitwerken. Pas dit bij het uitwerken en herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

c $(k - 5)(k + 5)$

d $(x + 10)^2$

e $(3p + 1)(1 - 3p)$

f $(2x - 3)^2$

g $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$

h $x(5x - 4) - (x - 2)(x + 2)$

Opgave 6

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

a Wat is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van x en $x + 1$?

b Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.

c Schrijf de breuk zonder haakjes.

Voorbeeld 2

Een uitdrukking zonder haakjes kun je soms ontbinden in factoren door de grootste gemeenschappelijke deler van alle termen buiten haakjes te halen. Hier zie je er enkele voorbeelden van.

- $5x + 10 = 5 \cdot x + 5 \cdot 2 = 5(x + 2)$
- $-5x + 10 = -5 \cdot x - -5 \cdot 2 = -5(x - 2)$
  of
  $-5x + 10 = 5 \cdot -x + 5 \cdot 2 = 5(-x + 2)$
- $-5x^2 - 10x = -5x \cdot x + -5x \cdot 2 = -5x(x + 2)$
- $5x^2 - 10x + 15 = 5 \cdot x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 5\left(x^2 - 2x + 3\right)$
- $5x^2 - 10xy = 5x \cdot x - 5x \cdot 2y = 5x(x - 2y)$
- $5xy - 5y = 5y \cdot x - 5y \cdot 1 = 5y(x - 1)$

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 2 op pagina 24** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

a Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?

b Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

Opgave 8

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $6x + 8y$

b $14k^2 - 21k$

c $-4xy - 12y^2 + 6y$

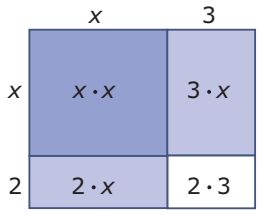
d $p^2 - p$

e $3a^2 + 16ab$

f $-12x^2 - 6x + 18$

Voorbeeld 3

De uitdrukking $x^2 + 5x + 6$ kun je niet ontbinden in factoren door een grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, die is er namelijk niet (behalve 1).



Figuur 1.5

In de figuur hiernaast zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.
Maar hoe kom je nu aan die 2 en die 3?
Je ziet in de figuur dat de term $5x$ ontstaat door de oppervlaktes $2x$ en $3x$ op te tellen en dat de term 6 de oppervlakte van het rechthoekje van 2 bij 3 is. Kortom: het getal in de term met x is de som van 2 en 3 en het getal in de term zonder x is het product van 2 en 3.

Wil je een uitdrukking zoals $x^2 + 5x + 6$ ontbinden, dan zoek je twee gehele getallen die opgeteld 5 en vermenigvuldigd 6 opleveren. Je gaat dan systematisch alle mogelijkheden voor de vermenigvuldiging na. Dit heet de som-en-productmethode.

product	getallen	som
6	6 en 1	7
6	3 en 2	5

Tabel 1.1

Opgave 9

Neem **Voorbeeld 3 op pagina 25** eerst door.
Bekijk de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$.
Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

a Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?

b Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?

c Schrijf de juiste ontbinding op.
Controleer je ontbinding door de haakjes weer weg te werken.

Bekijk de uitdrukking $x^2 - 6x + 8$.
Je wilt deze uitdrukking ontbinden. Nu moet je ook met negatieve getallen rekenen.

d Maak een tabel van alle gehele (ook negatieve) getallen die vermenigvuldigd 8 opleveren.
Maak daarmee je ontbinding af.

Opgave 10

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

a $x^2 + 7x + 12$

b $x^2 + 12x + 20$

c $x^2 + 13x + 12$

d $x^2 + 2x + 1$

e $x^2 - 19x + 90$

f $x^2 + 18x - 40$

Opgave 11

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

a $x^2 - 7x + 12$

b $x^2 + 2x - 48$

c $x^2 - 9$

d $x^2 - 9x$

e $2x^2 + 16x + 24$

f $3x^2 - 48$

Oefenen

Opgave 12

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk.

a $2x(x + 5)$

b $2x - (x + 5)$

c $(2x - 1)(x + 5)$

d $3(2x - 1) - 4(x + 5)$

e $(x + 5)^2$

f $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$

g $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$

h $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

Opgave 13

Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

a $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$

b $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

Opgave 14

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

a $14x + 21y$

b $3p^2 - 6pq$

c $-4a^2b - 4ab$

d $p^3 - 3p^2 - p$

Opgave 15

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

a $x^2 + 17x + 30$

b $x^2 - x - 12$

c $16 - 10x + x^2$

d $k^2 - 100$

Opgave 16

Ontbind in factoren.

a $12a^2 - 8a$

b $6p - 16 + p^2$

c $\frac{1}{2}k^2 - 8$

d $3x^2 - 6x - 9$

e $-4pq + 8pq^2$

f $8x - 16 - x^2$

Opgave 17

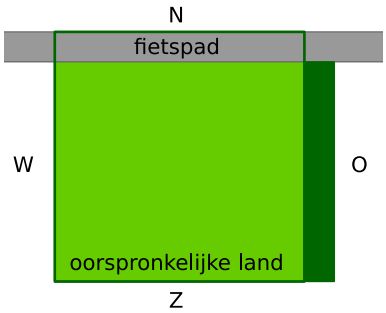
Je kunt zowel het haakjes wegwerken als het het ontbinden in factoren via het oefenen.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijt raakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?



Figuur 1.6

Opgave 18

Bekijk het probleem dat hierboven wordt beschreven.
De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend.
Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele x kiezen.

a Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.

b Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?

c Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

d Welke conclusie trek je?

Opgave 19

De boer vraagt zich af of hij ervoor kan zorgen dat hij echt evenveel land terug krijgt als hij moet inleveren.
Er wordt afgesproken dat er van het vierkante land aan de Noordkant 3 m afgaat voor het fietspad, maar dat de boer ter compensatie 4 m extra krijgt aan de Oostkant.
Het oorspronkelijke land heeft een oppervlakte van x^2 m^2.

a Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het land na de ruilverkaveling?

b Bij welke waarde van x wordt de boer nu netjes gecompenseerd?

Testen

Opgave 20

Werk de haakjes weg:

a $x(x-5)$

b $(x+8)(x-5)$

c $15-(10-3p)$

d $15-(10-p)^2$

Opgave 21

Ontbind in factoren:

a x^2-10x

b $x^2-10x+9$

c $\frac{1}{2}x^2-10x$

d $\frac{1}{2}x^2-10x-48$

1.4 Machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met het begrip macht;
- de rekenregels voor machten toepassen.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde.
- werken met de wetenschappelijke en de technische notatie.

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

Voorbeeld kettingbrief

Stuur deze brief door naar vijf van jouw vrienden en maak 1 euro over naar ...

Figuur 1.1

a Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2? En wat stelt 5^3 voor?

5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds door gaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.

b Hoeveel is 5^4?

c Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.

d Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.

e Leg uit waarom $\left(5^4\right)^2 = 5^8$.

f Hoeveel is $\left(5^4\right)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V2

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je al snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

a Hoeveel is 5^{10}?

b Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?

Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.

c Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.

d In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?

Uitleg

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Het getal waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.

Figuur 1.2

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $5^0 = 1$.
- Als je een macht tot een macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $\left(5^4\right)^2 = 5^8$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $5^{-3} = 5^{0-3} = 5^0 / 5^3 = \frac{1}{5^3}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.

Een getal zoals 135 miljard = 135000000000 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $1{,}35 \cdot 10^{11}$ en in de technische notatie als $135 \cdot 10^9$.

Een getal zoals 31 miljoenste = 0,000032 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ en in de technische notatie als $32 \cdot 10^{-6}$.

Zowel in de wetenschappelijke notatie als in de technische notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$.
Alleen bij de wetenschappelijke notatie is $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal.
En bij de technische notatie is $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 30** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

a Je rekenmachine kan $5^{200} / 5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.

b Bereken $\frac{19^{121} \cdot \left(19^{50}\right)^2}{19^{220}}$.

Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.

c Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.

d Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.

e Bereken $\left(15^{14}\right)^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk. Neem aan dat $a \neq 0$.

a $a^5 \cdot a^2$

b $3a^5 \cdot 4a^2$

c $3a^5 / 4a^2$

d $(3a^5)^4$

e $(-2a^3)^4 \cdot a^3 / (-2a^5)^3$

Opgave 3

De omtrek van de Aarde is 40000 km.

a Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.

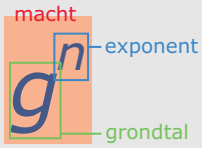
b Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke en in de technische notatie.

c Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de technische notatie rekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n. Het getal g waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren n dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.



Figuur 1.3

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $g^a / g^b = g^{a-b}$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $g^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.
In de **wetenschappelijke notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.
In de **technische notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud is.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het werken met machten. Denk er om dat je alleen gelijksoortige termen kunt optellen en aftrekken.

- $2a^7 \cdot 5a^4 = 2 \cdot 5 \cdot a^7 \cdot a^4 = 10a^{7+4} = 10a^{11}$
- $\frac{2a^7}{5a^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^7}{a^4} = 0{,}4a^{7-4} = 0{,}4a^3$
- $\frac{5a^4}{2a^7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^4}{a^7} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2{,}5}{a^3}$
- $\left(-2a^3\right)^4 = -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 = 16a^{12}$
- $\left(-2a^3\right)^4 + \left(a^2\right)^6 = 16a^{12} + a^{12} = 17a^{12}$
- $18a^2b^3 - (2ab)^2 \cdot 3b = 18a^2b^3 - 12a^2b^3 = 6a^2b^3$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1 op pagina 32** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$

b $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$

c $(4a)^2 - 4a^2$

d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$

e $8a^3 \cdot 2ab^2 - \left(2a^2b\right)^2$

f $\frac{2a \cdot (-2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

a $2p^3\left(1 - 6p^2\right)$

b $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 1\right)$

c $\left(y^3 - 2\right)^2$

d $4k^2(k + 3) - 2k\left(k^2 - 4\right)$

e $\left(4 + 3k^2\right)^2 - \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right)$

f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

a $2k^4 + 6k^3$

b $a^2b^3 - 4a^3b^5$

c $x^3 - 4x$

d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Voorbeeld 2

Deze getallen zijn geschreven in de technische notatie: $a = 36 \cdot 10^{12}$, $b = 1{,}2 \cdot 10^{12}$, $c = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ en $d = 900 \cdot 10^{-9}$.

Bereken $a + b$, $a \cdot c$, $c - d$ en a/d. De antwoorden geef je dan natuurlijk ook in de wetenschappelijke notatie!

Antwoord

Let vooral op het werken met de machten van 10. Alleen gelijksoortige uitdrukkingen mag je optellen of aftrekken.

- $a + b = 36 \cdot 10^{12} + 1{,}2 \cdot 10^{12} = 37{,}2 \cdot 10^{12}$
- $a \cdot c = 36 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-6} = 43{,}2 \cdot 10^{6}$
- $c - d = 1{,}2 \cdot 10^{-6} - 900 \cdot 10^{-9} = 12000 \cdot 10^{-9} - 900 \cdot 10^{-9} = 300 \cdot 10^{-9}$
- $\frac{a}{d} = \frac{36 \cdot 10^{12}}{900 \cdot 10^{-9}} = 0{,}04 \cdot 10^{21} = 40 \cdot 10^{18}$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 33** zie je hoe je met getallen in de technische notatie rekent.

a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken $a \cdot d$.

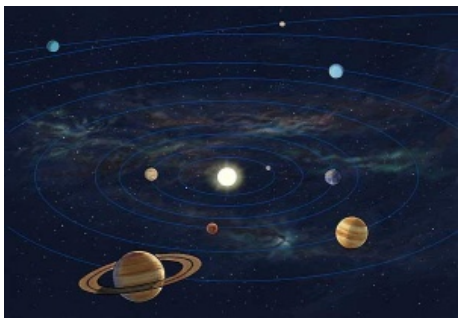
c Bereken $a - b$.

d Bereken b^3.

e Waarom is $a - c \approx a$?

Opgave 8

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon.
1 AE $\approx 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.
Gebruik de wetenschappelijke notatie.



Figuur 1.4

a Hoeveel AE is 1 km?

b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?

c Pluto bevindt zich ongeveer $5{,}9 \cdot 10^{9}$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?

d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^{8}$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?

Oefenen

Opgave 9

Bereken $\frac{8^{60} \cdot 2^{200}}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.

Opgave 10

Werk eventuele haakjes uit en herleid zover mogelijk.

a $3p^2q^3 \cdot -2pq^2$

b $\frac{3p^2q^3}{-2pq^2}$

c $\left(3k^2\right)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$

d $3a^2\left(ab^2 - 2b\right) - 2ab\left(a^2b - a\right)$

e $\left(x^3 + 5\right)^2 - x^2 \cdot x^4$

f $\frac{2a^2b+3ab^2}{2ab}$

g $p^5\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 1\right)$

h $2x\left(3y^2\right)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

a $12k^6 - 18k^3$

b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$

c $x^5 - x^4 - 2x^3$

d $4x - 8x^2 + 4x^3$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?
Geef je eindantwoord in de technische notatie.

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

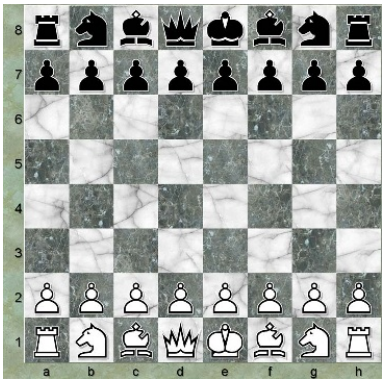
Opgave 13

Oefen nu het werken met machten van variabelen via het.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Sissah ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.”
De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen.
Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk het verhaal van Sissah ben Dahir.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

e Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen op pagina 35**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?

b Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

c Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Testen

Opgave 16

Herleid zo ver mogelijk:

a $25a^3b^4 \cdot 10ab^3$

b $\frac{25a^3b^4}{10ab^3}$

c $\left(2a^3 - 4b\right)^2$

d $\left(x^4 - 2\right)\left(5 + x^4\right)$

Opgave 17

Ontbind in factoren:

a $3p^5 - 6p^4$

b $3p^5 - 6p^4 - 24p^3$

1.5 Wortels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met het begrip wortel en rekenen met wortelvormen;
- werken met hogere machtswortels;
- werken met variabelen binnen wortelvormen.

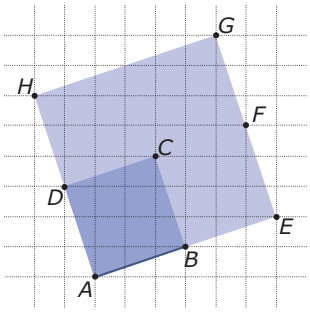
Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met variabelen;
- het begrip macht en rekenen met machten.

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.
Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.
Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.



Figuur 1.1

a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

d Laat ook zien, dat $2 \cdot \left(2\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.
Derde machtsworteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

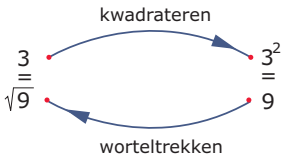
Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Zo geldt in het algemeen:

$\sqrt{a^2} = a$ als $a \geq 0$.



Figuur 1.2

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen. Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Je weet al hoe dat gaat:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derde machts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierde machts worteltrekken, enz.
Met dergelijke hogere machtswortels kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Nu is:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 38** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{-343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg op pagina 38** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

a Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?

b Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

d $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met 'gewone' wortels. Toch is er een verschil.

a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.

b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a. Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

d $\frac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Theorie en voorbeelden

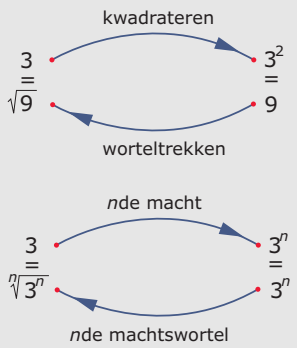
Om te onthouden

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **nde machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een *n*de macht. Zo geldt in het algemeen:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.

Het rekenen met *n*de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.



Figuur 1.3

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn.

Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b.

Voorbeeld 1

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels enkele uitdrukkingen kunt vereenvoudigen.

- $\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = \sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
- $\sqrt{3a^2} + 2a\sqrt{12} = \sqrt{a^2 \cdot 3} + 2a\sqrt{4 \cdot 3} = a\sqrt{3} + 2a \cdot 2\sqrt{3} = 5a\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1 op pagina 39** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

b $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$

c $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)

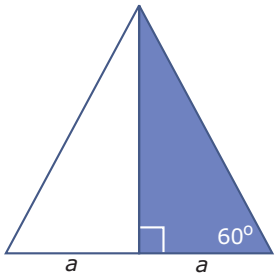
d $3\sqrt{a^2b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)

e $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$

f $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

Opgave 5

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoekszijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben. Met de stelling van Pythagoras kun je dan de hypothenusa (een andere, meer internationale, naam voor de langste zijde van een rechthoekige driehoek) berekenen.



Figuur 1.4

a Neem $a = 4$. Toon aan dat de hypothenusa dan een lengte van $4\sqrt{2}$ heeft.

b Toon aan dat de hypothenusa altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.

Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.

c Neem $a = 4$. Laat zie dat de lengste rechthoekszijde $4\sqrt{3}$.

d Toon aan dat in het algemeen de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$ heeft.

Opgave 6

Van een kubus zijn alle zijvlaksdiagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a.

a Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiagonaal $4\sqrt{2}$ is.

b Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiagonaal $a\sqrt{2}$ is.

c Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $4\sqrt{3}$ is.

d Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $a\sqrt{3}$ is.

Voorbeeld 2

Bij breuken met wortels in de noemer is het vaak handig om die wortel weg te werken uit de noemer. Dat kun je doen door teller en noemer met die wortel te vermenigvuldigen. Bekijk deze voorbeelden maar.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

Bij hogere machtswortels is dit minder eenvoudig.

Opgave 7

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2 op pagina 40** en loop ze even na.
Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

c $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$

d $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$

e $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

f $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2 op pagina 40**.

a Waar wordt bij $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vermenigvuldigd met $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?

b Waarom is $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

c Laat zelf zien dat $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Vereenvoudig, neem aan dat $a \geq 0$.

a $\sqrt{a^4}$

b $\sqrt{a^5}$

c $\sqrt{a^{10}}$

Opgave 10

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $\left(\sqrt{6} - 1\right)^2$

d $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$

g $\frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

h $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 11

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a \geq 0$ en $b \geq 0$.

a $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

b $\frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$

c $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$

Opgave 12

Een balk heeft ribben met een lengte van a, $2a$ en $3a$ scm.

a Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Opgave 13

Oefen het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.
De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek.
De zijden van die driehoek zijn a, a en $a\sqrt{2}$.
De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek.
De zijden van die driehoek zijn a, $2a$ en $a\sqrt{3}$.

Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk de twee tekendriehoeken hierboven.
Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

a Laat zien, dat de langste zijde $a\sqrt{2}$ cm is.

b Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?

Neem nu de andere tekendriehoek.

c Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?

d Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 12 cm is?

Opgave 15

Je tekent op de langste zijde van een driehoek met hoeken van 90°, 60° en 30° een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zo krijg je een vierhoek met twee rechte hoeken en een kortste zijde van a cm.

Hoe groot is de omtrek van deze vierhoek?

Testen

Opgave 16

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$.

a $\sqrt{a^3} + 2a\sqrt{a}$

b $\frac{a^2}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{a^3}$

Opgave 17

Herleid tot een zo kort mogelijke uitdrukking. Neem aan dat $p \geq 0$.

a $\left(\sqrt{48p} + 2\sqrt{3p}\right)^2$

b $\frac{\sqrt{48p^2}}{2\sqrt{3p}} + \sqrt{9p}$

Opgave 18

Bereken de lengte van de ribben van een kubus met een lichaamsdiagonaal van 12 cm.

1.6 Formules herleiden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met formules in het algemeen;
- formules met twee variabelen herleiden naar een functienotatie met een functievoorschrift.

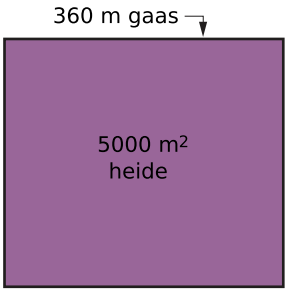
Voorkennis

- rekenen met getallen en variabelen met de juiste rekenvolgorde;
- bij formules met twee variabelen een tabel en een grafiek tekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m^2). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.



Figuur 1.1

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b.

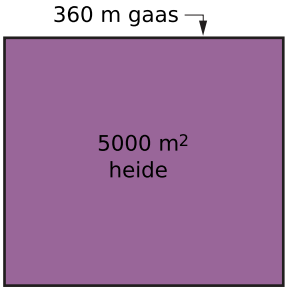
a Stel bij dit probleem een formule op passend bij de gegeven omtrek en een formule passend bij de gegeven oppervlakte.

b Schrijf beide formules in de vorm $l = ...$

c Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?

Uitleg

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m^2). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.



Figuur 1.2

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b, beide in m.

Voor de oppervlakte geldt dan de formule $l \cdot b = 5000$.

Voor de omtrek geldt dan de formule $2l + 2b = 360$.

Beide formules geven een verband tussen de twee variabelen l en b.
Je kunt beide verbanden vergelijken door de formules zo te herschrijven (herleiden) dat de éne variabele is uitgedrukt in de andere. Bijvoorbeeld door l uit te drukken in b, ofwel beide formules te herleiden naar de vorm $l = ...$

Dat doe je met de balansmethode:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 \\ l + b &= 180 \quad \text{beide zijden : 2} \\ l &= 180 - b \quad \text{beide zijden } -b \end{aligned}$$

Op dezelfde manier wordt de andere formule $l = \frac{5000}{b}$.

Je zegt nu wel dat je twee keer l als functie van b hebt geschreven.
Dat noteer je als l_b of als $l(b)$.
Let er op dat deze haakjes niet dezelfde betekenis hebben als de haakjes die je gebruikt om de rekenvolgorde te beïnvloeden, deze haakjes kun je niet wegwerken!

Opgave 1

Bekijk in de uitleg hoe je de twee formules herleidt naar een vorm waarin l is uitgedrukt in b.

a Hoe gaat dat met de formule voor de oppervlakte?

b Waarom moet l dan op de verticale as?

c De functie $l(b) = 180 - b$ beperkt de waarden die je voor b kunt kiezen en daarmee ook de uitkomsten voor l. Leg uit welke waarden je voor b kunt kiezen.

d Teken beide grafieken in één assenstelsel en probeer de vraag te beantwoorden.

Opgave 2

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ...$

a $x^2 - 2y = 7x^2 - 4x$

b $2x - 4y = 13$

c $40 + 5xy = 0{,}5x - 30$

d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem met zijden van x cm. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft met hoogte h cm.

a Welke formule kun je opschrijven voor de oppervlakte A van het doosje?

De doosjes krijgen een oppervlakte van 800 cm^2.

b Welke formule kun je opschrijven voor $h(x)$, dus voor h als functie van x?

c Bereken $h(8)$, dat is de waarde van h als $x = 8$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een zin waarin variabelen voorkomen. Vaak beschrijven formules een verband tussen die variabelen, maar niet altijd. Formules hebben meestal de vorm van een vergelijking, dus een zin met een isgelijkteken zoals $l + b = 180$.

Als een formule een verband beschrijft tussen twee variabelen, kun je er een grafiek bij tekenen. Je maakt dan eerst een tabel. Vervolgens zet je de gevonden punten in een assenstelsel.

In dat geval is het meestal handig om de formule te herleiden naar een vorm waarin de éne variabele een **functie** is van de andere.
Bijvoorbeeld een formule zoals $2x + 4y = 5$ kun je schrijven als $y = -0{,}5x + 1{,}25$.
Nu is y een functie van x, notatie: $y(x) = -0{,}5x + 1{,}25$.

Je kunt zo'n functie ook een naam geven, bijvoorbeeld f.
Dan zeg je dat $y = f(x)$ met $f(x) = -0{,}5x + 1{,}25$ als **functievoorschrift**.
Denk er wel om dat de haakjes in $y(x)$ en $f(x)$ niets te maken hebben met de haakjes die je gebruikt bij het rekenen (met variabelen), je kunt ze niet wegwerken.
Met iets als $f(2)$ bedoel je nu de waarde van y bij $x = 2$.

Bij het herleiden van formules naar functies gebruik je algebraïsche technieken als de balansmethode, haakjes wegwerken, rekenen met breuken met variabelen, etc.

Voorbeeld 1

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

- $2xy - 4x = 15$
- $y(x - 2) = 10$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

Antwoord

- $2xy - 4x = 15$ geeft $2xy = 4x + 15$ en $y = \frac{4x+15}{2x} = 2 + \frac{15}{2x}$
- $y(x - 2) = 10$ geeft $y = \frac{10}{x-2}$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$ geeft $\frac{1}{y} = -2x + 10$ en $y = \frac{1}{-2x+10}$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ geeft $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{2x-3}{3x}$ en $y = \frac{3x}{2x-3}$

Opgave 4

In het voorbeeld zie je hoe je formules kunt herleiden.

a Laat zien hoe je bij de eerste formule komt aan $y = 2 + \frac{15}{2x}$

b Je hebt de eerste formule herleid tot $f(x) = 2 + \frac{15}{2x}$.
Bereken nu $f(3)$.

c Waarom kun je $f(0)$ niet berekenen?

d De tweede formule is herleid tot $g(x) = \frac{10}{x-2}$.
Bereken $g(7)$.

e Welke waarde van x levert in de tweede formule geen waarde van y op?

Opgave 5

Bekijk in het voorbeeld het herleiden van de derde formule.

a Laat zien hoe je bij de derde formule komt aan $y = \frac{1}{-2x+10}$

b De derde formule heeft de vorm $h(x) = \frac{1}{-2x+10}$ gekregen.
Bereken $h(0)$.

c Herleid zelf de vierde formule tot $k(x) = \frac{3x}{2x-3}$.

d Bereken $k(2)$.

Opgave 6

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = ...$

a $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5$

b $4x\sqrt{2y} = 3$

Voorbeeld 2

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v. Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).

Figuur 1.3

Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt een grafiek maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Schrijf daarom je formule in de vorm $P(v)$ en maak een geschikte tabel.

Antwoord

Vul $D = 20$ in.
De formule wordt dan $P(v) = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot 20^2 = 0{,}052 \cdot v^3$.
Nu kun je gemakkelijk een tabel maken. Het is wel verstandig om vooraf even op te zoeken welke windsnelheden geschikt zijn.

Opgave 7

Bekijk het verhaal van de windmolen in het voorbeeld.
Bij een windsnelheid van 20 m/s (dus 72 km/h) is er bijna sprake van storm, dus wordt een windmolen vastgezet.

a Bereken $P(0)$, $P(5)$, $P(10)$, $P(15)$ en $P(20)$.

b Teken een geschikte grafiek en lees daaruit af bij welke windsnelheid het opgewekte vermogen op 26 kW uitkomt.

Opgave 8

Bekijk in het voorbeeld de eerste formule van het vermogen van een windmolen nog eens.

a Je hebt een windmolen met een wieklengte van 15 m.
Hoe ziet het functievoorschrift $P(v)$ er dan uit?

Neem aan dat je een vermogen van 26 kW wilt opwekken. Je plaatst een windmolen met een wieklengte die bij een bepaalde gemiddelde windsnelheid dat vermogen oplevert.

b Stel een formule op van de dubbele wieklengte D afhankelijk van de windsnelheid v.

c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Oefenen

Opgave 9

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

a $0{,}5x + 1{,}5y = 12$

b $(x + y)^3 = 8$

c $2x^2 + 4xy = 100$

Opgave 10

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

a $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 12$

b $\frac{3}{y} = 2x + \frac{1}{x}$

c $x\sqrt{y - 2} = 6$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y = f(x)$ met functievoorschrift $f(x) = 2x + \sqrt{8 - x^2}$.

a Bereken $f(0)$.

b Leg uit, waarom $f(3)$ geen uitkomst heeft.
Welke getallen kun je wel invullen voor x?

c Teken een grafiek van deze functie f.

d Schat met behulp van de grafiek voor welke waarde van x geldt $f(x) = 1$.

Opgave 12

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij er aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af. Daar maakt hij een smalle boswal van.

Verder maakt hij aan een van de korte zijden een bredere boswal van 10 meter. Zijn land wordt daarmee in totaal 2690 m^2 kleiner.

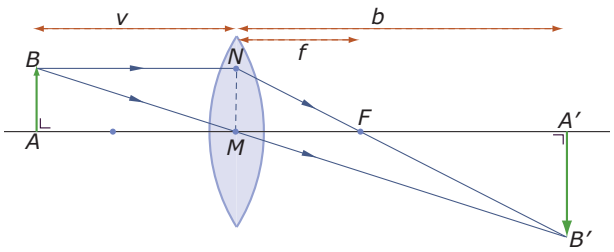
a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (meter).
Geef een formule voor de oppervlakte $A(x)$ van het oorspronkelijke land.

b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef dit verband als formule met haakjes.

c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 1.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldsafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntsafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13

Hierboven vind je de lenzenformule voor zuiver sferische lenzen.

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $b = \frac{vf}{v-f}$.

b Neem aan dat de brandpuntsafstand $f = 4$ cm.
Schrijf nu het functievoorschrift van $b(v)$ op.

c Hoe kun je aan deze formule zien dat hij geen betekenis heeft als de voorwerpsafstand kleiner is dan de brandpuntsafstand? Hoe volgt dat uit de figuur hierboven?

d Hoe groot is de beeldsafstand bij een voorwerpsafstand van 12 cm?

Testen

Opgave 14

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

a $3x - 0{,}5y = 6$

b $x\sqrt{y} = 6 - x$

c $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 12$

Opgave 15

De formule voor een éénparig versnelde beweging is:

$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in s
- v_0 de snelheid in m/s op $t = 0$
- a de versnelling in m/s^2 is

Je kunt bijvoorbeeld versnellen als je met een constante snelheid van 3 m/s fietst door een kracht uit te oefenen die zorgt voor een versnelling van bijvoorbeeld $a = 1{,}2$ m/s^2.

a Welk functievoorschrift geldt dan voor $s(t)$?

b Bereken $s(10)$.
Welke betekenis heeft dit getal?

c Hoe ziet de grafiek van $s(t)$ er uit als je deze versnelling precies 10 seconden volhoudt?

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met variabelen en formules. In dit onderwerp zijn de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het begrip variabele — gelijksoortige termen — herleiden
- breuk met variabelen — gelijknamig maken
- termen en factoren — haakjes wegwerken — ontbinden in factoren
- macht met variabelen, grondtal, exponent — wetenschappelijke/technische notatie
- worteltrekken — hogere machtswortel
- functie — functievoorschrift

Activiteitenlijst

- in uitdrukkingen met variabelen termen en/of factoren samennemen;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- in uitdrukkingen met variabelen haakjes wegwerken — uitdrukkingen met variabelen ontbinden in factoren;
- werken met machten en de rekenregels daarbij toepassen — werken met de wetenschappelijke en de technische notatie;
- (hogere machts)worteltrekken en rekenen met wortelvormen, ook met variabelen;
- formules die een verband tussen twee variabelen beschrijven herleiden naar een functie — tabellen en grafieken bij functies tekenen.

Testen

Opgave 1

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen.

a $5x^2 + 6x - x(x+3)$

b $\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 4\right) - p^3(p+1)$

c $4ab^2 - 2a^2b + 6ab \cdot 4a - 6ab \cdot 4b$

d $4p - (8 - 4p)$

e $(x-1)^2 - (x-1)(x+1)$

f $(-2a)^3 \cdot 3b^2 - 6ab \cdot -a^2b$

Opgave 2

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één breuk.

a $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$

b $\frac{4}{10}p \cdot \frac{5p}{8p^2}$

c $\frac{2}{3k} + \frac{3}{k} \cdot \frac{5}{k}$

d $\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k}$

e $\frac{-p}{3q} \Big/ \frac{2}{5q}$

f $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

Opgave 3

Bereken als $p = 4$, $q = -5$ en $r = 3$.

a $\frac{3p^2q}{-4pqr}$

b $(-2p)^4 + 6p^6 \big/ (-2p^2)$

c $4q(2r + p) - 2p(1 + 2q)$

Opgave 4

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm $y = f(x)$.

a $x - 2y = 6$

b $2xy = 13$

c $\frac{x}{2y} = 12$

d $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Opgave 5

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $4x^2 - 6x$

b $4x^3y - 6xy^3$

c $4x^2 - 4$

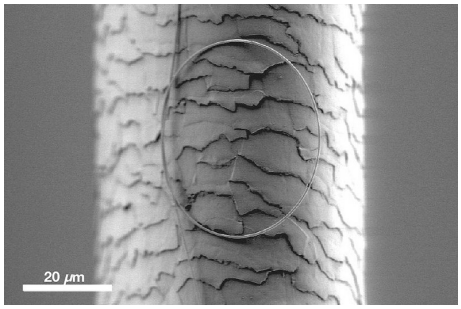
d $x^2 - 9x - 22$

e $4x^2 + 40x + 64$

f $2x + x^2 - x^3$

Opgave 6

In de **nanotechnologie** gaat het om hele kleine afstanden: 1 nm (nanometer) is 10^{-9} m. Dit is een schaal van grootte die net boven die van atomen (0,060 nm tot 0,275 nm) en eenvoudige moleculen ligt. Hiernaast zie je een foto van een koolstofnanobuis die in een lus op een haar ligt. Gebruik in deze opgave steeds de wetenschappelijke notatie.



Figuur 1.1

a Hoeveel m is de grootte van een atoom dat 0,060 nm is?

b Je ziet in de figuur een afstand van 20 μm aangegeven door een balkje. Hoeveel m is 20 μm?

c Hoeveel balkjes van 20 μm gaan er in een haar van 16 cm?

d Schat de diameter van de koolstofnanobuis. Hoeveel van die nanobuizen tegen elkaar hebben dezelfde diameter als één haar?

Opgave 7

Schrijf de volgende uitdrukkingen met wortels zo eenvoudig mogelijk en in ieder geval zonder worteltekken in de noemer van een breuk. Neem aan dat $p \geq 0$.

a $4\sqrt{2p} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{p}$

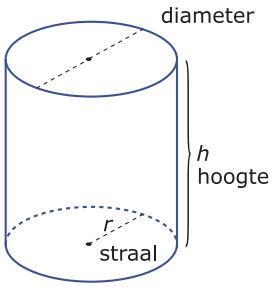
b $\frac{18\sqrt{5p}}{3\sqrt{p}}$

c $\sqrt{32p^2} - \sqrt{8p} \cdot \sqrt{p}$

d $\frac{2p}{\sqrt{p}}$

Opgave 8

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter. Ze passen dus precies in een kubus.



Figuur 1.2

a Voor deze serie blikjes is V een functie van r. Geef het bijpassende functievoorschrift.

b Bereken $V(5)$ in gehele eenheden nauwkeurig.

c Neem aan dat $0 < r < 20$. Maak de grafiek van de functie $V(r)$.

d Bij welke afmetingen van de cilinder geldt: $V = 1000$ cm^3?

Toepassen

Opgave 9: Oppositie van planeten

Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.

Figuur 1.3

a Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P. Betekent dit dat dan ook T groter wordt?

b Tussen twee opposities van Jupiter zitten 398,6 dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de aarde is 365,25 dagen.

c De omlooptijd van Mars is 1,88 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat $T_P^2 = 3{,}95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

d Voor Saturnus geldt $r \approx 1{,}43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.

Opgave 10: Vermenigvuldigen en delen

Ook uitdrukkingen met letters kun je gewoon vermenigvuldigen door ‘onder elkaar zetten’ en delen met behulp van een staartdeling. Hier zie je daar twee eenvoudige voorbeelden van. In de linkerfiguur wordt de vermenigvuldiging $(2x + 1) \cdot (x - 3)$ uitgevoerd, in de rechterfiguur wordt $2x^2 - 5x - 3$ gedeeld door $x - 3$.

$$\begin{array}{rl} 2x + 1 & \\ x - 3 & \times \\ \hline -6x - 3 & \\ 2x^2 + x & \\ \hline 2x^2 + 5x - 3 & + \end{array}$$

Tenslotte alles optellen

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 = 2x + 1 \\ \underline{2x^2 - 6x \;-} \\ \quad x - 3 \\ \quad \underline{x - 3 \;-} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Bereken $1(x - 3)$ en trek dat van $x - 3$ af. Je komt op 0 uit, de deling komt uit.

Figuur 1.4

a Voer zelf zowel de vermenigvuldiging als de deling uit. Waarom horen er in de deling eigenlijk haakjes te staan?

Eerst even een paar vermenigvuldigingen oefenen. Bereken:

b $(3x + 5)\,(2x - 1)$

c $\left(x^2 + 5x - 6\right)(2x - 4)$

En nu een paar delingen oefenen. Bereken:

d $\left(3x^2 + 15x + 18\right) / (x + 3)$

e $\left(3x^3 + 17x^2 + 42x + 16\right) / (3x - 1)$

f Gebruik nu je antwoord bij e om $3x^3 + 17x^2 + 42x + 16$ in factoren te ontbinden.

2

Vergelijkingen

2.1 Basistechnieken 56
2.2 Balansmethode 63
2.3 Ontbinden 70
2.4 Breuken in vergelijkingen 77
2.5 Wortels in vergelijkingen 84
2.6 Totaalbeeld 89

2.1 Basistechnieken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Voorkennis

- werken met variabelen in formules, in uitdrukkingen;
- bij formules grafieken maken.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt twee cilindervormige kaarsen. De ene kaars is blauw en 27 cm lang, de andere is geel en 17 cm lang. De blauwe kaars wordt 4,5 cm per uur korter en de gele kaars wordt elk uur 2 cm korter.

a Hoeveel verschil zit er in de tijd waarin beide kaarsen opbranden?

b Op welk tijdstip zijn beide kaarsen even lang?

c Hoeveel uur is de gele kaars langer dan de blauwe?

Uitleg

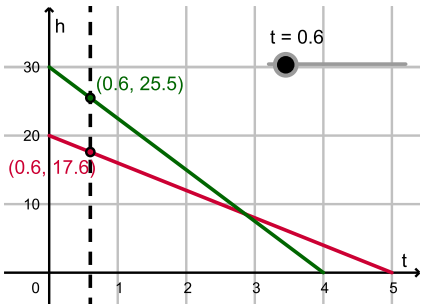
Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die op hetzelfde moment zijn aangestoken. In de grafiek zie je dat ze steeds korter worden. De bijbehorende formules zijn:

- Rode kaars: $h = 20 - 4 \cdot t$
- Groene kaars: $h = 30 - 7{,}5 \cdot t$

met h de lengte van de kaars in cm en t de tijd in uren.

De rode kaars lijkt in de grafiek na 5 uur helemaal op. Dat is het punt waarin $h = 0$. Een dergelijk punt heet een **nulpunt**.



Figuur 2.1

Om zeker te weten of dit ook echt het geval is gebruik je de formule van de rode kaars. Je lost op $h = 0$ dus $20 - 4t = 0$. Dit heet een **vergelijking**. Ga na dat voor $t = 5$ de vergelijking waar is. $t = 5$ heet de **oplossing** van de vergelijking.

Je ziet dat beide grafieken elkaar snijden.
Beide kaarsen zijn dan even lang, dus de hoogte van de groene kaars is gelijk aan de hoogte van de rode kaars. Als je het bijbehorende tijdstip wilt bepalen dan los je de vergelijking $20 - 4t = 30 - 7{,}5t$ op.
Je ziet dat de formule van de rode kaars gelijk is gesteld aan die van de groene.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 56**.

a Waaraan zie je dat de kaarsen opbranden? Welke kaars brandt het snelst op en hoe zie je dat aan de grafiek?

b Hoe zie je aan de formules welke kaars het snelst opbrandt?

c Hoe lang zijn deze kaarsen op het moment van aansteken?

d Geef de coördinaten van het nulpunt van de groene grafiek. Welke vergelijking hoort hierbij? Laat zien hoe je met deze vergelijking het antwoord kunt controleren.

e Hoeveel tijd zit er tussen het opbranden van de groene en de rode kaars?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg op pagina 56**.

a Hoe lang is de rode kaars na 1 uur? En de groene kaars?

b Hoe groot is het verschil in lengte op $t = 1$? En welke kaars is dan het langst?

c Bepaal met de grafieken op welk tijdstip het verschil tussen de lengtes van beide kaarsen 0 is. Wat betekent dit?

d Hoe zou dit tijdstip met behulp van de vergelijking in de uitleg kunnen controleren? Waarom klopt dit niet precies?

e Hoe zou je een nauwkeuriger tijdstip kunnen vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

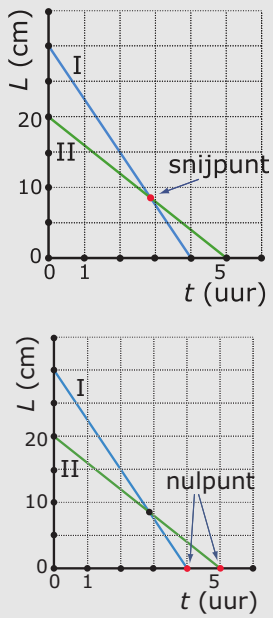
Een formule waarin een isgelijkteken voorkomt heet een **vergelijking**.
Dat isgelijkteken wijst erop dat wat links ervan staat dezelfde waarde moet hebben als wat er rechts van staat. De vergelijking is in ‘balans’.

Het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen is hiervan een voorbeeld. Je ziet dit in beide grafieken in beeld gebracht.

Als beide kaarsen gelijk zijn geldt
$20 - 4t = 30 - 7{,}5t$.
De waarde van t die linker- en rechterkant van deze vergelijking gelijk maakt heet de **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

Als de lengte van een kaars 0 is, heb je te maken met een **nulpunt** van de grafiek. Je ziet hiernaast twee nulpunten. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7{,}5t = 0$ op te lossen. Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.

Het oplossen van een vergelijking met één onbekende doe je door **inklemmen**, of door slim te rekenen, bijvoorbeeld door **terugrekenen**. Bekijk de voorbeelden.

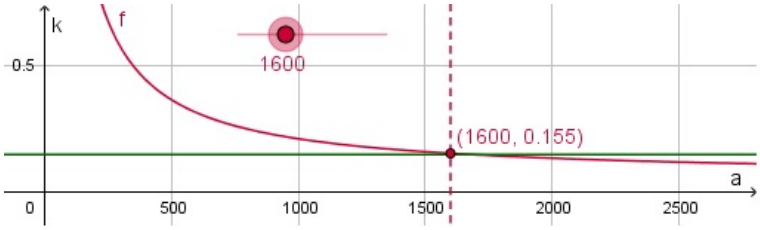


Figuur 2.2

Voorbeeld 1

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Bekijk de applet.



Figuur 2.3

Antwoord

De grafiek brengt het probleem in beeld. Je kunt de kosten per kopie van de school en die van de leerling aflezen.

Bekijk zelf wanneer beide even groot zijn. Je zult nog geen nauwkeurig antwoord kunnen geven, er zijn nog steeds meerdere getallen waar je op afgerond 15 cent per kopie uitkomt.

Om te bepalen welke daarvan het juiste getal is, moet je het aantal decimalen waarmee je het snijpunt afleest verhogen. Dan kun je tot op de kopie nauwkeurig antwoord geven. De oplossing wordt door inklemmen gevonden. Je doet dit handmatig met een tabel.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 58** en werk met de applet.

a Waarom zijn de kosten per kopie voor de leerling constant? Welke formule hoort daar bij?

b Waarom zijn de kosten per kopie voor de school niet constant?

c Bereken de kosten per kopie voor de school als er 1000 kopieën worden gemaakt. Hoeveel zijn deze kosten bij 2000 kopieën? En bij 3000 kopieën?

d Welke formule beschrijft dus de kosten per kopie voor de school?

e Onderzoek bij welk aantal kopieën de kosten per kopie onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Welk probleem kom je tegen?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 58** en werk met de applet.

a In hoeveel decimalen nauwkeurig kun je de kosten per kopie aflezen?

b Onderzoek opnieuw bij welk aantal kopieën de kosten onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Hoeveel antwoorden zijn er nu nog mogelijk?

c Hoe kun je nu bepalen welke van deze antwoorden het juiste is?

d Laat zien hoe dit met een tabel door inklemmen kan.

Voorbeeld 2

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Antwoord

De kosten kun je k noemen en het aantal kopieën is a.
Voor de school geldt dan $k = 0{,}06 + \frac{152}{a}$ en voor de leerling geldt $a = 0{,}15$ want je betaalt voor elke kopie 15 cent.
Je moet dus deze vergelijking oplossen: $0{,}06 + \frac{152}{a} = 0{,}15$.
Linkerkant en rechterkant moeten gelijk blijven dus moet $\frac{152}{a} = 0{,}09$.

Nu maak je gebruik van een rekenopgave die er erg op lijkt zoals $\frac{6}{2} = 3$.
Dit kun je ook schrijven als $2 = \frac{6}{3}$ en voor onze vergelijking betekent dat $a = \frac{152}{0{,}09} \approx 1689$.
Deze manier van werken heet wel **analogierekenen**.
Hier moet je afronden op gehele getallen.

Opgave 5

Bekijk de oplossing die in **Voorbeeld 2 op pagina 59** wordt gegeven.

a Waarom past de gegeven vergelijking bij het gestelde probleem?

b Bij een vergelijking moeten de linkerkant en de rechterkant van het isgelijkteken dezelfde waarde hebben. Leg uit hoe hieruit volgt dat $\frac{152}{a} = 0{,}09$.

c En hoe is hieruit afgeleid dat $a = \frac{152}{0{,}09}$?

d Komt je antwoord overeen met het voorgaande voorbeeld? Vanaf hoeveel kopieën gaat de school verdienen?

Opgave 6

Los nu de volgende vergelijkingen op met behulp van analogierekenen:

a $\frac{600}{x} = 0{,}05$

b $20 + \frac{40}{g} = 23$

c $\frac{200-x}{20} = 0{,}4$

d $\frac{20}{200-x} = 0{,}4$

Voorbeeld 3

Los op: $2(x-3)^2 - 8 = 10$

Antwoord

Hier komt de variabele x op één plaats aan de linkerzijde van het isgelijkteken voor. Hier kan terugrekenen dus helpen.

- Rekenschema: $x \overset{-3}{\rightarrow} \ldots \overset{(\ldots)^2}{\rightarrow} \ldots \overset{\times 2}{\rightarrow} \ldots \overset{-8}{\rightarrow} 10$
- Terugrekenschema: $x \overset{+3}{\leftarrow} \ldots \overset{\sqrt{\ldots}}{\leftarrow} \ldots \overset{/2}{\leftarrow} \ldots \overset{+8}{\leftarrow} 10$

De oplossing is dus $x = \pm\sqrt{\frac{10+8}{2}} + 3$.

Het teken $\pm$ betekent dat er twee oplossingen zijn namelijk $x = 6 \vee x = 0$.
Bij terugrekenen vanuit een kwadraat moet je daar altijd rekening mee houden.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 60** hoe je een vergelijking oplost door terug te rekenen.

a Wanneer kun je het terugrekenen toepassen om een vergelijking op te lossen?

b Voer zelf de oplossing van de gegeven vergelijking uit.
Controleer vervolgens beide oplossingen door ze voor x in te vullen.

Opgave 8

Los op door terugrekenen:

a $5(x-3) = -3$

b $0{,}5(x-4)^2 - 2{,}5 = 10$

c $4\sqrt{x+2} = 2$

Oefenen

Opgave 9

Twee aanbieders van mobiele telefonie hebben een aanbieding:

- Tele3: € 30,00 per maand en 11 cent per minuut.
- E-Mobile: € 25,00 per maand en 13 cent per minuut.

a Stel een formule op voor de telefoonkosten bij de aanbieding van Tele3.

b Doe hetzelfde voor E-Mobile.

c Bij welk aantal belminuten is E-Mobile duurder dan Tele3? En bij welk aantal is juist Tele3 duurder?

d Jij weet je gemiddelde aantal belminuten per maand wel. Kies je voor de aanbieding van Tele3 of voor die van E-Mobile?

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen nauwkeurig:

a $x^3 = 6 - x$

b $\frac{750}{2x+1} = 300$

c $2^x = 12$

d $2 - \frac{1}{x} = 0{,}5$

e $2(x + 4)^3 = 128$

Opgave 11

Bekijk hoe je de vergelijkingen in de voorgaande opgave hebt opgelost.
In welke gevallen kon je het analogierekenen toepassen? En wanneer kon je terugrekenen?

Opgave 12

Een winkel huurt een kopieerapparaat speciaal voor haar klanten. Dit kost maandelijks 180 euro en het maken van een kopie met dit apparaat kost de winkelier 6,5 cent. De klanten betalen 10 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt wil de winkelier er niet bij inschieten?

a Welke vergelijking kun je nu opstellen om het probleem op te lossen?

b De winkelier schat 6000 kopieën per maand voldoende is om uit de kosten te zijn. Klopt dit met de vergelijking die je hebt gevonden?

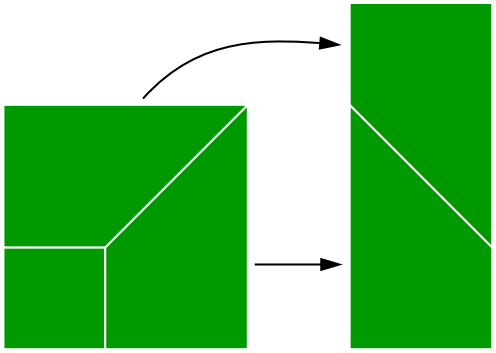
c Kun je een nauwkeuriger oplossing vinden met behulp van de vergelijking?

Opgave 13

Van Apeldoorn naar Deventer is met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof. Je doet over deze rit 14 minuten. Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid?

Opgave 14

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



Figuur 2.4

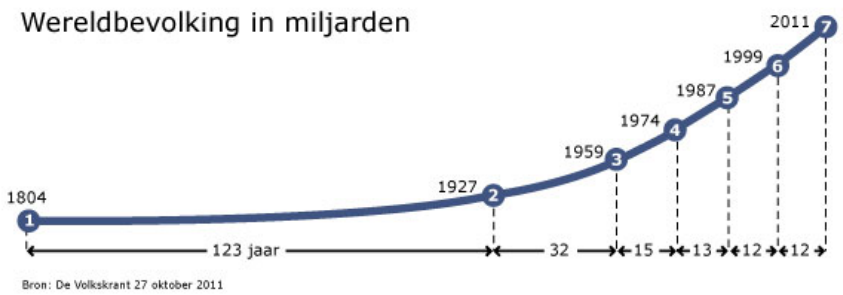
De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2. Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

In gevallen van vergelijkingen met exponentiële groei kun je werken met het inklemmen of met logaritmen.

In 'De Volkskrant' van 27 oktober 2011 staan grafieken over de groei van de wereldbevolking. Hier zie je er één. Uit deze grafiek blijkt dat de wereldbevolking op dit moment toeneemt met 1,3% per jaar.

In een artikel van 29 oktober 2011 wordt verteld dat in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen. Klopt dit met deze grafiek?



Figuur 2.5

Opgave 15

Bekijk het verhaal van het verloop van de wereldbevolking hierboven.

a Controleer de toename van 1,3% per jaar met de gegevens voor 1999 en 2011.

b Ga na of in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen met het gegeven percentage.

c Maak jij nog mee dat de 10 miljardste mens op aarde mag worden begroet?

d Welke onderbouwde kritiek kun je op deze redeneringen hebben?

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op door redeneren:

a $15x - 400 = 515$

b $\frac{200}{x} + 10 = 15$

c $\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 4 = 22$

Opgave 17

De vergelijking $\frac{1}{x} = x + 1$ kun je oplossen met behulp van inklemmen.

a Maak eerst de bijbehorende grafieken.

b Bepaal de snijpunten van deze grafieken in twee decimalen nauwkeurig.

c Geef de oplossing van deze vergelijking in twee decimalen nauwkeurig.

d $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

2.2 Balansmethode

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met de balansmethode.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

a Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?

b Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g. Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die in evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Uitleg

Je kent de balansmethode voor het oplossen van een vergelijking met één onbekende.
Daarbij maak je de vergelijking systematisch eenvoudiger door aan beide zijden van het isgelijkteken hetzelfde op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. (Je mag alleen niet beide zijden door 0 delen of met 0 vermenigvuldigen.)

De vergelijking $2g + 21 = 6g + 5$ kun je daarmee zo oplossen:

$$\begin{aligned} 2g + 21 &= 6g + 5 && \text{beide zijden } -5 \\ 2g + 16 &= 6g && \text{beide zijden } -2g \\ 16 &= 4g && \text{beide zijden } /4 \\ g &= 16/4 = 4 \end{aligned}$$

Als je een vergelijking oplost door redeneren (zoals met de balansmethode) dan noem je dat: algebraïsch oplossen.
Vooral bij vergelijkingen met machten erin heeft het algebraïsch oplossen voordelen. Je krijgt dan meteen alle oplossingen.

Opgave 1

Los de volgende vergelijkingen op.

a $5g + 6 = 3g + 9$

b $5g + 6 = 8g - 18$

c $-2{,}5g + 14 = 8g - 19$

d $-2{,}5g - 19 = 8g - 14$

Opgave 2

Bekijk de vergelijking $2x^2 + 5 = 55$.

a Los deze vergelijking op met de balansmethode.
Denk er aan, dat er twee oplossingen moeten zijn.

b Waarom moesten er wel twee oplossingen zijn?

c Hoe kun je je antwoorden controleren?

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op.

a $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 8$

b $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x^2$

c $\frac{1}{2}x^3 + 3 = 8$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele op meerdere plaatsen voorkomt op te lossen maak je vaak gebruik van de **balansmethode**.

Figuur 2.1

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijkteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijkteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe.

Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: “Links en rechts worteltrekken.”
Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: “Links en rechts kwadrateren.”
Dit kan niet altijd zomaar...

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = -5x + 1{,}5$ algebraïsch op.

Antwoord

Je gebruikt de balansmethode:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3} &= -5x + 1{,}5 && \text{beide zijden } \times 6 \\ x + 2 &= -30x + 9 && \text{beide zijden } -2 \\ x &= -30x + 7 && \text{beide zijden } +30x \\ 31x &= 7 && \text{beide zijden } /31 \\ x &= 7/31 = \tfrac{7}{31} \end{aligned}$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x = \frac{7}{31}$.
Laat een breuk in het antwoord staan en rond niet af. Je hebt dan de vergelijking **exact** opgelost. Afronden doe je alleen als daar om gevraagd wordt!

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 65** de oplossing van de gegeven vergelijking.

a Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?

b Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?

c Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?

d Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $7x - 15 = 4x - 3$

b $0{,}7 - 0{,}2x = 1 - 0{,}6x$

c $\frac{1}{5}x + 2 = 0{,}3x - 3$

d $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $-2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b$.

Antwoord

Ook hier doe je de balansmethode, maar nu werk je eerst de haakjes uit.

$$\begin{aligned} -2(b + 3) &= 5(b + 7) + 2b && \text{beide zijden haakjes uitwerken en verder herleiden} \\ -2b - 6 &= 7b + 35 && \text{beide zijden } +6 \\ -2b &= 7b + 41 && \text{beide zijden } -7b \\ -9b &= 41 && \text{beide zijden } /-9 \\ b &= 41/-9 = -\tfrac{41}{9} \end{aligned}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 65** de gegeven vergelijking.

a Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Controleer je antwoord door substitutie.

c Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x+2) = 2x + 15$

b $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$

c $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x+5)$

d $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2-p)$

e $x - \frac{1}{4}(x+3) + \frac{3}{4} = 0$

Opgave 8

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijkteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

a $2(x+4) = x - (4-x)$

b $2(x-2) = x - (4-x)$

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $0{,}5(x-3)^2 - 10 = 50$.

Antwoord

Deze vergelijking kun je snel oplossen door terugrekenen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen:

$$\begin{aligned} 0{,}5(x-3)^2 - 10 &= 50 && \text{beide zijden } +10 \\ 0{,}5(x-3)^2 &= 60 && \text{beide zijden } /0{,}5 \\ (x-3)^2 &= 120 && \text{terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)} \\ x-3 &= \pm\sqrt{120} && \text{beide zijden } +3 \\ x &= 3 \pm \sqrt{120} \end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x = 3 + \sqrt{120} \vee x = 3 - \sqrt{120}$.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 66** de gegeven vergelijking.

a Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.

c Bij de stap 'terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)' is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x + 10)^2 + 50 = 70$

b $10 - x^2 = 3x^2$

c $10 - (x - 1)^2 = 5$

Oefenen

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

a $3x - 7 = -x + 10$

b $5x - 4 = 3(5 - x)$

c $0{,}2x + 10 = 310$

d $4\left(5 - \frac{3}{4}x\right) + 5x = -x + 10$

e $5x - (3 - 2x) = 11$

f $\frac{5-x}{3} = -\frac{1}{2}(x + 6)$

g $6 - 2(x - 5)^2 = 2$

h $(x - 5)^2 = 5 + x^2$

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

a $1 - (x - 3) = 2(3x - 7)$

b $2x - 4 = 2(1 + x)$

c $\frac{3x-5}{2} = 0{,}25(2x - 10) + x$

d $6 + 2(x - 2)^2 = 4$

e $6 - 2(x - 2)^2 = 4$

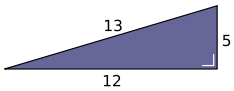
Opgave 13

Oefen nu het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.



Figuur 2.2

a Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hiernaast is getekend.

De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.

b Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x + 1$ noemen? Welke van beide is de hypothenusa (de langste zijde) van de driehoek?

c Aan welke vergelijking moet x voldoen?

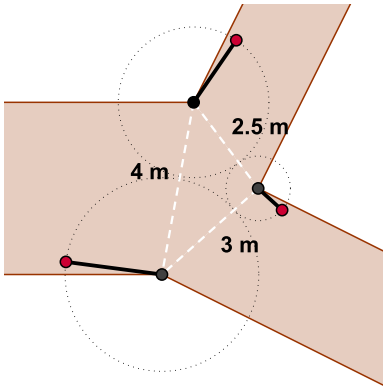
d Laat zien dat deze vergelijking alleen $x = 12$ als oplossing heeft.

Toepassen

Bekijk de applet.

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m.

Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid.
Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...



Figuur 2.3

Opgave 15

Bekijk het hekkenprobleem hierboven.

a Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...

b Neem voor de lengte van het grootste hek x. Wat geldt dan voor het middelste hek? En het kleinste hek?

c Hoe lang moeten het middelste en het kleinste hek samen zijn? Welke vergelijking krijg je daarmee?

d Los je vergelijking en daarmee het probleem op.

Opgave 16: Leeftijdenprobleem

Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was zij 26 jaar.

a Stel Joop's leeftijd op x jaar. Wat geldt dan voor Myrthe's leeftijd?

b Hun leeftijdsverschil is niet veranderd. Welke vergelijking levert dit op?

c Los de vergelijking die je hebt gevonden op. Hoe oud zijn beiden nu?

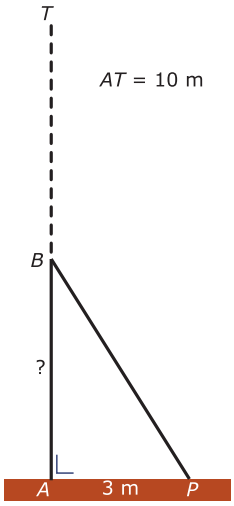
Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A. Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

a Je wilt weten op welke hoogte het breekpunt B zit. Welk lijnstuk wordt je onbekende?

b Er zit een rechthoekige driehoek in je figuur. Welke vergelijking levert dit op?

c Los de gevonden vergelijking op en bereken hoe hoog punt B boven de grond zit.



Figuur 2.4

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op:

a $\frac{x-4}{6} = \frac{1}{3}x + 2$

b $0{,}1(x+5)^2 = x + 15$

c $\frac{1}{2}\sqrt{x-5} + 4 = 22$

Opgave 19

De vergelijking $x^2 = 5x + 6$ kun je niet oplossen met de balansmethode.

a Waarom niet?

b Hoe kun je zo'n vergelijking toch oplossen?

c Geef de oplossing van deze vergelijking.

2.3 Ontbinden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met behulp van ontbinden in factoren.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen en/of door de balansmethode te gebruiken.

Verkennen

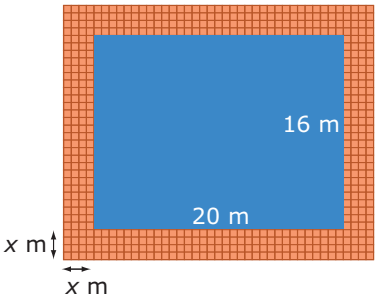
Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.

a Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20 + 2x$ meter is.

b Hoeveel is dan de breedte?

c Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?



Figuur 2.1

Opgave V2

Het zwembadterrein uit de vorige opgave heeft een totale oppervlakte van 480 m^2. Hoe breed is het tegelpad?

a Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?

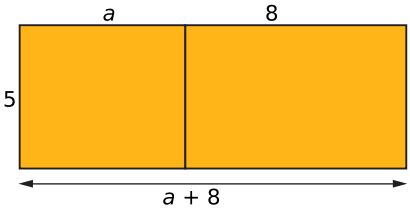
b Hoe los je die vergelijking op?

Uitleg 1

Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren is op hetzelfde principe gebaseerd:

- haakjes wegwerken: $5 \cdot (a + 8) = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5a + 40$
- ontbinden in factoren: $5a + 40 = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5 \cdot (a + 8)$

Bij ontbinden in factoren breng je de grootste gemeenschappelijke factor (hier 5) buiten haakjes.

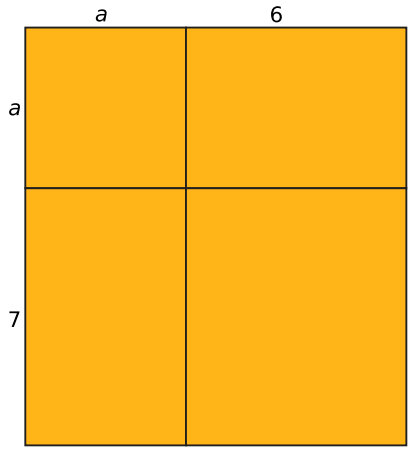


Figuur 2.2

Dit kunt je ook toepassen in ingewikkelder situaties:

- haakjes wegwerken:
  $(a + 6) \cdot (a + 7) = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
  $= a^2 + 13a + 42$
- ontbinden in factoren:
  $a^2 + 13a + 42 = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
  $= (a + 6)(a + 7)$

Bij het ontbinden gebruik je nu de som-product-methode: je zoekt twee getallen waarvan het product 42 is en de som 13.



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 70**. Je ziet eerst hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke factor buiten haakjes te halen. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

a $4x - 20$

b $4x^2 - 20x$

c $4x^2 - 4x$

d $16x - 20x^3$

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 70**. Je ziet ook hoe je kunt ontbinden in factoren door de som-product-methode te gebruiken. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

a $x^2 + 5x + 6$

b $x^2 - 5x + 6$

c $x^2 - x - 6$

d $0{,}5x^2 + 0{,}5x - 3$

Uitleg 2

Het ontbinden in factoren kun je soms toepassen om vergelijkingen op te lossen waarin naast de onbekende ook machten ervan voorkomen. Het doel van het ontbinden is het splitsen van de vergelijking in eenvoudiger vergelijkingen. Omdat je dan gebruik maakt van $a \cdot b = 0$ betekent $a = 0 \vee b = 0$ moet je beginnen met op 0 herleiden.

Je wilt bijvoorbeeld de vergelijking $5x^2 = 25x$ oplossen.
Dat kan zo:

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 25x && \text{op 0 herleiden} \\ 5x^2 - 25x &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\ 5x \cdot (x - 5) &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\ 5x = 0 \ \vee \ x - 5 &= 0 && \text{oplossing opschrijven} \\ x = 0 \ \vee \ x &= 5 \end{aligned}$$

Dit kun je soms ook doen bij ingewikkelder vergelijkingen zoals $x^2 + 4x = 45$.
Dan heb je na het op 0 herleiden de som-product-methode nodig om te ontbinden.

Ontbinden in factoren is een handige en snelle manier om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Veel handiger dan de abc-formule. Maar je kunt er ook vergelijkingen met hogere machten mee aanpakken.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 71**. Neem nu de vergelijking $x^2 + 4x = 45$.

a Herleid deze vergelijking op 0 en laat zien hoe je de linkerzijde kunt ontbinden in factoren.

b Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.

c Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op:

a $x^2 + 12x - 45 = 0$

b $x^2 - 12x = 45$

c $x(x - 1) = 90$

Theorie en voorbeelden

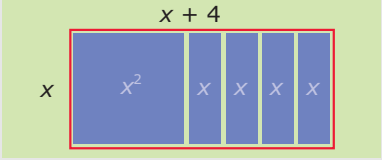
Om te onthouden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen. Hierbij kun je gebruik maken van een tabel.

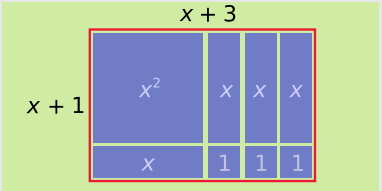
Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen. Ook hierbij is een tabel handig.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking kun je dan herleiden tot een product van factoren waar 0 uit komt. De vergelijking kun je dan schrijven in de vorm $a \cdot b = 0$. En omdat $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$ kun je de vergelijking dan **splitsen** in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Omdat dit splitsen alleen lukt bij een product waar 0 uit komt, moet je de vergelijking altijd eerst de vorm ... = 0 geven. Dat heet **op 0 herleiden**.



$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$



$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$

Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $2x^2 = 10x - 8$ algebraïsch op.

Antwoord

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 10x - 8 && \text{op 0 herleiden} \\ 2x^2 - 10x + 8 &= 0 && \text{beide zijden } /2 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\ x - 1 = 0 \ \vee \ x - 4 &= 0 && \text{oplossing opschrijven} \\ x = 1 \ \vee \ x &= 4 \end{aligned}$$

Opgave 5

Bekijk de vergelijking van **Voorbeeld 1 op pagina 72**.

a Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.

b Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?

c Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op.

a $a^2 + 2a = 35$

b $(b - 2)(2b + 3) = 0$

c $x^2 - 15 = 2x$

d $3x^2 - 45 = -6x$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^3 = 6x$.

Antwoord

Ook hier kun je het ontbinden in factoren toepassen.

$$x^3 = 6x$$ op 0 herleiden

$$x^3 - 6x = 0$$ linkerlid ontbinden in factoren

$$x(x^2 - 6) = 0$$ splitsen

$$x = 0 \vee x^2 - 6 = 0$$ rechter vergelijking verder oplossen

$$x = 0 \vee x^2 = 6$$ rechter vergelijking worteltrekken

$$x = 0 \vee x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Er zijn nu drie oplossingen. Kun je dat verklaren vanuit de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$?

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 73**.

a Maak de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$.
Leg uit waarom er drie oplossingen zijn.

b Controleer de drie gevonden oplossingen door substitutie in de gegeven vergelijking.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^3 = 9x$

b $x^3 = 9x^2$

c $x^3 = 9x^2 + 10x$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^4 = 9x$

b $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 80$

c $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 0$

Oefenen

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

a $3x^2 - 36x = 0$

b $k^2 - 9 = 7$

c $x^2 = x$

d $c^2 + 2c = 35$

e $2x^2 - 4x - 16 = 0$

f $2x^2 - 8x - 17 = 0$

Opgave 11

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2. De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

a Neem voor de lengte x meter. Hoeveel bedraagt de breedte dan?

b Je kunt nu bij de oppervlakte van het land een vergelijking opschrijven. Welke?

c Los deze vergelijking op. Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

a $(x - 5)(2x - 6) = 0$

b $(x - 5)(2x - 6) = 30$

c $2(x - 3)^2 = 8x$

d $2(x - 3)^2 = 18$

e $x^3 = 27x$

f $x^3 = 27x^2 + 90x$

Opgave 13

Oefen nu het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via **Practicum**.

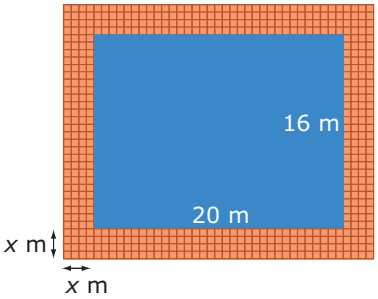
Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

Een vierkant heeft zijde x. Een rechthoek heeft zijden $12 - x$ en $x - 2$. Voor welke waarden van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?

Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen.
Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit zwembad bedraagt.



Figuur 2.5

Opgave 15

Bekijk het zwembadprobleem hierboven.

a Welke vergelijking vind je als je de oppervlakte van het totale terrein bekijkt?

b Los deze vergelijking nu op met behulp van ontbinden in factoren. Bereken de breedte van het tegelpad.

Opgave 16: Boer Harmsen

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer af gaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.
De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsens land nu geworden is. Stel zelf een geschikte vergelijking op.

Opgave 17: Kubus en cilinder

Een kubus met ribbelengte x en een cilinder met hoogte 10 en diameter x hebben een even groot volume. Alle afmetingen zijn in cm.

Welke afmetingen heeft de kubus?

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^2 - 13x = 0$

b $x^2 - 13x = 30$

c $\frac{1}{2}(x - 5)^2 = 18$

d $(x - 6)\left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -30$

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^4 = 16x^2$

b $x^4 = 16x$

c $x^4 + 6x^3 = 16x^2$

2.4 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin breuken met de onbekende in de noemer voorkomen.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t.

b Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?

c Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

d Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?

e Probeer deze vergelijking op te lossen.

Opgave V2

Je hebt als het goed is eerder geleerd hoe je twee breuken kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Neem nu de breuken $\frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$.

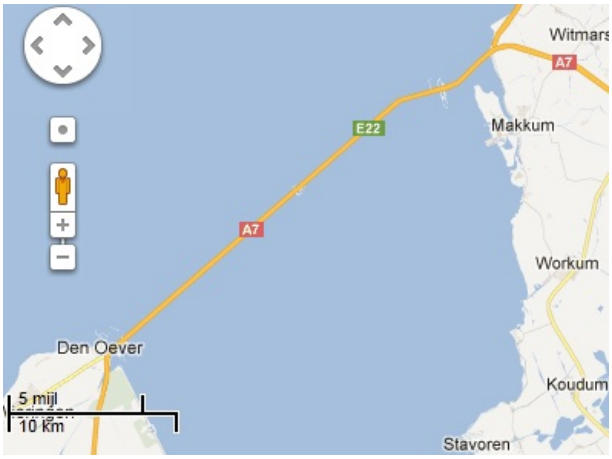
a Laat zien hoe je beide breuken optelt en de tweede breuk van de eerste aftrekt.

b Laat zien hoe je beide breuken vermenigvuldigt.

c Laat zien hoe je de eerste breuk door de tweede deelt.

Uitleg

Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.



Figuur 2.1

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5.$

Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$\frac{1920}{v} + 5 = 25$

oplossen. Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.
Dit noem je wel analogierekenen.

$\frac{6}{2} = 3$ dus $2 = \frac{6}{3}$

Figuur 2.2

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dan val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.
Dit noem je wel **analogierekenen**.

$\frac{6}{2} = 3$ dus $2 = \frac{6}{3}$

Figuur 2.3

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.
De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijkteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de **gebroken vergelijking**:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de **balansmethode**. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{aligned} \frac{1920}{v} + 5 &= 25 \\ \frac{1920}{v} &= 20 \\ 1920 &= 20v \\ v &= \frac{1920}{20} = 96 \end{aligned}$$

beide zijden -5
beide zijden $\cdot v$
beide zijden $/20$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

a $12 - \frac{1}{x} = 8$

b $\frac{50}{2x-3} = 10$

c $\frac{6}{x} + x = 5$

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $\frac{x^2+9x-10}{x-1} = 0$ algebraïsch oplossen.

a Waarom helpt analogierekenen nu niet?

b Dan maar de balansmethode. Waarmee ga je beide zijden vermenigvuldigen? En waar moet je dan om denken?

c Los de vergelijking verder op.

d Eén van beide waarden die je bij c hebt gevonden hoort nu niet bij de oplossing. Hoe komt dat?

Voorbeeld 2

Wielrenner A doet over een afstand van 100 km precies 1 uur korter dan wielrenner B die gemiddeld 5 km/h langzamer rijdt. Hoe snel rijden ze gemiddeld?

Antwoord

De gemiddelde snelheid van A noem je v km/h, dan is die van B gelijk aan $v - 5$ km/h. Uit de tekst volgt dan de vergelijking:

$\frac{100}{v} + 1 = \frac{100}{v-5}$

Deze vergelijking los je op door beide zijden zowel met v als met $v - 5$ te vermenigvuldigen. Je vermenigvuldigt dus met $v(v - 5)$.

Dit geeft $\frac{100}{v} \cdot v(v - 5) + 1 \cdot v(v - 5) = \frac{100}{v-5} \cdot v(v - 5)$.

En dat wordt $100(v - 5) + v(v - 5) = 100v$.

Dit ga je verder oplossen. Je vindt $v = 25$ km/h.
A fietst gemiddeld met 25 km/h en B met 20 km/h.

Opgave 5

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2 op pagina 80** een gebroken vergelijking wordt gebruikt om de gemiddelde snelheid van twee wielrenners te berekenen.

a Ga na, dat de gegeven vergelijking bij het verhaal past.

b Laat zien hoe de vergelijking stap voor stap met de balansmethode kan worden opgelost.

c Waarom voldoet maar één van beide gevonden waarden voor v?

Opgave 6

Twee automobilisten A en B rijden dezelfde afstand van 60 km met een constante snelheid. B rijdt 20 km/h langzamer dan A, maar A moet onderweg tanken en heeft daar 6 minuten voor nodig. Daardoor doen ze even lang over de gegeven afstand.

Hoe snel rijden ze?

Oefenen

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{200}{a} + 0{,}3 = 0{,}7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{p}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

e $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

f $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 8

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a.

a Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?

b Los deze vergelijking op.

c 1Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 9

Voor een gas in een afgesloten ruimte geldt de **algemene gaswet**. Het verband tussen de druk p in pascal, het volume V in m^3 en de temperatuur T in kelvin is:

$\frac{pV}{T} = c$ waarin c een constante is.

Omdat de temperatuur toeneemt met 80 kelvin, neemt de druk toe van 1,2 naar 1,5 pascal bij een gelijkblijvend volume van 4 m^3.

a Welke vergelijking kun je opstellen bij deze situatie?

b Los deze vergelijking op.

Opgave 10

Iemand legt de 6 km van huis naar school altijd in dezelfde tijd af. Op een bepaalde dag vertrekt hij door omstandigheden 4 minuten te laat van huis. Hij komt precies in dezelfde tijd aan omdat hij 3 km/h sneller rijdt dan normaal.

Hoe hard rijdt hij normaal? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 11

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$. Hierin is U het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

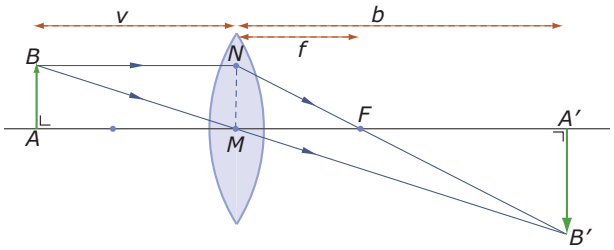
a Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2$ mA en $R = 1{,}5$ MΩ.

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

b Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 2.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 12

a Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?

b Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?

c Los nu de vergelijking van a op.

d Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldafstand.

e Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \ldots$ Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 13

Gebruik de lenzenformule uit de voorgaande opgave.

Van een bepaalde lens is de brandpuntafstand 3 cm. De beeldafstand is 8 cm groter dan de voorwerpafstand.

Bereken de voorwerpafstand.

Testen

Opgave 14

Willem en zijn vriendin Arina leggen een afstand van 18 km af en komen gelijktijdig aan. Willem ging op de fiets en kreeg een voorsprong van 30 minuten op Arina die op haar scooter twee keer zo snel reed als Willem. Ga er van uit dat beiden een constante snelheid aanhielden.

Hoe snel reed Willem? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{600}{x} = 24$

b $\frac{600}{x^2} = 24$

c $\frac{2}{x} - 10 = \frac{1}{2x}$

d $\frac{2}{x} - 3x = \frac{1}{2x}$

2.5 Wortels in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin wortels voorkomen met de onbekende binnen het wortelteken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Omdat het aardoppervlak bij benadering een bolvorm heeft, is je kijkafstand (de afstand tot de horizon) beperkt. Er geldt: $a \approx 3568 \cdot \sqrt{h}$.
Hier is:
h de hoogte in meter van je oog boven de begane grond en
a de afstand in meter die je kunt kijken.

a Je staat op een toren, je oog is 25 m boven de grond.
Hoe ver kun je kijken?

b Hoe hoog moet je oog boven de grond zijn om op een rustige zee 20 km ver te kunnen kijken?

Uitleg

Voor het verband tussen de kijkafstand a (in m) in een aards landschap zonder obstakels en je ooghoogte h (in m) geldt $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$. Deze formule kun je zelf afleiden...

Als je hiermee wilt berekenen hoe hoog je oog boven de grond moet zitten om bijvoorbeeld 20 km te kunnen kijken, dan moet je de vergelijking

$$3568 \cdot \sqrt{h} = 20000$$

Figuur 2.1

oplossen. Dat is een vergelijking waarin een wortelvorm voorkomt waar de onbekende, de variabele, in zit.
Je kunt hier beginnen met aan beide zijden van het isgelijkteken te delen door 3568.

Dit levert op: $\sqrt{h} = 20000/3568 = 5{,}605...$
Het wortelteken kun je nu wegwerken door te kwadrateren: $h = 5{,}605...^2 \approx 31{,}4$ m.

Een vergelijking met één onbekende die voorkomt in een wortelvorm kun je oplossen door hem te schrijven in de vorm $\sqrt{...} = ...$ en dan te kwadrateren. Heb je hogere machtswortels dan moet je diezelfde hogere macht gebruiken om de wortelvorm weg te werken.

Opgave 1

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de **Uitleg op pagina 84**.

a Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 10 km?

b Verdubbelt je kijkafstand als je ooghoogte verdubbelt?

Opgave 2

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de **Uitleg op pagina 84**.
Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 1000 keer zo groot als je ooghoogte?

a Je moet nu oplossen $3568 \cdot \sqrt{h} = 1000 \cdot h$.
Hoe begin je daar mee?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Af en toe heb je te maken met een vergelijking waarbij de variabele binnen een wortelvorm voor komt.

Een voorbeeld is $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Zo'n vergelijking kun je oplossen door hem eerst in de vorm $\sqrt{x} = \ldots$ te schrijven.
Daarna ga je beide zijden kwadrateren.

Het is bij vergelijkingen met wortelvormen wel van belang om achteraf je oplossing(en) te controleren.
Er mag immers geen negatief getal onder het wortelteken uitkomen, want dat krijg je geen reële waarde.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $2 \cdot \sqrt{36 - x^2} = 10$

Antwoord

De vergelijking kun je herleiden naar de vorm $\sqrt{\ldots} = \ldots$ en dan kun je kwadrateren.
De oplossing gaat zo:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sqrt{36 - x^2} &= 10 && \text{beide zijden delen door 2} \\
\sqrt{36 - x^2} &= 5 && \text{kwadrateren} \\
36 - x^2 &= 25 && \text{beide zijden } -36 \text{ en vermenigvuldigen met - 1} \\
x^2 &= 11 && \text{beide zijden worteltrekken} \\
x &= \pm\sqrt{11}
\end{aligned}
$$

Er zijn twee oplossingen, die allebei voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking, vul ze maar in.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $4 + \sqrt{2x} = 18$

b $3 \cdot \sqrt{15 + x^2} = 15$

c $\frac{25}{\sqrt{1+x^2}} = 5$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Antwoord

Eerst werk je toe naar de vorm $\sqrt{\ldots} = \ldots$ en dan kwadrateren.

Je krijgt dan een kwadratische vergelijking.

$$\begin{aligned} 4 + 2 \cdot \sqrt{x} &= 2x \\ 2 \cdot \sqrt{x} &= 2x - 4 \\ \sqrt{x} &= x - 2 \\ x &= (x-2)^2 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-4)(x-1) &= 0 \\ x = 1 \ \vee \ x &= 4 \end{aligned}$$

beide zijden -4
beide zijden $/2$
beide zijden kwadrateren
haakjes wegwerken en op 0 herleiden
ontbinden in factoren
oplossingen opschrijven

Je moet bij vergelijkingen met de onbekende in een wortelvorm altijd goed nagaan of de oplossingen wel kunnen.

Ga na, dat $x = 1$ niet voldoet, maar $x = 4$ wel.

Opgave 4

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2 op pagina 86** een vergelijking met een wortelvorm wordt opgelost.

a Waarom moet je nu de vergelijking eerst in de vorm $\sqrt{\ldots} = \ldots$ schrijven?

b Ga zelf na dat $x = 1$ niet voldoet en $x = 4$ wel.

c Laat zien wat het oplossen van deze vergelijking betekent door de grafieken van $y_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{x}$ en $y_2 = 2x$ te tekenen.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $4 + \sqrt{2x} = \frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$

b $2 - \sqrt{x} = x$

Oefenen

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $3\sqrt{x} = 14$

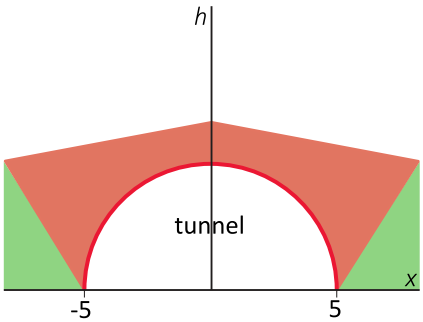
b $3 + \sqrt{2x} = 14$

c $x + \sqrt{x} = 6$

Opgave 7

Een tunnel heeft boven het wegdek de vorm van een halve cirkel. Je maakt een assenstelsel met de x-as langs het wegdek. Daar loodrecht op staat de as die de hoogte h van een punt van de tunnel boven het wegdek weergeeft. Deze as gaat door het midden van het wegdek.

Er geldt nu $h = \sqrt{25 - x^2}$.



Figuur 2.2

a Laat zien, dat de getallen - 5 en 5 bij de x-as kloppen.

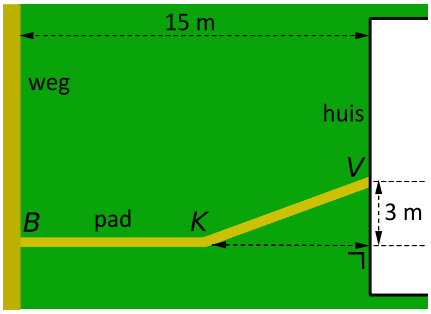
b Hoe hoog is deze tunnel in het midden? Licht je antwoord toe.

c Kunnen twee vrachtauto's met een hoogte van 4 m elkaar passeren in deze tunnel? Hoe breed kunnen die vrachtauto's dan zijn?

Opgave 8

Iemand legt een pad aan vanaf de weg naar zijn voordeur.
Het huis ligt 15 m van de weg af, het pad begint bij B loodrecht op de weg en maakt halverwege bij K een knik richting de voordeur bij V. De afstand BK van de weg tot de knik is dus even groot als de afstand KV van de knik tot de voordeur. Zie voor verdere afmetingen het bovenaanzicht hiernaast.

Hoe lang is dit pad?



Figuur 2.3

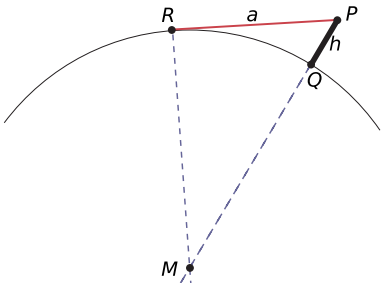
Opgave 9

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van $y_1 = x + \sqrt{8 - x^2}$ en $y_2 = 2x$.

Toepassen

De formule voor de kijkafstand $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ uit de **Uitleg op pagina 84** kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40 . 000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 2.4

Opgave 10

Bekijk de formule voor de kijkafstand.
Je ziet hierboven een figuur waarmee je die formule kunt afleiden.

a Hoe kun je a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h}$.

c Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

d Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

Testen

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\sqrt{25 - x^2} = 3$

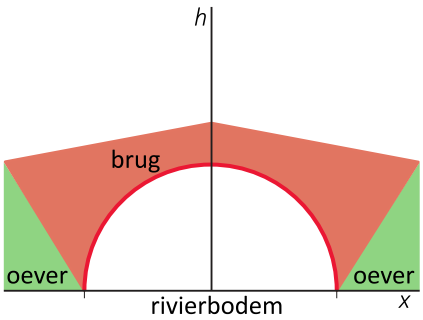
b $x + \sqrt{2x} = 4$

Opgave 12

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h = \sqrt{36 - x^2}$ (met x en h in meter). Het lijnstuk tussen beide nulpunten van deze formule stelt de rivierbodem voor.

a Hoe breed is die rivierbodem?

b De waterhoogte van de rivier is twee meter boven de bodem. Bereken de breedte van de waterspiegel onder deze boog in centimeter nauwkeurig.



Figuur 2.5

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met vergelijkingen. In dit onderwerp komen de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij.

Je hebt nu alle theorie van **Vergelijkingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vergelijking — snijpunt — nulpunt — inklemmen — terugrekenen
- balansmethode
- ontbinden in factoren — buiten haakjes brengen — som-product-methode
- gebroken vergelijking
- wortelvormen

Activiteitenlijst

- vergelijkingen oplossen door inklemmen of slim rekenen — oplossingen van een vergelijking interpreteren in termen van grafieken;
- de balansmethode gebruiken om vergelijkingen algebraïsch op te lossen;
- vergelijkingen oplossen door op 0 herleiden, ontbinden in factoren en splitsen;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt in de noemer van een breuk;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt binnen een wortelvorm.

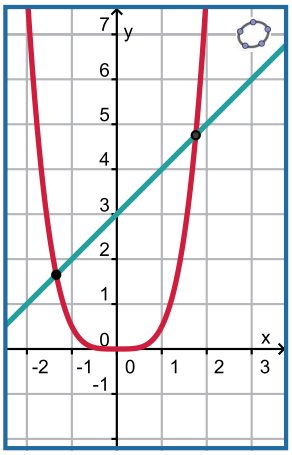
Testen

Opgave 1

Hier zie je grafieken bij de formules $y_1 = 0{,}5x^4$ en $y_2 = x+3$. Alle snijpunten van beide grafieken zijn in beeld.

a Welke vergelijking moet je oplossen om de snijpunten van de grafieken te berekenen?

b Bereken door inklemmen de coördinaten van de snijpunten van deze grafieken in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 2.1

Opgave 2

Los de volgende kwadratische vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^2 + 3x - 4 = 0$

b $x^2 - 2x = 24$

c $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

d $0{,}5(x - 6)^2 = 11$

e $2(x - 3)\,(2x + 5) = 0$

f $2(x - 3)\,(2x + 5) = -30$

g $9x^2 = 16$

h $x(x - 3) = 2 + x^2$

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}x - 1$

b $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = -1$

c $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4x} - 1$

d $x + \frac{18}{x+5} = 6$

Opgave 4

Bij een ruilverkaveling worden stukken land verruild voor even grote stukken land die voor beide partijen gunstiger liggen (dichter bij huis bijvoorbeeld). Onder andere wordt een vierkant stuk land verruild voor een rechthoekig stuk land dat 40 m langer, maar 30 m minder breed is.

a Met welke vergelijking kun je de zijde van het vierkante stuk land berekenen?

b Los deze vergelijking op en bepaal de oppervlakte van het land dat bij deze ruil betrokken was in ha.

Opgave 5

In een stroomkring kun je twee weerstanden R_1 en R_2 die parallel zijn geschakeld vervangen door één weerstand R_s. Die weerstand R_s heet dan de substitutieweerstand van de andere twee. Er geldt:

$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

waarin elke weerstand R in Ω wordt uitgedrukt.

a Bereken de substitutieweerstand van $R_1 = 2\ \Omega$ en $R_2 = 5\ \Omega$.

b De substitutieweerstand van de parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 is $R_s = 3\ \Omega$. Nu is R_2 precies twee keer zo groot als R_1. Bereken de grootte van R_1.

Als je vaak substitutieweerstanden moet berekenen, dan is het handig om de formule in de vorm $R_s = \ldots$ te schrijven.

c Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 6

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van $y_1 = x + \sqrt{x^2 - 8}$ en $y_2 = 1{,}5x$.

Toepassen

Opgave 7: Omgeschreven cirkel

Van een gelijkbenige driehoek is de basis 60 en zijn de twee benen elk 50 cm. Er gaat een cirkel door de drie hoekpunten van deze driehoek.

Bereken de straal van deze cirkel.

Opgave 8: Stadsmuur in het Oude China

Een vraagstuk van de oude Chinese geleerde **Liu Hui** (ongeveer 220 - ongeveer 280).

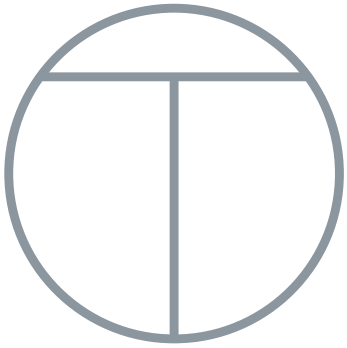
Veel steden in het Oude China waren omgeven door vier stadsmuren die een vierkant vormen. De Noordelijke muur bijvoorbeeld kijkt uit op het Noorden en loopt precies Oost-West. Er is een poort in het midden van elke zijde van dit vierkant. Twintig passen in de Noordelijke richting buiten de Noordelijke poort bevindt zich een boom. Als je de stad vanuit de Zuidelijke poort verlaat en je loopt 14 passen naar het Zuiden en 1775 passen naar het Westen, kun je die boom net zien.

Wat zijn de afmetingen van de muur van deze stad?

Opgave 9: Orhan-Teerenstra logo

Dit is het lijnsymmetrische logo van transportbedrijf Orhan-Teerenstra. De twee lijnstukken die de T vormen zijn 6 dm lang en staan loodrecht op elkaar. Het logo wordt gemaakt van dunne stalen buizen en aan de gevel van hun bedrijfspand opgehangen.

Hoe groot moet de straal van de cirkel worden die de letter O voorstelt?



Figuur 2.2

3

Lineaire verbanden

3.1 Lineaire functies 94
3.2 Lineaire verbanden 101
3.3 Stelsels vergelijkingen 109
3.4 Lineaire modellen 116
3.5 Totaalbeeld 124

3.1 Lineaire functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) lineaire functie een passende formule opstellen en daarbij de notatie $f(x) = ...$ gebruiken;
- de grafiek van een lineaire functie tekenen en daarbij het begrip hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) gebruiken;
- berekeningen met lineaire functies uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $y = ...$;
- grafieken tekenen bij functies;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en een vast bedrag van € 65,00 per jaar.

Figuur 3.1

a Welke formule past bij de jaarlijkse kosten K afhankelijk van het verbruikte aantal in m^3 water a per jaar?

b Maak een grafiek van K als functie van a.

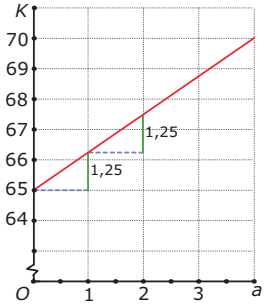
c In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zullen er huishoudens van vier personen in deze regio zijn, die meer dan € 1000,00 per jaar aan water kwijt zijn?

Uitleg

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1{,}25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Bij $a = 0$ hoort $K = 65$, het vaste jaarbedrag.

Elke extra m^3 water die je verbruikt, zorgt voor een toename van K met 1,25. Dus elke toename van a met 1 heeft een stijging van K met 1,25 tot gevolg. De grafiek wordt een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt. Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat. Het getal 1,25 heet het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.



Figuur 3.2

Omdat de formule de vorm $K = ...$ heeft, hoort bij elke (positieve) waarde van a precies één waarde van K. Je zegt dan dat K een functie is van a.
De formule schrijf je dan ook zo: $K(a) = 1{,}25 \cdot a + 65$.

Met $K(200)$ bedoel je dan de kosten bij een jaarverbruik van 200 m^3.
Ga na dat $K(200) = 315$ euro.

Als een huishouden de kosten wil beperken tot € 250,00 dan kun je uitrekenen hoeveel ze jaarlijks mogen verbruiken door de vergelijking $1{,}25 \cdot a + 65 = 250$ op te lossen. Je vindt dan $a = 148$ m^3.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 94**. In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrecht van € 70,00 per jaar.

a Welke formule geldt voor K als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

b Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?

c Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?

d Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?

e In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Schat op basis hiervan hoeveel een gemiddeld huishouden van vier personen dan jaarlijks betaalt voor het waterverbruik.

f Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 250$? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bij een kaars hoort de formule $L(t) = 25 - 3{,}1t$, hierbij is L de lengte in centimeter en t de brandtijd in uren.

a Hoe lang was de kaars, voordat hij is aangestoken?

b Met hoeveel centimeter neemt de lengte van de kaars per uur af, als hij is aangestoken?

c Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Opgave 3

In de éne regio betaal je voor het verbruik van a m^3 water per jaar een bedrag van $K_1(a) = 1{,}25a + 65$.
In een andere regio betaal je $K_2(a) = 1{,}20a + 70$.

a Een gezin in regio 1 verbruikt 200 m^3 water per jaar. Een gezin in regio 2 verbruikt evenveel water per jaar. Welk gezin is het duurst uit?

b Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Bij welk jaarverbruik aan water ben je in beide regio's even duur uit?”

c Los deze vergelijking op en beantwoord de vraag.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

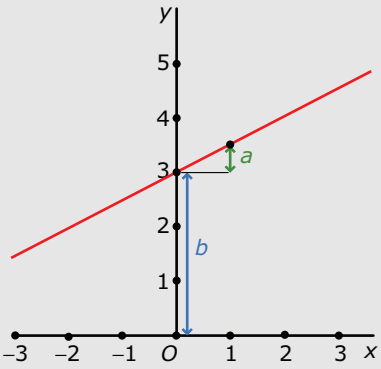
Bekijk de applet.

Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 ophoogt, neem de uitkomst met a toe. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Soms geef je zo'n lineaire functie de naam f en schrijf je $f(x) = a \cdot x + b$.



Figuur 3.3

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$. Je zegt in dat geval dat y **recht evenredig** is met x.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0{,}5x + 4$.

Bereken ook de snijpunten met de assen.

Antwoord

Er zijn twee manieren om de grafiek te tekenen:

- Manier I: het begingetal is 4 dus de grafiek ‘start’ in $(0,4)$.
  Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt $(0,4)$ ga je elke keer dat de x-waarde met 1 toeneemt 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden.
  Dit betekent dat de grafiek ook door bijvoorbeeld $(1; 4{,}5)$, $(2{,}5)$ en $(3; 5{,}5)$ gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
  Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
  Bij $x = 6$ hoort $y = 0{,}5 \cdot 6 + 4 = 7$.
  Trek de lijn door de twee bijbehorende punten $(0,4)$ en $(6,7)$.

Het snijpunt met de y-as vind je door $x = 0$ in te vullen. Dit geeft $(0,4)$.
Het snijpunt met de x-as vind je door $y = 0$ te nemen. Je krijgt de vergelijking $0{,}5x + 4 = 0$.
En dit levert $x = -8$ op.
Het snijpunt met de x-as wordt $(-8,0)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 96**. Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}2x + 6$.

a Waaraan kun je zien dat de grafiek van f dalend is?

b Teken de grafiek van f.

c Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d De grafiek van lineaire functie g heeft hetzelfde hellingsgetal als de grafiek van f en gaat door het punt $(10{,}9)$. Bepaal het functievoorschrift van g.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies $y_1 = 3x - 2$ en $y_2 = -0{,}5x + 4$.

a Teken de grafieken van deze functies in één assenstelsel.

b Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken. Rond af op twee decimalen.

Opgave 6

Elke lineaire functie heeft een voorschrift van de vorm $y = ax + b$.

a Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van deze functie in beeld. Ga na of de grafiek door het punt $(99{,}200)$ gaat.

b Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van b. Voor welke waarde van b gaat deze functie door het punt $(99{,}200)$?

c Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van a. Voor welke waarde van a gaat deze functie door het punt $(99{,}200)$?

Voorbeeld 2

Gegeven is het lineaire verband met de formule $y = 0{,}5x + 4$.

Waarom is y niet recht evenredig met x?

Welke waarde van x hoort bij $y = 100$. Laat je berekening zien.

Antwoord

y is niet recht evenredig met x omdat de grafiek bij dit lineaire verband niet door $O(0{,}0)$ gaat. Er is namelijk sprake van een vast bedrag dat niet verandert als x toeneemt. Daarom wordt de waarde van y niet twee keer zo groot als de waarde van x twee keer zo groot wordt.

$y = 100$ betekent $0{,}5x + 4 = 100$ en dus $0{,}5x = 96$ zodat $x = \frac{96}{0{,}5} = 192$.

Je gebruikt voor het oplossen van zo'n vergelijking de balansmethode.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 97**.

a Laat met een getallenvoorbeeld zien, dat de y-waarde niet twee keer zo groot wordt als de waarde voor x twee keer zo groot wordt.

b In het voorbeeld wordt een vergelijking opgelost met de balansmethode. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 8

Gegeven zijn de formules $h_1(t) = 60 - 1{,}5 \cdot t$ en $h_2(t) = 3 \cdot t$.

a Waarom kun je de grafieken van beide formules in één assenstelsel tekenen? Doe dit.

b Welke van beide formules beschrijft een recht evenredig verband?

c Je ziet aan de grafieken dat er een snijpunt is. Welke vergelijking hoort daar bij? Laat zien hoe je deze vergelijking oplost en het snijpunt berekent.

Oefenen

Opgave 9

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 km/h van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 km. a is de afstand tot A en t is de tijd in uren.

a Teken in een a,t-assenstelsel de grafiek van beide fietstochten.

b Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t.

c Na hoeveel tijd komen beide fietsers elkaar tegen? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Bereken van de volgende lineaire functies de snijpunten van de grafieken met de assen.

a $h(t) = 3t - 5$

b $f(x) = x - 4$

c $g(x) = -0{,}5x + 4$

d $k(x) = -2(x + 3)$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y_1 = -4 + 5x$.

a Teken de grafiek van deze functie en geef het begingetal en het hellingsgetal in die grafiek aan.

b De grafiek van y_1 wordt 10 eenheden langs de y-as omhoog geschoven. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_2 die daardoor ontstaat.

c De grafiek van y_1 wordt gespiegeld in de y-as. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_3 die daardoor ontstaat.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 0{,}5x$ en $g(x) = 2x - 1$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van deze functies met de beide assen.

b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 13

De Elfstedentocht is een schaatstocht langs de elf Friese steden. Het laatste stuk is een vrijwel rechte tocht van Dokkum naar Leeuwarden met een lengte van 26 km. Ireen komt na zeven uur schaatsen in Dokkum aan. Zij schaatst dit laatste stuk voor de wind met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier is zij in Leeuwarden en heeft zij in totaal ongeveer 200 km afgelegd.

a Met welke snelheid heeft zij het laatste deel van de tocht gereden?

b Stel je voor dat t de tijd in uren is, $t = 0$ op het moment dat Ireen aan de Elfstedentocht begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welk functievoorschrift $a(t)$ geldt er voor het laatste deel van haar tocht?

c Ireen is tegelijk met Margot begonnen aan de schaatstocht. Margot komt echter twee uur na Ireen pas in Dokkum aan. Ook zij schaatst het laatste stuk met een constante snelheid, maar doet er een uur over. Welke formule geldt voor haar tocht van Dokkum naar Leeuwarden?

Opgave 14

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = -3x$.

a Waarom is hier sprake van een recht evenredig verband tussen x en y?

b De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y-richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?

c De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$. De nieuwe grafiek gaat door $(5,20)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

d De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$ en vervolgens 3 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(3,1)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

Toepassen

De kosten voor het verbruik van elektriciteit bedragen bij een bepaalde leverancier € 0,20 per kWh (kiloWattuur) en een vast bedrag van € 280,00 per jaar.

Hierbij past de formule $K = 0{,}20 \cdot a + 280$ waarin a het jaarverbruik (in kWh) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Je ziet dat de jaarkosten niet recht evenredig zijn met het verbruik a.

Met deze formule kun je de jaarkosten berekenen als je het verbruik weet. Maar omgekeerd kun je ook je verbruik berekenen als je de jaarkosten weet.

Figuur 3.4

Opgave 15

Bekijk de formule voor de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van a kWh elektriciteit.

a Waarom is K niet recht evenredig met a?

b Bereken de jaarkosten voor elektriciteit in deze regio als je 2500 kWh verbruikt in een jaar.

c Je wilt de kosten voor elektriciteit beperken tot € 500,00. Hoeveel kWh kun je daarvoor in een jaar verbruiken?

Opgave 16

Bij een andere aanbieder van elektriciteit zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik € 0,16 per kWh met een vastrecht van € 310,00 per jaar.

a Welke formule geldt voor K als functie van a, als a het jaarverbruik in kWh voorstelt?

b Met hoeveel neemt K toe als a met 1 kWh toeneemt?

c Hoeveel betaal je bij deze aanbieder als je geen elektra verbruikt, maar wel een aansluiting hebt?

d Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 2950 kWh elektriciteit. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?

e Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 800$? Licht je antwoord toe.

Opgave 17

Je vergelijkt de twee aanbieders van elektriciteit met elkaar.

a Met welke vergelijking kun je berekenen voor welke waarde van a beide even duur zijn?

b Los deze vergelijking op.

c Bij welk verbruik heb je liever de tweede aanbieder die hogere vaste kosten per jaar heeft?

Testen

Opgave 18

Voor het plaatsen van een ketel vraagt bedrijf A € 45,00 voorrijkosten en € 60,00 per uur dat ze bezig zijn. Bedrijf B vraagt geen voorrijkosten, maar bij hen moet je € 70,00 per uur betalen.

a Waarom zijn de kosten K_B (in €) voor het plaatsen van een ketel bij bedrijf B recht evenredig met de gewerkte tijd t (in uren)?

b Stel een formule voor zowel bedrijf A als bedrijf B op voor de kosten K (in €) als functie van de tijd t (in uren).

c Als het plaatsen van een ketel drie uur duurt, welk bedrijf is dan goedkoper?

d Na hoeveel uur is bedrijf A goedkoper?

e De familie Berendsen heeft door bedrijf A een ketel laten plaatsen, maar later kwamen ze erachter dat bedrijf B € 20,00 goedkoper zou zijn geweest als zij er net zo lang over hadden gedaan. Hoelang is bedrijf A met het plaatsen van de ketel bezig geweest?

Opgave 19

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = 7x + 10$.

a Bereken exact de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.

b De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y-richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?

c De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$. De nieuwe grafiek gaat door $(10,15)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

d De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$ en vervolgens 2 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(10,0)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

3.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- grafieken tekenen bij lineaire verbanden in het algemeen;
- lineaire formules herleiden naar lineaire functies.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- werken met lineaire functies.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De omtrek van rechthoek $OAPB$ is 30.

Noem de lengte van deze rechthoek l en de breedte b.

a Welke formule geldt voor het verband tussen l en b?

b Waarom is de bijbehorende grafiek in een l,b-assenstelsel een rechte lijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

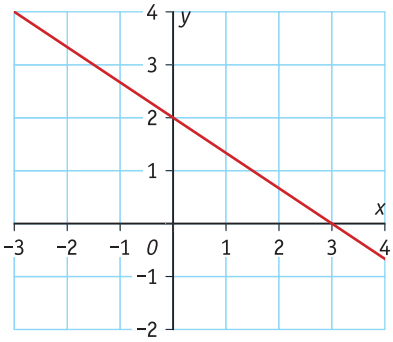
Een formule als $2x + 3y = 6$ is een lineaire vergelijking met twee variabelen. De grafiek bij zo'n lineaire vergelijking is een rechte lijn.

Je kunt de formule herleiden tot de vorm $y = ax + b$. In deze vorm is y uitgedrukt als een functie van x:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 3y &= -2x + 6 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Nu is y een lineaire functie van x.

Je kunt ook schrijven $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



Figuur 3.1

Op de rechte lijn liggen alle punten (x,y) die voldoen aan $2x + 3y = 6$ en ook aan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Om die rechte lijn te tekenen, is het niet nodig om de formule te herschrijven. Je kunt ook enkele punten van de lijn bepalen:

- Als $x = 0$, dan is $3y = 6$ en dus $y = 2$. Het punt $(0,2)$ ligt op de lijn.
- Als $x = 1$, dan is $2 + 3y = 6$ en dus $y = 1\frac{1}{3}$. Het punt $\left(1,1\frac{1}{3}\right)$ ligt op de lijn.
- Als $y = 0$, dan is $2x = 6$ en dus $x = 3$. Het punt $(3,0)$ ligt op de lijn.

Omdat de grafiek bij een lineaire vergelijking een rechte lijn is, heb je genoeg aan twee punten om de grafiek te tekenen. Vaak neem je daarvoor de punten met $x = 0$ of $y = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de lineaire vergelijking $3x - 4y = 12$.

a Teken de lijn van deze lineaire vergelijking door eerst de snijpunten met de beide assen te berekenen.

b Herleid de vergelijking tot de vorm $y = ...$

Opgave 2

Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $-2x + y = 2$ en $5x + 2y = 13$.

a Teken de grafieken bij de formules in één assenstelsel.

b Bepaal het snijpunt van de grafieken met behulp van de grafiek.

c Schrijf de eerste formule in de vorm $f(x) = ...$ en de tweede in de vorm $g(x) = ...$

d Bereken nu het snijpunt door $f(x) = g(x)$ op te lossen.

e Wat is het nut van het berekenen van een snijpunt door een vergelijking op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

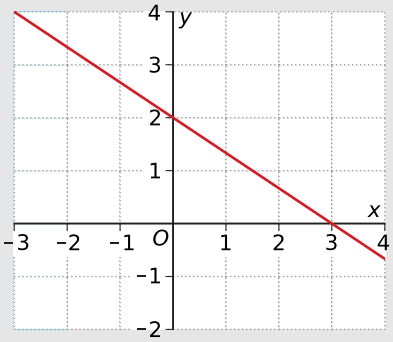
Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar een lineaire functie als $b \neq 0$.

Zo is $2x + 3y = 6$ te schrijven als $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Dit is een lineaire functie met begingetal 2 en hellingsgetal $-\frac{2}{3}$.

Je kunt hem ook schrijven als $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



Figuur 3.2

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $by = c$ en is te herleiden tot $y = \frac{c}{b}$.
  Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $ax = c$ en is te herleiden tot $x = \frac{c}{a}$.
  Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y-as.

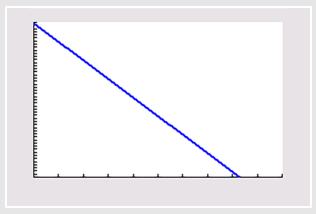
Voorbeeld 1

Een museum trok op een zaterdag veel bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 1,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 2,50. In totaal is er voor € 1245,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Hoeveel kinderen en hoeveel volwassenen hebben het museum bezocht?

Antwoord

Er zijn meerdere combinaties mogelijk. Bijvoorbeeld 50 kinderen en 468 volwassenen of 150 kinderen en 408 volwassen. Met een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos kun je gemakkelijk alle oplossingen bepalen.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y, dan geldt:
$1{,}50x + 2{,}50y = 1245$. Dit is een lineair verband tussen x en y.
Je kunt de formule herleiden tot $y = 498 - 0{,}6x$.
Maak je nu een grafiek of een tabel, dan krijg je alle mogelijke combinaties van x en y.
Je kunt dan de volgende waarden vrij snel vinden: $x = 0$ en $y = 498$, $x = 5$ en $y = 495$, $x = 10$ en $y = 492$, ..., tot aan $x = 830$ en $y = 0$.



Figuur 3.3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 103**. Je ziet een lineair verband tussen de variabelen x en y gegeven door $1{,}50x + 2{,}50y = 1245$.

a Laat zien dat je deze formule kunt herleiden tot $y = -0{,}6x + 498$.

b Kunnen er 300 kinderen bij de voorstelling aanwezig zijn geweest? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Een marktkoopman verkoopt grote en kleine vazen. Grote vazen verkoopt hij voor € 12,00 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij voor € 240,00 aan vazen verkocht.

a Hoeveel kleine en grote vazen kan hij verkocht hebben? Schrijf alle combinaties op.

b Stel dat de marktkoopman 34 vazen op die dag heeft verkocht. Hoeveel kleine en hoeveel grote vazen heeft hij dan verkocht?

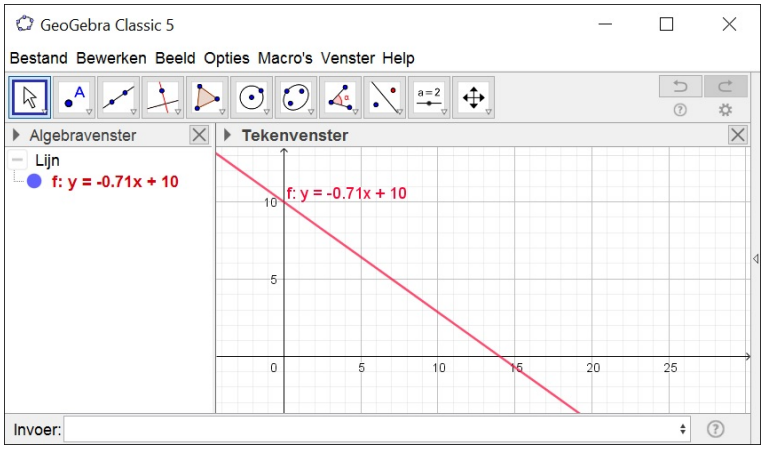
Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire formule $2{,}5x + 3{,}5y = 35$. Maak een grafiek bij het verband tussen beide variabelen.

Antwoord

De lineaire vergelijking $2{,}5x + 3{,}5y = 35$ kun je ook schrijven als $5x + 7y = 70$. Er zijn meerdere manieren om hierbij een grafiek te tekenen:

- Omdat bij een lineair verband de grafiek een rechte lijn is, heb je aan twee punten (x,y) die aan de vergelijking voldoen genoeg. Je vindt die snel door eerst $x = 0$ en vervolgens $y = 0$ te kiezen: $(0,10)$ en $(14,0)$.
- Je herleidt de vergelijking tot $y = -\frac{5}{7}x + 10$. De grafiek wordt een rechte lijn die door het punt $(0,10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{7}$ heeft.



Figuur 3.4

Opgave 5

In Voorbeeld 2 op pagina 104 zie je hoe je een grafiek maakt bij de vergelijking $2{,}5x + 3{,}5y = 35$.

a Waarom kun je in dit geval de grafiek het beste tekenen door eerst de snijpunten met de assen te berekenen?

b Laat zien hoe je de formule herleidt tot een lineaire functie. En maak zelf daarmee de grafiek.

c Welke waarde van x hoort bij $y = -20$? Schrijf je antwoord in de vorm $x = ...$

Opgave 6

Je ziet hieronder vier keer de vergelijking van een lijn. Om die lijn te tekenen kun je eerst de snijpunten met de assen berekenen en dan een rechte lijn door die twee snijpunten trekken.
Je kunt ook de vergelijking eerst herleiden tot een lineaire functie en dan het begingetal en de richtingscoëfficiënt gebruiken voor het tekenen van de lijn.
Gebruik bij de onderstaande lijnen elk van deze methoden in ieder geval één keer.

a $5x + 4y = 20$

b $5x - 4y = 20$

c $2x + y = 10$

d $x - 2y = 10$

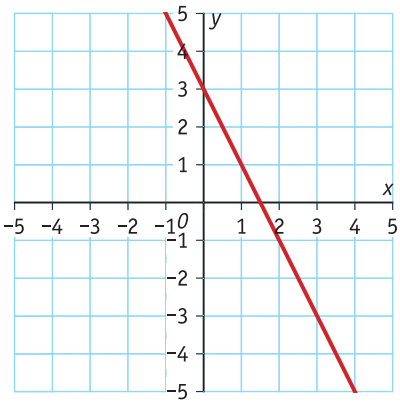
Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Bij een lineair verband hoort in het algemeen de vergelijking $ax + by = c$.
Stel $a = 4$, $b = 2$ en $c = 6$, dan krijg je de vergelijking $4x + 2y = 6$.
Bekijk de grafiek.
Er is een aantal bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de x-as is;
- $b = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de y-as is;
- $c = 0$: de grafiek gaat door $O(0,0)$.

Wat gebeurt er met de grafiek als $a = b$, of $a = -b$?



Figuur 3.5

Opgave 7

a Hoe ziet de vergelijking van een verticale lijn eruit?

b Waarom hoort bij een verticale lijn geen lineaire functie?

Opgave 8

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met twee variabelen is $ax + by = c$.

a Herleid deze vergelijking tot een functie van de vorm $f(x) = ...$

b Waarom moet bij a gelden dat $b \neq 0$?

c Welk bijzonder geval krijg je als $a = 0$ terwijl $b \neq 0$ en $c \neq 0$?

d Welk bijzonder geval krijg je als $b = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $c \neq 0$?

e Welk bijzonder geval krijg je als $c = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Opgave 9

Welke van deze vergelijkingen kun je herleiden tot een lineaire functie? Bepaal in die gevallen de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn en maak de grafiek ervan.

a $2x - 3y = 12$

b $2x - 3 = 12$

c $x = -2y + 6$

d $4y - 6 = 0$

Oefenen

Opgave 10

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

a $-2x + 3y = 6$

b $6x - 2y = 24$

c $y = 2x + 1$

d $4x + y = 10$

e $20x = 45$

f $y + 2 = 0$

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l: $2x - 4y = -3$ en m: $5x + 4y = 8$.

a Bereken van beide lijnen algebraïsch de snijpunten met de coördinaatassen.

b Maak van beide lijnen de grafieken in één assenstelsel.

c Bereken de coördinaten van hun snijpunt in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Stel je voor dat je een groep van 180 personen van drinken wilt voorzien. Je koopt daarvoor literpakken appelsap en sinaasappelsap. Je hebt 90 pakken nodig. Appelsap kost € 0,90 per literpak en sinaasappelsap € 1,05 per literpak. Noem het aantal pakken appelsap a en het aantal pakken sinaasappelsap s. Aan de kassa moet je € 90,00 betalen.

a Aan welke twee vergelijkingen moeten deze variabelen voldoen?

b Teken de bijbehorende grafieken.

c Bepaal hoeveel pakken appelsap en sinaasappelsap je hebt gekocht.

Opgave 13

Een winkelier verkoopt grote en kleine ballen. De grote ballen verkoopt hij voor € 8,50 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij 60 ballen verkocht en dat leverde hem € 387,50 op.
Hoeveel grote en hoeveel kleine ballen heeft hij verkocht?

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen:

k: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y = 21$

l: $0{,}01x + 2{,}75 = y$
m: $x = 7y + 4$

a Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen k en l. Geef je antwoord als coördinaat en rond af op twee decimalen.

b Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k, l en m met de x-as. Geef je antwoord als coördinaat.

Opgave 15

Gegeven zijn de lijnen l: $0{,}5y - 2x = c$ en m: $y - ax = -4$.

a Voor welke a zijn de lijnen evenwijdig?

b Voor welke c ligt het snijpunt van de lijnen op de y-as?

c Voor welke a en c snijden de lijnen elkaar in het punt $(5,8)$?

Opgave 16

Deze puzzel wordt toegeschreven aan Euclides (ongeveer 300 voor Christus).

> Een ezel en een muildier sjokken voort, beladen met allemaal even zware zakken. De ezel zucht onder zijn last, waarop het muildier tegen zijn lotgenoot zegt: Wat kreun en jammer je toch! Tweemaal zoveel zou ik dragen als jij, als je mij één zak van jou zou geven, terwijl we evenveel zouden dragen als je er één van mij nam. Hoeveel zakken draagt ieder dier?

Los de puzzel op.

Toepassen

Het hekwerk om een rechthoekig weiland heeft een totale lengte van 240 m.

Het weiland zit met één zijde tegen een brede rivier, dus daar is geen hekwerk nodig.

Noem je de lengte l en de breedte b, dan kun je voor de omtrek opschrijven:

$2 \cdot l + b = 240$

Er zijn nu verschillende waarden voor l en b mogelijk.

Opgave 17

Bekijk het inleidende verhaal hierboven.

a Is het belangrijk wat je lengte en wat je breedte noemt? Moet de lengte altijd groter zijn dan de breedte?

b Herleid de formule voor de lengte van het hekwerk tot de vorm $l = ...$

c Hoe lang is het weiland als de breedte 40 m is?

d Hoe lang is het weiland als het vierkant is?

Opgave 18

Neem aan dat de oppervlakte van het weiland uit de vorige opgave 5400 m^2 is.

a Hoe kun je dan de lengte en de breedte ervan berekenen?

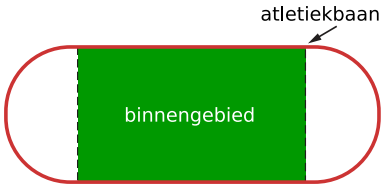
b Welke formule met l en b kun je opschrijven voor de oppervlakte van het weiland?

c Je hebt nu twee formules voor l en b.
Maak daar een vergelijking met één onbekende van door ze te combineren.

d Je kunt de vergelijking die je bij c hebt gevonden oplossen. Laat zien hoe.

Opgave 19

Een atletiekbaan heeft een lengte van 400 m. Daarmee wordt de omtrek van het binnengebied bedoeld. Dat binnengebied bestaat uit een rechthoek met daartegen twee halve cirkels, zie figuur. De lengte van de rechthoek is l en de breedte b.



Figuur 3.6

a Welke formule kun je hieruit afleiden?

b Als de lengte van elk van beide rechte stukken van de atletiekbaan 100 m is, hoe groot moet dan de breedte van de rechthoek zijn? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Testen

Opgave 20

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

a $5x + 2y = 10$

b $-2x + 5y = 7$

c $x = 4$

d $4 - 2y = 0$

Opgave 21

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje van € 9,00, in de overige zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes in de bak is € 3000,00.
“De vraag is: Hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 zitten er in de bak?”

a Stel twee lineaire vergelijkingen op om dit probleem op te lossen.

b Maak grafieken bij deze vergelijkingen.

c Bepaal de oplossing van het probleem.

3.3 Stelsels vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van substitutie;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine;
- opstellen van een stelsel van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met variabelen (met ‘letters’);
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen.

Figuur 3.1

Bereken algebraïsch hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal zijn de inkomsten door kaartverkoop € 1110,00. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Dit probleem kun je aanpakken door bijvoorbeeld twee variabelen in te voeren:

- het aantal kinderen in de zaal is x;
- het aantal volwassenen in de zaal is y.

Natuurlijk kun je ook letters als k en v nemen, maar het voordeel van deze keuze is dat je meteen weet wat je op de x-as en wat je op de y-as uitzet. Er zijn twee gegevens:

- het totaal aantal bezoekers is 300, dus $x + y = 300$
- de totale inkomsten zijn 1110 euro, dus $2{,}5x + 4{,}5y = 1110$

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit stelsel wil je oplossen, dat wil zeggen een combinatie van waarden voor x en y zoeken die aan beide vergelijkingen tegelijk voldoen.

Zo'n stelsel van vergelijkingen wordt vaak als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} x + y &= 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y &= 1110 \end{cases}$$

In de voorbeelden leer je verschillende methoden om zo'n stelsel op te lossen.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de **Uitleg op pagina 109**.

a Herleid beide vergelijkingen naar lineaire functies.

b Bepaal of bereken het snijpunt van beide grafieken.

c Hoeveel kinderen zaten er in de zaal?

Opgave 2

Stel dat een theatervoorstelling 500 bezoekers trekt. Een kinderkaartje kost € 4,00, een volwassenenkaartje kost € 6,50. De totale inkomsten door kaartverkoop zijn € 3300,00.
Welk stelsel van vergelijkingen kun je hierbij opstellen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je in veel gevallen vinden door:

- beide vergelijkingen te herleiden naar functies (als dat kan) en dan de gevraagde snijpunten te berekenen door beide functies gelijk te stellen;
- beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- **substitutie**: je drukt bij één van beide vergelijkingen de éne variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking.
- de **balansmethode**: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan een van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen).

Een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft soms geen oplossing. Het is dan een **strijdig stelsel**. De beide bijbehorende grafieken zijn evenwijdige lijnen.

Het meest bijzondere geval is de situatie dat beide vergelijkingen (ook al zien ze er verschillend uit) toch dezelfde lijn voorstellen. Er zijn dan oneindig veel oplossingen, namelijk alle punten op die lijn.

Voorbeeld 1

Los dit stelsel met behulp van substitutie op.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y = 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. In de andere vergelijking kun je nu y vervangen door $300 - x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2{,}5x + 4{,}5(300 - x) = 1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Het stelsel is dus op te lossen: $x = 120$. Er zaten dus 120 kinderen in de zaal.

Opgave 3

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

a Druk in de eerste vergelijking y uit in x.

b Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?

c Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.

d Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y. Schrijf je oplossing nu volledig op en laat zien hoe je die kunt controleren.

e Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y. Los ook op die manier het stelsel op.

Opgave 4

Los het stelsel van vergelijkingen door middel van substitutie op.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel van vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y = 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig in de bovenste vergelijking beide zijden met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2{,}5x + 2{,}5y = 750 \\ 2{,}5x + 4{,}5y = 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking de onderste vergelijking aftrekt, dan krijg je $-2y = -360$.

Dit geeft $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 111** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.

b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en in de onderste vergelijking beide zijden met - 2. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

Opgave 6

Los de stelsels van vergelijkingen op eenzelfde manier als in het voorbeeld op.

a $\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 3y &= -4 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - 2y &= 5 \\ 6x + 8y &= 1 \end{cases}$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig veld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b. Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.
Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt: $(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$.
Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 112**.

a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?

b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van grafieken.

Opgave 8

Los op met behulp van een stelsel van vergelijkingen.

a Bereken welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 110 m^2 en een omtrek van 55 meter heeft.

b Bereken algebraïsch welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 100 m^2 en een omtrek van 50 meter heeft.

Opgave 9

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} x + 2y &= 6 \\ 2x + 4y &= 14 \end{cases}$

a Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.

b Welk probleem doet zich voor?

c Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Oefenen

Opgave 10

Los de stelsels van vergelijkingen op.

a $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x + 4y = -7 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$

c $\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$

d $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

e $\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$

f $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

Opgave 11

Van een rechthoek is de oppervlakte 200 cm^2 en de omtrek 90 cm. Noem de lengte l en de breedte b, beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken algebraïsch de oplossing van dit stelsel.

Opgave 12

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

a Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.

b Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?

c Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q.

d Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verfhandelaar?

Opgave 13

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kg melk 1 kg volvette kaas gemaakt. 22,5 kg melk verwerkt men daar tot 1 kg boter. Er is 1000 kg melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zoveel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kg kaas en hoeveel kg boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 14

Voor een heg koopt een tuinman jonge groenblijvende planten: twintig thuja's en twaalf jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar komen er vijf thuja's tekort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

En natuurlijk zijn er ook stelsels van meer dan twee vergelijkingen met soms ook meer dan twee onbekenden.

De technieken om een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** op te lossen zijn hetzelfde als de technieken die je in dit onderwerp hebt geleerd. Van een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden ga je naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden en daarna naar één vergelijking met één onbekende.
In de opgaven hieronder zie je hoe dat gaat.

Opgave 15

Je wilt het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden oplossen.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y - 6z = 1 \\ 7x - 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

a Neem eerst de bovenste twee vergelijkingen en elimineer de z.

b Neem nu de bovenste en de onderste vergelijking en elimineer weer de z.

c Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden gekregen. Los dat stelsel op.

d Bereken tenslotte de waarde van z door de gevonden waarden voor x en y in één van de drie gegeven vergelijkingen in te vullen.

Opgave 16

Los de volgende stelsels van drie vergelijkingen met drie onbekenden op. Soms zitten er vergelijkingen tussen die al meteen maar twee onbekenden hebben, dan kun je sneller werken dan in de vorige opgave.

a $$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

b $$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + z = -3 \\ x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

c $\begin{cases} u = v + 0{,}5 \\ w = v + 2{,}5 \\ u + v + w = -1{,}5 \end{cases}$

d $\begin{cases} p + q = 4 \\ q + r = 6 \\ p - q + r = 10 \end{cases}$

Opgave 17

levensmiddel	eiwit (gram)	vet (gram)	koolhydr. (gram)	aantal kcal
achterham	18,2	5,5	1,7	129
komijnenkaas	20,0	21,5	0,1	271
hagelslag (melk)	6,5	16,0	70,0	458
sla	1,3	0,2	1,0	11

Tabel 3.1

Hoeveel calorieën er in eten zitten, hangt af van de hoeveelheid vet, koolhydraten en eiwitten. Dat aantal calorieën heet de voedingswaarde, meestal uitgedrukt in kcal (kilocalorie). Via **voedingswaardetabel.nl** kun je van heel veel levensmiddelen de voedingswaarde per 100 mg bekijken. Een paar voorbeelden vind je in de tabel. Die voedingswaarde wordt berekend door uit te gaan van vaste caloriewaarden per gram eiwit, per gram vet en per gram koolhydraten.

Bereken de hoeveelheid kcal in 1 gram eiwit, in 1 gram vet en in 1 gram koolhydraten.

Testen

Opgave 18

Los de volgende stelsels van vergelijkingen op.

a $\begin{cases} k + 3v = 200 \\ k + v = 110 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$

d $\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0{,}5p \end{cases}$

Opgave 19

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: ‘zaal’ en ‘balkon’. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats en hoeveel een zaalplaats?

3.4 Lineaire modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

tijd (in uren)	0	2	4	6	8	10
lengte (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 3.1

a Maak bij deze tabel een puntengrafiek.

b Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Uitleg

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens:

jaartal	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×100000)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 3.2

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei niet precies lineair is, kun je hem goed benaderen door een lineair model. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Kies eerst een paar variabelen: N is het aantal inwoners (×100000) en t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft gaat door de punten $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$. Ga dat zelf na door de punten te tekenen. Om een formule bij deze lijn op te stellen, zoek je eerst het hellingsgetal. In $50 - 20 = 30$ jaar tijd neemt N toe met $9{,}8 - 5{,}3 = 4{,}5$.

Per jaar is dat een toename van $\frac{4{,}5}{30} = 0{,}15$.

Dit is het hellingsgetal van de rechte lijn. De bijbehorende formule is dus $N = 0{,}15 \cdot t + b$. Om b te bepalen, gebruik je het feit dat de grafiek door $(20; 5{,}3)$ gaat, dus: $5{,}3 = 0{,}15 \cdot 20 + b$.
Dit betekent dat $b = 2{,}3$. Het lineaire model heeft daarom als formule $N = 0{,}15 \cdot t + 2{,}3$.

Hiermee kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 1

Bekijk het lineaire model dat in de **Uitleg op pagina 116** wordt opgesteld voor de bevolking van deze stad.

a Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn bestaat die door de punten $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$ gaat.

b Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.

c Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Opgave 2

Een cilindervormige kaars is anderhalf uur na het aansteken 25 cm lang en vier uur na het aansteken nog 20 cm lang. Voor deze kaars kun je aannemen dat de lengte L (in centimeter) afhangt van de brandtijd t (in uren).

a Bereken het hellingsgetal van die lineaire functie. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?

b Stel het functievoorschrift $L(t)$ op.

c Bereken met behulp van dat functievoorschrift na hoeveel uur deze kaars volledig is opgebrand.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

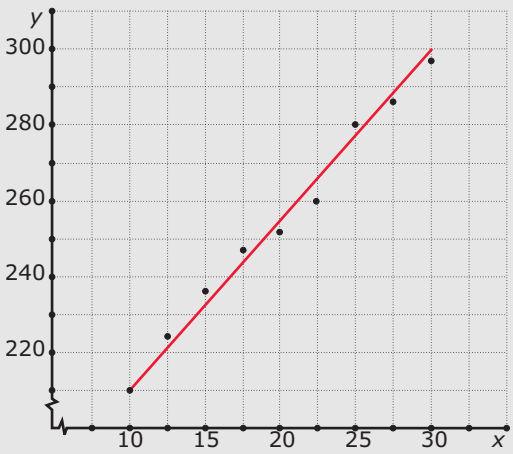
Bekijk de applet

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. En daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten $(10{,}210)$ en $(30{,}300)$, dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- x neemt toe met $30 - 10 = 20$;
- y neemt toe met $300 - 210 = 90$;
- als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{90}{20} = 4{,}5$ toe;
- het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) van de lijn is 4,5;
- de gevraagde formule is $y = 4{,}5x + b$;
- $(10{,}210)$ moet op de lijn liggen, dus $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4{,}5x + 165$.

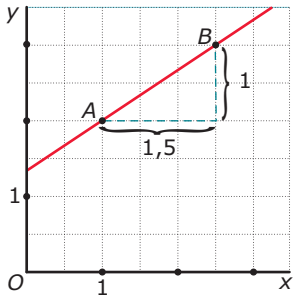


Figuur 3.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Stel een formule op voor de lijn die door de punten A en B gaat.



Figuur 3.2

Antwoord

Lees af: $A(1,2)$ en $B(2,5;3)$. De gevraagde formule heeft de vorm $y = ax + b$.
Zo bereken je a en b:

- $a = \frac{3-2}{2,5-1} = \frac{2}{3}$;
- de formule wordt dan $y = \frac{2}{3}x + b$;
- $A(1,2)$ invullen geeft: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.
  Als je het punt $B(2,5;3)$ invult, moet je dezelfde waarde voor b krijgen.

De gevraagde formule is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Opgave 3

Bekijk eerst **Voorbeeld 1 op pagina 118**.

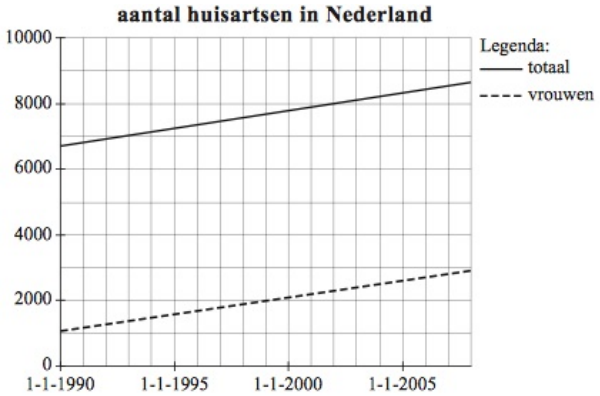
a Lijn l gaat door de punten $(-3,2)$ en $(17,10)$. Stel de vergelijking van lijn l op.

b Lijn m gaat door de punten $(5,20)$ en $(10,-25)$. Stel de vergelijking van lijn m op.

c Gegeven is dat f een lineaire functie is en dat $f(6) = 8$ en $f(10) = 14$. Stel het functievoorschrift op van f.

Opgave 4

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar tegenwoordig zijn er steeds meer vrouwelijke huisartsen en dat aantal neemt nog steeds toe. Bekijk de figuur. Neem aan dat de stijging lineair verloopt.



Figuur 3.3 Bron: havo A examen 2013

Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als $H_V = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.

a Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a op één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule $H_T = 107 \cdot t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

b Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je kunt een formule voor de lijn die door de punten $A(1,2)$ en $B(2{,}5;3)$ gaat ook opstellen door beide punten in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen:

- $A(1,2)$ geeft: $2 = a + b$.
- $B(2{,}5;3)$ geeft: $3 = 2{,}5a + b$.

Trek je beide vergelijkingen van elkaar af, dan vind je: $1 = 1{,}5a$. Dus $a = \frac{2}{3}$. En (na invullen): $b = \frac{4}{3}$. De vergelijking van de lijn is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

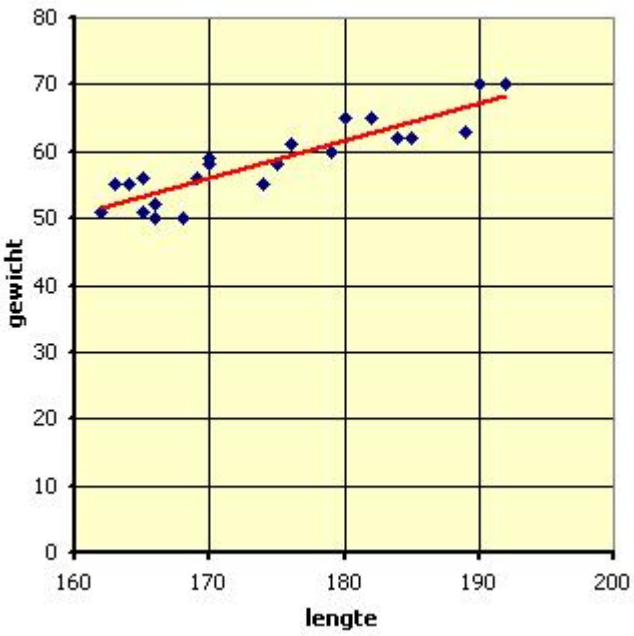
Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 119** tref je een andere manier aan om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen. Lijn l gaat door de punten $(-4,2)$ en $(20,10)$.

Stel een vergelijking van l op door deze methode toe te passen.

Voorbeeld 3

Van 22 scholieren in een 4 havo klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenaamde trendlijn doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft dan een verband tussen lengte L (in centimeter) en gewicht G (in kilogram). Er is gekozen voor een lineair verband. Stel daarbij een passende formule op.



Figuur 3.4

Antwoord

De formule krijgt de vorm: $G = a \cdot L + b$. De lijn gaat ongeveer door $(160,50)$ en $(190,67)$.

- $a = \frac{67-50}{190-160} \approx 0{,}57$;
- de formule wordt dan $G = 0{,}57L + b$;
- punt $(160,50)$ invullen geeft $50 = 0{,}57 \cdot 160 + b$, dus $b \approx -41{,}2$.

De gevraagde formule is $G = 0{,}57L - 41{,}2$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3 op pagina 119** zie je hoe bij een verzameling meetpunten een lineair model wordt opgesteld door een zo goed mogelijk passende lijn te trekken en twee punten op die lijn af te lezen uit de figuur.

a Stel dat je afleest dat de rechte lijn door de punten (170,56) en (195,70) gaat. Welke formule past er dan bij de lijn?

b Bepaal met de formule die je bij a hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 meter uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 7

Dit zijn twee bijzondere situaties.

a Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten (2,1) en (12,1) gaat.

b Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten (2,1) en (2,10) gaat.

Oefenen

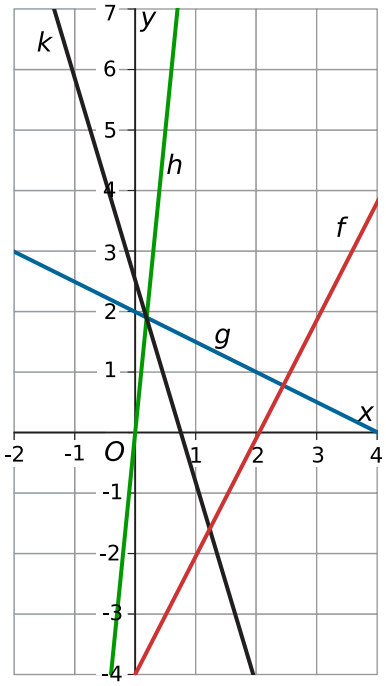
Opgave 8

In dit assenstelsel staan vier grafieken van lineaire functies.

a Stel het functievoorschrift van f op.

b Stel het functievoorschrift van g op.

c Stel het functievoorschrift van k op.
Neem aan dat de grafiek door de punten (- 1,6) en (1, - 1) gaat.



Figuur 3.5

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de rechte lijn l bij de volgende situaties .

a l gaat door de punten (30,68) en (34,56).

b l gaat door de punten (- 2,100) en (- 3,100).

c l heeft richtingscoëfficiënt 0,5 en gaat door (- 2,4).

d l is de x-as.

e l is de y-as.

Opgave 10

Lijn l gaat door de punten $P(13,8)$ en $Q(43,68)$ en lijn m gaat door de punten $R(23,38)$ en $T(43,28)$. Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m.

Opgave 11

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$ waarin $s(t)$ de afgelegde weg (in meters) na t seconden is.

a Wat stelt $s(0)$ voor?

b Wat stelt v voor?

c Neem $s(0) = 0$ en $v = 20$ voor een bepaald voorwerp. Breng de bijbehorende grafiek van $s(t)$ in beeld.

d Een tweede voorwerp heeft 400 meter voorsprong en beweegt langs dezelfde baan met een snelheid van 15 m/s. Geef de formule die bij de beweging van dit voorwerp past en breng de bijbehorende grafiek in beeld.

e Bereken op welk tijdstip het eerste voorwerp het tweede heeft ingehaald.

Opgave 12

Bij een eenparig versnelde beweging beweegt een voorwerp met een constante versnelling a (in m/s^2) langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven door: $v(t) = v(0) + a \cdot t$ waarin $v(t)$ de snelheid (in m/s) na t seconden is.

a Wat stelt $v(0)$ voor?

b Albert weet op twee momenten de snelheid van een voorwerp. Hij weet namelijk dat het voorwerp vertrekt met een beginsnelheid van 40 m/s en dat het voorwerp na 3,5 seconden een snelheid van 75 m/s heeft. Stel eerst de formule $v(t)$ voor dit voorwerp op en bereken dan na hoeveel seconden het voorwerp met een snelheid van 350 m/s beweegt.

c Om een voorwerp met een massa m van 1000 kg dat met een constante snelheid van 40 m/s beweegt tot stilstand te brengen, wordt een bepaalde remkracht F (in newton) uitgeoefend. Het voorwerp moet binnen acht seconden tot stilstand komen. Er geldt $F = m \cdot a$ met F in newton, m in kg en a (de versnelling) in m/s^2. Bereken de grootte van de remkracht F.

Toepassen

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

tijd (in uren)	0	2	4	6	8	10
lengte (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 3.3

Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Opgave 13

Bekijk de gegevens in de tabel van de lengtes van de brandende kaars.

a Licht toe waarom de grafiek bij benadering een rechte lijn is.

b Met welke formule kun je de kaarslengte L in cm als functie van de tijd t in uren benaderen?

c Na hoeveel uur is de kaars volgens de formule opgebrand?

Opgave 14

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,7	1,94
temperatuur T (in °C)	100	105	110	115	120

Tabel 3.4

Als je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel tekent, dan kun je daar (bij benadering) een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat de lijn door het punt $(1{,}100)$. Bij de tabel past dan een lineair verband van de vorm $T = a \cdot p + b$. De rechte lijn gaat ook langs bijvoorbeeld het punt $(1{,}70; 115)$. Met behulp van deze punten vind je dan een geschikt lineair model: $T = 21{,}43p + 78{,}57$.

a Stel zelf de gegeven formule voor $T(p)$ op. Welke eenheden worden er gebruikt?

b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?

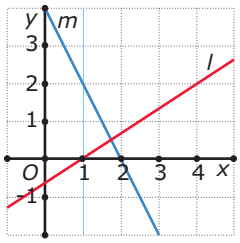
c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150 °C bereiken?

Testen

Opgave 15

In deze figuur staan twee lijnen l en m.

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op. Bereken vervolgens algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 3.6

Opgave 16

Stel een vergelijking op van de rechte lijnen die als volgt beschreven worden.

a De lijn gaat door de punten $(40{,}32)$ en $(34{,}56)$.

b De lijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en gaat door het punt $(-2{,}4)$.

c De lijn gaat door het punt $(3{,}2)$ en is evenwijdig aan de y-as.

Opgave 17

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l(T) = l(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ gebruikt, waarin $l(T)$ de lengte (in m) van de staaf na het verhitten tot T °C is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

a Wat stelt $l(0)$ voor?

b Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$. Ga uit van een ijzeren staaf met $l(0) = 0{,}5$ m. Hoe lang is deze staaf op kamertemperatuur (20 °C)? En tot hoeveel graden Celsius moet je hem verhitten om de staaf 1 mm langer dan $l(0)$ te laten worden?

c Voor koper geldt: $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$. Een staaf koper van 50 cm bij 20 °C wordt verhit tot 100 °C. Bereken de lengte van deze staaf bij 100 °C.

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- lineair verband — lineaire vergelijking met twee variabelen
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen — oplossen door substitutie en/of de balansmethode
- lineair model

Activiteitenlijst

- bij lineaire functie hellingsgetal en begingetal herkennen om snel de grafiek te kunnen tekenen
- algemene lineaire verbanden herkennen — herleiden naar lineaire functie
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen oplossen
- lineair model opstellen, vergelijking lijn door twee gegeven punten opstellen

Testen

Opgave 1

Breng de lineaire vergelijkingen in beeld op de grafische rekenmachine. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn.

a $3x - 2y = 24$

b $x + 3y = 6$

c $x = 2y + 1$

d $y = 2$

Opgave 2

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond waar nodig af op 1 decimaal.

a $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} K = 40 + 0{,}16a \\ K = 36 + 0{,}18a \end{cases}$

c $\begin{cases} q = 200 - 0{,}25p \\ p \cdot q = 10000 \end{cases}$

d $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$

Opgave 3

Gegeven is lijn l die door de punten (-40,46) en (110,96) gaat en lijn m die een richtingscoëfficiënt heeft van -3 en door het punt (2,14) gaat.

a Stel de formule op van beide lijnen.

b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 4

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km/h, Henk met een snelheid van 12 km/h. Henk begint twee minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

a Hoe groot zijn hun snelheden in meter per minuut?

b Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?

c Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter) is. Welke eenheden zijn er gebruikt?

d Waarom is voor Ton de afgelegde afstand a wel recht evenredig met de tijd t en is dit voor Henk niet het geval?

e Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk?

f Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel lag hij toen op de ander voor?

Opgave 5

Iemand investeert € 10000,00 die voor hem worden belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Het fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, het fonds B levert na een jaar 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 aan winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Opgave 6

In de jaren zeventig van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro.
In een zekere plaats gold:

1. bij een jaarverbruik tot 600 m^3: vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (tarief 1);
2. bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3: vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (tarief 2).

a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1200 m^3.

b De grafiek van a valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a, het aantal verbruikte m^3. Geef van elk van die lineaire functies een formule.

c Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden. Wat wordt daarmee bedoeld? Waarom deed hij dat?

d Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het gas afbranden een besparing op? En vanaf welk jaarverbruik was tarief 2 goedkoper?

e Welke maatregelen kon het gasbedrijf treffen om het afbranden van gas te voorkomen?

Opgave 7

Iemand hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in gram, u is de uitrekking van de veer in centimeter. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 3.1

a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?

b Geef de formule die u uitdrukt in m.

c Als er 50 gram aan de veer hangt is de totale lengte l van de veer 35 centimeter. Geef de formule die l uitdrukt in m.

Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 centimeter lang en met 10 gram eraan 15,5 centimeter lang.

d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m.

e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

Toepassen

Opgave 8: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

Bij een eenparige beweging is de snelheid constant. Bij een eenparig versnelde beweging is de versnelling constant. In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbij schieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor start. Dit is 6 seconden nadat de auto de motoragent passeert. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor eenparig versnelt met een versnelling van 4 m/s^2.

a Hoeveel seconden na $t = 0$ rijdt de motor sneller dan de auto?

b Hoeveel m voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor start?

c Stel een formule op voor de afgelegde weg $s_A(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.

d De topsnelheid van de motor is 200 km/uur. Hoe lang doet de motor er over om die te bereiken?

e Als de motor op topsnelheid rijdt, is zijn snelheid constant. Welke formule geldt dan voor de afgelegde weg $s_M(t)$ van de motor?

f Na hoeveel seconden heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 9: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c. Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

a Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?

b Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeelten.

c Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?

d Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afspreekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

e Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

4

Kwadratische functies

4.1 Kwadratische functies 130
4.2 De abc-formule 139
4.3 Kwadratische modellen 147
4.4 Veeltermen 154
4.5 Ongelijkheden 162
4.6 Totaalbeeld 168

4.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische functie herkennen aan de formule en aan de grafiek;
- nulpunten en top van een parabool berekenen.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = ...$ of $y = ...$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

a Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 20$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?

c Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?

d Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

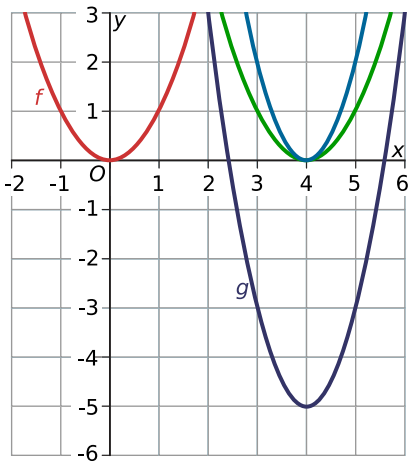
Bekijk de applet: Kwadratische functies

Kwadratische functies zijn $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door verschuiven en/of vermenigvuldigen uit die van f ontstaan. Je schrijft ze in de vorm $g(x) = a(x-p)^2 + q$

$a(x-p)^2 + q$ heet het functievoorschrift van functie g.

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x-4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f ontstaat door:

- een verschuiving van 4 in de x-richting;
- vermenigvuldiging met 2 in de y-richting;
- een verschuiving van -5 in de y-richting.



Figuur 4.1

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x-4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $h(x) = -2(x-4)^2 - 5$. De grafiek van h is een bergparabool, omdat tekenwisseling van a een spiegeling betekent.

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$.

a Hoe kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?

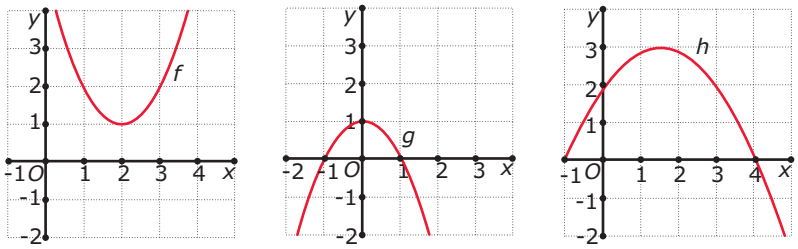
b Lees de coördinaten van de top van de parabool uit de formule af.

c Heeft deze functie een minimum of een maximum?

d Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de functie een minimum of een maximum heeft?

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef de bijbehorende formules.



Figuur 4.2

Opgave 3

Voor de baan van een tennisbal die op 0,8 m hoogte op 12 m voor het net wordt afgeschoten in de richting van het net, geldt de formule $h = -0{,}01(x-11)^2 + 2$.
Hierin is:

- x de afstand over de grond vanaf de plek van afschieten;
- h de hoogte van de bal boven de grond.

a Laat zien, dat deze bal inderdaad op ongeveer 80 cm boven de grond is afgeschoten.

b Het net is 1 m hoog. Gaat de bal over het net?

c Na hoeveel m komt de bal op de grond als niemand hem terugslaat?

Theorie en voorbeelden

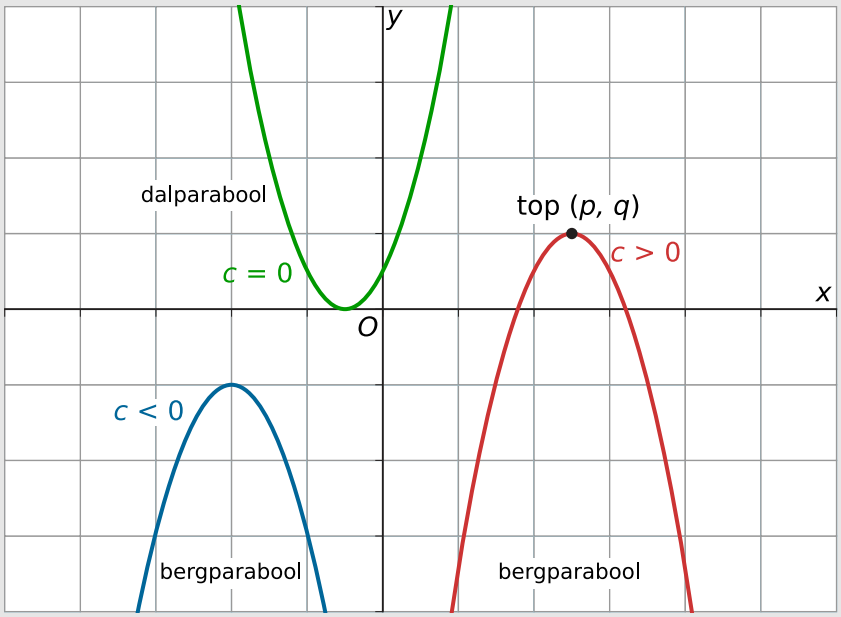
Om te onthouden

Bekijk de applet: Kwadratische functies

Een functie van de vorm

$f(x) = a(x-p)^2 + q$

noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De uitdrukking $a(x-p)^2 + q$ heet het **functievoorschrift** van de functie f. De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door verschuiven en/of vermenigvuldigen van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$.
Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**.
Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.



Figuur 4.3

De **kwadratische vergelijking** $a(x-p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot: $(x-p)^2 = c$ met $c = \frac{u-q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.

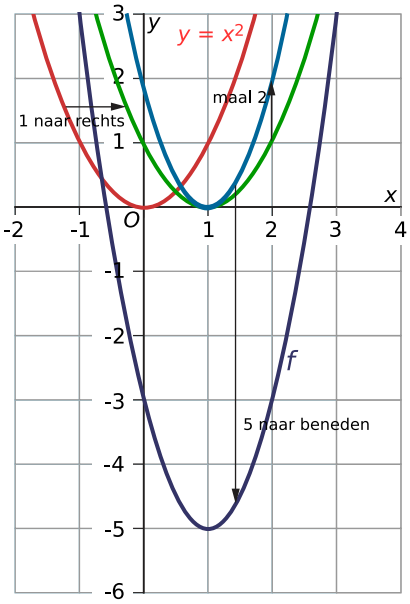
Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?
Bepaal de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

De grafiek wordt verkregen door de grafiek van $y = x^2$:

- te verschuiven met 1 in de x-richting;
- te vermenigvuldigen met 2 in de y-richting;
- te verschuiven met - 5 in de y-richting.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 4.4

Opgave 4

Gegeven is de kwadratische functie $h(x) = -3(x+1)^2 + 5$.

a Hoe kan de grafiek van h uit die van $y = x^2$ ontstaan?

b De top van $y = x^2$ is $(0,0)$. Hoe kun je de top van $h(x)$ uit die van $y = x^2$ afleiden?

c Is de grafiek van h een dalparabool of een bergparabool? Geef de coördinaten van de top.

d Kun je de vergelijking $-3(x+1)^2 + 5 = 6$ oplossen? Waarom wel/niet?

Opgave 5

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en in de y-richting vermenigvuldigt, krijg je een grafiek waarvan het functievoorschrift $f(x) = a(x-p)^2 + q$ is.

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is?

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een maximum of een minimum heeft?

c Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?

d Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ exact op.
Los ook de volgende twee vergelijkingen op:

- $2(x-1)^2 - 5 = -8$
- $2(x-1)^2 - 5 = -5$

Antwoord

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 - 5 &= 3 \\ 2(x-1)^2 &= 8 \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x-1 &= \pm\sqrt{4} \\ x &= 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Je vindt $x = -1 \vee x = 3$.

Voor de tweede vergelijking krijg je $2(x-1)^2 = -3$. Dit kan niet aangezien $2(x-1)^2 \geq 0$.

De derde vergelijking wordt $2(x-1)^2 = 0$ en heeft precies één oplossing, namelijk $x = 1$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 97**.

a Maak de grafiek van $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$.

b Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ twee oplossingen heeft?

c Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = -8$ geen oplossingen heeft?

d Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = -5$ één oplossing heeft?

Opgave 7

Los de vergelijkingen exact op (dus rond wortels niet af).

a $x^2 = 100$

b $(x-4)^2 = 64$

c $-3(x+1)^2 = -75$

d $3(x+2)^2 - 3 = 27$

e $2x^2 - 10 = 0$

Voorbeeld 3

Bereken de snijpunten met de assen en de top van een parabool die is gegeven door de formule $y = -0{,}5x^2 + 2{,}5x - 3$.

Antwoord

De gegeven formule heeft niet de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, dus je kunt de top er niet onmiddellijk uit aflezen.

Daarom wil je eerst een beeld hebben van de grafiek: een bergparabool.
Om een goed idee te krijgen waar die bergparabool precies ligt, begin je met het berekenen van de nulpunten. Dus met het oplossen van $-0{,}5x^2 + 2{,}5x - 3 = 0$. Hierbij kun je ontbinden in factoren toepassen:

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 2{,}5x - 3 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x = 2 \vee x &= 3 \end{aligned}$$

beide zijden delen door - 0,5
ontbinden in factoren, de somproductmethode
antwoorden opschrijven

De snijpunten met de x-as zijn daarom $(2{,}0)$ en $(3{,}0)$.

Het snijpunt met de y-as zit bij $x = 0$, dus dat is $(0, -3)$.

De top ligt op de symmetrieas van de parabool, dus die zit bij $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Ga na, dat de top de coördinaten $(2{,}5; 0{,}125)$ heeft.

Opgave 8

Gegeven is de functie f door het functievoorschrift $f(x) = x^2 - x - 30$.

Bereken de snijpunten met de beide assen en de top van de grafiek van f.

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op.

a $5x^2 - 10x = 40$

b $x(x - 6) = 7$

c $7x(x - 6) = 0$

d $(x + 3)(x + 6) = 18$

e $-0{,}5(x - 40)^2 + 3 = 2$

f $(x - 3)^2 = (2x - 1)^2$

Oefenen

Opgave 10

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x + 8)^2 + 6$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$.

a Hoe kun je de grafiek van f uit die van $y = x^2$ afleiden?

b Bepaal de coördinaten van de top van de parabool die de grafiek van f voorstelt.

c Hoe kun je aan de formule zien dat er geen nulpunten zijn?

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = -2(x+4)^2 + 5$.

a Geef het maximum, dan wel minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze uiterste waarde krijgt.

b Los de vergelijking $-2(x+4)^2 + 5 = -5$ op.

c Los op: $f(x) = 5$

d Los op: $f(x) = -11$

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x+2)^2 + 10$.

a Voor welke waarden van x is deze functie dalend?

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Los de volgende kwadratische vergelijkingen op:

a $x^2 - 8x + 7 = 0$

b $(x+2)(2x+1) = 2$

c $(x+2)(2x+1) = 0$

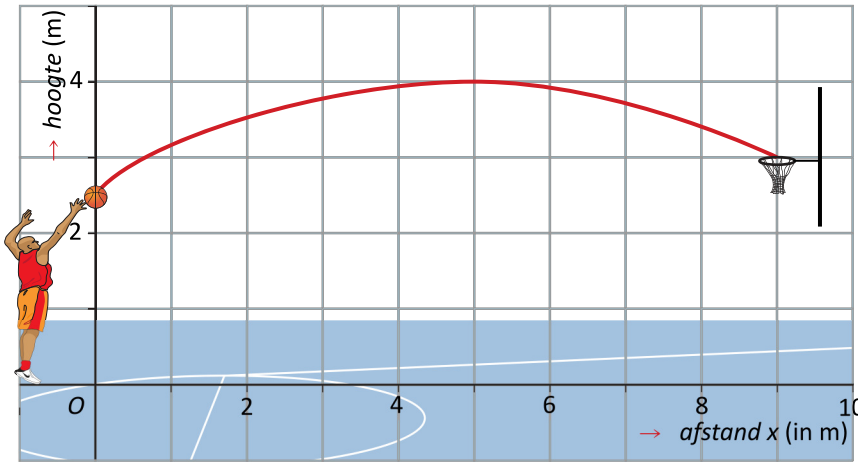
d $x(x+2) = 2x + 4$

Opgave 14

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie figuur.

De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0{,}06(x-5)^2 + 4$.
Hierin is:

- x de afstand vanaf de voeten van de speler tot recht onder de bal in m
- h de hoogte van de bal boven de vloer in m.



Figuur 4.5

a Bereken de hoogte waarop de speler de bal heeft losgelaten.

b De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond.
Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

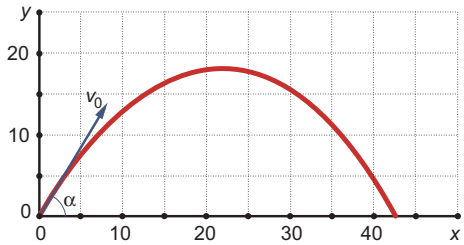
Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + x + 90$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f.
Heeft f een maximum of een minimum?

Toepassen

Een **kogelbaan** is de baan die een voorwerp doorloopt als het onder een bepaalde hoek wordt afgeschoten en daarna alleen onder invloed van de zwaartekracht beweegt.



Figuur 4.6

Gelukkig weet je wel hoe de baan van een kogel er uit ziet: een mooi boogje. Neem maar even aan vanaf de grond tot hij weer op de grond komt. (Dat hoeft natuurlijk niet, de kogel wordt meestal boven de grond afgevuurd. Dit is alvast een model-aanname...). Hier zie je een schets van zo'n baan in een xy-assenstelsel.
De kogel heeft op het moment van 'loslaten' een snelheid, noem die maar v_0.
Verder wordt hij onder een hoek afgeschoten, zeg maar α.

Houd geen rekening met de luchtweerstand. (Nog een model-aanname!)
In de x-richting is de afgelegde afstand het product van de snelheid in die richting en de tijd t.
In de y-richting geldt dit ook, maar nu doet de zwaartekracht mee, die 'trekt' de kogel 'naar beneden'.
Daar heb je wat natuurkunde bij nodig: even de zwaartekrachtwetten bekijken...

Opgave 16

Bekijk hoe de kogelbaan er uitziet.

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cdot \cos(\alpha)$. De snelheid in de y-richting is $v_0 \cdot \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee. Dus is: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.

a Waarom is de snelheid in de x-richting $v_0 \cdot \cos(\alpha)$?

b Waarom is de snelheid in de y-richting niet $v_0 \cdot \sin(\alpha)$?

Voor elk punt van de kogelbaan geldt $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.

c Je kunt hieruit een verband afleiden van de vorm $y = f(x)$.
Geef de juiste formule.

Opgave 17

Als het goed is heb je in de voorgaande opgave afgeleid dat $y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$ met $g \approx 9{,}81$ m/s^2.

a Welke formule geldt voor de baan van een kogel die wordt afgeschoten onder een hoek van 60° met een snelheid van 30 m/s?

b Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?

c Moet je om de kogel verder te laten komen de hoek waaronder de kogel vanaf de grond wordt afgeschoten groter of juist kleiner maken? Laat dit met een voorbeeld zien.

Testen

Opgave 18

Bepaal bij de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek. Heeft de functie een maximum of een minimum?

a $f(x) = -2x^2 - 2$

b $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$

c $h(x) = -(x + 9)^2$

Opgave 19

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $3(x - 5)^2 - 5 = -2$

b $3(x - 5)^2 - 5 = -5$

c $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

Opgave 20

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 6$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.

b Heeft de functie f een maximum of een minimum?
Welke waarde heeft dit maximum/minimum?

4.2 De abc-formule

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadraat afsplitsen van een kwadratische uitdrukking;
- de abc-formule gebruiken voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met de discriminant van een kwadratische vergelijking.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = ...$ of $y = ...$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

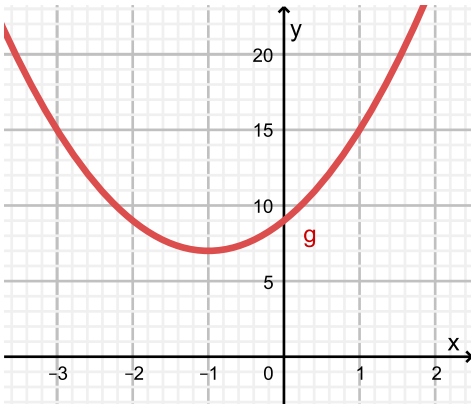
Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = 2(x + 1)^2 + 7$.

a Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.

b Hoe kun je nagaan of je dit goed hebt gedaan?

c Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?

d Hoe bepaal je de top van de grafiek van g?

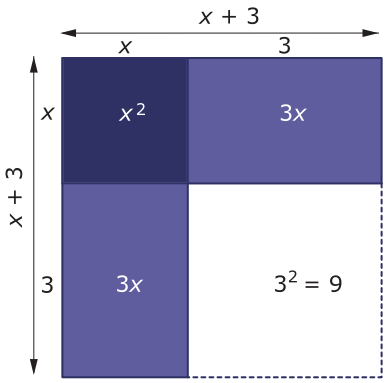


Figuur 4.1

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terug te rekenen. Maar bekijk de figuur eens. Zie je dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2$? Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x + 3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 9 &= 16\\ (x + 3)^2 &= 25\\ x + 3 &= \pm 5\\ x &= -3 \pm 5\end{aligned}$$



Figuur 4.2

De oplossing van deze vergelijking is dus $x = 2 \vee x = -8$.

De gebruikte techniek heet kwadraat afsplitsen.

Hiermee is $x^2 + 10x = x^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2 - 5^2 = (x + 5)^2 - 25$.

En ook is $x^2 - 10x = x^2 + 2 \cdot -5x = (x - 5)^2 - 5^2 = (x - 5)^2 - 25$.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 139**.

a Laat met behulp van een figuur zoals die in de uitleg zien, dat $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

b Splits een kwadraat af bij $x^2 + 5x$.

Je ziet in de uitleg, dat $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$.
Dat kun je niet echt gemakkelijk in een tekening duidelijk maken.

c Leg uit dat dit toch ook klopt door rechts van het isgelijkteken de haakjes weg te werken.

d Splits een kwadraat af bij $x^2 - 5x$.

Opgave 2

Splits van de functievoorschriften een kwadraat af.

a $f(x) = x^2 + 12x$

b $g(x) = x^2 - 8x + 15$

c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$

d $k(x) = -x^2 + 4x + 3$

e $m(x) = x^2 + 4x - 16$

f $k(x) = 3x^2 + 18x - 6$

Opgave 3

Bekijk de kwadratische functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

a Schrijf $f(x)$ in de vorm $(x - p)^2 + q$ door een kwadraat af te splitsen.

b Je weet nu de coördinaten van de top van de grafiek van f. Welke coördinaten zijn dit?

c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

De techniek van een kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen (door eerst te delen door 3). Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen een algemene formule opgesteld.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a, b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$$x = \frac{-17+\sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17-\sqrt{829}}{6}$$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 4

Los de vergelijkingen op met de abc-formule.

a $3x^2 + 17x = 45$

b $x^2 - 6x + 1 = 0$

c $x^2 + 4x = 0$

d $4x^2 - 3x - 8 = 0$

Opgave 5

a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.

b Probeer op dezelfde manier de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. Kun je zelf de abc-formule vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nu zie je aan het functievoorschrift niet meteen hoe hij uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je het functievoorschrift van f omzetten naar de vorm: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ waarin (p,q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij:

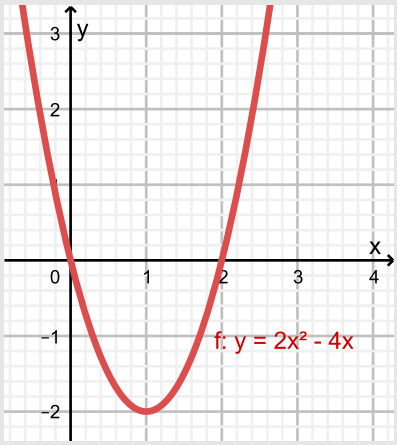
$$x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

Het berekenen van de nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je ook doen met behulp van kwadraat afsplitsen.
Hieruit is de **abc-formule** afgeleid.

De oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$ is: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.



Figuur 4.3

$\frac{-b}{2a}$ is de x-coördinaat van de top, omdat deze waarde precies tussen de nulpunten ligt.

De bijbehorende **functiewaarde** (uitkomst) $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ is het maximum (bergparabool) of het minimum (dalparabool) van de functie f.

Voorbeeld 1

Los op: $x^2 + 10x = 15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op $x^2 + 10x$ kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$\begin{aligned}(x+5)^2 - 25 &= 15\\ (x+5)^2 &= 40\\ x+5 &= \pm\sqrt{40}\\ x &= -5 \pm \sqrt{40}\end{aligned}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen. Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$. Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$. Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$. De discriminant is positief, er zijn twee oplossingen: $x = \frac{-10+\sqrt{160}}{2} \vee x = \frac{-10-\sqrt{160}}{2}$. Ga na dat beide oplossingsmethoden hetzelfde opleveren.

Opgave 6

Los nu zelf de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.

b Doe dit ook met de abc-formule.

Opgave 7

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

a $x^2 - x - 3 = 0$

b $-4x^2 + 5x - 12 = 0$

c $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$

d $x - 5x^2 = 10$

e $x(x - 7) = 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f.

Antwoord

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Je hebt verschillende technieken gezien om deze vergelijking op te lossen.

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\tfrac{1}{2}$$

De nulpunten vind je door de vergelijking $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$ op te lossen. Ga na dat je door terugrekenen de nulpunten $x = -1$ en $x = 2$ vindt.

De coördinaten van de top kun je nu gemakkelijk uit het functievoorschrift aflezen: $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Je kunt ook de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ met de abc-formule oplossen, maar ontbinden in factoren is een snellere manier. Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen. Als je voor het bepalen van de nulpunten gaat ontbinden in factoren of gebruikmaakt van de abc-formule, dan kun je met behulp van de nulpunten of $\frac{-b}{2a}$ de x-coördinaat van de top bepalen.

Opgave 8

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek van f bepalen.

a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.

b Bepaal a, b en c. Bereken daarna de discriminant.

c Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?

d Los de vergelijking $f(x) = 0$ met behulp van de abc-formule op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.

e Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel je nu voor dat je een functie hebt zoals $f(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x-as ligt.
Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

De vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$ moet precies één oplossing hebben. Uit $D = 0$ volgt dan: $k^2 - 12 = 0$.

Kennelijk moet dan gelden $k^2 = 12$. Dus: $k = \pm\sqrt{12}$.

Opgave 9

Het voorschrift $f(x) = x^2 + kx + 3$ voor verschillende waarden van k levert steeds een andere functie met een andere grafiek op.

a Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.

b Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.

c Schrijf functie f in de vorm $f(x) = (x + p)^2 + q$.

d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 1$?

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = px^2 - 4x - 5$.

a Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f.

b Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f nu geen parabool?

c Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x-as gemeen?

Oefenen

Opgave 11

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

a Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.

b Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.

c Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.

d Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren.
Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 12

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

a $x^2 - 3x - 13 = 0$

b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

c $2x^2 - 5x = x$

d $2x^2 - 12x = -18$

e $x^2 - 5x + 10 = 0$

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

a $x(x-1) = 12$

b $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$

c $x - 5x^2 = 3$

d $60 - x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + kx + 5$, waarin k een nog onbekende constante is.

a Voor welke waarde van k gaat de grafiek van f door het punt $(2,7)$?

b Voor welke waarde(n) van k ligt de top van de parabool op de y-as?

c Voor welke k ligt de top van de parabool op de x-as?

d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4$?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 90$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f.
Heeft f een maximum of een minimum?

Opgave 16

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

a Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f.

b Voor welke exacte waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x-as gemeen?

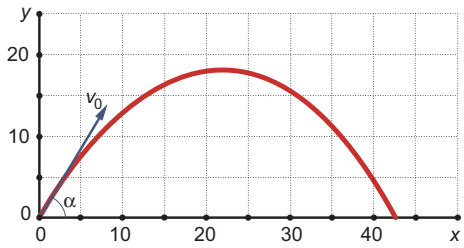
c Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x-as als $p = 3$?

d Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x-as als $p = 0{,}5$?

e Voor welke exacte waarden van p hebben de grafieken van f en g precies één snijpunt? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).
In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 4.4

Je hebt eerder afgeleid dat hierbij deze formule past:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is

- x de horizontale afstand in m

- y de verticale afstand in m
- α de hoek waaronder de kogel is afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de kogel in m/s
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante.

Opgave 17

Bekijk de formule van de kogelbaan in **Toepassen op pagina 145**.
Neem $\alpha = 45°$ en $v_0 = 10$ m/s.

a Welke kwadratische functie beschrijft dan de baan van de kogel?

b Bereken na hoeveel m deze kogel weer op de grond komt.

De kogel wordt nu onder dezelfde hoek en met dezelfde beginsnelheid afgeschoten vanaf 1,8 m hoogte.

c Welke kwadratische functie beschrijft nu de kogelbaan?
En na hoeveel m komt nu de kogel op de grond?

Opgave 18

Een kogelstoter stoot zijn kogel met een beginsnelheid van 20 m/s onder een hoek van 42°.
Hij laat de kogel los op 2,00 m hoogte.

Hoeveel m verder komt de kogel op de grond?

Testen

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $-x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $3x^2 = 6 + 5x$

Opgave 20

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

a Voor welke waarde(n) van p heeft functie f precies één nulpunt?

b Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g.

c Neem $p = 4$ en bereken de x-coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.

d Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

4.3 Kwadratische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij een parabool door twee gegeven punten waarvan er één de top is;
- een formule opstellen bij een parabool door drie gegeven punten;
- de begrippen domein en bereik.

Voorkennis

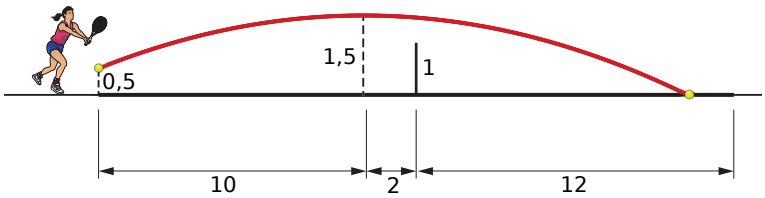
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



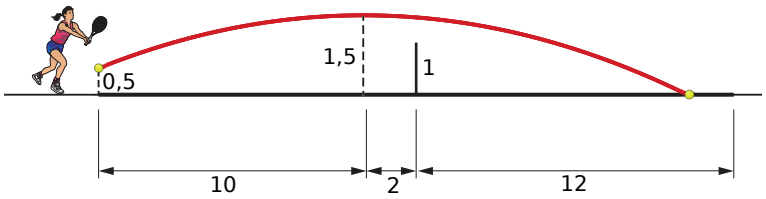
Figuur 4.1

Toon door berekening aan dat de bal in is.

Uitleg

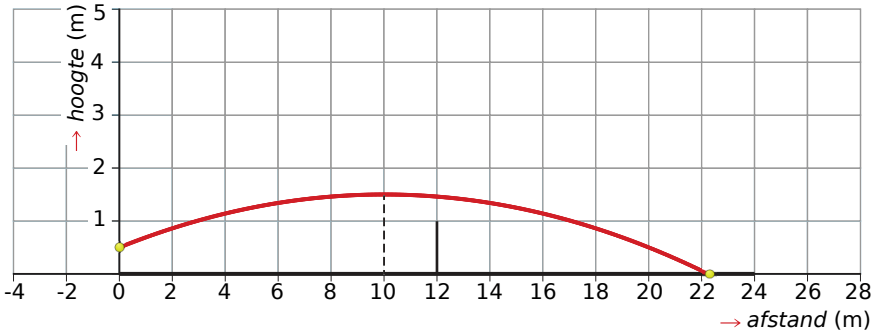
Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



Figuur 4.2

Je brengt een geschikt assenstelsel aan, zie figuur. De top van de parabool is dan $(10; 1{,}5)$ en de parabool moet ook door het punt $(0; 0{,}5)$ gaan.



Figuur 4.3

Bij deze parabool hoort een formule van de vorm $h = a(x - 10)^2 + 1{,}5$.
Het punt $(0; 0{,}5)$ invullen geeft $a = -0{,}01$. De baan van de bal wordt (ongeveer) beschreven door de formule $h = -0{,}01(x - 10)^2 + 1{,}5$.

De bal komt op de grond als $h = 0$. Ga na, dat dan $x = 10 + \sqrt{150}$. Omdat dat minder dan 24 m is, is de bal in.

In dit geval is de gevonden formule niet voor elke waarde van x geldig, maar alleen voor de waarden van x vanaf 0 tot en met $x = 10 + \sqrt{150}$. Deze waarden vormen het domein van de functie.

Het domein van f schrijf je als $\left[0{,}10 + \sqrt{150}\right]$.

Alle mogelijke waarden van h vormen het bereik van de functie. Dit zijn de getallen in $[0; 1{,}5]$.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 147** wordt de baan van een tennisbal beschreven met een kwadratische functie.

a De baan is alleen ongeveer parabolisch.
Waarom is hij zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

b Laat zien dat $a = -0{,}01$.

c Bereken de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad ‘in’ is.

Opgave 2

Nu wordt de tennisbal geslagen vanaf 10 m voor het net op een hoogte van 0,5 m boven de grond.
De bal wordt met een hoge boog gespeeld en weer in de lengterichting.
Het hoogste punt van de baan zit boven het net op 3,50 m hoogte.
Je brengt weer een geschikt assenstelsel aan met de verticale as bij 0 m en de zwarte lijn als horizontale as.

a Stel een formule op voor de parabolische baan van de bal.

b Is de bal ook nu in?

Theorie en voorbeelden

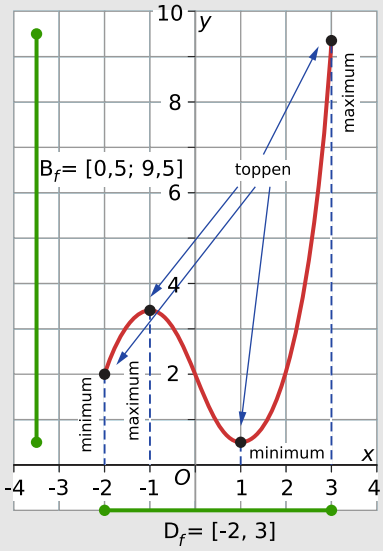
Om te onthouden

Bij elke **parabool** hoort een formule van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ of $y = ax^2 + bx + c$.
Dit stelt je in staat om bij voldoende gegevens de formule van de parabool op te stellen:

- Als de top (p,q) bekend is of kan worden afgelezen gebruik je de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.
- Als er drie willekeurige punten van de parabool bekend zijn, gebruik je meestal de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Je vult de gegevens in de formule in en er ontstaan één of meer vergelijkingen met tot soms wel drie variabelen.
Deze vergelijking of dit stelsel vergelijkingen los je dan op om de **parameters** a, b en c, of a, p en q, te vinden.

Niet altijd is de gevonden formule voor alle waarden van x geldig. De waarden van x waarop dit wel het geval is noem je het **domein** D_f van de bijbehorende functie f. Alle mogelijke functiewaarden vormen het **bereik** B_f van de functie. Het bereik hangt af van het gekozen domein.
Je noteert zowel het domein als het bereik door de kleinste en de grootste waarde ervan tussen haken te zetten. Dat heet een **interval**. Is er geen kleinste of grootste waarde, dan gebruik je een pijltje.
Alle getallen groter dan of gelijk aan 0 schrijf je zo: $[0, \rightarrow\rangle$.
Alle getallen groter dan 0 schrijf je zo: $\langle 0, \rightarrow\rangle$.
De vorm van de haakjes hangt er dus van af of het getal dat er bij staat wel bij het interval hoort (rechte haken) of niet bij het interval hoort (puntige haken).

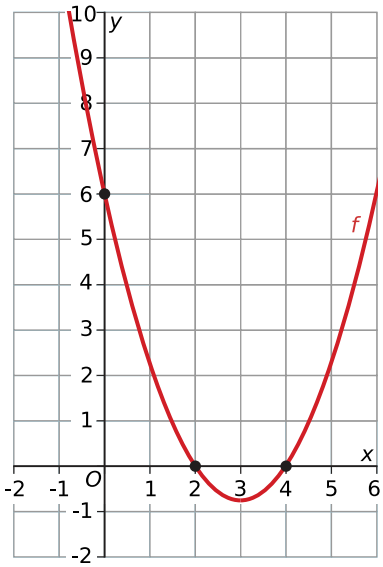


Figuur 4.4

Voorbeeld 1

De snijpunten met de x-as van de grafiek van de kwadratische functie f zijn $(2,0)$ en $(4,0)$. Het snijpunt met de y-as is $(0,6)$.

Welk functievoorschrift heeft deze functie?



Figuur 4.5

Antwoord

De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn midden tussen de nulpunten is, dus door het punt $(3,0)$. Dus is $f(x) = a(x-3)^2 + q$.

De grafiek gaat door $(0,6)$, dus $f(0) = 6$, dit geeft $9a + q = 6$.

De grafiek gaat ook door $(2,0)$, dus $f(2) = 0$, dit geeft $a + q = 0$.

Uit de onderste vergelijking volgt: $q = -a$.
Vul dit in de bovenste vergelijking in. Je vindt dan: $9a - a = 6$.
En dus: $a = 0{,}75$. Omdat $q = -a$ is, geldt $q = -0{,}75$.

Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 0{,}75(x-3)^2 - 0{,}75$.

Opgave 3

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Opgave 4

Stel een formule op bij de parabool door de punten $(4,3)$, $(0,2)$ en $(6,3)$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Een parabool gaat door de punten $(1,2)$, $(4,6)$ en $(7,0)$.

Welk functievoorschrift hoort er bij deze parabool? Bepaal het bereik van de bijbehorende functie als het domein $[0,7]$ is.

Antwoord

In het algemeen heeft een parabool een bijpassend functievoorschrift van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$, of van de vorm $y = ax^2 + bx + c$. Als de top bekend is, is de eerste vorm het handigst. Nu kun je ook de tweede vorm gebruiken.

Je vult elk van de drie gegeven punt in $y = ax^2 + bx + c$ in:

- punt $(1,2)$ geeft: $2 = a + b + c$
- punt $(4,6)$ geeft: $6 = 16a + 4b + c$
- punt $(7,0)$ geeft: $0 = 49a + 7b + c$

Je krijgt drie vergelijkingen met drie onbekenden. Maar door eerst de bovenste twee van elkaar af te trekken en vervolgens de onderste twee, kun je de c elimineren:

- $15a + 3b = 4$
- $33a + 3b = -6$

En dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je oplossen.

Je vindt: $a = -\frac{5}{9}$ en $b = \frac{37}{9}$.

En hiermee kun je dan ook weer c berekenen: $c = -\frac{14}{9}$.

In twee decimalen nauwkeurig krijg je het functievoorschrift $f(x) \approx -0{,}56x^2 + 4{,}11x - 1{,}56$.

Om het bereik te bepalen bij een domein van $[0,7]$ moet je de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ berekenen, maar ook de (in dit geval) maximale functiewaarde. Je vindt als bereik $\left[-1\frac{5}{9}; 6{,}05\right]$.

Opgave 5

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 150**.

a Stel zelf de drie vergelijkingen met drie onbekenden op die uit de gegevens volgen.

b Los dit stelsel vergelijkingen op.

c Welk probleem ontstaat er door het geven van een antwoord in twee decimalen nauwkeurig?
Hoe zou je dit kunnen oplossen?

d Welk probleem ontstaat als je de algemene vorm $y = a(x - p)^2 + q$ gebruikt om de formule bij de parabool te vinden?

e Bereken de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ en bereken het maximum van f. Bepaal het bereik bij het domein $[0,7]$.

Opgave 6

Je kunt in de applet de punten verplaatsen en zo oefenen met het opstellen van een formule bij een parabool door drie gegeven punten.

Doe dit, bijvoorbeeld samen met een medestudent.

Opgave 7

Neem nu de punten $(0,1)$, $(10,3)$ en $(25,0)$.

a Stel een formule op bij de parabool door die drie punten.

b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

Oefenen

Opgave 8

Van een kwadratische functie f is de grafiek een parabool met top $(2, -5)$ en snijpunt met de y-as $(0, -3)$.

a Schrijf het functievoorschrift van f op.

b Bereken de nulpunten van f in twee decimalen nauwkeurig.

c Bepaal het bereik van f als het domein $[0, \rightarrow\rangle$ is.

Opgave 9

De grafiek van de kwadratische functie f gaat door de punten $A(-2,5)$, $B(6,5)$ en $C(0,-1)$.
Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 10

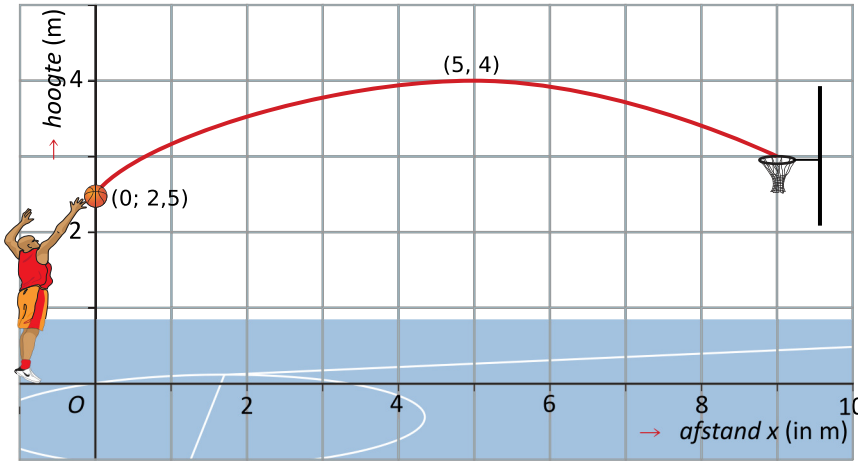
De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten $(1,9)$ en $(5,5)$ en heeft als symmetrieas de lijn $x = 2$.

a Is de grafiek van deze kwadratische functie een berg- of een dalparabool?

b Stel het functievoorschrift op bij de grafiek.

Opgave 11

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool. Het hoogste punt van de baan is gegeven in de figuur. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.



Figuur 4.6

a Stel een formule op voor de functie h die de baan van de bal beschrijft.

b De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond.
Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.

c Schrijf het domein en het bereik op van de functie h.

Opgave 12

De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(2,7)$ en $R(4,12)$.

a Ga uit van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Van welke parameter (a, b, of c) weet je nu direct de waarde?

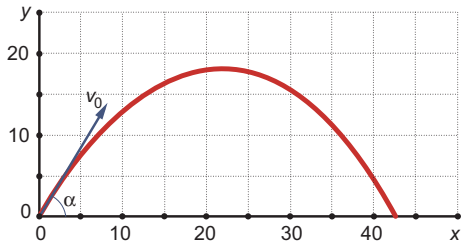
b Gebruik de andere twee punten om het functievoorschrift op te stellen.

c De lijn $y = p$ snijdt de kwadratische functie in één punt. Bereken de waarde van p.

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 4.7

Opgave 13

Bekijk de kogelbaan in de figuur en neem aan dat hij door (0,0), (30,15) en (40,5) gaat.

a Welk functievoorschrift kun je er dan bij opstellen?

b In welk punt komt deze kogel weer op de grond?

c Welk domein en welk bereik heeft deze functie?

Opgave 14

Voor de kogelbaan geldt de formule:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is:

- α de hoek waaronder de kogel wordt afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de afgeschoten kogel in m/s
- $g \approx 9{,}81$ de gravitatieconstante in m/s^2

a Waaraan zie je dat er wordt aangenomen dat de kogel op de grond wordt afgeschoten?

b Een kogel wordt afgeschoten met een snelheid van 300 m/s op een hoogte van 1,5 m en onder een hoek van $\alpha = 2°$.
Na hoeveel m komt hij op de grond terecht?

Testen

Opgave 15

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $x = 10$ en $x = 20$. De grafiek van f snijdt de y-as in het punt (0,30). Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 16

Een parabool gaat in een xy-assenstelsel door de punten $A(0,4)$, $B(4,6)$ en $C(8,0)$.

a Welke formule past bij deze parabool?

b Bepaal het maximum van de bijbehorende functie g.

c Bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as.

d Het domein van g is $D_g = [0,8]$.
Bepaal het bijbehorende bereik.

4.4 Veeltermen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met veeltermfuncties;
- vergelijkingen met veeltermen oplossen met ontbinden in factoren.

Voorkennis

- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule;
- de grafieken van $y = x^n$ met positieve gehele n herkennen, met name het verschil tussen even n en oneven n;
- terugrekenen vanuit hogere machten, hogere machtswortels.

Verkennen

Opgave V1

Een veeltermfunctie is een functie zoals $f(x) = x^3 - 4x$.

a Welke nulpunten en toppen heeft de grafiek van f?

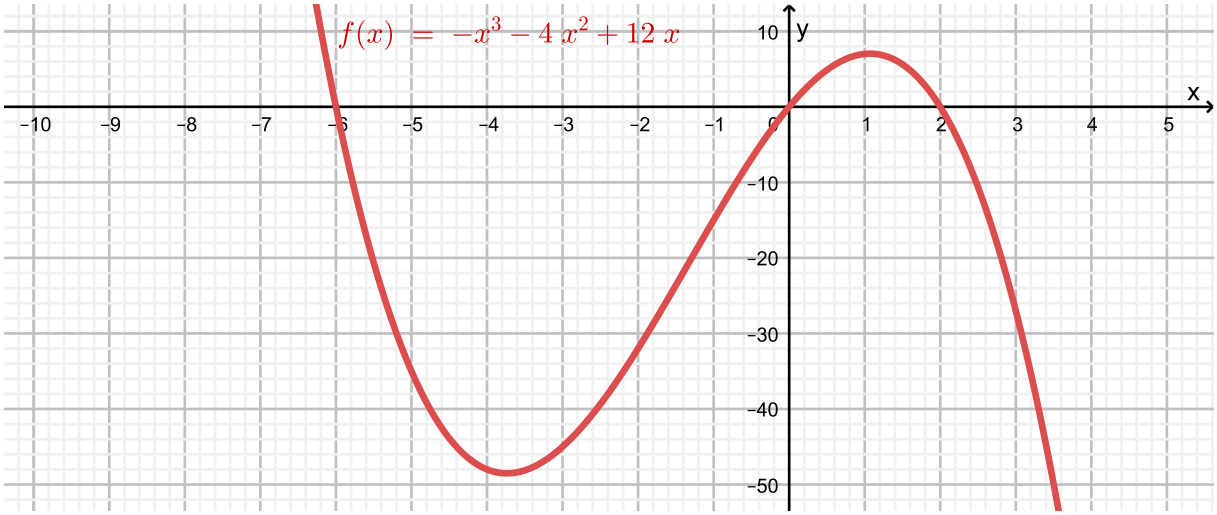
b Schrijf domein en bereik van f op.

Uitleg

De functie $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 12x$ is een voorbeeld van een veeltermfunctie.
Elke uitdrukking die bestaat uit een optelling of aftrekking van machten met een gehele positieve exponent en eventueel een constant getal heet een veelterm (of polynoom).

Om de grafiek goed in beeld te krijgen, wil je vooraf weten hoeveel nulpunten en toppen er zijn.
De nulpunten kun je in dit geval berekenen door ontbinden in factoren:
$-x^3 - 4x^2 + 12x = 0$ geeft $-x\left(x^2 + 4x - 12\right) = -x(x + 6)(x - 2) = 0$,
dus $x = 0 \vee x = -6 \vee x = 2$, zodat de nulpunten $(-6,0)$, $(0,0)$ en $(2,0)$ zijn.

Nu kun je het deel van de grafiek waar die nulpunten liggen bekijken door bijvoorbeeld te zorgen dat de x-as vanaf -10 tot en met 5 in beeld komt. Welke functiewaarden erbij horen weet je nog niet, eventueel vul je een paar x-waarden in. Als je voor deze grafieken software gebruikt, spreek je van ‘plotten’ van de grafiek.



Figuur 4.1

Als je de x laat lopen van - 10 tot 5 en de y-as van - 50 tot 10 krijg je het belangrijke deel van de grafiek in beeld met al zijn karakteristieken (nulpunten, toppen).
Je kunt die instelling van de assen noteren als [- 10,5] × [- 50,10].

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg op pagina 154**.

a Bepaal met GeoGebra, Desmos of de grafische rekenmachine beide toppen van de grafiek in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = -4x^2$.

Opgave 2

Gegeven is de veeltermfunctie g met $g(x) = 0{,}5x^4 - 8x^2$.

a Bereken algebraïsch de drie nulpunten van deze functie.

b Bepaal de coördinaten van de toppen van de grafiek van g met GeoGebra of de grafische rekenmachine. Rond waar nodig af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Functies zoals $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$ heten **veeltermfuncties**. Ze bestaan uit optellingen/aftrekkingen van machtsfuncties met gehele exponent groter of gelijk aan 0. Kwadratische functies zijn er een voorbeeld van, maar er kunnen ook hogere machten voorkomen.
Als de hoogst voorkomende macht 3 is, spreek je van een **derdegraadsfunctie**. Een kwadratische functie is daarom wel een **tweedegraadsfunctie** en een lineaire functie een **eerstegraadsfunctie**.

Om de **karakteristieken**, de nulpunten en de toppen van zo'n functie te berekenen heb je meestal verdergaande technieken nodig. Maar soms kun je er ook met behulp van ontbinden in factoren uitkomen.
De grafiek laat je maken door de computer (of een grafische rekenmachine).
Dit noem je het **plotten** van een grafiek.

Ook functies van de vorm $f(x) = a(x - p)^n + q$ (met $n \geq 0$ en geheel) kun je als veelterm opvatten, je kunt immers de haakjes wegwerken.
De grafieken van deze functies zijn door verschuiven en vermenigvuldigen af te leiden uit die van $y = x^n$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = -0{,}1(x-4)^3 + 10$
Breng de grafiek van f in beeld en bereken het nulpunt.

Antwoord

De grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = x^3$.

Je moet die grafiek daarvoor:

- eerst 4 verschuiven in de x-richting;
- dan vermenigvuldigen in de y-richting met $-0{,}1$;
- tenslotte 10 verschuiven in de y-richting.

De grafiek van f lijkt op die van $y = x^3$ en heeft daarom geen top.

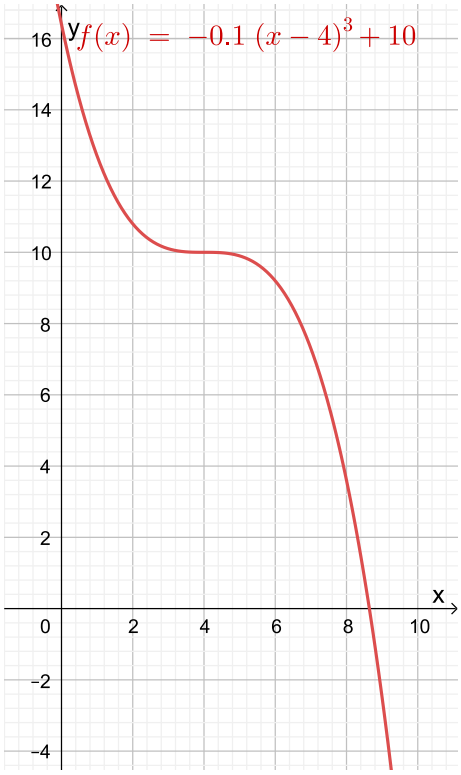
Door de negatieve factor $-0{,}1$ voor $(x-4)^3$ is de grafiek dalend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 4$). Het punt van symmetrie kun je uit het functievoorschrift aflezen: $(4,10)$

Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [-4,16]$

Het nulpunt bereken je door $f(x) = 0$ op te lossen:

$$\begin{aligned} -0{,}1(x-4)^3 + 10 &= 0 \\ (x-4)^3 &= 100 \\ x-4 &= \sqrt[3]{100} \\ x &= \sqrt[3]{100} + 4 \end{aligned}$$

Het exacte nulpunt is $x = \sqrt[3]{100} + 4$.



Figuur 4.2

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = 0{,}2(x+5)^3 - 4$.

a Hoe kan de grafiek van f uit die van $y = x^3$ ontstaan?

b Wat is het punt van symmetrie van de grafiek van f?

c Plot de grafiek van f.

d Bereken het nulpunt van f.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $g(x) = -(x-2)^4 + 1000$.

a Hoe kan de grafiek van g uit die van $y = x^4$ ontstaan?

b Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g.

c Geef het bereik van g.

d Plot de grafiek van g.

e Geef de nulpunten van g.

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^5 = 12x$
Rond af op twee decimalen.

Antwoord

Gebruik de balansmethode en ontbinden in factoren.

$$\begin{aligned} x^5 &= 12x \\ x^5 - 12x &= 0 \\ x(x^4 - 12) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^4 - 12 = 0 \\ x &= 0 \vee x^4 = 12 \\ x &= 0 \vee x = \sqrt[4]{12} \vee x = -\sqrt[4]{12} \\ x &= 0 \vee x \approx 1{,}86 \vee x \approx -1{,}86 \end{aligned}$$

Opgave 5

In het **Voorbeeld 2 op pagina 157** wordt de vergelijking $x^5 = 12x$ algebraïsch opgelost.

a Controleer het antwoord met GeoGebra, Desmos of de grafische rekenmachine.

b Los de vergelijking $x^6 = 2x^3$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.
Controleer het antwoord met de grafische rekenmachine.

Opgave 6

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^4 - x^2 = 0$

b $5x^8 = x^3$

c $x^4 + 5x^3 = -6x^2$

Opgave 7

Gegeven is de functie: $f(x) = 2x^4 - 512x^2$

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

b Bij welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van f goed in beeld?

Voorbeeld 3

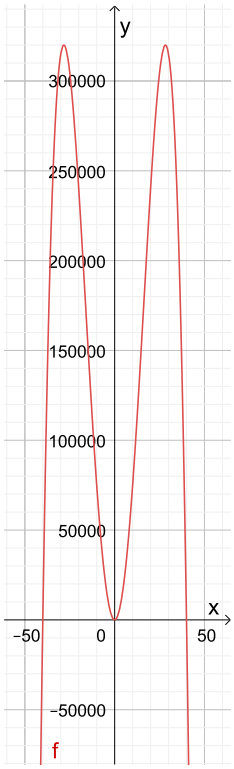
Gegeven is de functie f met $f(x) = -0{,}5x^4 + 800x^2$.
Hoeveel toppen heeft deze functie?

Antwoord

Om vast te stellen hoeveel toppen er zijn, breng je de grafiek van f met alle karakteristieken in beeld. Het is handig om eerst de nulpunten te berekenen:

$$\begin{aligned} -0{,}5x^4 + 800x^2 &= 0 \\ -0{,}5x^2\left(x^2 - 1600\right) &= 0 \\ x = -40 \vee x &= 0 \vee x = 40 \end{aligned}$$

Er zijn drie nulpunten, te weten: $(0{,}0)$, $(-40{,}0)$ en $(40{,}0)$.
De grafiek komt met alle karakteristieken in beeld met een venster van $[-60{,}60] \times [-50000{,}500000]$.
Er zijn drie toppen die je door GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine kunt laten bepalen.



Figuur 4.3

Opgave 8

Derdegraadsfuncties hebben de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$.

a Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?

b Neem $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?

c Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?

d Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?

e Hoeveel nulpunten en hoeveel toppen heeft een derdegraadsfunctie maximaal?

Opgave 9

Bekijk de vierdegraadsfunctie $f(x) = 2x^4 - 512x^2$. Je wilt de nulpunten en de toppen van de grafiek van f bepalen.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

b Bij welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van f goed in beeld?

c Hoeveel toppen zijn er? Bepaal de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}25(x - 3)^4 + 50$.

a Hoe kun je de grafiek van f afleiden uit die van $y = x^4$?

b Geef het bereik van deze functie.

c Waarom heeft de grafiek van f geen nulpunten?

d Los exact op: $f(x) = 55$.

Opgave 11

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $4x^5 = -12$

b $60 - 0{,}5x^4 = 0$

c $(x - 1)^8 + 5 = 10$

d $-(x - 2)^7 + 5 = 15$

e $10(x + 6)^4 - 22 = 138$

f $-5(x - 3)^6 + 18 = -2$

Opgave 12

Gegeven is de functie g door $g(x) = 2(x + 1)^5 - 100$.

a Hoe kun je de grafiek van g afleiden uit die van $y = x^5$?

b Bereken het nulpunt van f.

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $x^3 - 4x^2 = 21x$

b $x(x^3 - 1) = 7x$

c $x(6 - x)(x + 5) = 0$

d $2x^4 - 12x = -18x$

e $x^4 - 7x^3 + 10x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g door: $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ en $g(x) = 5x^4$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Los algebraïsch op $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 21q - 40$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro.

a Wat is de winst als het bedrijf 2500 producten maakt?

b Wat is de laagste productie waarbij het bedrijf € 100875,00 winst maakt?

c Bij welke productie is de winst maximaal? En wat is die maximale winst?

Toepassen

Chemotech is een bedrijf dat o.a. een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel produceert. Afhankelijk van het aantal werknemers dat het bedrijf voor de productie daarvan inzet wordt er meer of minder kilo van dit product per maand gemaakt. Bij de productie van een bepaald chemisch onkruidbestrijdingsmiddel heeft de bedrijfsleiding onderzocht hoeveel kilo bestrijdingsmiddel worden geproduceerd per maand afhankelijk van het aantal werknemers. Dit **Excelbestand bij product CT-216X3** laat dat zien.

Figuur 4.4

Een arbeidsplaats kost gemiddeld € 1500,00 per maand en de kosten voor de apparatuur en de gebouwen bedragen ongeveer € 30000,00 per maand.
Je kunt op basis van deze gegevens een tabel opstellen waarin de totale kosten TK per maand (in duizenden euro) afhangen van de hoeveelheid bestrijdingsmiddel q die men maandelijks kan produceren.

Opgave 16

Bekijk de gegevens betreffende het bestrijdingsmiddel dat ChemoTech op de markt wil brengen.

a Maak zelf de tabel voor de totale kosten.

b Laat zien dat bij je tabel ongeveer de formule $TK = 0{,}25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$ past.

c Bereken de totale kosten bij een inzet van 50 man personeel en bereken hoeveel kg bestrijdingsmiddel er dan wordt geproduceerd.

Opgave 17

De fabrikant ziet dat zijn totale kosten sterk gaan stijgen als hij steeds meer kg per maand wil produceren.

a Waardoor wordt dit veroorzaakt?
Hoeveel kg per maand kan hij het beste produceren?

b Welk bedrag zal deze producent voor een kg bestrijdingsmiddel moeten vragen om uit de kosten te komen als hij de voor hem beste hoeveelheid per maand produceert?

Testen

Opgave 18

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^4 - 8x = 0$

b $-x^2(x - 5) = 2x^2$

c $20 - x^4 = 11$

d $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 36$

Opgave 19

Gegeven is de functie f door $f(x) = 2(x - 4)^3 + 10$.

a Hoe kun je de grafiek van f afleiden uit die van $y = x^3$?

b Plot de grafiek van f en bepaal het nulpunt in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.

4.5 Ongelijkheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- vergelijkingen oplossen met terugrekenen vanuit machten, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule;
- grafieken van functies goed in beeld brengen (plotten).

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat speciaal voor gebruik door leerlingen.

a Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).

De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

b Bij welk aantal kopieën per maand verdient de school aan het apparaat?

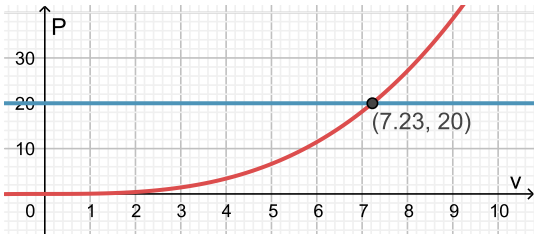
Uitleg

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, is afhankelijk van de wieklengte en van de windsnelheid v.

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0{,}052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt) en v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de **ongelijkheid**: $0{,}052v^3 > 20$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat prima met GeoGebra of een grafische rekenmachine:

- Je voert beide functies in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7{,}272...; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid af uit de figuur: $v > 7{,}27$.



Figuur 4.1

Belangrijk is het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v \geq 7{,}3$. Want bij 7,2 is het vermogen nog niet meer dan 20 kW.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 162** zie je hoe de ongelijkheid $0{,}052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt GeoGebra gebruikt.

a Los zelf de ongelijkheid zo op.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0{,}052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

b Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.

c Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = 0{,}01x\left(x^2 - 400\right)$ en $g(x) = x$. In deze opgave ga je de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ oplossen.

a Hoe moet je de assen instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?

b Los nu de ongelijkheid op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

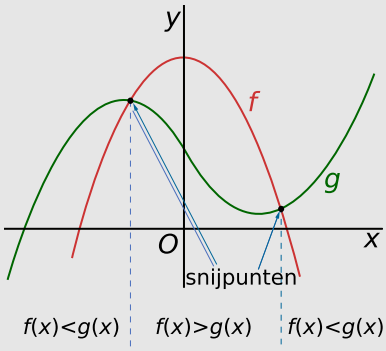
c Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst plot je beide functies.
  Breng ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.
  Dat kan vaak ook door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
  Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Reken door met de maximale nauwkeurigheid van de grafische rekenmachine en rond alleen af als dat wordt gevraagd en aan het einde van je uitwerking.



Figuur 4.2

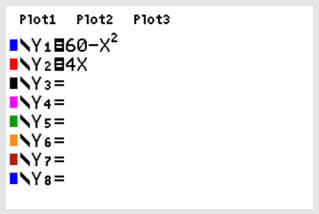
Voorbeeld 1

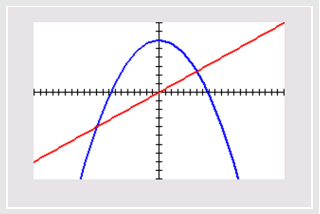
Bekijk de applet

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Bekijk eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$ zoals die zijn gemaakt met een grafische rekenmachine. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.





Figuur 4.3

De snijpunten vind je door de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ op te lossen. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 3

Je gaat in deze opgave de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ exact oplossen.

a Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.

b Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. De oplossing bestaat uit twee delen!

Opgave 4

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $(x - 4)^2 < 10$

b $-2(x + 3)^2 + 10 < 4$

c $3(x - 5)^2 - 2 \geq 10$

Voorbeeld 2

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK. Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

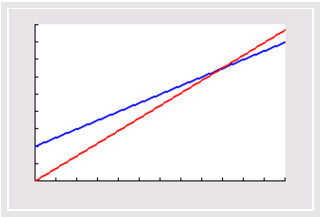
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7{,}25q$. De variabele q is de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus $7{,}25q > 2000 + 5q$. Met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7{,}25q = 2000 + 5q$ geeft $2{,}25q = 2000$ en dus $q \approx 888{,}9$ liter.

De oplossing lees je uit de grafiek af: vanaf 889 liter verf maakt de verfhandelaar winst.



Figuur 4.4

Opgave 5

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op gas kunt gaan rijden. Je huidige kosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

a Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost € 0,80 per liter en je rijdt 10 kilometer op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen.

b Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G) afhankelijk van het aantal kilometers (a).

c Je wilt weten hoeveel kilometer je in dat jaar moet rijden om de kosten van de gastank er weer uit te halen. Welke ongelijkheid hoort daar bij?

d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 4x$.

Los algebraïsch op: $f(x) > g(x)$.

Antwoord

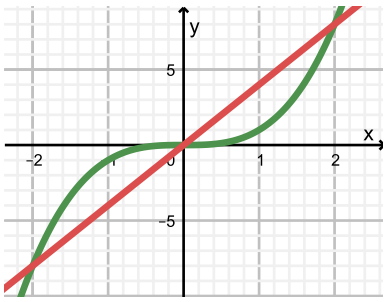
Eerst los je de vergelijking $x^3 = 4x$ op:

$$\begin{aligned} x^3 &= 4x \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Je vindt $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Vervolgens maak je de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 4x$. Zorg dat alle snijpunten in beeld komen.

Tenslotte lees je de oplossing uit de grafiek af. De groene grafiek moet boven de rode grafiek liggen, dus je vindt $-2 < x < 0 \vee x > 2$.



Figuur 4.5

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 165** hoe je algebraïsch de ongelijkheid $x^3 > 4x$ oplost.

a Welke oplossing heeft de ongelijkheid $x^3 \leq 4x$?

Bekijk nu de ongelijkheid $x^3 < x^2$.

b Los de ongelijkheid algebraïsch op.

Oefenen

Opgave 7

Los de ongelijkheden met de rekenmachine op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^3 + 3x^2 - 3 > 0$

b $2(x-4)^2 - 5 < 5x$

c $(x+3)^2 < 5x$

d $x^4 - 3x > -x^2 + 3$

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $5(x-1)^2 - 9 > 11$

b $x^3 > x$

c $x^3 \leq 80x - 2x^2$

d $-2x^2 < 8 - x$

e $x^2 - 4x > -3$

Opgave 9

Twee auto's rijden op de A1, beide met constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door $s(t)$.

a Stel bij beide auto's een lineaire functie voor $s(t)$ op.

b Bereken na hoeveel minuten auto A door auto B wordt ingehaald.

c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + px + 12$ en $g(x) = -x + 9$.

a Voor welke exacte waarden van p snijdt de grafiek van f de x-as twee keer?

b Neem $p = 3$ en los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ algebraïsch op.

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 9\right)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.

b Los algebraïsch op: $f(x) < 36$.

Toepassen

Bij een autodealer kun je vier jaar lang in een Smart Fortwo rijden voor € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer sluit je een abonnement af waarmee alle onderhoudskosten worden afgedekt. Je hebt verder alleen nog benzinekosten.
Met 1 liter benzine rijd je 16 kilometer.
1 liter benzine kost € 1,60.

Figuur 4.6

Opgave 12

Bekijk de abonnementsgegevens voor de Smart Fortwo.

a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?

b Hoeveel kost je deze Smart per jaar als je er 16000 km/jaar mee rijdt?

c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 4000,00 wilt besteden dat jaar? Los daarna de ongelijkheid algebraïsch op.

d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je een vast bedrag aan onderhoudskosten alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel het complete functievoorschrift op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Testen

Opgave 13

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op:

a $6 - x < x^2$

b $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 14

De afstand Utrecht - Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Je wilt weten hoe lang fietser A dichter bij Utrecht is dan fietser B.

a Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?

b Los deze ongelijkheid algebraïsch op.

c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

a Bepaal de snijpunten van de grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.

b Los op: $f(x) \geq g(x)$.

4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Kwadratische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- kwadraat afsplitsen — abc-formule;
- kwadratisch model;
- veeltermfuncties — derdegraads, hogere graads functies;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen en ontbinden in factoren;
- een kwadraat afsplitsen — kwadraat afsplitsen en de abc-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met veeltermfuncties — hogere graads vergelijkingen oplossen waar mogelijk algebraïsch;
- ongelijkheden systematisch oplossen.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x-1)^2$.

a Laat zien hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^2$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de coördinaatassen.

c Los algebraïsch op: $f(x) = -712$.

d Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $-0{,}5(x-2)^2 + 45 \leq 4{,}5$

b $x(x-2) = 3x - 6$

c $x^3 - 4x^2 = 10x$

d $6 - 0{,}001(x-3)^3 = 5$

e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$

f $\left(x^2 - 9\right)(x-2)^3 > 0$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f met behulp van kwadraat afsplitsen.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

c Voor welke waarde(n) van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De maximale hoogte van de vuurpijl is 122,5 meter en die hoogte bereikt hij na 5 seconden. Er bestaat een kwadratisch verband tussen de hoogte van de vuurpijl h in meters vanaf de grond en de tijd t in seconden.

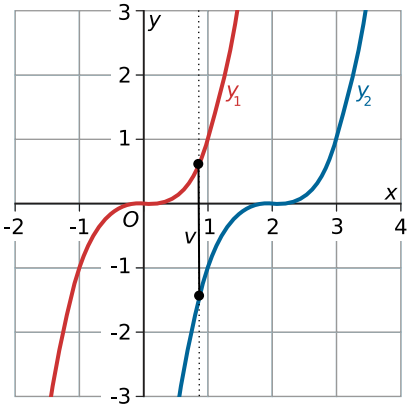
a Toon aan dat het functievoorschrift van $h(t)$ gegeven wordt door $h(t) = -4{,}9t^2 + 49t$.

b Als de vuurpijl niet uit elkaar spat, na hoeveel seconden is hij dan weer op de grond?

c De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Bereken algebraïsch hoelang de vuurpijl op een hoogte van meer dan 30 meter is. Rond af op één decimaal.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2. De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x-as de lengte 2 hebben.



Figuur 4.1

a Geef het functievoorschrift van y_2.

De functie $v(x)$ stelt de lengte voor van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y-as.

b Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.

c Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as minder dan 8?

d Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y-as.

Opgave 6

Een parabolische baan gaat ten opzichte van een xy-assenstelsel door de punten: $A(0,10)$, $B(2,13)$ en $C(5,10)$. Een voorwerp doorloopt deze baan vanaf punt A tot het weer op de grond komt ($y = 0$).

a Stel een formule op bij deze baan.

b Waar komt het voorwerp dat deze baan doorloopt op de grond?

c Welk domein en welk bereik heeft de functie f die deze baan beschrijft?

Toepassen

Opgave 7: Boekenkast

Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium. Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?

Bekijk de applet: boekenkast op zolder

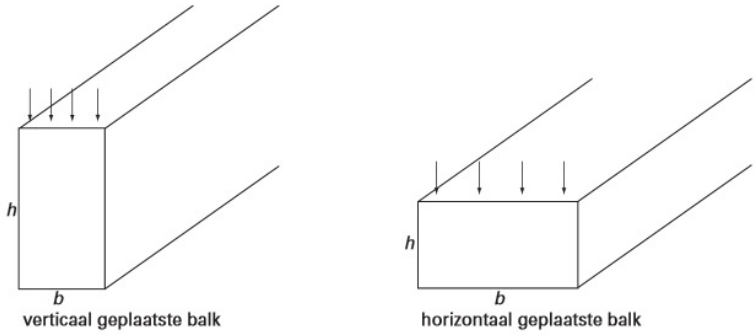
a Experimenteer eerst met de applet.

b Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.

c Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K.

Opgave 8: Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort. We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.



Figuur 4.2

Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$. Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

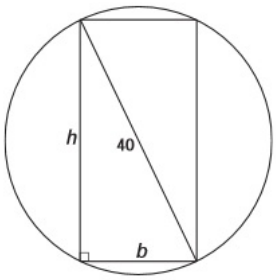
Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm. Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

a In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.

De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2. Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.

b Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h. Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0{,}12 \cdot b \cdot h^2$. De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie de figuur hiernaast.



Figuur 4.3

c Laat zien dat in deze situatie voor de sterkte de formule $S = 192b - 0{,}12b^3$ kan worden gevonden.

d Bereken de afmetingen h en b van de dwarsdoorsnede met de grootste sterkte. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af (zie bovenste foto). Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Figuur 4.4

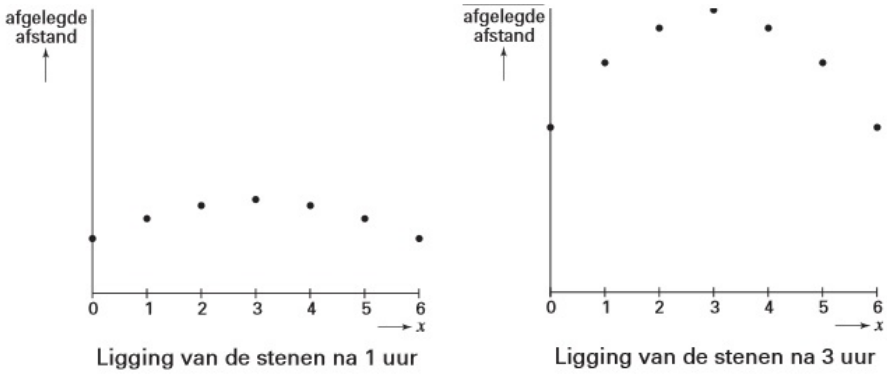
Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand. Het resultaat zie je op de onderste foto.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de onderstaande figuren zie je de ligging na één uur en na drie uur.

De afstand A (in dm) die de stenen na één uur hebben afgelegd, wordt beschreven door de formule:

$A = -0{,}1x^2 + 0{,}6x + 19{,}4$

Hierbij is x de afstand in dm van het midden van een steen tot het midden van steen 0 bij het begin van het proces.



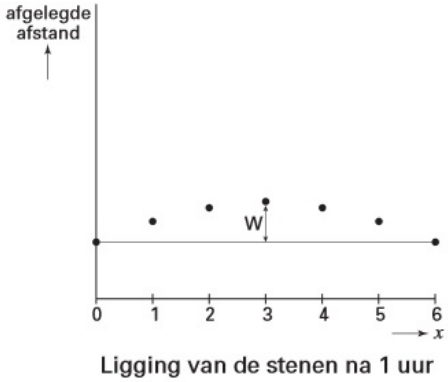
Figuur 4.5

a Bereken de afstand die steen nummer 2 het eerste uur heeft afgelegd.

De stenen gaan met de modder mee de berg af. Elke steen heeft zijn eigen constante snelheid.

b Van welke stenen ligt die snelheid het dichtst bij 20 dm per uur? Licht je antwoord toe met een berekening.

De geoloog heeft de stenen op een rechte lijn loodrecht op de stroomrichting gelegd. Steen nummer 3 zal door de stroom sneller vooruit komen dan de andere stenen. Het weglengteverschil W dat op die manier tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur ontstaat, is afgebeeld in de figuur hiernaast.



Figuur 4.6

c Toon aan dat het weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur 9 cm is.

Op een gegeven moment meet de geoloog een weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 van 83 cm.

d Bereken de totale afgelegde weg van de steen met nummer 3, gerekend vanaf de plek waar de geoloog de stenen in de modderstroom gelegd heeft. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

5

Exponenten en machten

5.1 Exponentiële groei 174
5.2 Rekenregels voor machten 184
5.3 Exponentiële functies 193
5.4 Machtsfuncties 203
5.5 Totaalbeeld 213

5.1 Exponentiële groei

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei/afname, met name formules opstellen bij exponentiële groei/afname;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een heel groot vel papier (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

a Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?

b Waarom zal dit met een A4'tje in werkelijkheid nooit lukken?

Stel dat een onbegrensd vel papier 0,15 mm dik is.

c Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?

d Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 centimeter dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg 1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën (mg)	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 5.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2; dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met deze formule kun je gemakkelijk berekenen hoeveel bacteriën je na bijvoorbeeld 10 uur hebt: $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van de bacteriegroei in de uitleg.

a Wat versta je onder de ‘groeifactor’ per uur van de hoeveelheid bacteriën?

b Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?

c Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Opgave 2

Bekijk de tabel.

tijd (h)	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
bacteriën	50	150	450	1350	4050	12150	36450

Tabel 5.2

a Toon aan dat er sprake is van exponentiële groei.

b Hoe groot is de groeifactor per uur?

c Hoe groot is de groeifactor per twee uur?

d Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

Opgave 3

Een hoeveelheid halveert dagelijks.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag?

b Hoeveel is de groeifactor per week? Rond af op drie decimalen.

c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per vier dagen af?

Uitleg 2

Door te denken aan bacteriegroei en de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$

$(2^3)^4 = 2^{12}$

$2^0 = 1$

Figuur 5.1

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt, trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per 3 uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Deze rekenregels gelden voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.

Opgave 4

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $\left(6^3\right)^6$

Opgave 5

a Kun je $2^5 + 2^5$ als één macht schrijven?

b Kun je $7^3 + 7^5$ als één macht schrijven?

Opgave 6

a Hoeveel is 0^4?

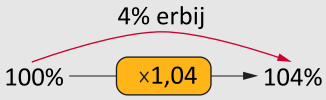
b En hoe zit het met 0^0? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit, is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.



Figuur 5.2

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g, dan schrijf je dat als g^n. Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is.
In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m een aantal **rekenregels voor machten**:

- $g^0 = 1$ als $g \neq 0$
- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$ als $g \neq 0$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$

Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet is veranderd en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

Antwoord

Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04.

Figuur 5.4

Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1{,}04^t$.

Als je deze formule invoert in een spreadsheet heb je snel een tabel.
Je kunt ook een grafische rekenmachine gebruiken.

Opgave 7

Hoeveel bedraagt de groeifactor bij de genoemde groeipercentages?

a 10% toename

b 100% toename

c 0,2% toename

d 100% afname

e 0,1% afname

f 40% afname

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

a Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?

b Hoeveel geld staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?

c Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010?

d Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipercentage per vijf jaar.

e Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen.

- $t = 20$ invullen in de formule;
- het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 4 jaar;
- het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 5 jaar.

Voorbeeld 2

Een krant ziet in een reeks van jaren het aantal abonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 5.3

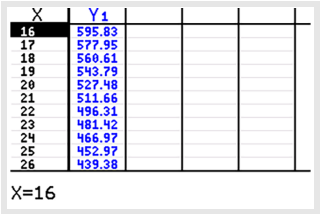
Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010 . Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

Controleer eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0{,}97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.
Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0{,}97^t$.

Maak een tabel van deze functie, bijvoorbeeld met een spreadsheet of een grafische rekenmachine.
Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.



Figuur 5.5

Opgave 9

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 2 op pagina 178**.

a Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad ongeveer 0,97 is.

b Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?

c Laat zien dat de krant in 2032 in de problemen raakt.

Opgave 10

Neem de tabel over en vul in.

procentuele toename per jaar	13	- 6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 5.4

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten berekenen.
$256 = 2^8$, $64 = 2^6$ en $1024 = 2^{10}$

En dus staat hier: $\frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024$.

Opgave 11

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 179**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als een macht te schrijven.

a $3^{83} \cdot \left(3^{40}\right)^2$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$

c $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$

d $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

Oefenen

Opgave 12

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2. Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

a Geef het functievoorschrift van de met riet begroeide oppervlakte $R(t)$ in km^2, waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.

c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 13

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

a Stel een formule op voor de 'groei' van het aantal herten N als functie van de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.

b Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.

c Bereken het groeipercentage per tien jaar.

d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 14

In de herfst 'schieten' de paddenstoelen uit de grond. Dit komt omdat de paddenstoel onder de grond groeit. Hier neemt de paddenstoel vocht op. Als het heeft geregend, schiet de paddenstoel razendsnel omhoog.
Ga uit van een paddenstoel die begint met groeien tijdens een regenbui om 23:00 uur 's avonds. Noem dit tijdstip $t = 0$. De hoogte van de paddenstoel is op dat moment 1 cm en neemt per uur met 14% toe. Deze paddenstoel kan maximaal 12 cm hoog worden.

a Hoe hoog is de paddenstoel om 02:00 uur 's nachts? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.

b Wat is de groeifactor per drie uur? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

c Met hoeveel procent is de hoogte van de paddenstoel toegenomen tussen 23:00 uur 's avonds en 6:00 uur in de ochtend? Geef je antwoord in hele procenten.

d Hoeveel hele uren kan de paddenstoel blijven groeien?

Opgave 15

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11295	11760	12250	12750	13280

Tabel 5.5

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

b Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).

c Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.

d Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?

e Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar haalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal na vijf jaar en na tien jaar.

f Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 16

Schrijf als één macht.

a $\frac{(2^{30})^{12}.2^{60}}{2^{343}.2^{77}}$

b $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10}.27^{24}}$

c $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

d $\frac{(49^{8})^{10}}{7^{100}.343^{20}}$

Opgave 17

Op 1 januari 2010 heeft stad A 250000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 2,5% per jaar. Op 1 januari 2008 heeft stad B 300000 inwoners. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 5000 per jaar.

a Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.

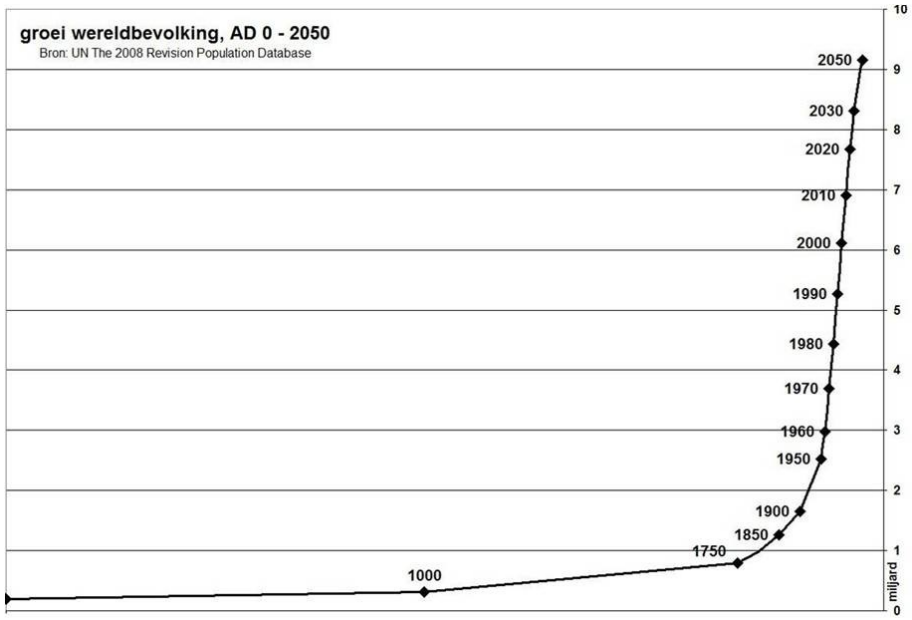
b Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.

c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2012 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.

d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking. Erg beklemmend, nietwaar?



Figuur 5.6

Op het eerste gezicht lijkt dit wel om exponentiële groei te gaan.
Maar hoe constant de groeifactor is staat nog te bezien...

Opgave 18

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Laat zien dat deze groeifactor ongeveer klopt met het aantal mensen in 1980.

c Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

d B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

e Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

f Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 19

Het is ook wel boeiend om twee werelddelen, of twee regio's te vergelijken. Daarvoor is genoeg informatie voorhanden, bijvoorbeeld via **Wikipedia, wereldbevolking**.

a Vergelijk bijvoorbeeld de regio's Zuid-Azië en Europa met elkaar.

Een ander boeiend aspect is de hoeveelheid leefruimte.

b Stel je eens voor dat je zoveel mogelijk mensen op 1 m^2 grond zou kunnen proppen (maar niet stapelen), zou de wereldbevolking dan in de provincie Utrecht passen?

Testen

Opgave 20

Voor een bepaald type woning betaal je een huur van € 950,00 per maand. Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

a Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.

b Maak een tabel waarin je kunt zien hoe lang het duurt tot de huur hoger wordt dan € 1300,00 per maand.

c Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar? Rond af op twee decimalen.

d Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.

e Bereken het groeipercentage per twintig jaar.

f Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 21

Schrijf als één macht: $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{16}}$.

Opgave 22

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12 procent in waarde dalen.

a Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen.

b Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?

c Bereken het groeipercentage per vijf jaar.

d Met welk getal moet je de waarde van de aandelen na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.

e Bereken het groeipercentage per tien jaar.

5.2 Rekenregels voor machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met negatieve en/of gebroken exponenten;
- alle rekenregels voor machten gebruiken.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten $t = 0$ is om 12:00 uur.

a Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 11:00 uur?

b Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 10:00 uur?

c Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd?

d Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Uitleg 1

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt de formule: $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

tijd t (h)	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën B	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 5.1

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur: $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaaltje hebben gezeten. Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (dus vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t. Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$; enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af, dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op! Nu mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 174**.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal milligram bacteriën om 8:00 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Opgave 2

Je ziet een deel van een tabel die een hoeveelheid bacteriën B beschrijft na tijd t (uur). De hoeveelheid wordt beschreven met de formule $B = 500 \cdot 2^t$. Vul de tabel verder in.

tijd (h)	-3	-2	-1	0	1	2	3
hoeveelheid bacteriën				500			

Tabel 5.2

Uitleg 2

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 600 \cdot 2^t$.
$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.
Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur, per kwartier, enzovoort.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?
De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$.

Je weet dat $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Blijkbaar geldt: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op! Nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 176**.

a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?

b Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 4

Gebruik de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ uit de uitleg.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per vier uur?

c Hoeveel bedraagt de groeifactor per vijf uur?

d Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier?

f Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur.

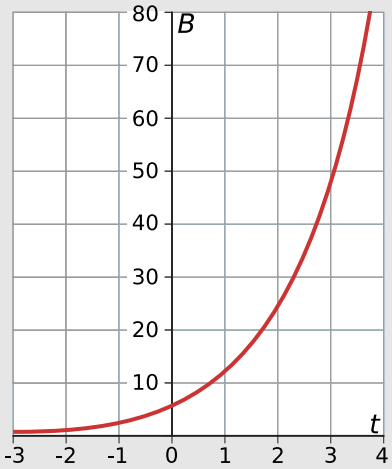
g Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na 5 uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid de hoeveelheid steeds vermenigvuldigen met de groeifactor g die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is: $g > 0$. Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden **eigenschappen van machten**.

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$



Figuur 5.1

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g, maar hier moet je voorzichtig mee zijn.

Een macht als g^a heeft voor $g > 0$ betekenis als de exponent a een positief getal, 0, een negatief getal of een gebroken getal is. Voor a mag je zelfs elk reëel getal invullen. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw. Hij vermoedde dat de groei van de wereldbevolking exponentieel was. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 5.3

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest zouden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1{,}102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1{,}102^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoen mensen N, dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1{,}005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.
In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1{,}005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.
In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 5

In zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

a Bereken het aantal mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?

b Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond af op miljoenen per jaar.

c Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2008.

d Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt: $g^{5736} = 0{,}5$.

Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0{,}5} = 0{,}5^{\frac{1}{5736}} \approx 0{,}999879$.
Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0{,}999879^t = 0{,}6$.
Deze exponentiële vergelijking los je op met een tabel of met een logaritme: $t \approx 4221$ jaar.
De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 187** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

a Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog 38% is.

Opgave 7

Bij een kernsplijting is een hoeveelheid radioactieve stof Cesium-137 vrijgekomen. De halveringstijd van deze stof is dertig jaar.

a Na hoeveel jaar is de hoeveelheid van deze stof afgenomen tot 25%?

b Bereken na hoeveel jaar de hoeveelheid nog maar 11% is.

Voorbeeld 3

Je ziet enkele herleidingen met behulp van de eigenschappen van machten.
Er geldt $g > 0$.

- $\left(\frac{1}{g}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{g^1}\right)^{-4} = \left(g^{-1}\right)^{-4} = g^4$
- $g^{\frac{2}{3}} = \left(g^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{g}\right)^2 = \sqrt[3]{g^2}$
- $g^{1,5} = g^{1+\frac{1}{2}} = g^1 \cdot g^{\frac{1}{2}} = g \cdot \sqrt{g}$
- $g^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{g^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(g^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{g^2}}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{\frac{1}{2}}$

Opgave 9

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\left(3^{-12}\right)^{\frac{1}{4}}$

b $\left(2^{2}\right)^{-3} \cdot \left(2^{-2}\right)^{-4}$

c $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

d $125^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{4} \cdot 5^{-10}$

Voorbeeld 4

Je kunt $3x \cdot \sqrt{x}$ schrijven in de vorm ax^b:

$3x \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$

Opgave 10

Schrijf in de vorm ax^b.

a $\frac{3}{2x}$

b $\frac{3}{4x\sqrt{x}}$

c $\left(4\sqrt[3]{x}\right)^2$

d $2x\sqrt{x}$

e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

f $3x^5 \cdot \left(2x^3\right)^2$

Oefenen

Opgave 11

Vereenvoudig met behulp van de rekenregels voor machten.

a $3^{-2} \cdot 3^{5} \cdot 3$

b $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{3} \cdot 4^{-4}$

c $5^{\frac{2}{3}}$

d $1000^{\frac{1}{3}}$

e $2^{-2} \cdot 4^{-1}$

f $\left(3^{2}\right)^{-1}$

Opgave 12

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1{,}1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?

b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?

c Hoe groot is de groeifactor per jaar?

d Hoe groot is het groeipercentage per maand?

e Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 13

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven, voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Opgave 14

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

a x^{-1}

b $x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^{\frac{3}{4}}$

d $x^{1\frac{3}{4}}$

e $3x^{-1{,}5}$

f $\frac{1}{2}x^{-2{,}75}$

Opgave 15

Herleid tot de vorm ax^b.

a $\frac{2}{\sqrt{x}}$

b $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

c $\frac{1}{3\cdot\sqrt[4]{x}}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{x}$

e $\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}$

f $\left(3x\cdot\sqrt{x}\right)^3$

Opgave 16

Stel je een gebied voor met daarin een vulkaan en twee steden: Árborg en Eyrarbakki. Stel de stad Árborg heeft in 2020 45000 inwoners, dit aantal neemt per jaar toe met een factor 1,03. Het inwonertal van Eyrarbakki is dan 55000 en heeft een verdubbelingstijd van dertig jaar.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar van Eyrarbakki? Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de verdubbelingstijd van het inwonertal van Árborg?

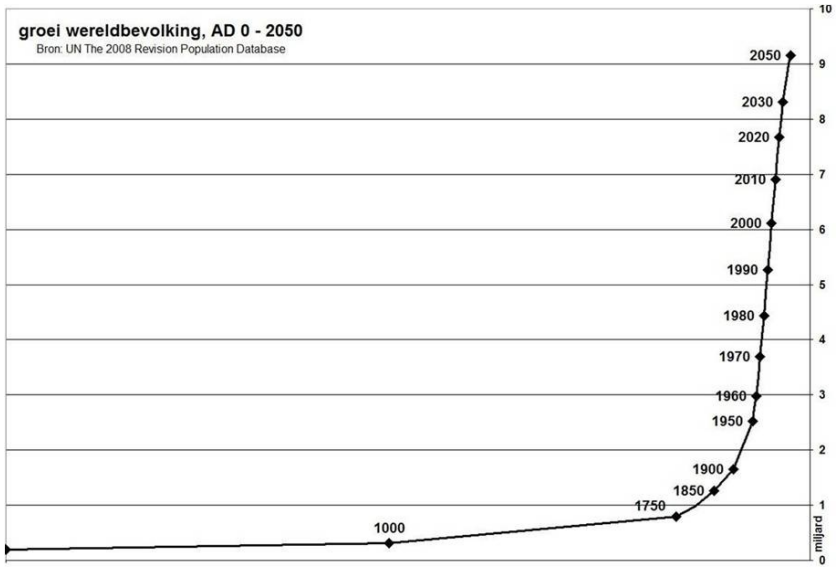
c Geef zowel van Árborg als van Eyrarbakki een formule waarmee je het bevolkingsaantal B kunt berekenen als functie van t (het aantal jaren).

d In het jaar 2020 barst de vulkaan uit. Helaas blijft dit voor Árborg niet zonder gevolgen: een kwart van de bevolking komt om het leven. Na de uitbarsting groeit de bevolking weer zoals voor de vulkaanuitbarsting. Wanneer heeft Árborg weer het oude aantal inwoners?

e Welk van deze twee steden heeft in het jaar 2150 de meeste inwoners?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking.



Figuur 5.2

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

Opgave 17

Bekijk de gegevens over de groei van de wereldbevolking.

a Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.

b Vanaf het begin van de jaartelling is de bevolking al meer dan vier keer verdubbeld in aantal. In welke tijdvakken vonden deze verdubbelingen plaats?

c Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Testen

Opgave 18

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten, zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15 procent toe te nemen.

a Geef een formule waarmee je de concentratie algen A in liter per 10 gram algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.

b Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15 procent per week. Hoe hoog was de concentratie algen drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.

c Wat was de concentratie algen twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.

d Na hoeveel dagen was de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 19

Bereken zonder rekenmachine.

a $3^{-5} \cdot 9^2$

b $2^{-10} \cdot \left(2^3\right)^5$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

d $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 20

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm ax^n.

a $3x^5 \cdot \left(2x^3\right)^2$

b $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{x^7}$

c $4x \cdot \sqrt[4]{x^2}$

5.3 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen;
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

a Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?

b Heeft de functie f extremen?

c Heeft de grafiek van f asymptoten?

d Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Met GeoGebra of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Deze functies komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Voor positieve waarden van b geldt:

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x-as is een horizontale asymptoot.
- Er zijn geen extremen.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden.

Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b.

Opgave 1

Met GeoGebra of een grafische rekenmachine kun je de grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Waarom heeft de grafiek van f nu geen asymptoot?

c Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

d Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f? Is de grafiek stijgend of dalend?

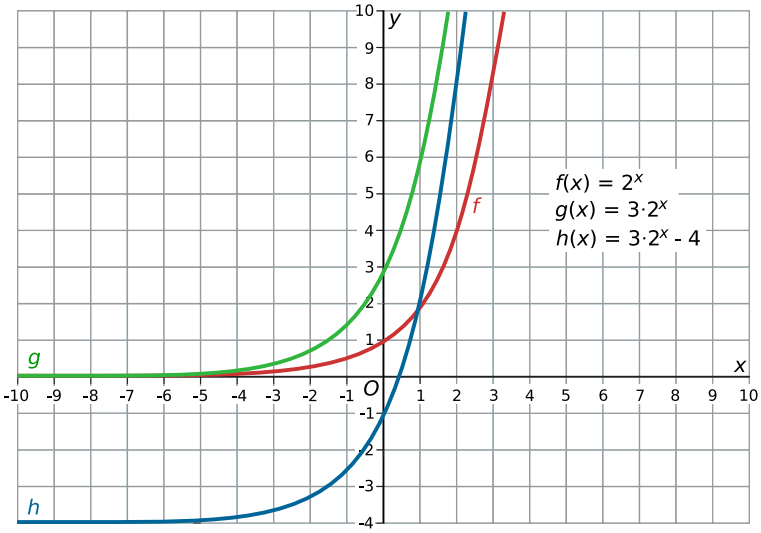
Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 5.1

Alle functies die hieruit door vermenigvuldiging ten opzichte van de assen of een translatie kunnen ontstaan, hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ in te vullen.
  De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen;
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ in te vullen.
  De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek - 4 eenheden in de y-richting te verschuiven (een translatie van - 4 in de y-richting);
- $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} + 4$ kun je herleiden tot $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^{2x} - 4$.
  Dat wordt $f(x) = 1{,}5 \cdot \left(2^2\right)^x - 4$ en dus $f(x) = 1{,}5 \cdot 4^x - 4$.
  De grafiek ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 4$ en $d = -4$ in te vullen. Dus ontstaat de grafiek uit die van $y = 4^x$ door in de y-richting met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie in de y-richting van - 4 eenheden uit te voeren.

Opgave 3

Het gaat in **Uitleg 2 op pagina 194** over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 4

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12$.

a Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?

c Bepaal het nulpunt van de grafiek van f.

d Dit nulpunt kun je ook algebraïsch vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële functies

De grafiek van de **standaard exponentiële functie** $y = g^x$ heeft een aantal karakteristieken.

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- De x-as is de horizontale asymptoot.
- Als $g > 1$, is de grafiek stijgend.
- Als $0 < g < 1$, is de grafiek dalend.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

Elke **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
Hierbij moet je soms het functievoorschrift herleiden met de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ een aantal **transformaties** toe te passen:

- vermenigvuldiging in de y-richting met factor b;
- verschuiving in de y-richting met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door de **exponentiële vergelijking** $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Dat kan met behulp van GeoGebra of een grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

In een stedelijk gebied liggen twee steden: stad A met 750000 inwoners en stad B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In stad A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in stad B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren heeft stad B meer inwoners dan stad A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

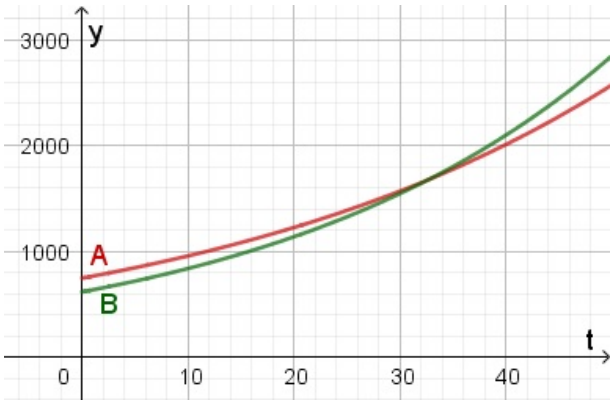
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is 1,025. Die van het aantal inwoners van B is 1,031. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van stad A voorstelt, en B dat van stad B, beide in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1{,}025^t$;
- $B(t) = 620 \cdot 1{,}031^t$.

De bijbehorende grafieken maak je met GeoGebra of een grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Neem voor het venster $[0{,}50] \times [0{,}3000]$. Ga na dat je $t \approx 32{,}6138$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 heeft stad B meer inwoners dan stad A als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 5.2

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 196**.

a Waaraan zie je dat B harder groeit dan A?

b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

c Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B, maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. Wanneer is C even groot als A?

Opgave 6

In een meer is op een bepaald moment een schadelijke stof aanwezig met een concentratie van 40 mg/L. De concentratie vervalt exponentieel met 20% per dag.

a Leg uit waarom de groeifactor per dag 0,80 is.

b Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld.

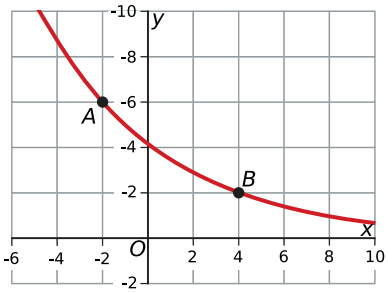
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.

Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 5.3

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methodes om dit te doen:

Methode 1:
Eerst de groeifactor g bepalen.

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}83$.

Nu kun je b berekenen.

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \\ b \cdot 0{,}83^4 &= 2 \\ b \cdot 0{,}4746 &= 2 \\ b &= \frac{2}{0{,}4746} \approx 4{,}21 \end{aligned}$$

Conclusie: $f(x) \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$

Methode 2:
Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$

De laatste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$
Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.

Opgave 7

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $(10,200)$ en $(14,350)$.
Stel het functievoorschrift van f op. Rond g af op twee decimalen en b op een geheel getal.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door transformatie ontstaat uit een standaardfunctie van de vorm $y = g^x$ en los algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$
$g(x) = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16$

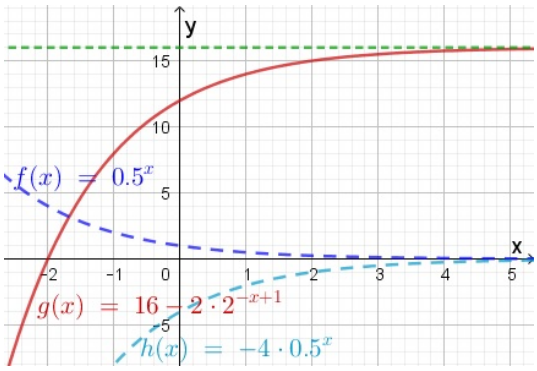
$g(x) = -4 \cdot \left(2^{-1}\right)^x + 16$, dus $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$.

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$ ontstaat door transformatie van $y = 0{,}5^x$ in twee stappen.

- vermenigvuldiging in de y-richting met -4;
- translatie in de y-richting met 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft: $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$. Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus: $2^4 = 2^{-x+2}$. Dit betekent dat: $4 = -x + 2$, zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$



Figuur 5.4

Opgave 8

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $y = 2^x$ laten ontstaan.

a Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.

Je kunt ook eerst het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.

b Laat zien hoe deze herleiding gaat.

c Beschrijf nu hoe je door transformatie in twee stappen de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

d Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f. Geef de coördinaten van dit punt.

e Los op $f(x) > 0$ op.

Opgave 9

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. Je kunt bijvoorbeeld de rekenregels voor machten gebruiken. Bekijk dit voorbeeld van een algebraïsche oplossing.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} \\
4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 8\sqrt{2} \\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-x} &= 2\sqrt{2} \\
\left(2^{-1}\right)^{1-x} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
2^{x-1} &= 2^{1\frac{1}{2}} \\
x - 1 &= 1\tfrac{1}{2} \\
x &= 2\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

a Los algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$

b Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$

Opgave 10

Los op: $40 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^x + 100 \geq 110$.

Vereenvoudig de bijbehorende vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik daarna GeoGebra of een grafische rekenmachine. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 210 \cdot 2{,}5^x$.

a Bereken $f(3)$ en $f(-5)$.

b Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f.

c Los op: $f(x) = 1200$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Los op: $f(x) < 2345$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?

b Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?

c Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014. Rond de groeifactor af op drie decimalen.

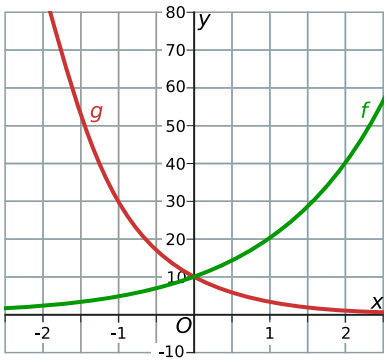
d Wat is het bereik van de functie bij c vanaf 6 januari 2014?

e In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 13

Bekijk de grafieken van deze twee exponentiële functies. Beide grafieken gaan door (0,10).

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 5.5

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x - 60$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$?

b Bereken het nulpunt van f in één decimaal nauwkeurig.

c Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?

d Los algebraïsch op $f(x) = 20$.

Opgave 15

Los algebraïsch op.

a $2^x = 2\sqrt{2}$

b $4^x = 8^{x+2}$

c $9^{2x} = \sqrt{3}$

d $2^{2x-1} = 32$

e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 16

Een patiënt krijgt via een infuus een vloeibaar medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in milligram van het medicijn dat na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.

c Maak duidelijk dat $A(t)$ niet exponentieel toeneemt.

d Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen? Geef je antwoord in hele minuten.

Opgave 17

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x-3} - 1$.

a Herleid beide functies tot de vorm $y = b \cdot g^t + d$.
Hoe ontstaan de grafieken van f en g door transformatie uit de grafieken van de bijpassende standaardfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan als $x \leq 4$?

e De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

f De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D. Bereken de lengte van lijnstuk CD in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie

$K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$

beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C.
Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
Veel mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C.

Opgave 18

Na hoeveel seconden vinden veel mensen de koffie niet meer lekker?

Opgave 19

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet lekker meer is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie nog te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?

c Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?

d Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0{,}83^t$ laten ontstaan door transformatie?

e Hoelang duurt het voordat de koffie de temperatuur van 21 °C bereikt?

f Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $T(t)$?

g De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur in de woonkamer is?

Testen

Opgave 20

Gegeven is de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van de functie $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ te krijgen uit de functie van g.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?

c Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f?

d Bepaal het bereik van f.

e Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

f Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 21

De grafiek van een exponentiële functie f van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten $(2{,}80)$ en $(8{,}200)$.

Stel een bijpassend functievoorschrift op. Rond g af op drie decimalen en rond b af op helen.

Opgave 22

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Herleid de functie g naar de vorm $g(x) = b \cdot g^x + c$.

b Geef het bereik van de functies f en g.

c Los op $f(x) < g(x)$. Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

5.4 Machtsfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsfunctie is en de karakteristieken van machtsfuncties bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met machtsfuncties oplossen;
- werken met wortelfuncties en gebroken functies als voorbeelden van machtsfuncties.

Voorkennis

- de begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig met een macht;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De standaard machtsfuncties hebben de vorm $y = x^r$. Neem eerst voor r een geheel positief getal. Bekijk de bijbehorende grafieken met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.

a Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Welke waarde heeft dat minimum?

b Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn? Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.

Bekijk de grafiek van $y = x^r$ voor negatieve gehele r.

c Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $y = x^r$ overal dalend is?

d Waarom hebben de grafieken die je bekijkt allemaal twee asymptoten? Welke twee?

Neem gebroken getallen voor r.

e Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $r = \frac{1}{2}$ en die bij $r = \frac{1}{3}$?

f Bekijk de grafiek bij $r = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

g Als r een geen geheel getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

Met GeoGebra of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = a \cdot (x - p)^r + q$. Deze functies heten machtsfuncties.

Voor gehele positieve waarden van r krijg je ofwel grafieken met precies één minimum of maximum (als r even is), ofwel altijd stijgende of altijd dalende grafieken (als r oneven is).

De rekenregels voor machten maken dat wortelfuncties en gebroken functies vaak als machtsfunctie kunnen worden geschreven, bijvoorbeeld:

- $y = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$

  waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{-1}$ door in de x-richting met 2 te verschuiven, dan in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y-richting met 4 te verschuiven.
- $y = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$

  waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$ door in de x-richting met 2 te verschuiven, dan in de y-richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y-richting met 4 te verschuiven.

Dit zijn beide machtsfuncties, maar hun grafieken zien er zeer verschillend uit.

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. Je zegt wel dat de inverse (omgekeerde) bewerking van een machtsfunctie een machtsfunctie is met de omgekeerde exponent.

Opgave 1

Het gaat in de **Uitleg op pagina 203** over machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot (x-p)^r + q$. De grafieken van deze functies ontstaan door transformatie van de grafiek van de standaard machtsfunctie $y = x^r$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 0{,}5(x-3)^2 + 1$.
Welke transformaties moet je op de standaard machtsfunctie toepassen om de grafiek van f te krijgen?
Welke uiterste waarde (maximum of minimum) heeft f?

b Bekijk de grafiek van $g(x) = 0{,}5(x-3)^3 + 1$.
Heeft de grafiek van g uiterste waarden?

Bekijk de grafieken van $y = x^r$ met $r = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$.

c Voor welke waarden van r heeft de grafiek uiterste waarden?

d Hoe ziet de grafiek er uit als $r = 0$? En als $r = 1$?

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

b Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welke asymptoten heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{(x+1)^2}$.

c Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

d Welke asymptoten heeft de grafiek van g?

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$.

a Welk domein heeft de grafiek van f?
En welk bereik?

b Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welk domein en bereik heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

c Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.

d Welke asymptoten heeft de grafiek van g? En welk domein en bereik?

Theorie en voorbeelden

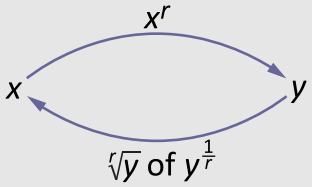
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Functies van de vorm $g(x) = a \cdot (x-p)^r + q$ heten **machtsfuncties**. Hun grafieken kunnen ontstaan uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^r$. Voor die standaard machtsfunctie geldt:

- Als r geheel, positief en even is, dan heeft de functie een minimum van 0 bij $x = 0$.
- Als r geheel, positief en oneven is, dan is de grafiek stijgend en gaat hij door $(0,0)$.
- Als r geheel, negatief is, dan heeft de functie beide assen als asymptoten.
- Als r niet geheel is, dan zijn alleen positieve waarden van x toegestaan tenzij r een breuk met een oneven noemer is.

Veel wortelfuncties en veel gebroken functies zijn voorbeelden van machtsfuncties.



Figuur 5.1

De exponent r kan elke waarde aannemen.
Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. De **inverse bewerking** van een machtsfunctie is een machtsfunctie met de omgekeerde exponent.

Voorbeeld 1

In een slingeruurwerk zit een gewicht dat heen en weer slingert.

De slingertijd kun je berekenen met de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is:

- T de slingertijd in s
- l de lengte van de slinger in m
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

Laat zien dat $T(l)$ een machtsfunctie is.
Bereken bij welke lengte van de slinger de slingertijd 1 s is.

Figuur 5.2

Antwoord

Herleid de formule: $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{9{,}8}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}01 \cdot l^{\frac{1}{2}}$.

Je ziet nu dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit de standaardmachtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Om te berekenen bij welke lengte de slingertijd 1 s is, moet je oplossen: $T(l) = 1$.

$2{,}01 \cdot l^{\frac{1}{2}} = 1$ geeft $l^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}50$ en dus $l \approx 0{,}50^2 \approx 0{,}25$ m.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 206** dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit die van een standaard machtsfunctie.

a Welke transformatie moet je dan toepassen?

b Welk domein en bereik heeft de functie $T(l)$?

c In het voorbeeld wordt ook een vergelijking met een macht opgelost.
Laat zien dat hier een macht wordt weggewerkt door de omgekeerde macht te gebruiken.

d Bij $T = 1$ s hoort een lengte van ongeveer 0,25 m.
Wordt de slingertijd ook twee keer zo groot als de lengte twee keer zo groot wordt?

Opgave 5

De zwaartekracht is de aantrekkingskracht tussen twee massa's en is gegeven door de formule

$$F = g \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Hierin is:

- F de zwaartekracht in N
- m de massa in kg
- r de afstand tussen beide massa's in m
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

Neem aan dat $m_1 = 10$ kg en $m_2 = 15$ kg.

a Laat zien dat $F(r)$ een machtsfunctie is.

b Welk domein en bereik heeft de functie $F(r)$?

c Los op in één decimaal nauwkeurig: $F(r) \geq 294$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x-4)^3 - 10$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 20$.

Beschrijf welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^3$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y_1 = x^3$. Eerst 4 verschuiven in de positieve x-richting (dus t.o.v. de y-as), dan vermenigvuldigen met 2 in de y-richting en tenslotte 10 verschuiven in de negatieve y-richting.

Om $f(x) = 20$ op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} 2(x-4)^3 - 10 &= 20 \\ 2(x-4)^3 &= 30 \\ (x-4)^3 &= 15 \\ x-4 &= 15^{\frac{1}{3}} \\ x &= 15^{\frac{1}{3}} + 4 \end{aligned}$$

Je vindt dus $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6{,}47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x+1)^4 - 5$.

a Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^4$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.

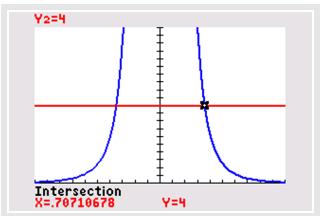
b Los op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 3

Los op in twee decimalen nauwkeurig: $\frac{2}{(x+1)^4} > 4$.

Antwoord

Omdat $f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} = 2 \cdot (x+1)^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie.
Maak eerst de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$.



Figuur 5.3

Los nu op: $2 \cdot (x+1)^{-4} = 4$.
Oplossing: $x = -1 + 2^{-\frac{1}{4}} \approx -1{,}159 \vee x = -1 - 2^{-\frac{1}{4}} \approx -1{,}841$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-1{,}84 < x < -1 \vee -1 < x \leq -1{,}16$.

Merk op dat je $x = -1$ uitzondert omdat voor deze waarde de functie f niet bestaat.

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd ook rekening met het domein van de verschillende functies.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} < 27$

d $\frac{1}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?

b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

d Schrijf domein en bereik van f op.

e Los op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 4

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Stel een formule op voor Z afhankelijk van m.

soort	m (kg)	Z (L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 5.1

Antwoord

Deze machtsfunctie heeft de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin c en p nog te berekenen zijn.

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- Paard: $Z = 85{,}4$ en $m = 605{,}0$ geeft: $85{,}4 = c \cdot 605{,}0^p$.
- Muis: $Z = 0{,}19$ en $m = 0{,}20$ geeft: $0{,}19 = c \cdot 0{,}20^p$.

Met de balansmethode vind je dan: $\frac{85{,}4}{0{,}19} = \frac{605{,}0^p}{0{,}20^p}$ en dus $449{,}47 \approx 3025^p$.

Zo'n exponentiële vergelijking los je met de GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine, of met logaritmen op. Je vindt: $p \approx 0{,}76$.

En nu vind je door invullen ook $c \approx 0{,}66$. Het resultaat komt dicht bij de door Kleiber gevonden formule $Z = 0{,}7 \cdot m^{0{,}75}$.

Opgave 9

Bestudeer **Voorbeeld 4 op pagina 208** over de formule van Kleiber. Er wordt een formule opgesteld voor het verband tussen het zuurstofverbruik Z in L en de massa m in kg bij zoogdieren. Het verband is recht evenredig. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de gegevens van de muis en het paard.

a Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

b Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is: $y = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$

a Wat is het domein en bereik van deze machtsfunctie?

b Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Heeft de grafiek van deze functie een asymptoot?

d Los op: $2x^{\frac{1}{4}} \leq 10$

Opgave 11

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de marketingafdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro. De verkoop per dag varieert van 100 tot 1000 kg.

a Schrijf de formule zo, dat blijkt dat de verkoop per dag recht evenredig is met de macht van de prijs.

b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft? Hoe kun je dat aan de grafiek direct zien?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

a Leg uit dat de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformatie van de grafiek $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

b Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek van f te krijgen?

c Schrijf domein en bereik van f op.

d Los op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 13

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.

b Geef het domein en bereik van zowel f als g.

c Los op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien, dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf bijbehorende transformaties op.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Schrijf domein en bereik van f op.

d Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 15

Het huidoppervlak is het buitenoppervlak van het met huid beklede lichaam. Er bestaan diverse formules voor. Eén daarvan is de formule van Dubois:

$H = 0{,}007184 \cdot M^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$

Hierin is:

- H de huidoppervlakte in m^2
- M het lichaamsgewicht in kg
- L de lichaamslengte in cm

a Bereken met deze formule de huidoppervlakte van een persoon van 1,80 m met een gewicht van 75 kg.

b Welke formule geldt voor de huidoppervlakte van iemand die 1,80 m lang is?

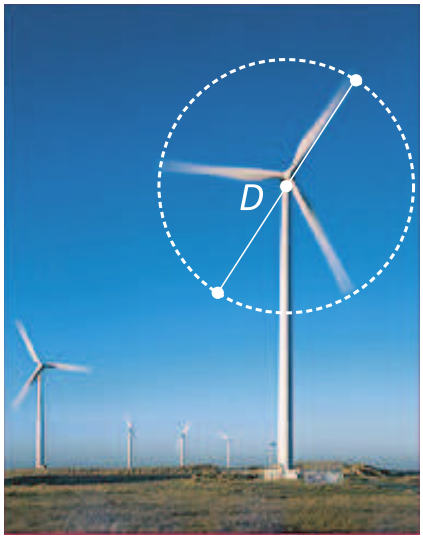
c Iemand van 1,80 heeft na een vreetzame winter zijn lichaamsgewicht zien toenemen van 75 kg naar 80 kg. Met hoeveel procent is zijn huidoppervlakte toegenomen?

Het lijkt logisch dat M recht evenredig is met L^3 omdat M afhankelijk is van het lichaamsvolume.

d Laat zien dat uit dit gegeven en de gegeven formule volgt dat H recht evenredig is met L^2.

Toepassen

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kW) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:
$P = c \cdot m \cdot v^2$



Figuur 5.4

Hierin is P het vermogen in kilowatt (kW), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is in kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 16

Bestudeer de gegevens van de windmolen. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Kun je een manier bedenken om dit rekenmodel voor het vermogen van een windmolen te testen?

Opgave 17

Van een bepaalde windmolen is door metingen bepaald dat $C \approx 0{,}0013$.
Deze windmolen heeft wieken met een lengte van 10 m.

a Welke formule geldt voor het vermogen dat deze windmolen genereert afhankelijk van de windsnelheid?

b Hoeveel vermogen wekt deze molen op bij een windsnelheid van 10 m/s?

c Bij welke windsnelheid bedraagt het opgewekte vermogen 300 kW?

d De windmolen is alleen in gebruik bij windsnelheden vanaf 3 tot 20 m/s.
Welke vermogens kan hij opleveren?

e Als de windsnelheid verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?

f Als de wieklengte verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?

Testen

Opgave 18

Geef van de volgende machtsfuncties

- het domein en het bereik;
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is;
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing);
- de asymptoten (voor zover van toepassing).

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x+3)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x-4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x+1)^3 > 20$

e $5 + 2\sqrt{x-3} < 20$

5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en machten** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor
- rekenregels voor machten
- exponentiële functie — transformatie
- machtsfunctie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei een groeifactor bepalen en daarmee een bijpassende formule maken
- de rekenregels voor machten toepassen
- de karakteristieken van exponentiële functies uit het functievoorschrift afleiden — exponentiële functie opstellen vanuit voldoende gegevens
- de karakteristieken van machtsfuncties uit het functievoorschrift afleiden — gebroken functies en wortelfuncties herleiden naar machtsfuncties

Testen

Opgave 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2010 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor g per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2010.

c Hoelang duurt het voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is als de groei zo doorgaat?

d Hoeveel passagiers waren er in 2007?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar? Rond af op drie decimalen.

f Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartaal? Rond af op drie decimalen.

Opgave 2

Geef het domein, bereik en de asymptoot van elk van deze functies.

a $f(x) = 400 + 50 \cdot 2^{x-10}$

b $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 40$

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 25$

c $300 \cdot 1{,}5^{2x-4} > 675$

Opgave 4

Een doorzichtig kunststof absorbeert een deel van het licht dat erdoorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per centimeter kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte? Rond af op een decimaal.

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen? Rond af op één decimaal.

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof? Rond af op drie decimalen.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12$.

a Schrijf de functie in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je toepassen?

c De grafiek van de exponentiële functie $h(x) = b \cdot g^x$ snijdt de grafiek van f in $A(-1,y)$ en gaat door het punt $(2,5)$. Stel de formule op van h. Rond g af op drie decimalen en b op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6

De functies f en g zijn machtsfuncties: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6-x}}$.

a Welk domein en welk bereik heeft functie f?

b Laat zien, dat g een machtsfunctie is.
Welk domein en welk bereik heeft functie g?

c Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 7

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$ Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

Toepassen

Opgave 8: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium- 224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2010 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot er 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 9: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200.000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 5.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert.

Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2{,}1 - 1{,}9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.

b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.

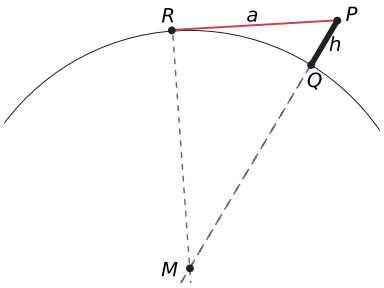
c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.

d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

Opgave 10: Kijkafstand

De kijkafstand op aarde is de grootste afstand waarop je nog een punt op aarde kunt zien als je zelf op een totaal kale aarde staat.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 5.1

a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

c Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

d Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

6

Logaritmen

6.1 Logaritmen 218
6.2 Logaritmische functies 226
6.3 Logaritmische vergelijkingen 233
6.4 Logaritmische schalen 240
6.5 Totaalbeeld 249

6.1 Logaritmen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

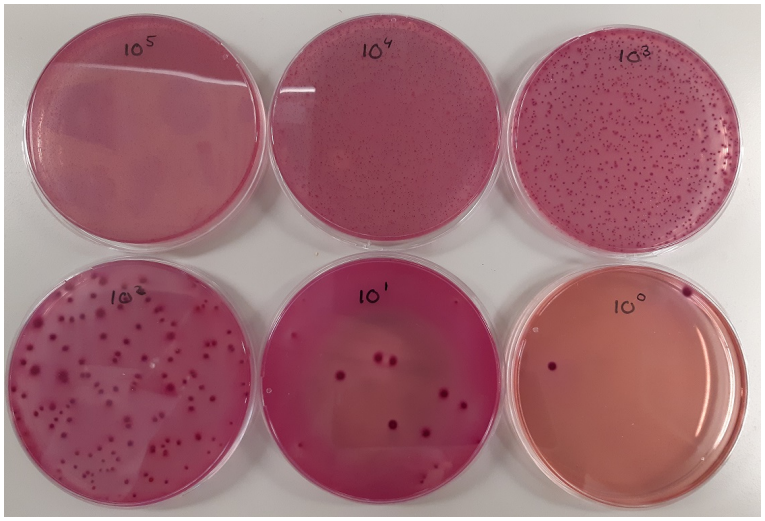
- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.
Bekijk de voedingsbodem waarbij het monster 10^2 keer is verdund, omdat het aantal kolonies daarop goed is te tellen. Bij het ontstaan van de kolonies groeit het aantal bacteriën in een kolonie exponentieel. Voor de exponentiële groei van aantal bacteriën geldt daarin $B = 8^t$ waarin B het aantal bacteriën is en t de tijd in uren.



Figuur 6.1

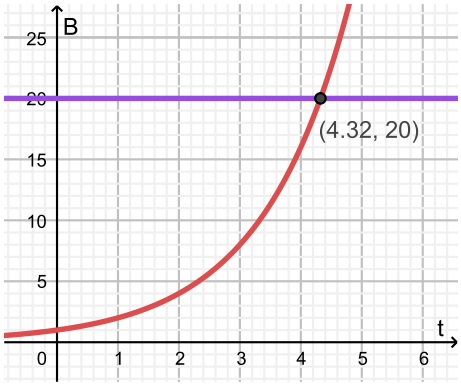
Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) is het aantal bacteriën in een kolonie uitgegroeid tot 6000?

Uitleg 1

Bekijk de applet: logaritme

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 120 bacteriën?
$6 \cdot 2^t = 120$ geeft: $2^t = 20$
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 4{,}32$.
Dit antwoord is afgerond.
De exacte oplossing schrijf je als: $t = {}^2\log(20)$.
Dit is de logaritme van 20 met grondtal 2.

Het is ook de tijd waarin de hoeveelheid bacteriën 20 keer zo groot is geworden.



Figuur 6.2

Wil je bijvoorbeeld weten hoeveel de verachtvoudigingstijd van deze hoeveelheid bacteriën is, dan moet je oplossen: $2^t = 8$. De oplossing is $t = {}^2\log(8)$. Met de grafiek vind je dan precies $t = 3$.
Dat komt omdat $8 = 2^3$.

Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in **Uitleg 1 op pagina 219**.

a Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 60 is.
Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.

b Waarom is het getal dat je bij a hebt gevonden de vertienvoudigingstijd van deze exponentiële groei?

c Schrijf de verdrievoudigingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd in twee decimalen nauwkeurig.

d Schrijf de verdubbelingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd.

e Bereken $t = {}^2\log(16)$.
Leg uit welke betekenis het antwoord heeft.

Opgave 2

Een andere kolonie bacteriën groeit volgens de functie $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$.

a Bereken de verdubbelingstijd bij deze exponentiële groei. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken op dezelfde manier de verdrievoudigingstijd en de verzesvoudigingstijd.

c Vergelijk de antwoorden bij a en b. Valt je iets op?

d Waarom is ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log\left(2^2\right)$?

e Waarom is $3 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log\left(2^3\right)$?

Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$.
Hierin is B de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren.

De tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt volgt uit $1{,}5^t = 2$ en is dus $t = {}^{1,5}\log(2) \approx 1{,}71$.
De verdrievoudigingstijd is ${}^{1,5}\log(3) \approx 2{,}71$ jaar.
De verzesvoudigingstijd is ${}^{1,5}\log(6) \approx 4{,}42$ jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je ook door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen:
${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log(6)$
Ofwel: ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log(2 \cdot 3)$
Als je twee logaritmen optelt, moet je de getallen waarop ze werken vermenigvuldigen.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1,5}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.
${}^{1,5}\log(8) \approx 5{,}13$ en $3 \cdot {}^{1,5}\log(2) \approx 5{,}13$
Er geldt: ${}^{1,5}\log\left(2^3\right) = 3 \cdot {}^{1,5}\log(2)$.
Dit geldt ook voor andere grondtallen en andere getallen.

Deze laatste eigenschap kun je gebruiken om op een rekenmachine een logaritme uit te rekenen met de log-knop. Deze knop werkt namelijk met grondtal 10, een soort van standaardgrondtal van een logaritme dat je zelfs niet opschrijft: $\log(2) = {}^{10}\log(2)$.
Als je $1{,}5^t = 2$ moet oplossen, kun je ook met grondtal 10 werken:

$1{,}5^t = 2$ geeft $\log\left(1{,}5^t\right) = \log(2)$

Nu kun je $\log\left(1{,}5^t\right)$ schrijven als $t \cdot \log(1{,}5)$.

De vergelijking wordt dan $t \cdot \log(1{,}5) = \log(2)$ en dus is $t = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)}$.

En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: $t = {}^{1,5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)} \approx 1{,}71$.

Dit werkt met elk toegestaan grondtal.

Opgave 3

In **Uitleg 2 op pagina 220** zie je voorbeelden van enkele eigenschappen van logaritmen.

a Laat zelf zien dat de verdubbelingstijd plus de verviervoudigingstijd hetzelfde is als de verachtvoudigingstijd.
Schrijf dit ook met logaritmen op.

b Schrijf als één logaritme: ${}^{1,5}\log(5) + {}^{1,5}\log(10)$.

c Schrijf als één logaritme: ${}^{1,5}\log(6) - {}^{1,5}\log(2)$.

d Leg uit waarom $5 \cdot {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log\left(3^5\right)$.

Opgave 4

In **Uitleg 2 op pagina 220** wordt de vergelijking $1{,}5^t = 2$ opgelost met behulp van de 10-logaritme.

a Ga na dat inderdaad ${}^{1,5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}5)} \approx 1{,}71$.

b Los de vergelijking $4 \cdot 1{,}5^t = 100$ op met behulp van de 10-logaritme. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:

$x = {}^{g}\log(y)$ is de oplossing van $g^x = y$.

Uit de definitie van logaritme volgt dat g^x en ${}^{g}\log(x)$ elkaars terugrekenfunctie zijn. Er geldt dan ook:

${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$

De logaritme ${}^{g}\log(y)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$
- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

Het grondtal 10 laat je weg: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.

${}^{g}\log(a)$ kun je met de rekenmachine berekenen: ${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.

Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan rechts onder de log: $\log_g(a)$

Voorbeeld 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

Over hoeveel jaar is dat aantal gestegen tot meer dan 60000 passagiers per jaar?

Antwoord

Het aantal passagiers is $P(t) = 43000 \cdot 1{,}02^t$ met P het aantal passagiers en t de tijd in jaren.

Je moet oplossen: $43000 \cdot 1{,}02^t = 60000$.

$$\begin{aligned} 43000 \cdot 1{,}02^t &= 60000 \\ 1{,}02^t &= 1{,}395... \\ t &= {}^{1{,}02}\log(1{,}395...) = \frac{\log(1{,}395...)}{\log(1{,}02)} \approx 16{,}8 \end{aligned}$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

17 jaar na 2018 zijn er voor het eerst meer dan 60000 passagiers op dit vliegveld.
Dat is in 2035.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 221**.

a Bereken na hoeveel jaar het aantal passagiers per jaar de 100 . 000 gaat overstijgen als de groei zo door gaat.

b Bereken de verdubbelingstijd van de groei van het jaarlijkse aantal passagiers in maanden nauwkeurig.

Opgave 6

Een hoeveelheid neemt per dag met 20% af.

a Bepaal de bijbehorende groeifactor.

b Na hoeveel dagen is deze hoeveelheid gehalveerd?
Stel een vergelijking voor dit probleem op en los deze vergelijking op met behulp van logaritmen.

Voorbeeld 2

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^{3}\log(10) + {}^{3}\log(20) = {}^{3}\log(200)$
- $5 \cdot {}^{3}\log(2) = {}^{3}\log(32)$

Antwoord

Bij deze exponentiële groei hoort een groeifactor van 3.

${}^{3}\log(10)$ is de vertienvoudigingstijd en ${}^{3}\log(20)$ is de vertwintigvoudigingstijd.
Als je eerst de hoeveelheid met 10 en vervolgens met 20 vermenigvuldigt, heb je de hoeveelheid met $10 \cdot 20 = 200$ vermenigvuldigd.

${}^{3}\log(2)$ is de verdubbelingstijd.
Als je de verdubbelingstijd vijf keer neemt, heb je vijf keer met 2 vermenigvuldigd.
De hoeveelheid wordt dan met $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ vermenigvuldigd.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 222**.

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(6) = {}^{1,5}\log(12)$
- $4 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log(16)$

Opgave 8

Bereken de logaritmen en controleer of de uitdrukkingen waar zijn.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(9) = {}^{3}\log(81)$

Opgave 9

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b $\log(125) + 3\log(2)$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0{,}5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Voorbeeld 3

Met behulp van de eigenschap ${}^{g}\log(y) = y$ kun je bij elke exponentiële functie schrijven met het standaard grondtal 10.

Schrijf de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met het grondtal 10.

Antwoord

Je hebt een grondtal van 2.

Met de genoemde eigenschap geldt: ${}^{10}\log(2) = 2$, of korter $10^{\log(2)} = 2$.

Hiermee wordt de gegeven formule: $B(t) = 6 \cdot \left(10^{\log(2)}\right)^t = 6 \cdot 10^{\log(2) \cdot t} \approx 6 \cdot 10^{0{,}301t}$.

Opgave 10

Bekijk in hoe je een exponentiële functie kunt schrijven met het standaard grondtal 10.

a Schrijf de functie $H_A(t) = 160 \cdot 1{,}3^t$ met het grondtal 10.

b Schrijf de functie $H_B(t) = 120 \cdot 1{,}4^t$ met het grondtal 10.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $H_A(t) = H_B(t)$.

Oefenen

Opgave 11

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

a $500 \cdot 1{,}5^x = 6000$

b $0{,}5 \cdot 10^x = 2000$

c $1500 \cdot 0{,}95^t = 100$

Opgave 12

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 3 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdubbeld. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 13

Bereken met behulp van de rekenregels voor logaritmen.

a $\log(5) + \log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 14

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties?
Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 15

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.

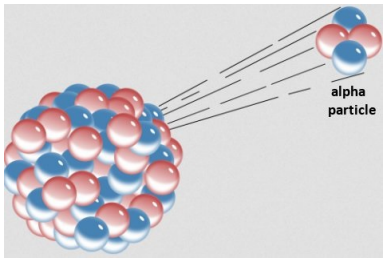
b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Stel een formule op voor het verval van de hoeveelheid natrium-24.
Schrijf deze formule ook in de vorm met standaard grondtal 10.

d Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

Toepassen

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.



Figuur 6.3 bron: Wikipedia

Een voorbeeld is U-235, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-231:

$$^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{231}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-235 is ongeveer $7{,}038 \cdot 10^8$ jaar. Het verval van U-235 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-235, dan heb je na 704 miljoen jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-231). Je kunt dus het beste de tijd in miljoenen jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,9990. En $H = 1000 \cdot 0{,}9990^t$ gram.

Opgave 16: Alfastraling

Bekijk hoe uranium-235 vervalt tot thorium-231 door alfastraling.

a Laat zien dat de halveringstijd bij een groeifactor van 0,9990 per miljoen jaar ongeveer $7 \cdot 10^8$ jaar is.

b Bereken hoe lang het duurt totdat de 1000 g U-235 gerekend in grammen volledig is omgezet in Th-231.

Opgave 17: Radium

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium- 224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg van de beschikbare 1000 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 2^x = 180$

b $1050 \cdot 0{,}98^t = 800$

Opgave 19

Vereenvoudig deze uitdrukkingen tot één logaritme.

a ${}^{2}\log(7) + {}^{2}\log(5)$

b ${}^{3}\log(51) - {}^{3}\log(17)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(3) + 3 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

6.2 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats op aarde:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Deze formule betekent dat je bijvoorbeeld in een luchtballon de hoogte kunt bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. Daarvoor bestaan apps op je telefoon. Die maken gebruik van deze formule, maar in de vorm waarin h is uitgedrukt in p.

Figuur 6.1

a Schrijf de gegeven formule zo, dat h is uitgedrukt in p.

b In de figuur zie je dat h is uitgedrukt in 'foot', een oude engelse lengtemaat.
1 foot = 0,3048 m.
Komt de figuur overeen met de formule die je bij a hebt gevonden?

Uitleg

De luchtdruk p (in hectopascal) hangt af van de hoogte h (in km) boven zeeniveau. Er geldt op zeker moment op een bepaalde plaats op aarde:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

In een luchtballon kun je hiermee de hoogte berekenen door de luchtdruk te meten.

Je schrijft dan de formule liever zo: $h = {}^{0{,}866}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

Bij beide formules kun je een grafiek maken, maar niet in één figuur.

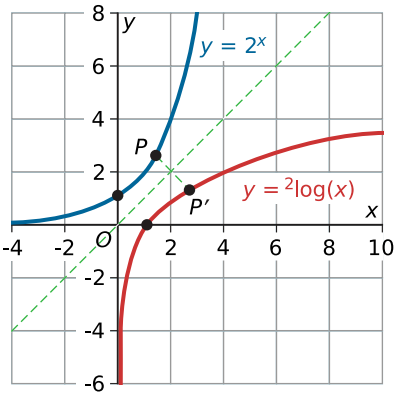
Bij de eerste formule komt p op de verticale as.
Dit is een exponentiële functie met een horizontale asymptoot.

Bij de tweede formule komt h op de verticale as.
Dit is een logaritmische functie met een verticale asymptoot.

Bekijk de applet: logaritme

Uit $y = 2^x$ volgt $x = {}^2\log(y)$.
Als je in de tweede formule x en y verwisselt kun je beide grafieken in één figuur tekenen. Ze zijn dan elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. Nu zie je dat $y = {}^2\log(x)$ een logaritmische functie is waarvan de eigenschappen het spiegelbeeld zijn van die van $y = 2^x$.

Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: een exponentiële functie kun je wegwerken met een logaritme met hetzelfde grondtal, en omgekeerd kun je een logaritmische functie wegwerken met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal.



Figuur 6.2

Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

a Maak beide grafieken.

b Het punt (4,2) ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Laat met een voorbeeld zien dat y_1 en y_2 elkaars terugrekenfunctie zijn.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.
De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van y_2?

b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $H(t) = 12 \cdot 3^t$.

a Schrijf t als functie van H.

b Voor welke waarden van t is $H > 100$?

c Voor welke waarden van H is $t > 100$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

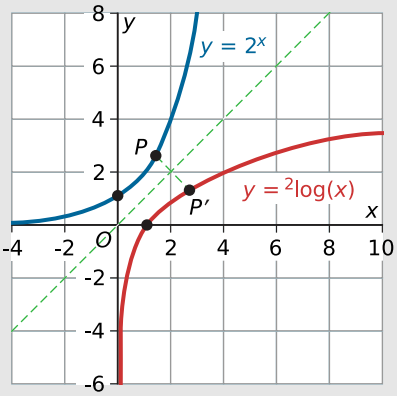
Bekijk de applet: logaritme

Een functie van de vorm $f(x) = {}^{g}\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- alleen x-waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek



Figuur 6.3

Alle functies die door transformatie uit $f(x) = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

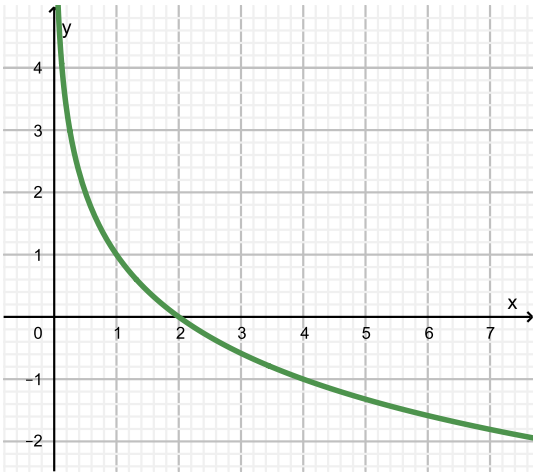
Voorbeeld 1

Bepaal domein en bereik van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$.
Bepaal de verticale asymptoot en bereken het nulpunt van f.

Antwoord

Maak de grafiek van f.
Deze grafiek kan ontstaan uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$ door deze 1 eenheid ten opzichte van de x-as te verschuiven.
Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

- Uit $x > 0$ volgt $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.



Figuur 6.4

Het nulpunt vind je zo:

$$f(x) = 0$$
$${}^{0,5}\log(x) = -1$$
$$x = (0,5)^{-1} = 2$$

Het nulpunt is $x = 2$.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$.

a Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.

b Bepaal het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = {}^{0,886}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $h = a \cdot \log(p) + b$ waarin het standaard grondtal 10 wordt gebruikt. Laat zien hoe.

Antwoord

Gebruik de eigenschap ${}^{g}\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

Dit betekent: $h = {}^{0,886}\log\left(\frac{p}{1013}\right) = \frac{\log\left(\frac{p}{1013}\right)}{\log(0,886)}$.

Omdat $\log(0,886) = -0,5256...$ wordt dit $h = \frac{1}{-0,5256...} \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

Vervolgens is $\log\left(\frac{p}{1013}\right) = \log(p) - \log(1013)$.

Dus is $h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) = -19(\log(p) - \log(1013)) \approx -19\log(p) + 57$.

Opgave 6

Ga in **Voorbeeld 2 op pagina 229** na hoe je een logaritmische functie kunt herleiden naar een logaritmische functie met het standaardgrondtal 10.

De formule met grondtal 0,886 is afgeleid van $p = 1013 \cdot 0,886^h$.

Je kunt ook eerst deze formule herleiden naar de vorm $p = 1013 \cdot 10^{k \cdot h}$ en dan h als functie van p schrijven.

a Laat zien hoe de herleiding dan verloopt.

b Maak de grafiek van $h \approx -19 \cdot \log(p) + 57$ en zorg dat zowel het nulpunt als de verticale asymptoot goed in beeld komen.

c Bij welke luchtdruk is $h > 10$ km?

Opgave 7

Gegeven is een groeiproces met formule $H = 20 \cdot 1{,}2^t$.

a Herleid dit tot een formule met het standaardgrondtal 10.

b Schrijf de formule in de vorm $t = a \log(H) + b$.

c Na hoeveel tijd is $H > 240$?

Oefenen

Opgave 8

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 10 \cdot 2^t$.

a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $t = {}^2\log\left(\frac{B}{10}\right)$.

b Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.

c Los op: $t > 3$.

Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32{,}8 \cdot {}^{0{,}9}\log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule van de vorm $h = a \log(p) + b$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

d Bereken algebraïsch het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

b Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $m \approx 0{,}67 \cdot \log(E) - 3{,}20$.

c Wat gebeurt er met de hoeveelheid vrijkomende energie als m met 1 toeneemt?

Opgave 12

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit achttien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu.

Figuur 6.5

Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$T = b \cdot {}^{2}\log(n + 1)$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van achttien knoppen te maken
- methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor T aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat deze bewering klopt.

Toepassen

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2} dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde **Alexander Graham Bell** een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB. Het verband tussen L en p wordt gegeven door

$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Je kunt je afvragen hoe groot de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB) is.
En hoeveel dB het geluidsdrukniveau van twee van die brommers bedraagt.

Opgave 13

Bekijk de formule van Bell voor het geluidsdrukniveau.

a Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB)?

b Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die brommers?

Opgave 14

Bekijk weer de formule van de effectieve geluidsdruk. Neem ook nu $p_0 = 0{,}00002$ Pa.

a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

c Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Testen

Opgave 15

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 150 \cdot 1{,}4^t$.

a Herleid deze formule zo, dat t is uitgedrukt in B.

b Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.

c Los op: $t > 5$.

Opgave 16

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constante G_0 hangt af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Hoe zwaar is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

b Herleid de gegeven formule naar de vorm $L = a \log(G) + b$.

6.3 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmen oplossen onder andere met behulp van de rekenregels;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies en logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Verkennen

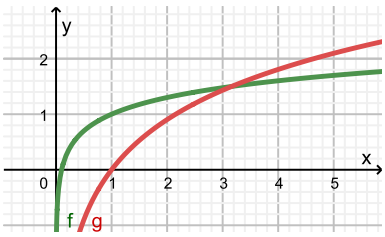
Opgave V1

Los op: $\log(x) + 1 < 3 \cdot \log(x)$.

Uitleg

Los op: $\log(x) + 1 \geq 3 \cdot \log(x)$.

- Los de bijbehorende vergelijking op:
  $\log(x) + 1 = 3 \cdot \log(x)$ geeft $2 \cdot \log(x) = 1$ en $\log(x) = 0{,}5$ zodat $x = 10^{0,5} \approx 3{,}16$.
- Maak de grafieken van $f(x) = \log(x) + 1$ en $g(x) = 3 \cdot \log(x)$.
  Lees de oplossing uit de figuur af.
  Houd rekening met de domeinen van beide functies.
- De oplossing is $0 < x \leq 3{,}16$.



Figuur 6.1

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 233** zie je hoe een vergelijking met meerdere logaritmen kan worden opgelost. Los op dezelfde manier op:

a $4 \cdot \log(x) \geq 1 - \log(x)$

b ${}^{2}\log(x) - 1 > 2 \cdot {}^{2}\log(x)$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(x - 1) + 16$.

a Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f.

b Los de ongelijkheid $f(x) \leq 38$ op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ moet gelden:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De oplossing vind je door aan beide zijden de inverse bewerking van de logaritme toe te passen:
${}^{g}\log(x) = a$ geeft $g^{{}^{g}\log(x)} = g^a$ en hieruit volgt $x = g^a$

Een **logaritmische ongelijkheid** van de vorm ${}^{g}\log(x) < a$ kun je zo oplossen:

- Los de bijbehorende vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Maak de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x + 1) \leq 45$

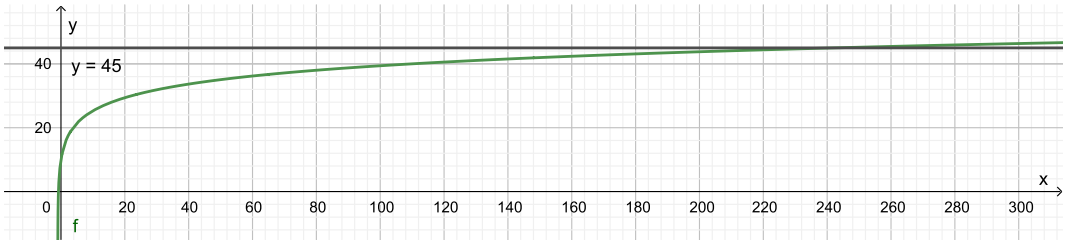
Antwoord

Los bijbehorende vergelijking op:

$$\begin{aligned} 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x+1) &= 45 \\ {}^{3}\log(x+1) &= 5 \\ x + 1 &= 3^5 \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Maak de grafieken van: $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^{3}\log(x + 1)$ en $y_2 = 45$.

Gebruik het domein $\langle -1, \rightarrow\rangle$, de uitkomst $x = 242$ en $y_2 = 45$ om de vensterinstellingen te bepalen.



Figuur 6.2

Lees af: $-1 < x \leq 242$.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x + 5)$

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en bepaal het domein en bereik van f.

c Los op: $f(x) \geq -3$

Opgave 4

Maak de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(2 - x)$.

a Bepaal van beide functies de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies het domein.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$

d Los op: $f(x) > g(x)$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x + 2) = 3$

Antwoord

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 \\ {}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 \\ {}^{2}\log\left(x^2 + 2x\right) &= 3 \\ x^2 + 2x &= 2^3 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x &= -4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Vanwege het domein van de eerste logaritme geldt $x > 0$. Alleen de oplossing $x = 2$ voldoet hieraan en dit is de enige oplossing.

Opgave 5

Los algebraïsch op: ${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x - 1) = 1$

Opgave 6

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\log(2x) - \log(x - 1) = 2$

b ${}^{3}\log(x - 2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L (in dB) en de effectieve geluidsdruk p (in Pa) is

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

met $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0{,}00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = ...$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ \frac{L}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{1}{20}L} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L} \end{aligned}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1{,}12^L$ kun je dit schrijven als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$.
p is een exponentiële functie van L.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3 op pagina 235** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 8

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau is

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

a Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f.

b Geef het domein en bereik van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 0$.
Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Los algebraïsch op ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

a Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.

b Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4 - x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$

c Los op: $f(x) \leq g(x)$

d Los op: $f(x) > g(x)$

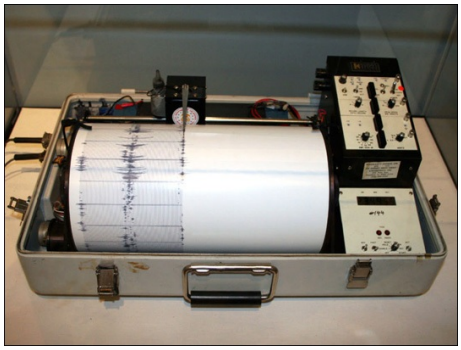
Opgave 13

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herleiden dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 6.3

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter.

a Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

b Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 15

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in µm (1 µm = 0,001 mm)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW, waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van 1500 µm; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8{,}8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A, T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los algebraïsch op en geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig:

a $4 + {}^{2}\log(x - 5) = 0$

b $5 - \log(x) = 3\log(x)$

c $\frac{1}{2}\log(x) + \frac{1}{2}\log(2x) = 0$

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{3}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(6 - x)$.

a Bepaal het domein, bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 18

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Herleid de gegeven formule naar de vorm $G = a \cdot 10^{k \cdot L}$.

b Hoe lang is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

6.4 Logaritmische schalen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch papier bij exponentiële functies;
- werken met dubbellogaritmisch papier bij machtsfuncties.

Voorkennis

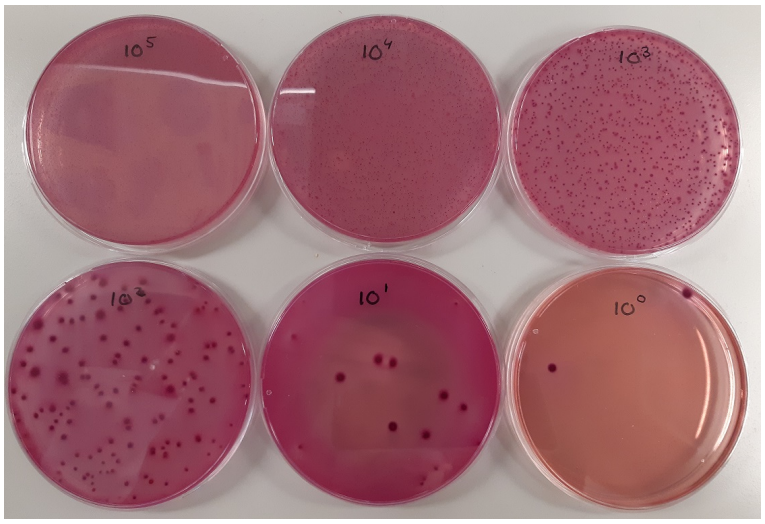
- werken met exponentiële functies en logaritmische functies;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponenten of logaritmen oplossen onder andere met behulp van de rekenregels;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies en omgekeerd;
- het begrip logaritmische schaalverdeling.

Verkennen

Opgave V1

Exponentiële groei is ook nogal explosieve groei. Vaak heb je al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon.

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B(t) = 2 \cdot 2^t$ met t in uren.



Figuur 6.1

a Laat zien, dat deze groeiformule kan worden geschreven als $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(2)$.

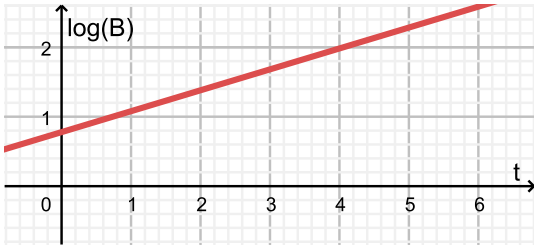
b Waarom is de grafiek van $\log(B)$ als functie van t een rechte lijn?

c Teken de grafiek van $\log(B)$ als functie van t.

d Lees uit je grafiek af bij welke waarde van t geldt $B = 100$.

Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.
Je kunt deze formule herleiden tot
$\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.
Dit betekent dat $\log(B)$ een lineaire functie is van t.
Je zet dan $\log(B)$ op de y-as en t op de x-as en je krijgt de grafiek hiernaast.



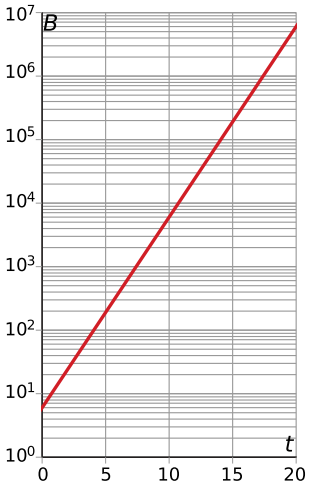
Figuur 6.2

Je kunt ook een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruiken.

Op de plaats van 0, 1, 2, 3, 4, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort. Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme.

Bijvoorbeeld op $t = 15$ heb je
$B = 6 \cdot 2^{15} = 196608$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^5 en 10^6. De logaritme van dat getal is: $\log(196608) \approx 5{,}29$. Je zet het daarom op 5,29 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{5.29} = 10^5 \cdot 10^{0{,}29} \approx 2{,}0 \cdot 10^5$ dus.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook **enkellogaritmisch grafiekenpapier**.



Figuur 6.3

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn.

a Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

b Neem een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

Maak ook een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

c Zet de bijbehorende punten in het assenstelsel. Als het goed is, krijg je de bovenste grafiek in de **Uitleg op pagina 241**.

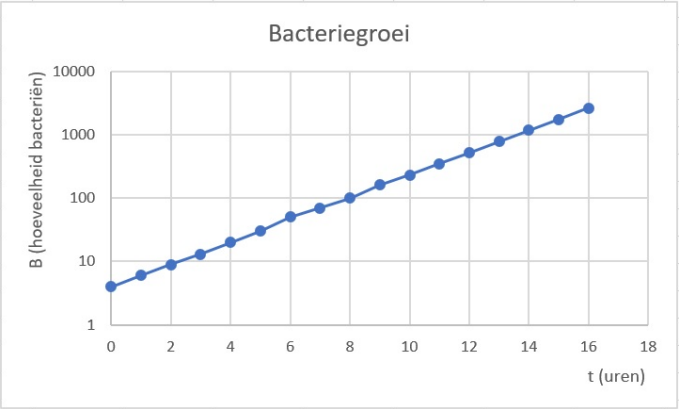
d Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

Bekijk nu de onderste grafiek in de **Uitleg op pagina 241**.
Deze is getekend op enkellogaritmisch papier.

e Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

Opgave 2

In een ander petrischaaltje groeien de bacteriën volgens $B(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$ met t in uren en B de hoeveelheid bacteriën. Deze formule is afgeleid uit deze grafiek die is gemaakt vanuit een tabel in Excel.



Figuur 6.4

a Je ziet in de formule dat $B(0) = 4$.
Hoe past dit bij de figuur?

b In de figuur zie je dat $B(8) \approx 100$ en $B(2) \approx 9$.
Laat zien, hoe je met deze gegevens de formule voor $B(t)$ kunt opstellen.

Opgave 3

De lichtsterkte L van een lamp is afhankelijk van de spanning V die op de lamp staat. Er geldt een formule van de vorm:

$L = k \cdot V^p$

Hierin is:

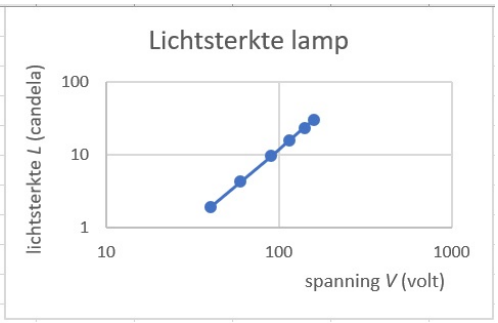
- k en p een constante
- V de spanning in volt (V)
- L de lichtsterkte in candela (cd)

a Laat zien dat de bijbehorende grafiek een rechte lijn is als je op beide assen een logaritmische schaal gebruikt. Laat dus zien dat deze formule te schrijven is in de vorm $\log(L) = \log(V^p) + \log(k)$.

Hier zie je de experimentele gegevens van een lamp.

V	L
40	1,92
60	4,32
90	9,72
115	15,87
140	23,52
160	30,72

V = spanning (volt)
L = lichtsterkte (candela)



Figuur 6.5

b Hoe zie je aan de grafiek dat er een formule van de vorm $L = k \cdot V^p$ bij past?

c Stel met de gegevens de bij deze lamp passende formule voor $L(V)$ op.

Theorie en voorbeelden

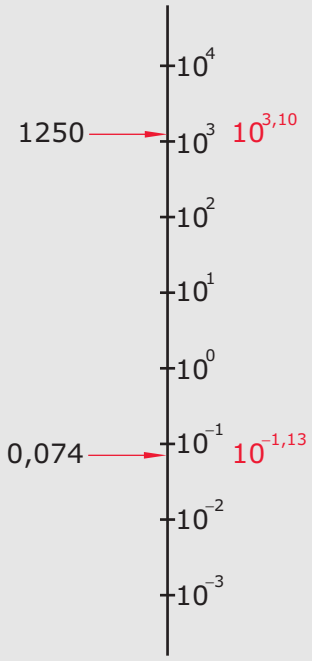
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat.



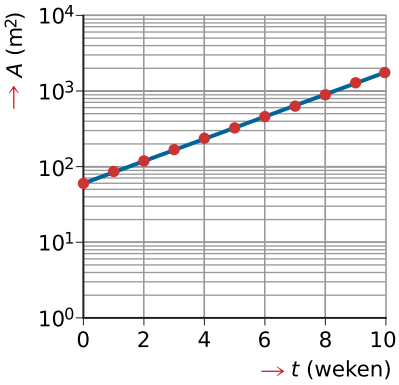
Figuur 6.6

Gebruik je op beide assen een logaritmische schaal, dan wordt de grafiek van een machtsfunctie altijd een rechte lijn. Er bestaat speciaal **dubbellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op dubbellogaritmisch papier de grafiek is van een machtsfunctie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een machtsverband bestaat.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van de groei van waterplanten. De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 6.7

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t, en wel: $A = b \cdot g^t$.

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$, dus $b \approx 60$;
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$.

De groeifactor per acht weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A(t) \approx 60 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 243** staat een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daar kun je een functievoorschrift bij opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden $A(t)$ op.

c Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 5

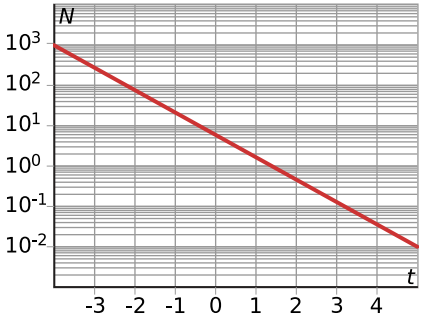
Bekijk de grafiek van de functie $N(t)$.

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de t-as met de N-as?

b Lees twee waarden voor $N(t)$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N(t)$.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N(t) = 0$?



Figuur 6.8

Voorbeeld 2

De slingertijd t (in s) is de tijd die een gewicht dat aan een touw is opgehangen en aan het heen en weer slingeren wordt gebracht nodig heeft voor één heen- en weer gaande beweging. Die slingertijd hangt af van de lengte L (in m) van het touw. Hier zie je enkele meetgegevens:

L in m	0,25	0,42	0,56	0,81	1,00	1,32
t in s	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3

Tabel 6.1

Laat zien dat een bijpassende grafiek met op beide assen een logaritmische schaalverdeling ongeveer een rechte lijn oplevert en stel een bijpassende formule op.

Antwoord

De grafiek kun je op verschillende manieren maken:

- De tabel uitbreiden met rijen voor log (L) en log (t).
  Vervolgens zet je in een assenstelsel met gewone lineaire schaalverdelingen log (L) tegen log (t) uit.
- De tabel in Excel invoeren en een spreidingsgrafiek maken.
  Vervolgens kies je op beide assen een logaritmische schaalverdeling.
- Een blad **dubbellogaritmisch papier** gebruiken.

De grafiek moet in alle gevallen ongeveer een rechte lijn worden.

Je weet dan dat de bijbehorende formule de vorm $t = c \cdot L^p$ moet hebben.

Lees twee punten op de lijn af, bijvoorbeeld $L(0{,}25) = 1{,}0$ en $L(1{,}00) = 2{,}0$.

Vul je deze waarden in de formule in, dan kun je c en p berekenen.

Je vindt: $t \approx 2{,}0 \cdot L^{0{,}5}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 244** vind je de gegevens van de slingertijd t afhankelijk van de slingerlengte L.

a Maak een bijbehorende grafiek met op beide assen een logaritmische schaalverdeling.

b Stel zelf de formule op die in het voorbeeld staat.

c Laat zien, dat dit in overeenstemming is met de uit de natuurkunde bekende formule

$t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.

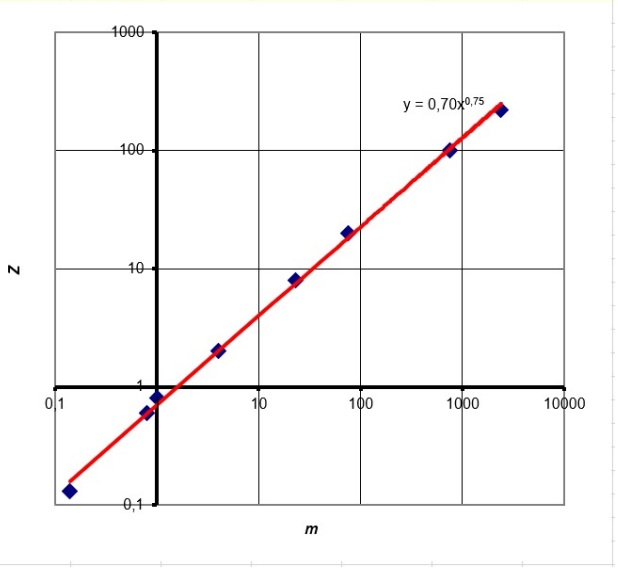
Hierin is $g \approx 9{,}8$.

Opgave 7

Bekijk deze tabel en bijbehorende grafiek van het zuurstofverbruik Z (in liter/uur) afgezet tegen de lichaamsmassa m in kg.

Zuurstofverbruik Z (L/uur) tegen massa m (kg)

diersoort	m	Z
muis	0,14	0,13
eekhoorn	0,8	0,6
rat	1	0,8
kat	4	2
hond	23	8
mens	75	20
paard	750	100
olifant	2400	220



Figuur 6.9

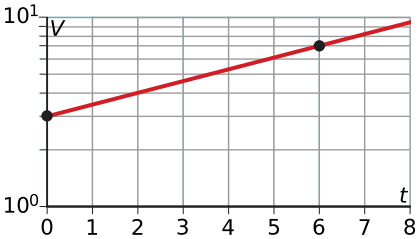
a Door de punten is ongeveer een rechte lijn te trekken.
Laat door berekening zien, dat bij deze lijn inderdaad de formule $Z = 0{,}70 \cdot m^{0{,}75}$ hoort.

b De massa van een koe bedraagt 500 kg. Hoeveel bedraagt het zuurstofverbruik?

Oefenen

Opgave 8

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t.



Figuur 6.10

a Geef een formule voor $V(t)$.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 5$. Rond af op twee decimalen. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t. Rond af op twee decimalen.

Opgave 9

Bekijk de tabel met gegevens over een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 6.2

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t. Rond af op twee decimalen.

b Teken de bijbehorende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn?

d Is er sprake van exponentiële groei?

e Stel een formule op voor $\log(N)$ als functie van t.

f Stel met behulp van het antwoord uit c een formule op voor N als functie van t.

Opgave 10

Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier en ga na of er sprake is van een machtsverband tussen x en y. Stel een bijpassende formule op en bepaal de waarde van y bij $x = 1000$.

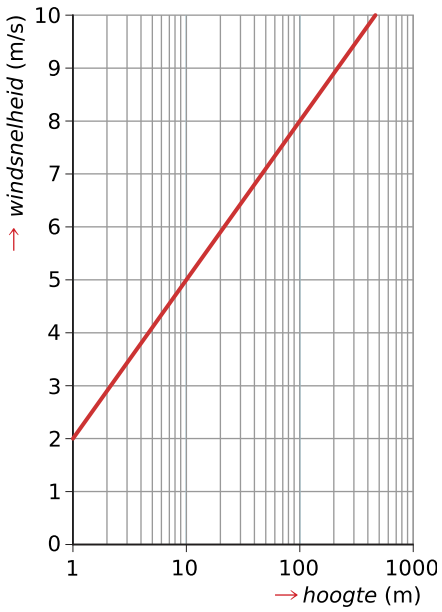
x	1	5	17	55	250	880
y	35	78	144	260	553	1038

Tabel 6.3

Opgave 11

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. In de grafiek zijn de resultaten weergegeven van metingen op dagen met een neutrale atmosfeer.

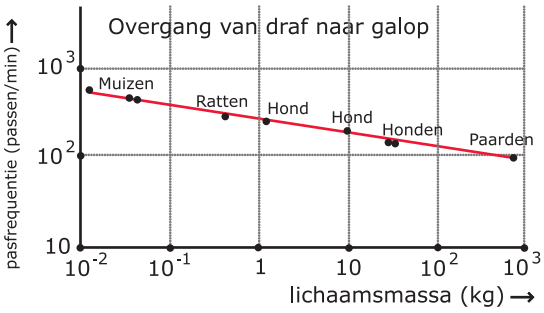
Het verband tussen de windsnelheid w en de hoogte h kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$. Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.



Figuur 6.11

Opgave 12

Bekijk de grafiek. Je ziet voorbeelden van zoogdieren die bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) overgaan van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 6.12

a Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite log (P) uitgezet tegen log (m). Voor het punt dat hoort bij paarden geldt dan ongeveer log $(m) = 2{,}9$ en log $(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

b Leid nu een formule af voor log (P) als functie van log (m).

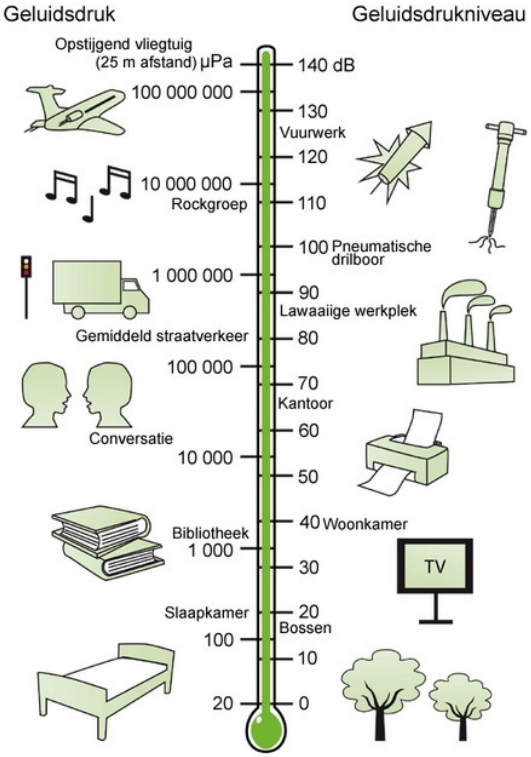
c Met behulp van de eigenschappen van logaritmen kun je nu een formule afleiden voor P als functie van m. Laat zien hoe dat gaat.

Toepassen

De effectieve geluidsdruk p (pascal, 1 Pa = 1 N/m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa = 20 µPa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel (dB).

Je ziet hier hoe die decibelschaal samenhangt met de geluidsdruk in µPa.

Er is uit deze figuur een verband tussen L en p af te leiden.



Figuur 6.13 bron: bromtonen.nl

Opgave 13

Bekijk hoe de decibelschaal er uitziet en hoe het geluidsdrukniveau L samenhangt met de geluidsdruk p.

a Hoe zie je aan de figuur dat de decibel schaal een logaritmische schaal is?

Als je de geluidsdruk p uitzet tegen het geluidsdrukniveau L heb je een enkellogaritmisch assenstelsel. De bijbehorende formule heeft dus de vorm $p = b \cdot g^L$.

b Stel deze formule op.

Je kunt ook het geluidsdrukniveau uitdrukken in de geluidsdruk.
Je stelt dan een formule op voor $L(p)$.

c Laat zien, dat $L = 20 \cdot \log(p) - 94$.

Opgave 14

Voor het geluidsdrukniveau L (dB) afhankelijk van de effectieve geluidsdruk p (pascal, Pa) geldt $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$.

a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?

b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drilboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?

c Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Testen

Opgave 15

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 6.4

a Zet de punten $(0{,}40), (1{,}57), ..., (6{,}447)$ uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

Opgave 16

Bekijk de tabel waarin het verband wordt weergegeven tussen het hersengewicht H (gram) en het lichaamsgewicht G (gram) van enkele kleine zoogdieren.

	wezel	muis	eekhoorn	egel	kat	haas
G	95	200	320	820	3600	4000
H	2,54	4,18	5,72	10,75	28,97	31,09

Tabel 6.5

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Is er sprake van een exponentieel verband?

b Teken de punten uit de tabel op dubbellogaritmisch papier. Van welk soort verband is er sprake?

c Onderzoekers hebben een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen G en H.

Deze formule is: $H = 0{,}12 \cdot G^{0{,}67}$

Leid zelf deze formule af.

d Bereken het lichaamsgewicht van een zoogdier met een hersengewicht van meer dan 150 gram?

6.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden
- logaritmische schaal — enkel- en dubbellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen — eigenschappen van logaritmen gebruiken
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen — vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten — logaritmen herleiden naar standaard grondtal 10
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen — logaritmische functies omschrijven naar exponentiële functies
- logaritmische schalen gebruiken — werken met enkellogpapier en dubbellogpapier

Testen

Opgave 1

Een bedrijf verwacht dat de komende jaren zijn aandelen 11% per jaar in waarde gaan stijgen.

a Hoelang duurt het totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Ga uit van een jaarlijkse stijging van 11%. Bereken na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe je hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ kunt toelichten.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per centimeter 27% van het licht dat erdoorheen valt.

Bereken in millimeter nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(10)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x + 10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

d Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt: $h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$
waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Plot de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar.

b Hoe hoog vliegt het vliegtuig?

c Laat zien dat p een exponentiële functie is van h.

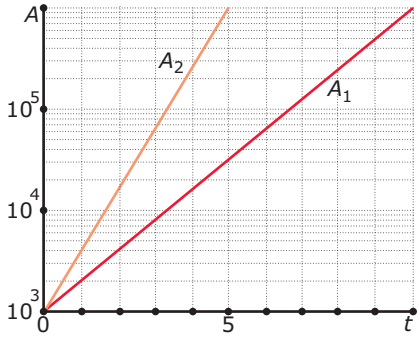
d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat het toestel op 3 km hoogte vliegt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar.

e Hoe hoog vliegt het toestel in werkelijkheid? Rond af op meter.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 g salade afhankelijk is van de temperatuur. In de figuur staan de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius.



Figuur 6.1

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.

c Hoeveel keer zoveel bacteriën zijn er na tien dagen bij 4 °C vergeleken met de situatie bij 0 °C?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C?

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo hoog, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacterie bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Opgave 7

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (mm) en het gewicht van het vlees W (gram) van mosselen. Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten.

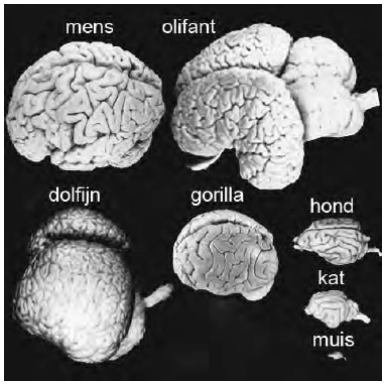
In één van de jaren leiden de resultaten tot de volgende formule: $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)$

Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

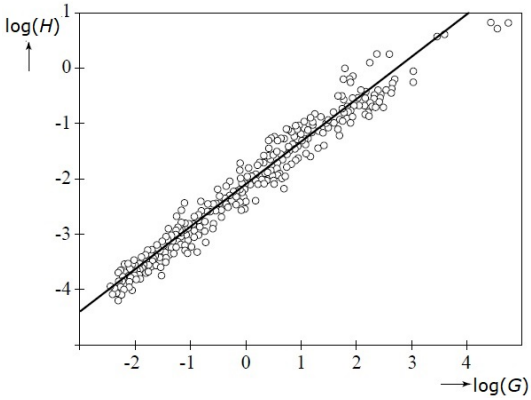
Opgave 8

Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen.

Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, is G. Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, is H. De grafiek hieronder geeft het verband weer tussen de logaritme van G en de logaritme van H. In deze grafiek zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in de grafiek getekend.



Figuur 6.2 Bron: havo B examen 2010



Figuur 6.3

Het gemiddeld lichaamsgewicht van katten is 5 kg.

a Bepaal met behulp van de rechte lijn in de figuur het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(H) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097$. Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

b Bereken met behulp van de gegeven formule algebraïsch dit gemiddelde lichaamsgewicht.

c De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$. Bereken de waarden van a en b. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 9: Windsnelheid

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 6.1

a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid in m/s
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen\
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.
In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

b Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

c Bereken de waarde van r van dit terrein.

Opgave 10: Tornado's

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt intensiteit genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal. Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.
In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/h bereikt.

a Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.

b Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$v = 2{,}39(T + 4)^{\frac{3}{2}}$

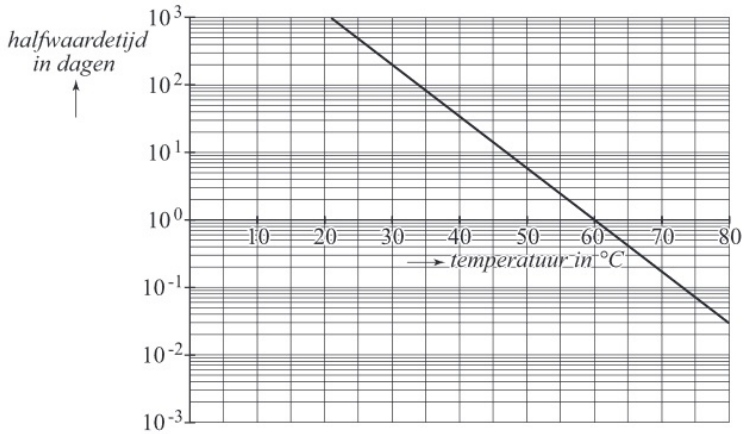
Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.
Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F- en T-waarden.
Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = at + b$.

c Bereken de waarden van a en b. Rond af op twee decimalen.

Opgave 11: Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 6.4

a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht. Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28. Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

b Laat met behulp van de grafiek in zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten. Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden. Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

7

Periodieke functies

7.1 Sinus- en cosinusfuncties 256
7.2 Vergelijkingen met sin en cos 266
7.3 Sinusoïden 275
7.4 Periodieke modellen 283
7.5 Totaalbeeld 291

7.1 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken;
- werken met exacte waarden van sinus en cosinus.

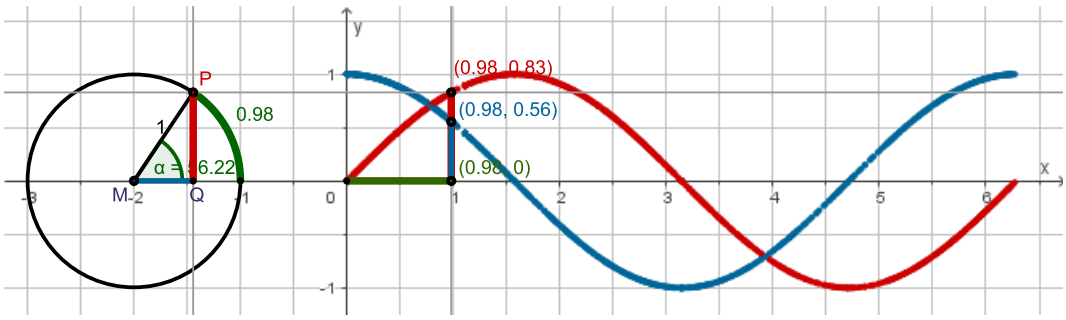
Voorkennis

- werken met graden en radialen;
- een grafiek tekenen op de grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 7.1

Je ziet hier twee grafieken, die ontstaan door punt P te laten draaien om M op een cirkel met straal $MP = 1$.

De rode grafiek laat zien hoe hoog punt P zit ten opzichte van de horizontale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

De blauwe grafiek laat zien waar punt P zit ten opzichte van de verticale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

a Bij de grafieken is op de x-as de draaihoek α uitgezet, maar niet in graden, maar in radialen. Wat wordt daarmee bedoeld?

b Hoe reken je graden om in radialen?
Laat zien dat bij $\alpha = 53{,}03°$ hoort $\alpha \approx 0{,}93$ radialen.

c Hoe bereken je de waarde van de rode grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

d Hoe bereken je de waarde van de blauwe grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

Opgave V2

Ga uit van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 dm.

a Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek in graden?
En in radialen?

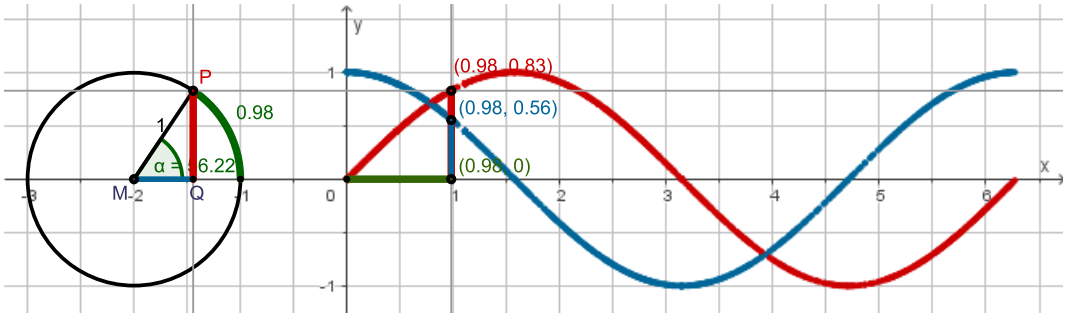
b Laat door berekening zien dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c Hoe groot is $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ precies?

d En hoe groot is $\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 7.2

De belangrijkste periodieke functies zijn $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ met x altijd in radialen. Je ziet hier hun grafieken. Ze ontstaan door een punt P over een eenheidscirkel te bewegen. De draaihoek $x = \alpha$ is in radialen (de bijbehorende booglengte in de eenheidscirkel) op de x-as uitgezet. De (rode) sinusgrafiek ontstaat uit de lengtes van QP en de (blauwe) cosinusgrafiek uit de lengtes van MQ. Beide grafieken lopen oneindig ver door als je ook draaihoeken buiten $[0,2\pi]$ toelaat.

Beide grafieken herhalen zich met een periode van 2π hetgeen overeen komt met het draaien van P van $0°$ tot $360°$.

Voor het omrekenen van graden naar radialen geldt $360° = 2\pi$ radialen, dus $1° = \frac{\pi}{180}$ rad.

Het domein van beide functies is $\mathbb{R}$, alle x-waarden zijn toegestaan.

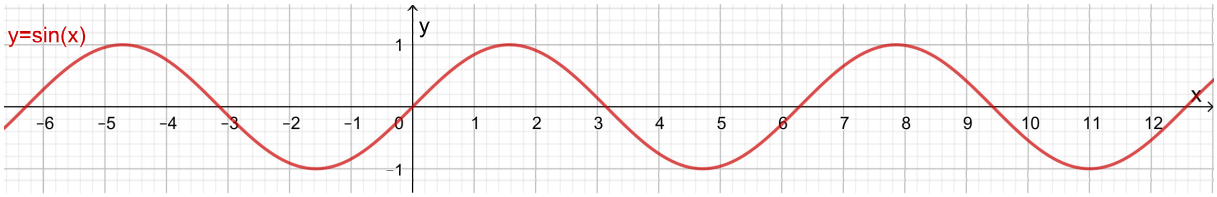
Het bereik van beide functies is $[-1,1]$.

De nulpunten van de sinusfunctie zijn $x = \alpha = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$ of kortweg $x = k \cdot \pi$ met k een geheel getal.

De nulpunten van de cosinusfunctie zijn $x = \alpha = \ldots, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, \ldots$ of kortweg $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Opgave 1

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \sin(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 7.3

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

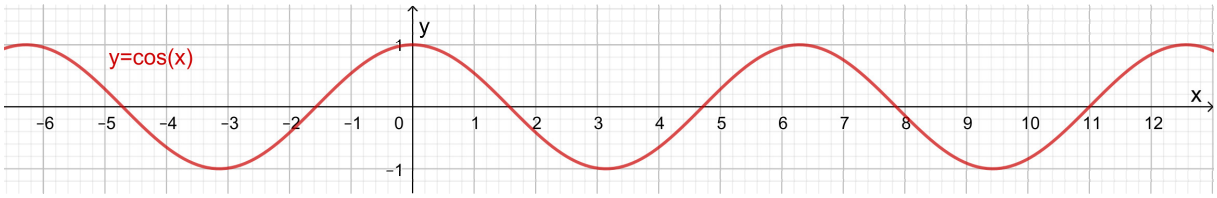
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\sin(1) = 0{,}84147...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\sin(30°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Opgave 2

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 7.4

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

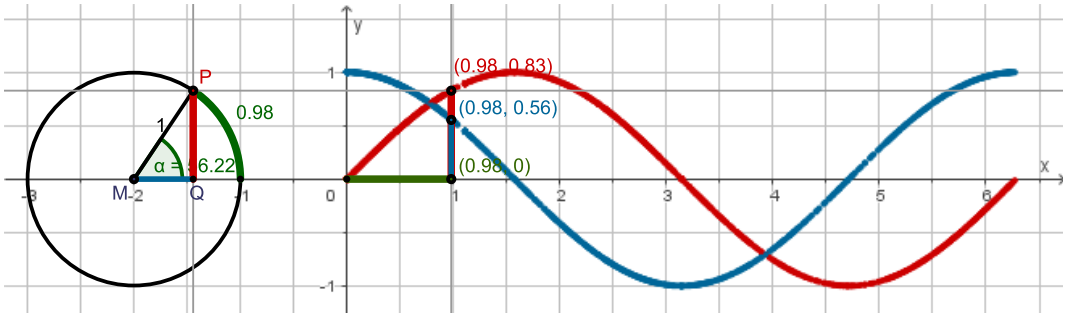
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\cos(1) = 0{,}54030...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\cos(60°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Uitleg 2

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 7.5

Je ziet weer de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$.

Kies je $\alpha = 45° = \frac{1}{4}\pi$, dan zijn MQ en PQ gelijk.

Met behulp van de stelling van Pythagoras vind je dan $\sin(45°) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Aan de grafieken (en ook in de eenheidscirkel) zie je dat er nog veel meer x-waarden zijn met dezelfde exacte uitkomst, namelijk $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En ook is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En er zijn meer x-waarden waarvan de sinus en de cosinus exact te berekenen zijn.

In de tabel staan enkele exacte waarden van de sinus en cosinus waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven.

hoek (graden)	0°	30°	45°	60°	90°
hoek (radialen)	0 rad	$\frac{1}{6}\pi$ rad	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\frac{1}{3}\pi$ rad	$\frac{1}{2}\pi$ rad
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 7.1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$ bepalen. Er geldt bijvoorbeeld dat:

$\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opgave 3

In Uitleg 2 op pagina 259 zie je dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

a Leid dit zelf af door in ΔMQP de stelling van Pythagoras toe te passen.

b Ga nu zowel in de eenheidscirkel als in de grafiek na, dat $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

c Schrijf alle waarden van x op waarvoor $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d Leg uit waarom $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Opgave 4

In **Uitleg 2 op pagina 259** zie je een tabel met exacte uitkomsten voor sinus en cosinus bij enkele hoeken. Al deze waarden kun je zelf afleiden.

a Kies $x = \frac{1}{6}\pi$. ΔMQP is nu de helft van een gelijkzijdige driehoek waarvan MQ de symmetrieas is.

Leg uit dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b Hoe leid je af dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?

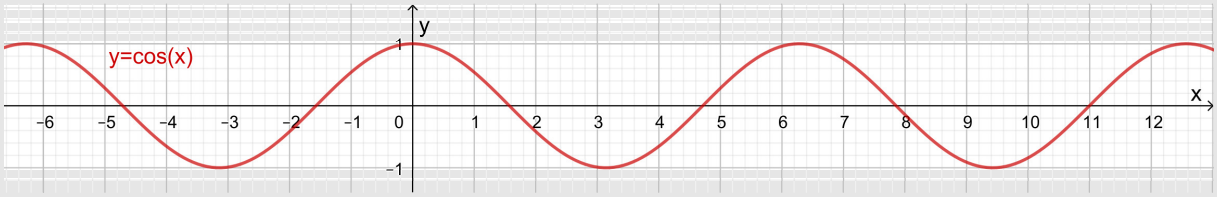
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Figuur 7.6

De **standaard sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 7.7

De **standaard cosinusfunctie** $f(x) = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

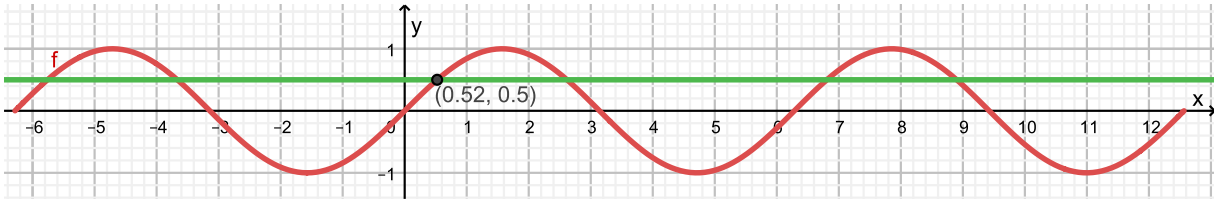
De grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x - b) + c$ en $h(x) = a \cdot \cos(x - b) + c$ kun je door transformaties uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan, maar dus ook uit die van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
Voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 7.8

Je ziet dat de grafiek symmetrisch is met symmetrieas $x = \frac{1}{2}\pi$.

Dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.
Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ voor:

$x = -1\frac{5}{6}\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 261**.

a Voor welke waarden van x geldt $\sin(x) = -\frac{1}{2}$?

b Los op: $\sin(x) < -\frac{1}{2}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6{,}5\pi]$.

a Maak de grafiek van f. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

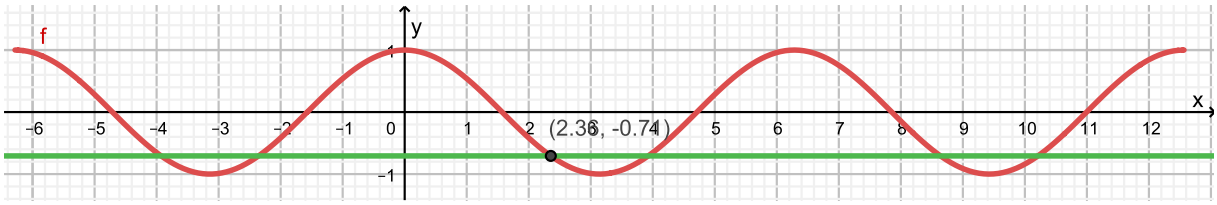
b Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

Antwoord



Figuur 7.9

Je ziet dat $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ voor:

$x = -1\frac{1}{4}\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 2\frac{3}{4}\pi \vee x = 3\frac{1}{4}\pi$.

Opgave 7

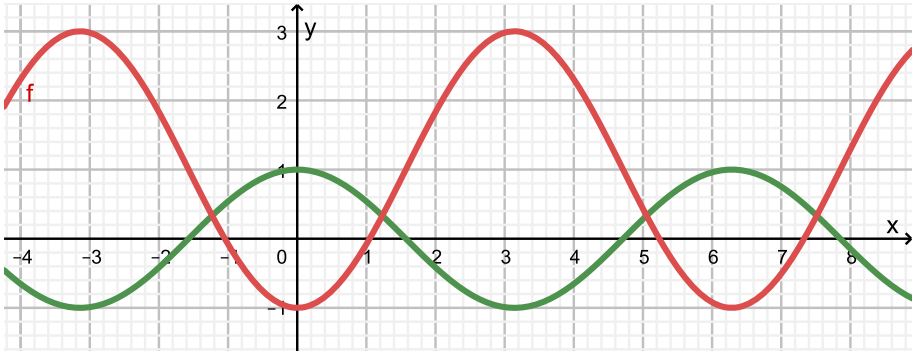
Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 261**.

Voor welke waarden uit het gegeven domein geldt: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord



Figuur 7.10

Maak eerst de grafiek van f en zet die van $y = \cos(x)$ erbij.

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Verschuiving in de x-richting met π.
- Vermenigvuldiging in de y-richting met 2.
- Verschuiving in de y-richting met 1.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = -2\sin(x-1)+4$

a Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

b Hoe groot is het maximum van f?

c Wat is het minimum van f?

Opgave 9

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je zien als een translatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = 3\sin(x) - 4$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie f door $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\sin(0{,}25) = 0{,}247...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\sin(x) = 0{,}247...$?

Opgave 11

Gegeven is de functie f door $f(x) = \cos(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\cos(0{,}25) = 0{,}968...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\cos(x) = 0{,}968...$?

Opgave 12

Geef alle exacte waarden van x waarvoor geldt:

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\cos(x) = -0{,}5$

c $\sin(x) = -1$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\sin(x-3)+2$ met domein $[0, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

c Bepaal de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5\cos(x+\pi)+4$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \cos(x)$?

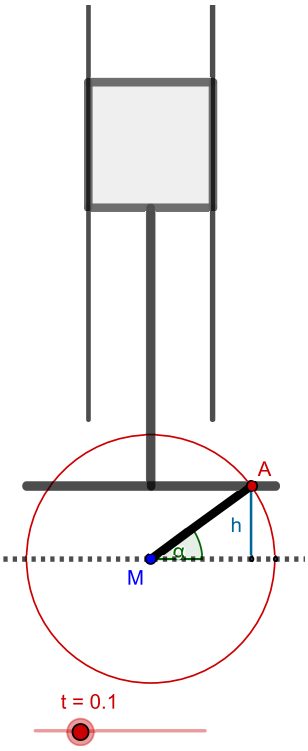
c Geef de coördinaten van de toppen.

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 7.11

Opgave 15

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 16

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $h(t) = 10\sin(t - 2) + 5$.

a De grafiek van deze functie kan ontstaan uit de grafiek van $h = \sin(t)$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Bepaal het bereik van de gegeven functie.

7.2 Vergelijkingen met sin en cos

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de vergelijking $\sin(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- de vergelijking $\cos(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- vergelijkingen met getransformeerde sinus- en cosinusfuncties oplossen.

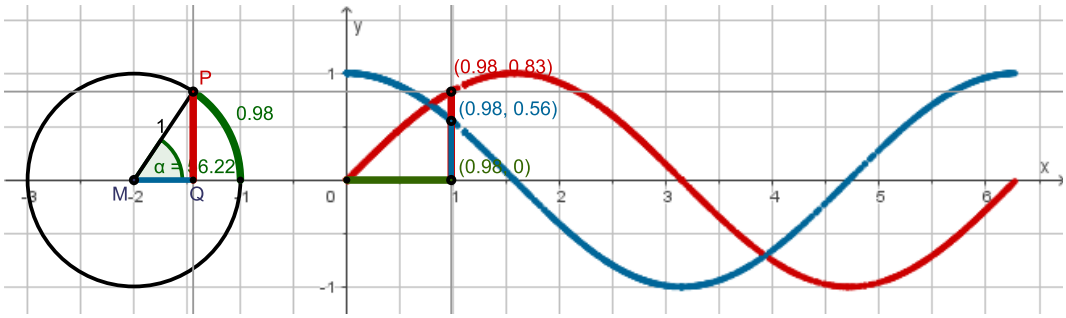
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 7.1

Je ziet hier de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ ontstaan door punt P over de eenheidscirkel met middelpunt M te bewegen.

a Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de sinus gelijk aan 0,5?
Welke verband is er tussen die twee waarden?

b Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de cosinus gelijk aan 0,5?
Welke verband is er tussen die twee waarden?

Opgave V2

Ga even na of je de exacte waarden van x weet bij $\sin(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

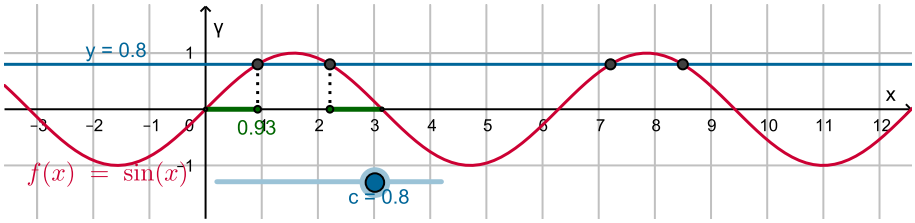
En hetzelfde voor de exacte waarden bij $\cos(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

Uitleg 1

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:



Figuur 7.2

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet de arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.

  Op de rekenmachine vind je arcsinus meestal als $\sin^{-1}$.
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8)$.
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van deze vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = -1$ geeft: $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = 0$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$ voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$ de c groter is dan 1 of kleiner is dan - 1 zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}2$

b $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

Los exact op.

a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

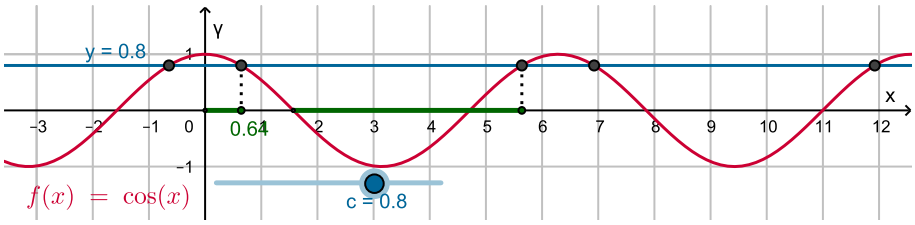
Opgave 3

Waarom heeft $\sin(x) = 1{,}2$ geen oplossingen?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.



Figuur 7.3

Je wilt $\cos(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt.
  Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}64$
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = -0{,}64 \vee x = 2\pi - 0{,}64$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = 0{,}64 + k \cdot 2\pi \vee x = -0{,}64 + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:
$\cos(x) = 1$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = -1$ geeft: $x = \pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = 0$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Als in $\cos(x) = c$ de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 4

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}2$

b $\cos(x) = -0{,}2$

Opgave 5

Los exact op.

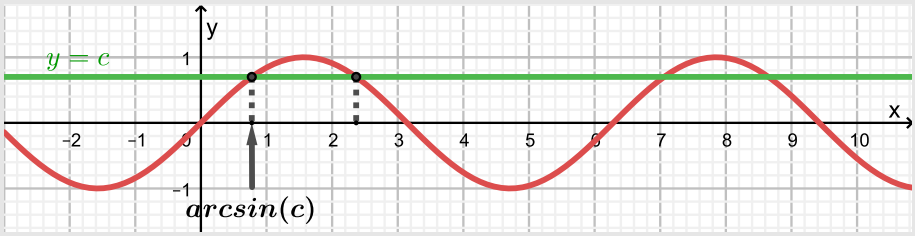
a $\cos(x) = -1$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



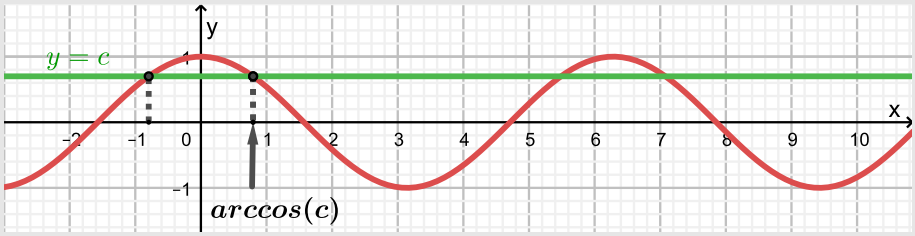
Figuur 7.4

Om $\sin(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ ligt.
Die oplossing heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$:
$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 7.5

Om $\cos(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $[0, \pi]$.
Die oplossing heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$:
$x = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Gebruik de waarden uit de tabel als er gevraagd wordt naar exacte uitkomsten.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 7.1

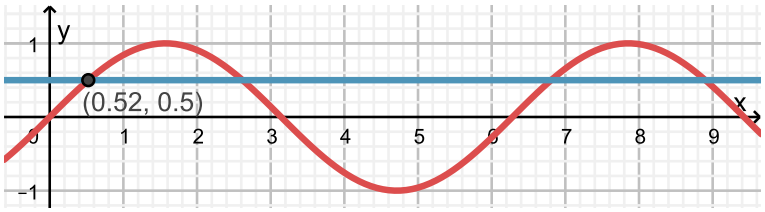
Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0,3\pi]$.

Bepaal eerst een oplossing in drie decimalen met behulp van een rekenmachine.
Bepaal daarna een exacte oplossing. Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Maak de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval. Je ziet dat er vier oplossingen zijn.



Figuur 7.6

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.

De andere oplossingen zijn: $x \approx 0{,}524 + k \cdot 2\pi \vee x \approx \pi - 0{,}524 + k \cdot 2\pi$.

Op $[0,3\pi]$: $x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$.

De eerste exacte oplossing is: $x = \frac{1}{6}\pi$.

In het algemeen is de oplossing: $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Op $[0,3\pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 6

Los op: $\sin(x) = -0{,}5$

a Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $f(x) = 4\sin(2x) + 3$.

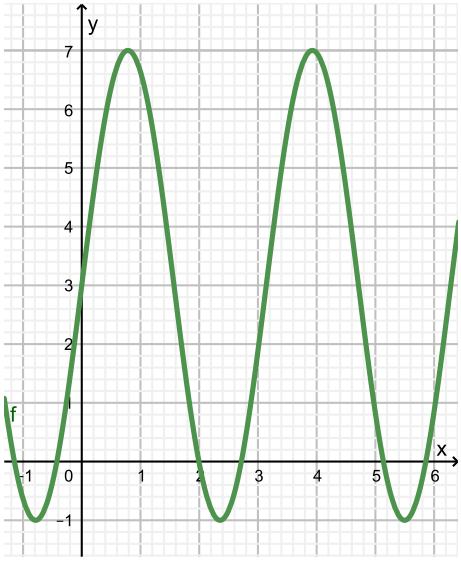
Los op: $f(x) = 0$.

Antwoord

Deze functie ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
In ieder geval is er sprake van:

- vermenigvuldiging met 4 in de y-richting;
- verschuiving met 3 in de y-richting.

Maar als je de grafiek maakt, zie je ook dat de periode wordt gehalveerd.
Bij het berekenen van de nulpunten zie je dat ook gebeuren.



Figuur 7.7

Je moet $f(x) = 0$ oplossen. Dat gaat zo:

$$
\begin{aligned}
4\sin(2x) + 3 &= 0 && \text{beide zijden } -3\\
4\sin(2x) &= -3 && \text{beide zijden } /4\\
\sin(2x) &= -0{,}75 && \text{arcsin gebruiken}\\
2x \approx -0{,}85 + k \cdot 2\pi \ \vee\ 2x &\approx \pi - -0{,}85 + k \cdot 2\pi && \text{beide zijden } /2\\
x \approx -0{,}42 + k \cdot \pi \ \vee\ x &\approx 1{,}99 + k \cdot \pi
\end{aligned}
$$

Na het delen door 2 bij de laatste stap is de periode waarin de nulpunten optreden gehalveerd.

Opgave 8

Bekijk de functie f in **Voorbeeld 2 op pagina 271**.

a Hoe zie je aan de grafiek dat de periode is gehalveerd?

b Waarom vind je bij $f(x) = 0$ geen exacte oplossingen?

c Los exact op $f(x) = 1$.

Opgave 9

Los exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(0{,}5x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c Los exact op: $3\cos(x) + 1 = 2\frac{1}{2}$

Oefenen

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\sin(x) = \sin(0{,}5)$

c $\sin(0{,}5) = x$

d $\sin(x) = \cos(0{,}5)$

Opgave 13

Los exact op.

a $3\cos(x) + 1 = 2{,}5$

b $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

c $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 14

Gegeven is de functie g met $g(x) = 3\cos(2x)$ op $[0,4\pi]$.

a Bereken exact de nulpunten van g.

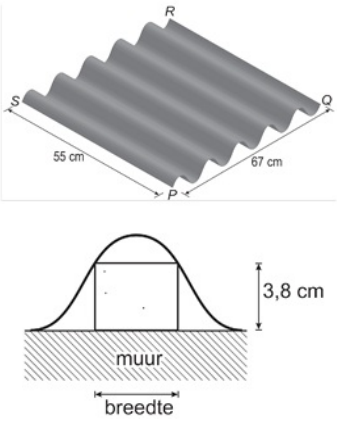
b Los exact op: $g(x) = 1\frac{1}{2}$

Toepassen

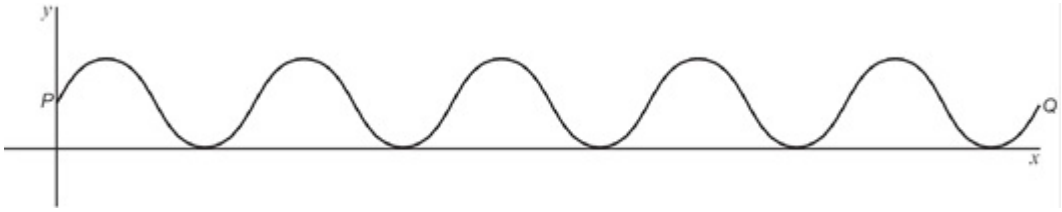
Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In de figuur is dit geschetst.



Figuur 7.8



Figuur 7.9

Opgave 15

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat.

Controleer dat de breedte van de golfplaat inderdaad ongeveer 67 cm is.

Opgave 16

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat. In die doorsnede zie je ook de voorkant van één van de rechthoekige blokjes waarmee de openingen gedicht worden.

Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 17

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$. Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4\cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen.

b Los op $f(x) < 0$.

7.3 Sinusoïden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ en $y = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ tekenen en daarbij de begrippen periode, amplitude, evenwichtsstand gebruiken;
- de vergelijkingen $a \cdot \sin(b(x + c)) + d = p$ en $a \cdot \cos(b(x + c)) + d = q$ systematisch oplossen.

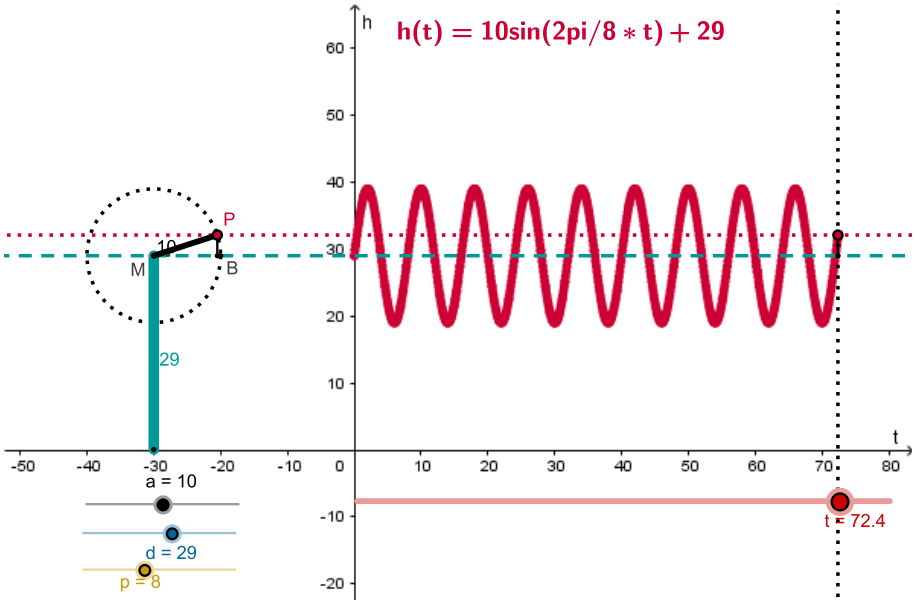
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Windmolen



Figuur 7.1

Je ziet hier de grafiek van de hoogte van een tip (punt P) van een wiek van een windmolen boven de begane grond. Er geldt:

$$h = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot t\right) + 28$$

waarin h de hoogte van punt P in meter en t de tijd in seconden is.

a Wat stellen de getallen 10 en 28 in deze formule voor?

b En wat is de betekenis van het getal 8?

Waarom staat er in de formule $\frac{2\pi}{8}$?

c Bij dit soort periodieke verschijnselen worden vaak de termen evenwichtsstand, amplitude (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) en periode gebruikt.
Welk getal in deze formule stelt de evenwichtsstand voor? En de amplitude?

Uitleg

Bekijk de applet.

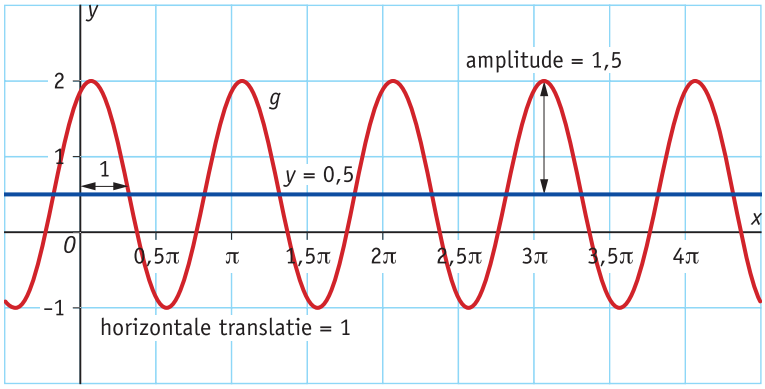
Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten sinusoïden.

Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten ook sinusoïden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand, de amplitude is a.
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$.
  Dit betekent voor de sinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat en voor de cosinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Bekijk de grafiek van de sinusoïde $g(x) = -1{,}5 \cdot \sin(2(x - 1)) + 0{,}5$.



Figuur 7.2

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtsstand is $y = 0{,}5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale verschuiving is 1

Het bereik van g is: $B_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1, 2]$

De toppen van g vind je door te bedenken dat de maxima 2 en de minima - 1 zijn.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ op $[0{,}2\pi]$ in de **Uitleg op pagina 276**.

Maak de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x-1)) + 0{,}5$ met de applet in de **Uitleg op pagina 276**.

a Waarom is het nuttig om eerst de periode, de amplitude en de evenwichtsstand af te lezen uit de formule als je zelf de grafiek moet maken?

b Het punt (0,0) ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat uit (0,0) door de transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$?

c Welke toppen heeft de grafiek van g?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = -10 \sin(\pi(x-3)) + 6$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $f(x) = 11$.

Opgave 3

Gegeven is de functie g met $g(x) = 2 \cdot \cos(0{,}5(x-2)) - 1$ op $[0{,}8\pi]$.

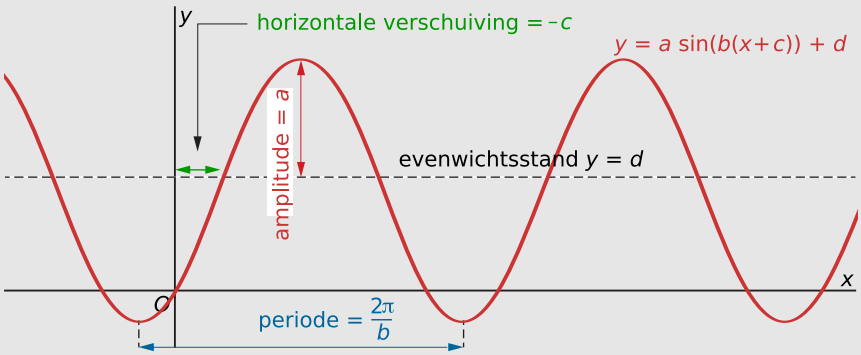
a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $g(x) = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïden



Figuur 7.3

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ maken.

De grafieken van deze functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x+c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van g geldt:

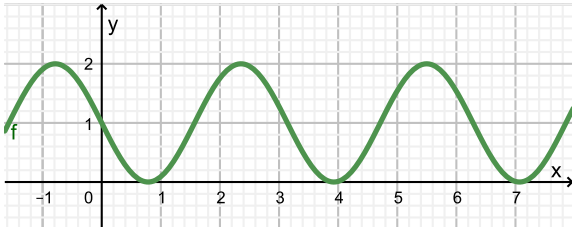
- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur met daarin een deel van de grafiek van: $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$.

Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.
Bereken de toppen van de grafiek.

Los op: $\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 = 1\frac{1}{2}$.



Figuur 7.4

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

Bij de standaardsinus zitten de maxima bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de maxima geldt dus:

$$\begin{aligned} 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x - \tfrac{1}{2}\pi &= \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \\ x &= \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Voor de minima geldt:

$$\begin{aligned} 2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1\tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

De toppen zijn $\left(\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi, 2\right)$ en $\left(\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi, 0\right)$.

Los op:

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)+1 &= 1\tfrac{1}{2}\\
\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) &= \tfrac{1}{2}\\
2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) &= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\pi-\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi\\
2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) &= \tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\tfrac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\\
x &= \tfrac{7}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x=\tfrac{11}{12}\pi+k\cdot\pi
\end{aligned}$$

In drie decimalen is de oplossing $x \approx 1{,}833 + k \cdot \pi \vee x \approx 2{,}880 + k \cdot \pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = 3\sin(\pi(x-1)) + 10$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de coördinaten van alle toppen.

c Los exact op: $f(x) = 11{,}5$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}(x+2)\right) + 8$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de toppen van de grafiek van f.

c Los op: $f(x) = 11$.
Rond af op drie decimalen.

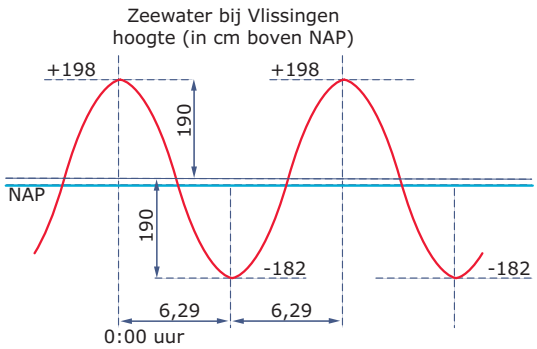
Voorbeeld 2

De grafiek in de figuur geeft globaal de getijdebeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de formule:

$$h = 8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25}\cdot t\right)$$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en h in cm ten opzichte van het NAP.



Figuur 7.5

Laat zien, dat de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van deze sinusoïde overeen komen met de grafiek.
Bereken hoeveel uur per periode de waterstand hoger is dan 180 cm.

Antwoord

Volgens de formule is de periode 12,25 uur, de amplitude 190 cm en de evenwichtsstand $h = 8$ cm. Dat komt overeen met wat je in de grafiek afleest.

$h = 180$ geeft $\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25t}\right) \approx 0{,}905$

Omdat arccos $(0{,}905) \approx 0{,}439$ krijg je: $\frac{2\pi}{12{,}25}t \approx 0{,}439 \vee \frac{2\pi}{12{,}25}t \approx -0{,}439$.

en daaruit volgt $t \approx 0{,}856 + k \cdot 12{,}25 \vee t \approx -0{,}856 + k \cdot 12{,}25$.

De waterstand is boven 180 cm van $t \approx -0{,}856$ tot $t \approx 0{,}856$.
Dat is ongeveer 1,71 uur.

Opgave 6

Bekijk de waterstanden bij Vlissingen in **Voorbeeld 2 op pagina 279**.

a Ga zelf ook na, dat de grafiek klopt met de gegeven formule.

b Los zelf op: $8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right) = 180$.

Opgave 7

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:
$h(t) = 40 + 10 \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi \cdot t\right)$
Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

a Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke instellingen van de assen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?

b Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.

Oefenen

Opgave 8

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode en de amplitude en maak de grafiek zodat je twee periodes ziet.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h(t) = 50\sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

d $P(x) = -20\sin(2x)$

Opgave 9

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $5\cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

b $10\sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2)\right) = 5$

c $50\cos(4x) = 25\sqrt{3}$

d $50 - 30\sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0,16]$.

a Bepaal algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact alle nulpunten van deze functie.

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h(t) = 11 + 10\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Maak de grafiek van $h(t)$.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke betekenis?

c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoelang een bakje van een reuzenrad zich hoger dan 18 meter boven de grond bevindt.

Toepassen

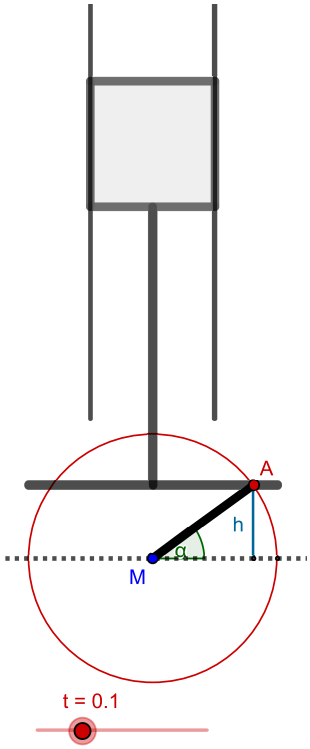
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10\cdot\sin(2\pi\cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 7.6

Opgave 12

Bekijk de formule voor de hoogte $h(t)$ van punt A boven de horizontale stippellijn.

a Waarom is de evenwichtsstand hier 0?

b Hoeveel seconden is per omwenteling $h(t) \geq 5$?

Opgave 13

De formule voor h in cm als functie van de tijd t in seconden is $h = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$.
Je kunt echter in plaats van h ten opzichte van een horizontale lijn door het draaipunt te nemen, de hoogte van A ook meten ten opzichte van de bovenkant van de cilinder. Neem daartoe aan dat de bovenkant van de cilinder 50 cm boven M zit.

a Welke formule kun je opstellen voor h als functie van t?

b Maak de grafiek bij de formule die je bij a hebt gevonden.
Hoe kun je die uit de standaardsinus afleiden?

c Op welke tijdstippen geldt $h = -42$ cm? Geef je antwoorden in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Bepaal van de functies de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}5\sin(0{,}5\pi(x - 3))$ op $[0,10]$.

a Bereken algebraïsch alle nulpunten van de grafiek van f.

b Los op $f(x) < 0{,}25$.

7.4 Periodieke modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

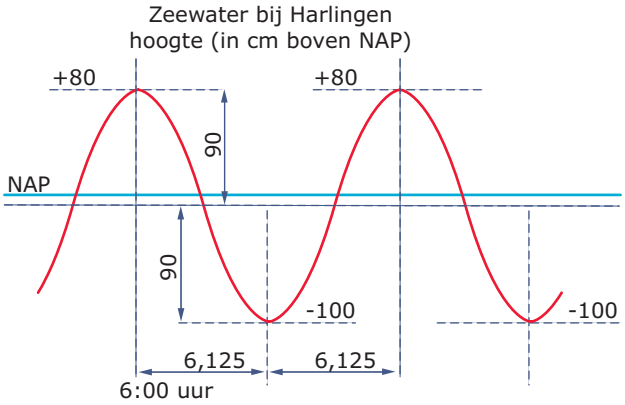
Je ziet hier de grafiek van de hoogte van het zeewater bij Harlingen op een zekere dag.

Noem h de hoogte het water in centimeter en t de tijd in uren.

Je kunt deze periodieke grafiek bij benadering opvatten als een sinusoïde.

a Hoe groot zijn de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van deze sinusoïde dan ongeveer?

b Welke formule kun je opstellen voor deze sinusoïde?



Figuur 7.1

c Voorspel met je formule de waterstand om 6:00 uur de volgende dag.

Uitleg

Bekijk de applet.

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

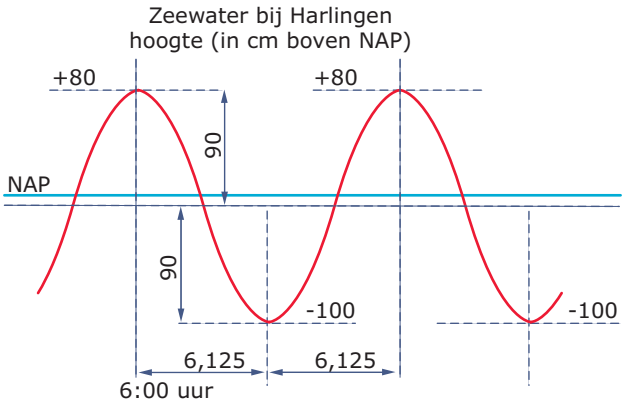
In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$

Uit de gegevens volgt:

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12{,}25} \approx 0{,}52$
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en - 1,0 m. De amplitude is $a = 0{,}9$ m.
- De evenwichtsstand is 0,9 m onder hoogwater: $d = -0{,}1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtslijn zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3{,}0625 \approx 2{,}94$. Dit betekent dat $c \approx -2{,}94$.



Figuur 7.2

De bijpassende sinusoïde wordt:

$h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$

Opgave 1

Gegeven is de opgestelde sinusoïde als model voor de waterstand bij Harlingen in de **Uitleg op pagina 283**.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn worden gevonden.

b Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.

c De grafiek van de formule $h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$ van de uitleg moet hetzelfde zijn als de grafiek van de formule die je bij b hebt gevonden (door de afronding zullen de grafieken iets afwijken). Controleer dit op de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Geef het voorschrift van de periodieke functies die ontstaan bij de volgenden wijzigingen.

a De amplitude wordt 4.

b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

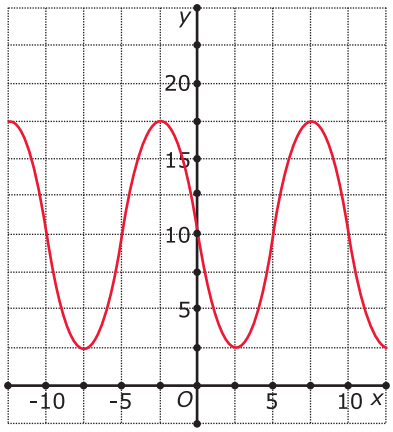
d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Opgave 3

Bekijk de sinusoïde.

a Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \sin(x)$.

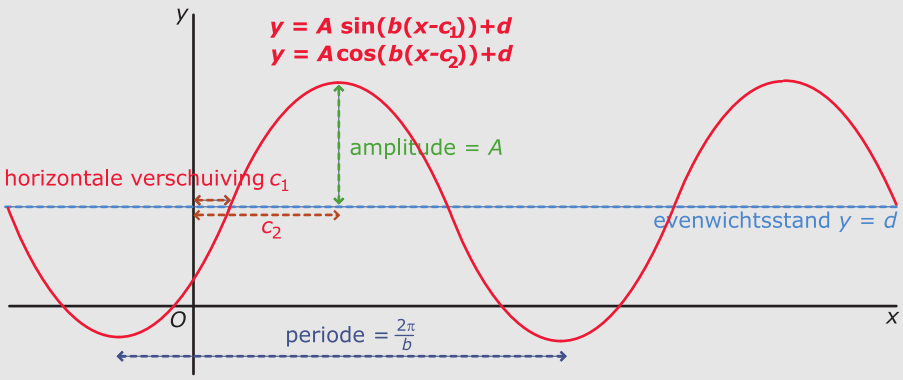
b Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \cos(x)$.



Figuur 7.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 7.4

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.

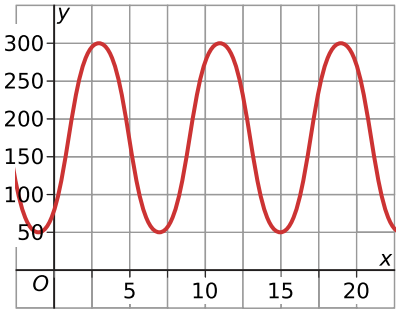
Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a, b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus 'begint' altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.



Figuur 7.5

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?
En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaard-cosinus?

Antwoord

Het maximum van de functie is 300 en het minimum 50.
Dit betekent dat:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.
De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek op de evenwichtslijn op het moment dat de grafiek daar stijgt.
Hier is dat $x = 1$.

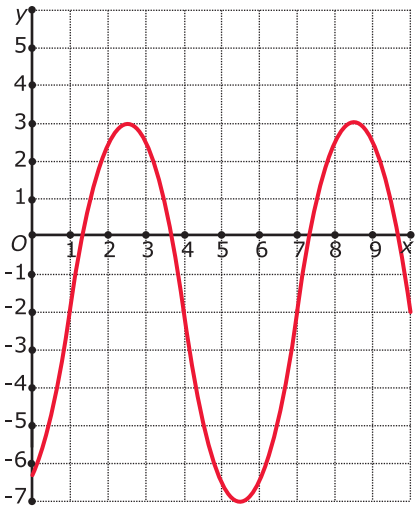
Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 125 \sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-1)\right) + 175$

Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.
Het functievoorschrift wordt:

$f(x) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{8}(x-3)\right) + 175$

Opgave 4

Bekijk de sinusoïde.



Figuur 7.6

Maak er een functievoorschrift bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.

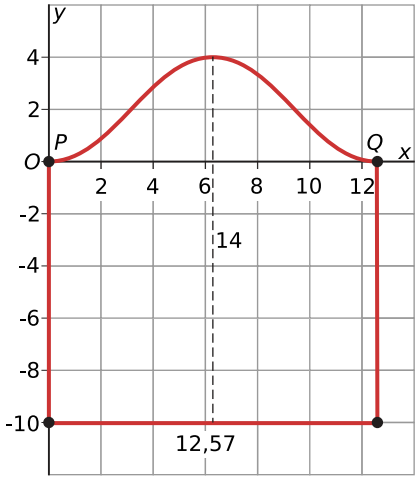
Opgave 5

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave een functievoorschrift uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Als je een cilinder met een diameter van 4 cm over het cirkeloppervlak dwars door het midden snijdt en vervolgens openknipt en plat neerlegt, krijg je de afgebeelde figuur. Er is bovendien een assenstelsel gekozen. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten (0,0) heeft.



Figuur 7.7

Antwoord

De assen zie je in de figuur. Er geldt:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π.
De formule wordt: $y = 2\cos(0{,}5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0; 4\pi]$.

Opgave 6

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 2 op pagina 287**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

Opgave 7

De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit **Voorbeeld 2 op pagina 287** in de punten C en D.
Bereken exact de lengte van lijnstuk CD.

Opgave 8

Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand van de figuur in **Voorbeeld 2 op pagina 287** in A en B.
Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Oefenen

Opgave 9

Op 24 november 2015 werd verwacht dat op 15 december 2016 het waterpeil bij Hoek van Holland de hoogste stand van 1,30 m boven NAP zou hebben om 3:05 uur en om 15:23 uur. De laagste stand was die dan ongeveer - 0,50 m. Er werd een model opgesteld van het getij, hierbij werd een sinusoïde $h(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$ gebruikt voor de hoogte van de waterstand in cm met t in uren.

Stel zelf dit model op.

Opgave 10

Gegeven zijn karakteristieken van sinusoïden. Stel een passend functievoorschrift op met een sinus.

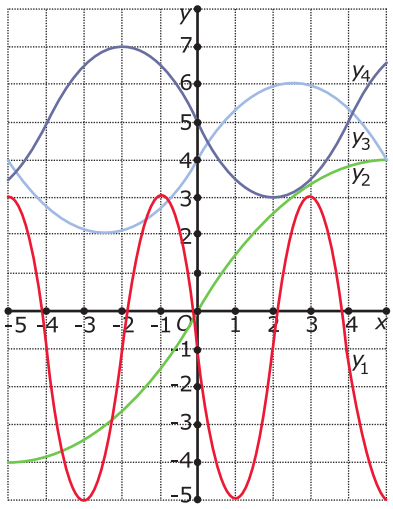
a De amplitude is 3, de periode is π, de evenwichtslijn is - 1 en het maximum bevindt zich op $x = \frac{\pi}{2}$.

b De amplitude is 5, de periode is 2, de evenwichtslijn is 2 en het maximum bevindt zich op $x = 1{,}5$.

c De amplitude is 2, de periode is 6, de evenwichtslijn is 0 en het maximum bevindt zich op $x = 3$.

Opgave 11

Stel bij de vier sinusoïden in de afbeelding een passend functievoorschrift op met een sinus.



Figuur 7.8

Opgave 12

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$ en de amplitude is 2. De periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

a Stel een formule op voor $f(x)$.

b Bereken exact met die formule $f(0)$.

c Los op: $f(x) \leq 0$

Opgave 13

De menselijke ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toenemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

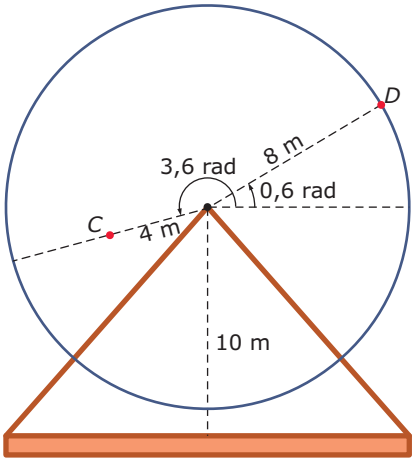
a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Bepaal de evenwichtslijn, de periode en de amplitude van deze sinusoïde.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

Toepassen

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in de rondte, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ heeft stoeltje D een kwartcirkel vanaf de grond gedraaid. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 7.9

Opgave 14

Bekijk de beschrijving van de stoeltjes in een draaiend reuzenrad.

a Bekijk de figuur. Bereken bij deze stand de hoogte van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D en ook van stoeltje C.

Opgave 15

Bekijk nog eens goed de gegevens van stoeltje C.

a Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413{,}25$? Geef je antwoord in meter. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Hoeveel seconden zit je in stoeltje C elk rondje boven de 12 meter?

Testen

Opgave 16

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(20{,}300)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(32{,}400)$.

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot 60.

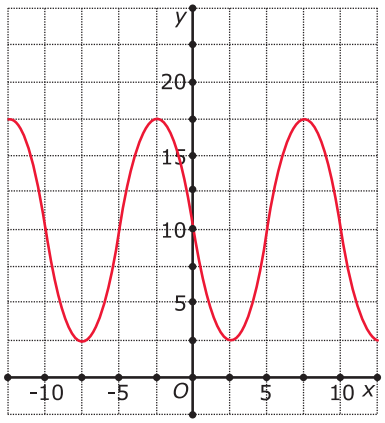
b Stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los exact op: $f(x) = 325$.

Opgave 17

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op.



Figuur 7.10

7.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- radialen — standaard sinusfunctie — standaard cosinusfunctie;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving;
- periodiek model.

Activiteitenlijst

- de standaard sinusgrafiek en de standaard cosinusgrafiek tekenen en werken met hun periodiciteit — werken met exacte waarden;
- vergelijkingen bij de standaardsinus en standaardcosinus oplossen, exact (met arcsin, arccos) en met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Bepaal het bereik van f en maak de grafiek van f.

b Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

Los algebraïsch op. Geef waar mogelijk exacte antwoorden, rond anders af op twee decimalen.

a $2\sin(x) = \sqrt{2}$

b $\cos(x) = \cos(2)$

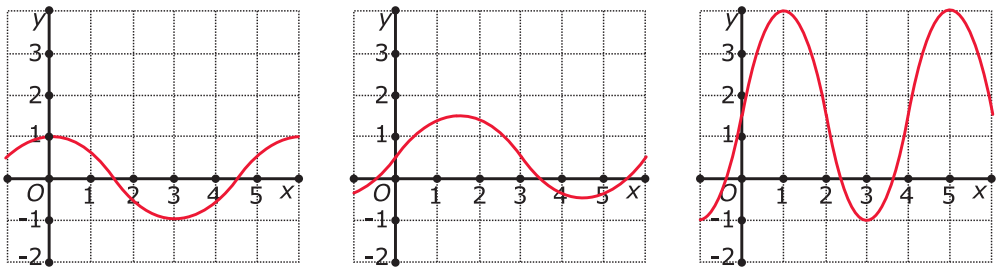
c $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

d $2\cos(x) + 4 = 5$

e $25 + 10\cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

Bekijk de sinusoïden. Geef een bijpassend functievoorschrift.



I II III

Figuur 7.1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$y = 0{,}4 + 1{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP. Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten minimaal zijn? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$P = 50 + 50 \sin(0{,}212769t - 1{,}042563)$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

a Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de schijngestalte van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

nieuwe maan 0% zichtbaar | eerste kwartier 50% zichtbaar | volle maan 100% zichtbaar | laatste kwartier 50% zichtbaar | nieuwe maan 0% zichtbaar

Figuur 7.2

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

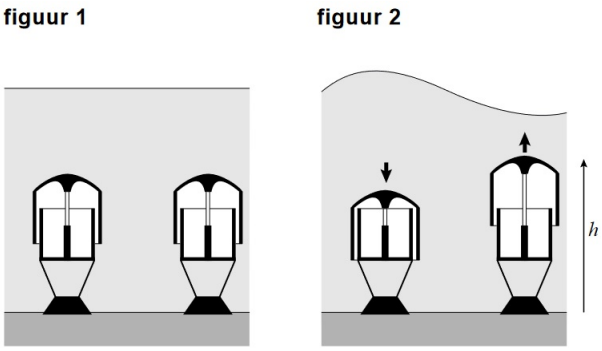
b Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

c Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Opgave 6

De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In figuur 1 zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In figuur 2 zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen. Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.



Figuur 7.3

De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

Neem aan dat de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter.

a Stel voor de hoogte h van de bovenkant van de drijver een formule op van de vorm $h = a + b \cdot \sin(ct)$, waarin t de tijd in seconde en h de hoogte ten opzichte van de zeebodem in m is.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door:

$d = -4{,}0 + 3{,}5 \sin(0{,}5t)$

met d de hoogte in meter en t de tijd in seconde.

De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule:

$w = -A \cos(0{,}5t)$

Hierin is w de waterhoogte in meter, A de amplitude van de golven ($A \geq 0{,}5$) in meter en t de tijd in seconde.

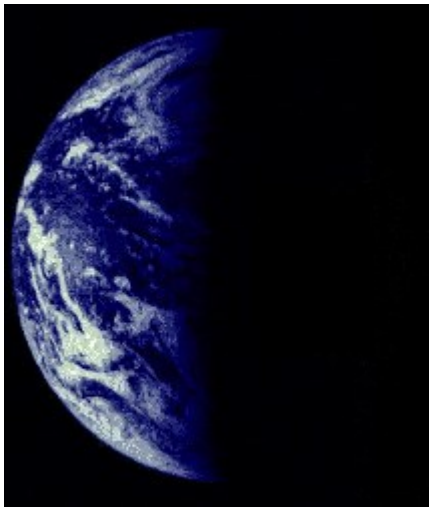
Afhankelijk van de waarde van A kan de drijver soms boven water uitsteken.

b Onderzoek met behulp van grafieken bij welke waarden van A dit het geval is. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

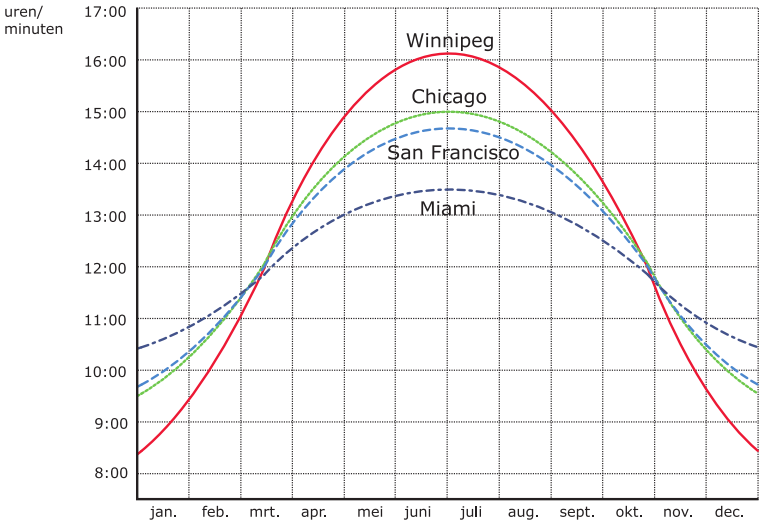
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.



Figuur 7.4

Via internet kun je een **actuele tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt** vinden. Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken. Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de lengte dag en de kortste dag berekenen...

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op Aarde. Dat komt omdat de Aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de Aardbaan om de Zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 7.5

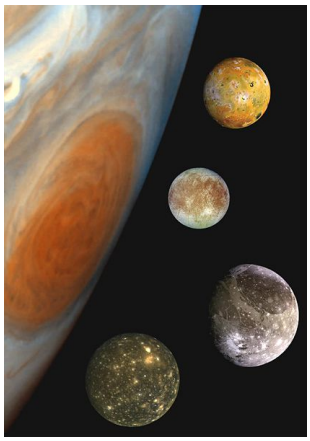
a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008. Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.



Figuur 7.6

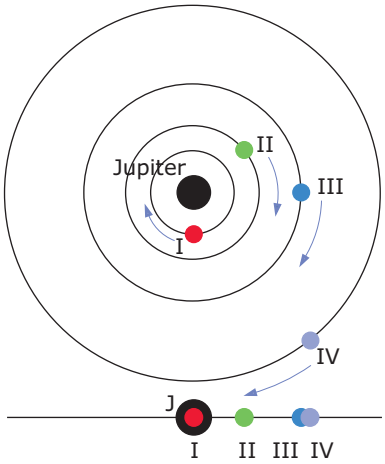
Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{29.5}(t-17)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 sep 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen. En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hum cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen. Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0{,}365(t-24))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)



Figuur 7.7

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

Opgave 9: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoïden.

Figuur 7.8

a Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

b Waarom is dat zo?

c Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.

8

Modelleren

8.1 Een model opstellen 298
8.2 Optimaliseren 306
8.3 Dynamische modellen 313
8.4 Onderzoeksopdrachten 320

8.1 Een model opstellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met allerlei functies;
- meetkundige technieken zoals de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, met sinus, cosinus, tangens.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wilt berekenen hoe ver deze persoon theoretisch over het aardoppervlak kan kijken. Welke eigenschappen (van de situatie) komen hierbij kijken?

Uitleg

Probleem:
“Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) over het aardoppervlak kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de uitleg. De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

a Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.

b Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ, met Q op het aardoppervlak. Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.

c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?

d Welke eigenschap heeft driehoek MPR? Probeer daar een verklaring voor te vinden.

e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a. Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in ΔMPR.

a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.

De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.

b Hoe kun je daarmee rekening houden?

c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de uitleg op te lossen:
Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a. De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR. En die kun je uitrekenen in driehoek MPR.

a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.

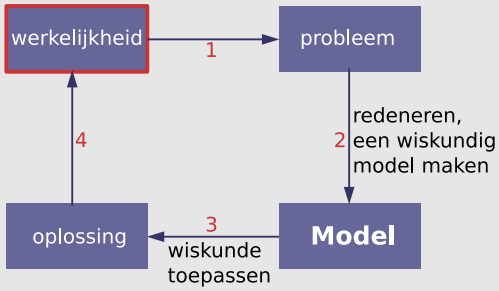
b Waarom is nu het probleem opgelost?

c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.
Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.



Figuur 8.1

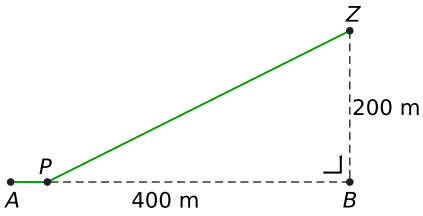
1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De **lijst met mogelijke vragen** kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: zwemmer in nood

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij (punt A). Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer (bij Z) die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?



Figuur 8.2

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid 5,4 km/h.

Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen. Bekijk daarna de opgaven.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 300** zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?

b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?

c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP. Noem die lengte bijvoorbeeld x.

e Stel een formule op voor de totale tijd T die nodig is om Z te bereiken vanuit A.

f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 300** en de opgave over het 'zwemmer in nood' probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?

b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?

c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?

d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?

e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).

Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:
$P = c \cdot m \cdot v^2$

Hierin is:
- P het vermogen in kilowattuur (kWh)
- m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde
- v de windsnelheid in meter per seconde (m/s)

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v.

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m^3.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 301**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

a Welke aannames zijn er gedaan?

b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.

c Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.

d Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Oefenen

Opgave 7

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord? Dit in vergelijking met het leggen van de kabel op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden.

a Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.

b Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.

c Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.

Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieselversie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieselversie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieselversie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

a Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.

b Welke oplossing vind je?

c Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) 52,37° en 40000 km.

Opgave 10

Je ziet hier een locomotief van Marklin of Fleischmann, die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

Figuur 8.3

Opgave 11

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule:
$W = 0{,}03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S$.

Hierin is:

- W het gewicht in kg
- S het vleugeloppervlak in m^2
- V de kruissnelheid in m/s
- d de luchtdichtheid in kg/m^3

a Ga uit van een luchtdichtheid van 0,421 kg/m^3. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid 700 km/h is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.

b Een vliegtuig met een kruissnelheid van 250 m/s en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?

c In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van 0,369 kg/m^3. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V. Wat is de evenredigheidsconstante?

d Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig 1,4 keer zo groot wordt?

Toepassen

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 $watt/m^2$.

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a. Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € 0,15 per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost. Neem nu per jaar:

- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € 50,00 per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € 0,15 per kWh.

Opgave 12

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in.

a Welke formule geldt voor de lichtsterkte in dit punt?
Neem aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.

b Welke twee voorwaarden leveren de formules bij a op?

Opgave 13

Bekijk de vorige opgave. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden. De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0{,}15\right)$$

a Laat zien hoe je aan deze formule komt.

b Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Testen

Opgave 14

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.
Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

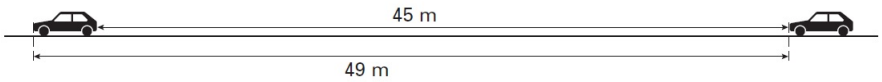
$$k = k_{\max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right)$$

Hierin is:

- v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur
- v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt
- k de verkeersdichtheid
- k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg

Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: ‘Houd 2 seconden afstand’.



Figuur 8.4

a Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.
Ga uit uit van de volgende situatie.
Op een weg is $v_{max} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

b Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vraag gaat over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{max} = 250$ en $v_{max} = 160$.

c Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v. Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is

8.2 Optimaliseren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met functies en hun afgeleiden, alle differentieerregels;
- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Verkennen

Opgave V1

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Probleem:
"Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?"

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.
Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2. Met deze gegevens maak je een figuur.
Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000$ m^2. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg op pagina 306**.

a Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000$ m^2 is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.

b Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg op pagina 306**.
Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie.
Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.

Als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft kun je daarna in veel gevallen verder met behulp van differentiëren.

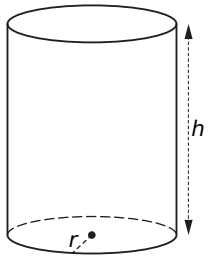
In erg lastige gevallen kun je GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine inschakelen om de optimale oplossing te vinden.
In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$



Figuur 8.1

Omdat gegeven is dat $I = 1000$ cm^3 kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r.

De formule voor $A(r)$ kun je differentiëren.
Door die afgeleide gelijk aan 0 te stellen bepaal je de extremen.
Je vindt dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 3

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1 op pagina 307**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?

c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.

d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3.

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x.
Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$.
Deze variabelen hangen allemaal af van x.

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2 op pagina 308**. Kies voor x het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x.

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

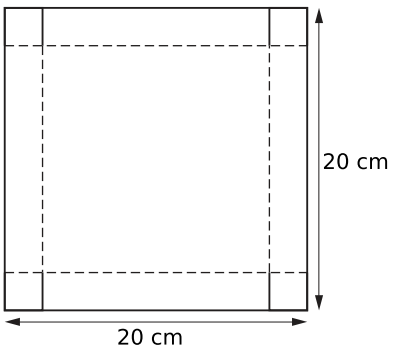
Oefenen

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?

b Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.



Figuur 8.2

Opgave 8

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.

Figuur 8.3

Opgave 9

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q ($\times 1000$) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

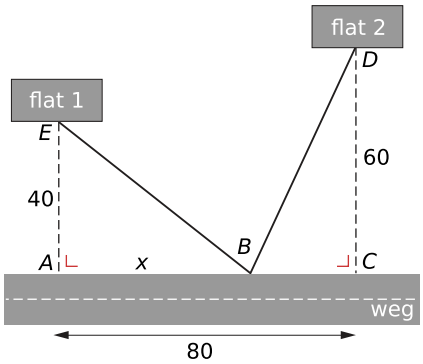
c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.
Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.



Figuur 8.4

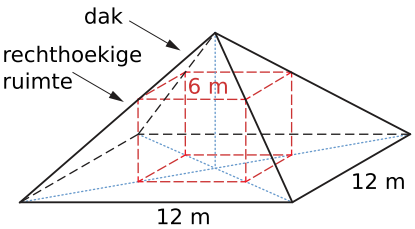
a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

b Bereken de totale lengte L in meter.

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 8.5

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Opgave 12

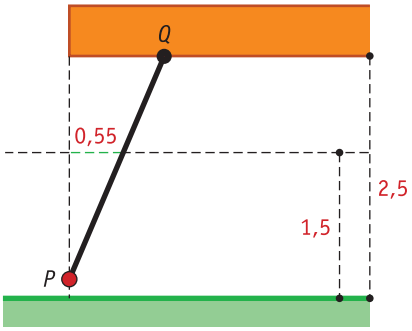
De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Toepassen

Bekijk de applet: garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 8.6

Opgave 13

Bekijk het probleem in **Toepassen op pagina 311**.

a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A, beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

$$A = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2{,}5^2 - x^2}$$

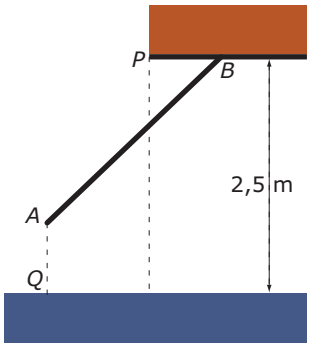
b Probeer zelf de formule voor A als functie van x af te leiden.

c Bereken voor welke x de waarde van A maximaal is.

Opgave 14

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB.

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 8.7

Testen

Opgave 15

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Los het geschetste probleem op.

Opgave 16

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

8.3 Dynamische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met dynamische modellen in eenvoudige situaties;
- discrete dynamische modellen doorrekenen;
- enkele handreikingen voor het opstellen van een discreet dynamisch model.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties, de modelcyclus;
- werken met formules, veranderingen, toenames en differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt is er sprake van gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun geworden. Je begint op een bepaalde dag met 100.000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?

Figuur 8.1

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt, zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieke mensen steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is vier dagen. Daarna ben je voor langere tijd immuun, je kunt deze griep dan niet langer meer krijgen. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek zijn en 500 immuun. Hoe verloopt het aantal zieken per dag, hoeveel is dit maximaal?

Bij het opstellen van een wiskundig model voor het verloop van de griep moet je bedenken met welke factoren je rekening moet houden. In een eenvoudig griepmodel wordt alleen gerekend met:

- $G(t)$ is het aantal gezonde personen op zeker tijdstip t
- $Z(t)$ is het aantal zieken op dat tijdstip
- $I(t)$ is het aantal immune personen op dat tijdstip

Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$. De modelformules zijn bijvoorbeeld:

- $G(t + 1) = G(t) - 0{,}2Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0{,}25Z(t) + 0{,}2Z(t) = 0{,}95Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0{,}25Z(t)$

Er wordt dan aangenomen dat dagelijks 20% van alle zieken een gezond iemand aansteekt (ziek maakt) en dat per dag 25% van alle zieken gezond wordt. Je ziet dat dit rekenmodel afhangt van de tijd. Het is daarom een zogenaamd ‘dynamisch model’. In dit geval wordt de tijd in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen.

Opgave 1

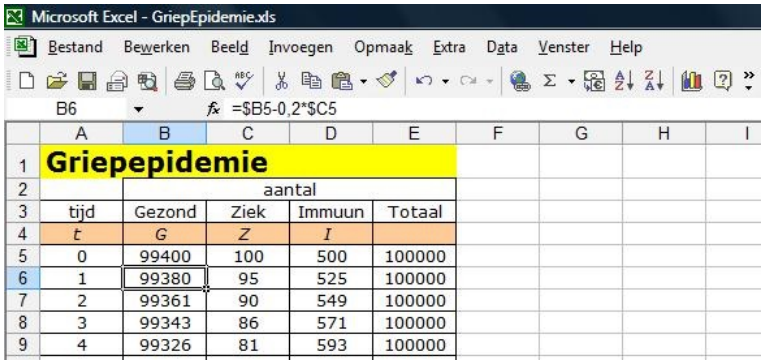
Bekijk het rekenmodel voor een griepepidemie in de **Uitleg op pagina 313**.

a Waarop is de aanname gebaseerd dat gemiddeld elke dag 25% van de zieken weer gezond (en dus immuun) wordt?

Bij het in de uitleg bedachte rekenmodel wordt ervan uitgegaan dat dagelijks 20% van het aantal zieken een nieuwe zieke oplevert door besmetting.

b In welke van de drie modelformules vind je dit (na vereenvoudiging) terug?

De bedenker van het rekenmodel heeft het bestand **Griepepidemie** gemaakt om het verloop van de griepepidemie door te rekenen.



	A	B	C	D	E
1	Griepepidemie				
2		aantal			
3	tijd	Gezond	Ziek	Immuun	Totaal
4	*t*	*G*	*Z*	*I*	
5	0	99400	100	500	100000
6	1	99380	95	525	100000
7	2	99361	90	549	100000
8	3	99343	86	571	100000
9	4	99326	81	593	100000

Figuur 8.2

c In cel B6 staat de formule: =$B5-0,2*$C5
Leg uit dat dit overeenkomt met de formule: $G(t+1) = G(t) - 0{,}2 \cdot Z(t)$
Wat staat er in cel C6? En in cel D6?

d Hoe gaat de griepepidemie verlopen? Maak een tabel tot $t = 6$.

e Hoe zit het nu met het maximale aantal zieken? Lijkt het model erg realistisch?

Opgave 2

Bij nader inzien lijkt het beschreven model niet goed te zijn: het aantal personen dat ziek wordt gemaakt door iemand die al ziek is, hangt natuurlijk vooral af van het aantal gezonde mensen (alleen die kunnen nog ziek worden). Dat zal geen vast percentage van het aantal zieken zijn. Dit hangt eerder af van het percentage gezonde mensen waarmee een zieke in contact komt en de kans dat dan ook de ziekte wordt overgedragen.

Het rekenblad in Excel wordt daarom wat aangepast. In cel C6 komt nu =$C5-0,25*$C5+0,02*0,5*$B5. Hieruit blijkt dat de kans dat de ziekte wordt overgedragen van een zieke op iemand die gezond is, op 50% is gesteld.

a Hoe groot is het percentage gezonde mensen waarmee een zieke volgens dit model in contact komt?

b Schrijf de drie bijbehorende modelformules op.

Dit verbeterde rekenmodel voor de griepepidemie is vertaald in het bestand **Griepepidemie2**.

c Hoe gaat de griepepidemie nu verlopen? Maak de tabel verder af.

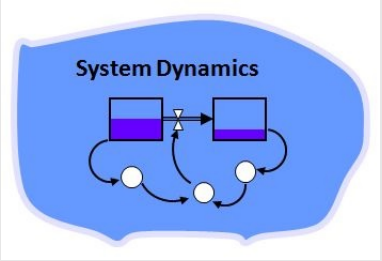
d Lijkt dit model realistischer? Of zou je nog aanpassingen willen aanbrengen? En zo ja, welke dan?

e Kun je een manier verzinnen om het model te testen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder een **dynamisch model** versta je een rekenmodel waarin de variabelen afhangen van de tijd. Het beschreven model van een griepepidemie is daarvan een goed voorbeeld. De variabelen G (aantal gezonde personen), Z (aantal zieke personen) en I (aantal personen dat immuun is geworden, dus beter is geworden na de griep te hebben gehad) hangen alle drie af van de tijd t.
De tijd wordt in stappen van telkens $\Delta t = 1$ dag doorlopen. Daarom heet dit wel een discreet dynamisch model. In dit model loopt de tijd dus niet in vaste stappen door. Dit in tegenstelling tot een continu dynamisch model, waarin de tijd vloeiend doorloopt.



Figuur 8.3

Voorbeeld 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 L/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 badwater vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.
Na hoeveel uur is de chloorconcentratie gehalveerd?

Antwoord

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uur is en C in L/m^3.
Ga ervan uit dat telkens het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is, waar je ook meet.
Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dus geldt de modelvergelijking: $C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) = 0{,}940 \cdot C(t)$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.
Je vindt dan: $C(1) = 0{,}940 \cdot C(0)$, $C(2) = 0{,}940 \cdot C(1) = 0{,}940^2 \cdot C(0)$, $C(3) = 0{,}940 \cdot C(2) = 0{,}940^3 \cdot C(0)$, enzovoort. Door steeds maar door te blijven rekenen bepaal je na hoeveel minuten C is gehalveerd.
De halveringstijd is ongeveer 11,2 uur.

Zie het bestand **Modelzwembad**.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 315** wordt beschreven hoe het water van een groot zwembad wordt ververst, omdat de chloorconcentratie te hoog is. Hier dient een discreet dynamisch model als benadering van het voortdurende verversingsproces (uitstromen van vuil water en instromen van schoon water).

a Waarom is dit geen discreet model?

b Stel je kijkt om het uur naar het verversingsproces. Leg uit waarom er het eerste uur 60 liter chloor verdwijnt. Verklaar waarom er het tweede uur 56,4 liter chloor verdwijnt.

c Leg uit waarom $\Delta C(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

d Maak handmatig een tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste vier uur.

e Na hoeveel uur is C met meer dan 60% afgenomen?

f Je kunt op het werkblad de chloorconcentratie aanpassen.

Wat gebeurt er als de chloorconcentratie twee keer zo groot wordt?

Opgave 4

Bekijk opnieuw het verversen van het water in het zwembad in **Voorbeeld 1 op pagina 315**. Neem nu aan dat elke minuut badwater wordt vervangen door 0,8 m^3 schoon water. Neem $\Delta t = 1$ minuut.

a Hoeveel chloor verdwijnt er de eerste minuut? En de tweede minuut?

b Hoe ziet je modelvergelijking er in deze situatie uit?

c Maak een nieuwe tabel voor de afname van de chloorconcentratie voor de eerste 5 minuten.

d Na hoeveel tijd is de chloorconcentratie gehalveerd?

Voorbeeld 2

Je verwarmt water tot 100 °C. Als je het in een kopje overgiet, begint het af te koelen. Volgens de warmtewet van Newton is de temperatuursverandering recht evenredig met het temperatuursverschil met de omgeving. Stel dat het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 20 °C, hoe kun je dit afkoelingsproces dan beschrijven?

Antwoord

Noem de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten.
Het temperatuursverschil met de omgeving is dan $T(t) - 20$.
Volgens de warmtewet van Newton is dan: $T(t+1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$
c is een parameter van het afkoelingsproces die je alleen door meten in een echt experiment kunt bepalen.
Eigenlijk is ook de begintemperatuur een parameter, want waarschijnlijk is het water al bij overgieten niet meer precies 100 °C.

In het bestand **ModelAfkoelen** kun je nagaan hoe het afkoelen verloopt als c is gemeten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 316** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

Daarin zie je de modelformule: $T(t+1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$

a Neem $c = 0{,}15$. Maak een tabel met de temperaturen van het water in het kopje voor de eerste 5 minuten.

b Als het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 19 °C, wat wordt dan de modelformule?

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 316** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

a Probeer te beschrijven hoe het afkoelingsproces verloopt. Misschien ben je in de gelegenheid om metingen te verrichten aan het afkoelen van kokend water.

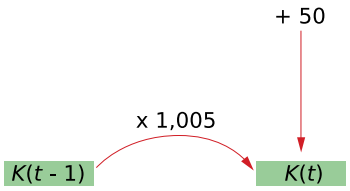
b Als je metingen hebt kunnen verrichten, dan heb je een tabel waar een grafiek van T bij past. Probeer door aanpassen van c die grafiek met je Excelwerkblad te benaderen. Waarvan zal c afhangen?

c Je kunt (afhankelijk van je metingen) de stapgrootte aanpassen naar bijvoorbeeld 2 minuten. Dan moet wel de factor c kleiner worden genomen. Experimenteer daarmee. Welke waarden voor c passen bij deze stapgrootte?

Oefenen

Opgave 7

Je hebt op 1 januari 2015 een saldo van € 1240,00. En je besluit dat geld op een spaarrekening te zetten. Verder maak je aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Je krijgt aan het eind van elke maand 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt voorlopig geen geld van deze spaarrekening en je doet ook geen andere stortingen.



Figuur 8.4

a Bereken het saldo op 1 april 2015.

b Leg uit dat het saldo K van je bankrekening t maanden na 1 januari 2015 kan worden berekend door $K(t+1) = K(t) \cdot 1{,}005 + 50$ met $K(0) = 1240$.

c Bereken het saldo op 1 juli 2015.

Opgave 8

Staatsbosbeheer heeft een bepaald perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaren zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben wordt er jaarlijks maar 18% van de bomen gekapt en worden er 1000 aangeplant. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.

Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel en maak een tabel van het verloop van de eerste zes jaren ervan.

Opgave 9

In 2005 leefden er in een natuurgebied 5000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

a Ontwerp een dynamisch groeimodel voor het aantal konijnen K waarin t het aantal jaren na 2005 is.

b Maak een tabel van de groei van het aantal konijnen in de loop van de tijd. Van wat voor soort groei is er sprake?

c Na hoeveel jaar zullen er voor het eerst meer dan 15000 konijnen zijn?

Deze groei van het aantal konijnen kan niet onbeperkt doorgaan. In dit natuurgebied is slechts plaats voor een beperkt aantal konijnen. Een onderzoeker heeft een aangepast groeimodel opgesteld. Daarin is $K(t+1) = c \cdot K(t)(8000 - K(t))$, waarin $K(0) = 5000$. Dit model blijkt in 2006 precies hetzelfde geschatte aantal konijnen op te leveren als het model dat je bij a hebt ontworpen en ook in de daarop volgende jaren redelijk bij dat model te passen.

d Welke waarde moet c dan hebben?

e Maak voor dit aangepaste groeimodel een tabel van het aantal konijnen in de loop van de tijd.

Opgave 10

Als je melk uit de koelkast haalt en in een glas schenkt, loopt de temperatuur op vanaf $T(0) = 6$ °C (de temperatuur binnen de koelkast) naar de kamertemperatuur van 20 °C. De toename van de temperatuur per minuut is recht evenredig met het temperatuursverschil met de omgeving.

a Leg uit dat hieruit deze modelformule is af te leiden: $T(t+1) = T(t) + c \cdot (20 - T(t))$, waarin t het aantal minuten is.

Neem aan dat $c = 0{,}1$.

b Bepaal na hoeveel minuten de temperatuur van de melk minder dan 1 °C verschilt van de kamertemperatuur.

c Laat zien hoe de grenswaarde uit de gegeven modelformule is af te leiden.

Opgave 11

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci (ongeveer 1180-1250) geeft in zijn boek 'Liber Abaci' uit 1202 het volgende raadsel weer:
'In een afgesloten gebied zet ik één paar konijnen. Dit paar werpt elke maand één paar jongen. Al die jongen krijgen op hun beurt ook weer jonge konijntjes, maar pas vanaf hun tweede levensmaand en dan ook weer elke maand één paar jongen. Hoeveel paren konijnen zijn er nu na één jaar?'

a Stel een dynamisch rekenmodel op voor het aantal paren konijnen A na n maanden.

b Beantwoord de vraag die Leonardo van Pisa in zijn raadsel stelt.

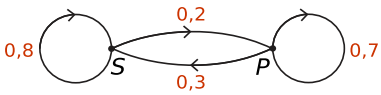
c Hoeveel paren konijnen (die meteen elke maand één paar jongen krijgen) zijn er in het begin in het afgesloten gebied gezet, als er na een jaar 1131 paren konijnen zijn?

Toepassen

Onder verstedelijking wordt de trek van de bevolking van een bepaalde regio van het platteland naar de steden verstaan. De tabel geeft daarover informatie voor deze regio (S = stedelijk gebied, P = platteland). Daarin zie je bijvoorbeeld dat 30% van de plattelandsbevolking jaarlijks naar de stad trekt.
Onderzoek of er een evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland.

		van	
		S	P
naar	S	0,8	0,2
	P	0,2	0,7

Tabel 8.1



Figuur 8.5

Er zijn nu twee variabelen $S(t)$ (het percentage mensen in stedelijke gebieden in deze regio) en $P(t)$ (het percentage plattelanders in deze regio). Daarbij neem je aan dat er geen mensen van buiten de regio een rol spelen en dat de bevolking constant blijft. (Je kunt ook wel met één variabele werken, want $P(t) = 100 - S(t)$.)
Mogelijke modelformules zijn:

- $S(t+1) = S(t) + \Delta S(t) = S(t) - 0{,}20 \cdot S(t) + 0{,}30 \cdot P(t) = 0{,}80S(t) + 0{,}30P(t)$
- $P(t+1) = P(t) + \Delta P(t) = P(t) - 0{,}30 \cdot P(t) + 0{,}20 \cdot S(t) = 0{,}20S(t) + 0{,}70P(t)$

Hiermee kun je het bestand **ModelMigratie** opstellen.
De startpercentages zijn nog te kiezen. Ga na dat ze geen invloed hebben op het evenwicht dat ontstaat.

Opgave 12

In **Toepassen op pagina 318** wordt een sterk vereenvoudigd model van een migratieproces beschreven.

a Hoeveel procent van de bevolking in de stad trekt jaarlijks naar het platteland?

b In de tekst staat dat je ook met één modelformule zou kunnen werken voor dit migratieproces. Welke?

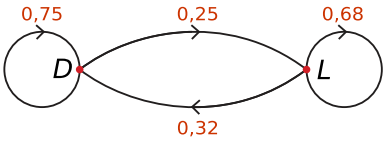
c Ga ervan uit dat in 1980 45% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er te gaan ontstaan?

d Ga er nu van uit dat in 1980 40% van de bevolking in de stad woonde. Welk evenwicht lijkt er nu te ontstaan? Wat valt op?

e In werkelijkheid moet je ook rekening houden met mensen die buiten de regio toestromen of wegstromen. Kun je een model ontwerpen waarbij je ook daarmee rekening houdt?

Opgave 13: Browsers

In het begin van het internettijdperk was er een tijdje een concurrentiestrijd tussen twee populaire internetbrowsers, noem ze bijvoorbeeld 'Discoverer' en 'Landscape'. De gebruikers van deze internetbrowsers zagen jaarlijks reikhalzend uit naar de nieuwste versie van de Discoverer of Landscape. Maar sommige gebruikers wisselden ook nogal eens van browser. In deze graaf zie je de wisselingen voor een bepaald jaar. In dat jaar werd onderzocht wat er zou gebeuren als deze vervangingen en wisselingen elk jaar zo zouden doorgaan.



Figuur 8.6

a Stel bij deze situatie een rekenmodel op. Noem het aantal gebruikers van de Discoverer $D(t)$ en dat Landscape $L(t)$ en neem $\Delta t = 1$ jaar. Ga ervan uit dat $D(0) = 0{,}5$ en $L(0) = 0{,}5$.

b Bepaal hoeveel procent van de gebruikers uiteindelijk de Discoverer zal gebruiken als dit rekenmodel geldig zou zijn gebleven.

Testen

Opgave 14

Iemand heeft een miljoen op de bank gezet tegen een rente van 0,30% per maand. Hij gaat er van leven en haalt maandelijks € 1500 van deze rekening voor zijn levensonderhoud.

a Stel hierbij een dynamisch rekenmodel op.

b Teken een bijpassende grafiek en bepaal daarmee of zijn saldo $S(t)$ naar een grenswaarde toegroeit.

Opgave 15

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan gaan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei gaan afnemen naarmate het aantal meervallen dichter bij de 5000 komt.
De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000:
$\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t)$,
waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

Figuur 8.7

a Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende formule: $N_{t+1} = (1 - c) \cdot N_t + 5000 \cdot c$.

b Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c.

c Teken een grafiek van N_t. Vanaf welk moment gaat het aantal meervallen minder snel toenemen?

8.4 Onderzoeksopdrachten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

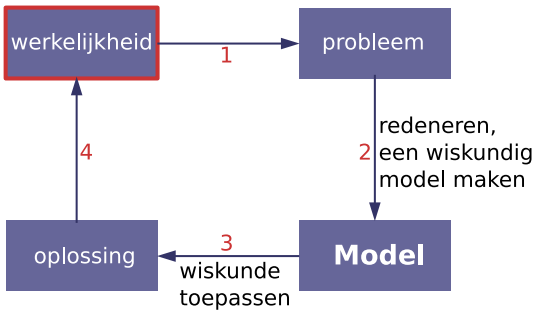
- onderzoeksopdrachten uitvoeren.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Uitleg

Het is nu de bedoeling dat je zelf wat complexere opdrachten aanpakt.
Dit worden **onderzoeksopdrachten** genoemd.
In dergelijke opdrachten wordt een situatie beschreven waarin de wiskunde je kan helpen bij het vinden van een geschikte oplossing. Welke wiskunde dat is en hoe die oplossing tot stand kan komen, moet je zelf onderzoeken. Denk daarbij aan de modelleercyclus en de **lijst met mogelijke vragen** om je te helpen.



Figuur 8.1

Omdat het de bedoeling is dat je hier zelf onderzoek doet, vind je geen uitgebreide antwoorden bij deze opgaven!

Toepassen

De volgende opdrachten zijn bedoeld als **onderzoeksopdrachten**. De bedoeling is dat je zelf een onderzoekje doet, mogelijk zelfs met een eigen experiment. Daarvan maak je een uitgebreid onderzoeksverslag. Je vindt dan ook geen uitgebreide uitwerkingen bij deze opgaven.

Opgave 1: Elektrisch rijden?

Het rijden in een auto kost geld. Je maakt kosten vanwege de brandstof of de elektriciteit, maar ook betaal je wegenbelasting, verzekering, en dergelijke. En tenslotte moet je de auto kopen en ook dat kost geld. Ga na wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Figuur 8.2

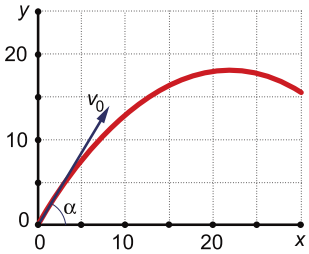
Hier heb je enkele gegevens om mee te werken:

- Smart fortwo op benzine:
  - benzine kost € 1,60 per liter;
  - je rijdt gemiddeld 20 km per liter benzine;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 2000,=;
  - de aanschafprijs is € 15000,=.
- Smart fortwo op elektriciteit:
  - elektriciteit kost € 0,20 per kWh;
  - de maximale accucapaciteit is € 17,6 kWh;
  - met de maximale accucapaciteit rijd je gemiddeld 140 km;
  - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 1200,=;
  - de aanschafprijs is € 22000,=.

Maar het is natuurlijk leuker om met actuele gegevens te werken en je 'eigen' type auto te kiezen! Bereken van een bepaald merk auto wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Opgave 2: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.
Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α.



Figuur 8.3

De snelheid in de x-richting is $v_0 \cos(\alpha)$.
De snelheid in de y-richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.
Dus is:

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \text{ en } y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9{,}81$ m/s^2.
Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**.

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze **simulatie van de kogelbaan**.

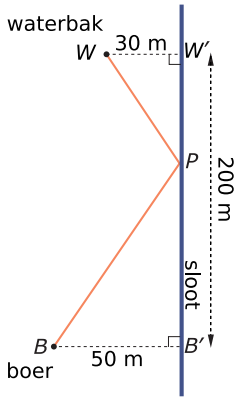
a Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.

b Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0, α en g.

c Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g.

Opgave 3: Kortste weg of snelste weg?

Een boer wil water naar de waterbak brengen die voor zijn paarden is bestemd. Hij haalt dat uit de sloot met behulp van een emmer. Daarbij neemt hij ofwel de kortste weg, ofwel de snelste weg. In de figuur hiernaast is een bovenaanzicht van de situatie getekend met de afstanden er in aangegeven.



Figuur 8.4

a Bepaal de kortste weg van B naar W via de sloot.

Met een lege emmer loopt de boer met een snelheid van 3 m/s, met een volle emmer met een snelheid van 1 m/s.

b Bepaal de snelste weg van B naar W via de sloot.

Opgave 4: Geremde exponentiële groei

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

Figuur 8.5

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
N	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 8.1

a Ga na dat deze groep fruitvliegjes in het begin exponentieel groeit.
Met welk percentage par dag?

Er blijkt uiteindelijk toch geen sprake te zijn van exponentiële groei. N nadert de 350 fruitvliegjes.

De bijpassende formule heeft daardoor de vorm: $N = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

b Stel de formule op die bij deze tabel past.
Bereken bij welke waarde van t de groeisnelheid maximaal is.

c Probeer bij de groei van de mensheid zo'n geremd exponentieel groeimodel op te stellen.

Opgave 5: Filevorming

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.

Figuur 8.6

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond van deze aannames een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v. Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

Opgave 6: Prooi-, roofdiercyclus

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen, heten prooi-roofdiermodellen. De Italiaanse wiskundige Vito Volterra en de Amerikaanse wiskundige Alfred J. Lotka ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip $t + 1$ is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

$$P(t+1) = P(t) \cdot (a - b \cdot R(t))$$
$$R(t+1) = R(t) \cdot (c + d \cdot P(t))$$

Hierin zijn a, b, c en d positieve getallen.

a Verklaar hoe je in dit model kunt zien dat roofdieren voor minder prooidieren zorgen.

b Stel $a < 1$, wat zou er dan met het aantal prooidieren gebeuren?

c Neem $a = 1{,}08$, $b = 0{,}0015$, $c = 0{,}8$, $d = 0{,}00048$, $P(0) = 600$ en $R(0) = 50$.

Hoeveel prooi- en roofdieren zijn er op $t = 3$?

9

Differentiëren

9.1 Verandering 326
9.2 Het begrip afgeleide 335
9.3 Differentiëren 344
9.4 De kettingregel 354
9.5 De product- en de quotiëntregel 361
9.6 Totaalbeeld 368

9.1 Verandering

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de verandering van een functie herkennen in een grafiek en benoemen;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- grafieken maken bij functies en grafieken aflezen;
- toenemende, afnemende of constante stijging en daling, maximum en minimum in grafieken herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 9.1

Figuur 9.1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

b Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

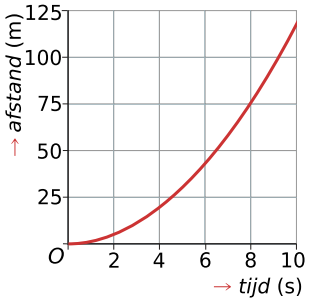
c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode vanaf de 12^e tot de 18^e km.

d Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Opgave V2

Een auto trekt op. De snelheid neemt dus toe. Stel dat je om de 2 seconden de afgelegde afstand opneemt. Je kunt dan een grafiek maken.

Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s (in meter) de formule $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden. Dat de snelheid van de auto toeneemt, kun je aan de grafiek zien.



Figuur 9.2

a Waaraan zie je dat?

b Hoe bereken je gemiddelde snelheid in de eerste seconde? En in de tweede seconde? En de derde seconde?

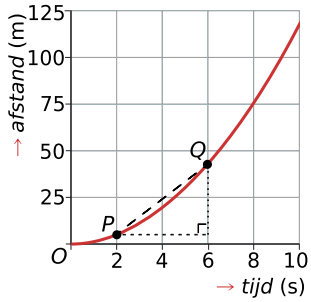
c Hoe geef je die gemiddelde snelheden in de grafiek aan?

d Hoe bepaal je nauwkeurig de snelheid op het moment dat de auto 5 seconden onderweg is?

Uitleg 1

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.



Figuur 9.3

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval [2,6] verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling). De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval. Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

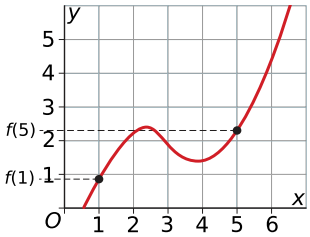
a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval [0,6].

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval [6,10].

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval [1,5].



Figuur 9.4

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,4].

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

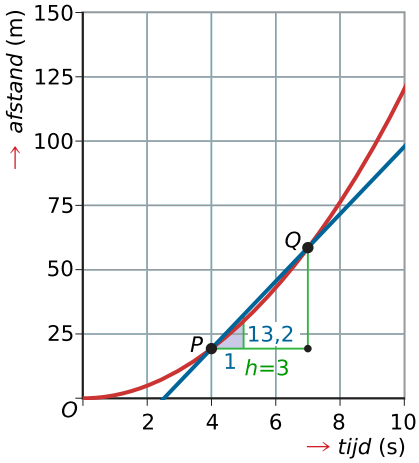
d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Dit is de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde. De wagen gaat steeds sneller rijden.

De snelheid op $t = 4$ bereken je met het differentiequotiënt op het interval $[4{,}4 + h]$ waarbij h steeds dichter bij 0 wordt gekozen: $h \to 0$.



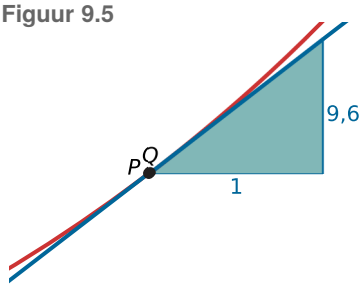
Figuur 9.5

Het differentiequotiënt op dat interval is:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2\cdot(4+h)^2 - 1{,}2\cdot 4^2}{4+h-4}$$

Dat is de gemiddelde snelheid in m/s op het interval $[4{,}4 + h]$. De formule is te herleiden tot:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2\cdot(4+h)^2 - 1{,}2\cdot 4^2}{h} = \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$$



Figuur 9.6

Als $h \to 0$, dan $1{,}2h \to 0$.

$9{,}6 + 1{,}2h$ nadert dan de waarde 9,6 m/s.

Je noemt deze waarde het differentiaalquotiënt op $t = 4$.

En het is de plaatsverandering, de snelheid op $t = 4$: $v(4) = 9{,}6$ m/s.

Dit differentiaalquotiënt is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie in dat punt. En het is de momentane verandering van de functie.

Opgave 3

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1 op pagina 327**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[5{,}5 + h]$, waarin $h \to 0$.

c Hoe wordt de snelheid $t = 5$ zichtbaar in de grafiek?

Opgave 4

Een functie f is gegeven door $f(x) = 5x^2$.

a Bereken de gemiddelde verandering van deze functie op het interval $[2{,}5]$.

b Bereken de momentane verandering van deze functie als $x = 2$.

c Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

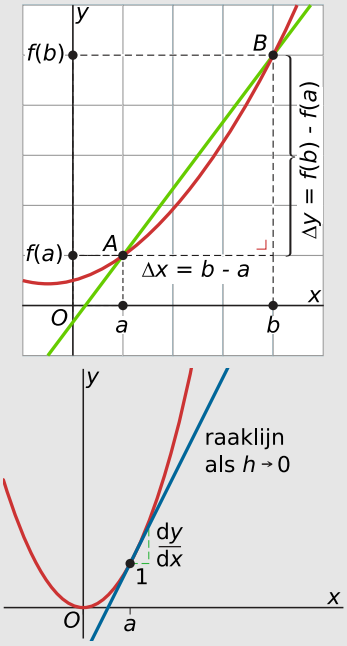
De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.

Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan:

- de helling van lijn AB;
- de richtingscoëfficiënt van lijn AB;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a,b]$.

De **momentane verandering** of de **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door het differentiequotiënt op $[a,a+h]$ te berekenen:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



Figuur 9.7

Na herleiden en $h \to 0$ krijg je dan het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{dy}{dx}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn in het punt van de grafiek met $x = a$.

Voorbeeld 1

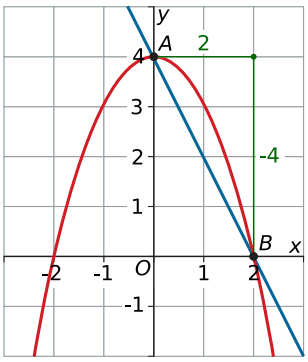
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Het differentiequotiënt is het hellingsgetal van het lijnstuk AB.
Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0,2]$.
Het geeft de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 9.8

Opgave 5

Bekijk Voorbeeld 1 op pagina 329.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,1]$.

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval $[-1,1]$.

Opgave 6

Een hardloper houdt onderweg zijn tussentijden bij.

tijd t (min)	0	10	15	21
afstand s (km)	0	3,5	5,5	8,0

Tabel 9.2

Gedurende de eerste tien minuten liep hij 3,5 km. Gedurende de volgende vijf minuten liep hij 2 km.

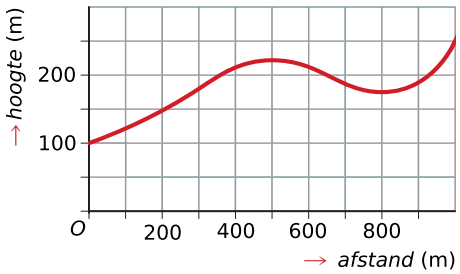
a Op welk van deze twee tijdsintervallen liep hij het snelst?

b Wat is de gemiddelde snelheid in kilometer per uur van deze hardloper over de eerste 3 kilometer?

c Als deze hardloper de hele 8 kilometer met een constante snelheid loopt, wie van de twee hardlopers is dan het snelst?

Opgave 7

Bij het begin van een berg staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft die berg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.



Figuur 9.9

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele berg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval [400,500] ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze berg.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Bereken het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$.
Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[3,3 + h]$ is

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h}$

$= \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$ (mits $h \neq 0$).

Als $h \to 0$, dan $6 + h \to 6$.

Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ is dus $f'(3) = 6$.

Het getal 6 is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.

Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door het (raak)punt $(3,9)$. Dus $9 = 6 \cdot 3 + b$ en $b = -9$.

De vergelijking van de gevraagde raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2 op pagina 330** zie je hoe bij $f(x) = x^2$ het differentiaalquotiënt wordt berekend voor $x = 3$.

a Leg uit dat dit differentiaalquotiënt de momentane verandering van f voorstelt.

b Bereken de momentane verandering op $x = 4$ van functie f

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

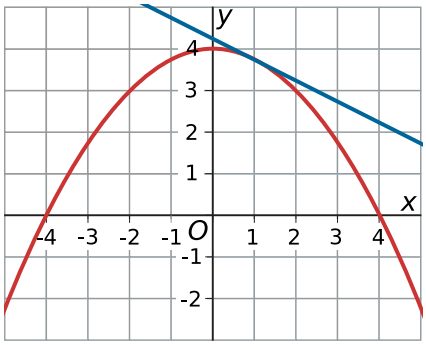
Opgave 9

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ op het domein $[-5,5]$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[1,1 + h]$.

b Welk hellingsgetal heeft de raaklijn aan grafiek van f voor $x = 1$?

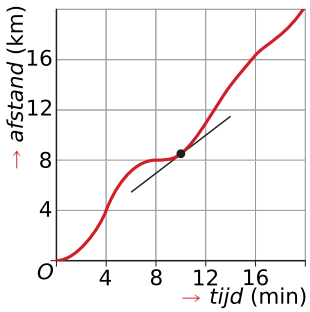
c Dit hellingsgetal is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$.
Stel een vergelijking van die raaklijn op.



Figuur 9.10

Voorbeeld 3

Je ziet de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t. Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na vier minuten maximaal is. De grafiek gaat daar van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Daarna neemt de snelheid weer af. Na acht minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies tien minuten.



Figuur 9.11

Antwoord

De snelheid na precies tien minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je weet dat $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=10}$ de helling is van deze raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door $(10; 8{,}5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom ongeveer:

$\frac{10{,}0-8{,}5}{12-10} = 0{,}75$.

De auto had na precies tien minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3 op pagina 331** zie je een tijd afstand-grafiek van een auto.

a Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?

b Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$ ongeveer?

c Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?

Oefenen

Opgave 11

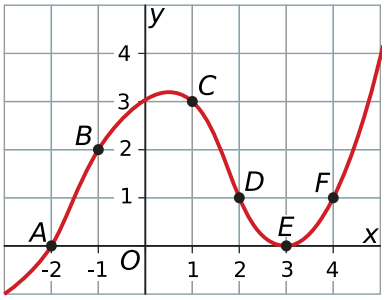
Je ziet een aantal punten op een grafiek.

a Bereken de helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de helling van de lijn door C en F.

c Bij welke getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0? (Er zijn twee mogelijkheden.)

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C.
Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval [1,4] zien?



Figuur 9.12

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 7x + 12$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,6].

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [- 4,9].

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Opgave 13

Bij een wielrenner in een vlakke tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 9.3

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval [0,10] en geef de betekenis hiervan.

b Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in km. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval [44,60] en geef de betekenis hiervan.

c Bereken voor het tijdsinterval [18,44] de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

d Heeft de wielrenner zijn krachten goed verdeeld? Licht je antwoord toe.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 15

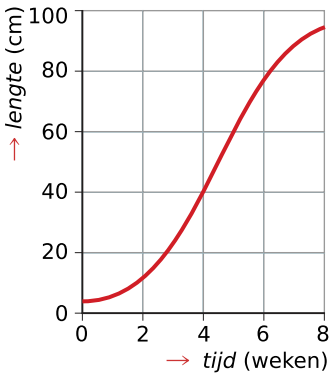
Hier zie je een grafiek van de lengtegroei van een dahliaplantje in de loop van de weken.

a Hoeveel cm per week groeit deze dahlia gemiddeld, gerekend over de eerste vier weken? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel bedraagt de groeisnelheid na drie weken? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Wanneer is de dahlia het hardst gegroeid?

d Hoe zie je dat in de grafiek? Licht je antwoord toe.



Figuur 9.13

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 16

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg s (in meter) geldt de formule $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Opgave 17

Het Empire State Building in New York is ongeveer 380 m hoog.
Het verhaal gaat dat een muntje wat je van die hoogte laat vallen een mens kan doden.

Met welke snelheid komt zo'n muntje op de grond?

Testen

Opgave 18

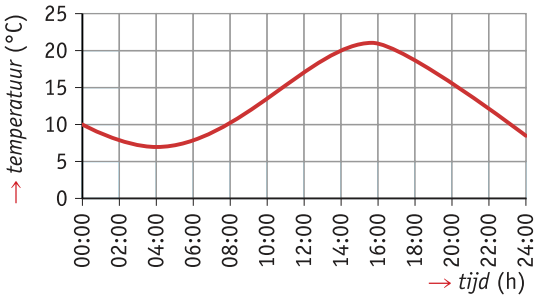
Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^4$. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,3]$.

Opgave 19

Bekijk het verloop van de temperatuur op een mooie dag in mei.

a Bepaal de gemiddelde temperatuurverandering per uur op de intervallen $[2,6]$, $[6,17]$ en $[17,20]$. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Schat de momentane temperatuurverandering om 8:00 uur.



Figuur 9.14

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 + 1$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek in het punt $(2; 3{,}4)$.

c Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij b. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

d In welk punt van de grafiek is de helling 0?

9.2 Het begrip afgeleide

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- de grafiek van de afgeleide functie bepalen met behulp van GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen, stijgen en dalen van grafieken;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in m de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 9.1

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg 1

Voor de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde. De wagen gaat steeds sneller rijden.

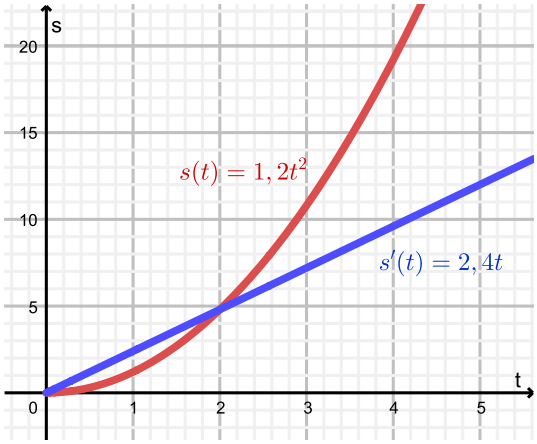
De snelheid op $t = 4$ kun je uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[4{,}4 + h]$ als je na herleiden $h \to 0$ kiest. Je vindt dan $v(4) = 9{,}6$ m/s.
Dit differentiaalquotiënt noem je ook wel de afgeleide waarde van s voor $t = 4$ en je noteert $s'(4) = 9{,}6$.

Op dezelfde manier kun je bij elke willekeurige t-waarde de snelheid uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t, t + h]$.

Je vindt dan $v(t) = s'(t) = 2{,}4t$.

$v(t)$ is de veranderingsfunctie van $s(t)$ en geeft voor elke waarde van t de momentane verandering van s. Omdat het hier over afstand en tijd gaat, is deze functie ook de snelheidsfunctie.

Je noteert zo'n veranderingsfunctie als $s'(t)$ en hij heet de afgeleide functie. Hij beschrijft ook de helling van de grafiek voor elke waarde van t.
GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kunnen bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide functie maken. Dat noem je de hellingsgrafiek van de functie. Je ziet hier de hellingsgrafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$.



Figuur 9.2

Opgave 1

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1 op pagina 335**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op $[5{,}5 + h]$, waarin $h \to 0$.

c Stel zelf de formule voor $v(t) = s'(t)$ op met behulp van het differentiequotiënt op $[t, t + h]$.

d Maak de grafiek van de afgeleide van $s(t) = 1{,}2t^2$ met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Ga na, dat deze grafiek hetzelfde is als de grafiek van de formule bij b.

e Welke betekenis heeft $v(5) = s'(5)$?

f Hoe groot is $v(5)$?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

a Bereken $f'(5)$ met behulp van een differentiequotiënt.

b Stel de formule op voor de afgeleide functie $f'(x)$.
Maak ook de hellingsgrafiek van f en laat zien dat die past bij de afgeleide.

c Controleer je antwoord bij a door 5 in de afgeleide functie in te vullen.

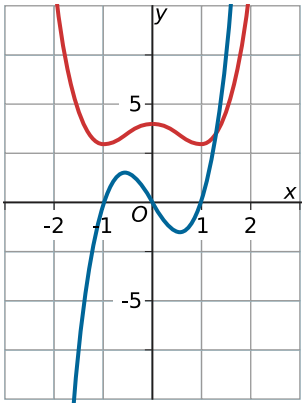
Uitleg 2

Bekijk de applet

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat dus over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide geeft de helling van de grafiek van de functie weer. Dus de grafiek van de afgeleide gaat daar ook over van positief naar negatief. Dat kun je gebruiken om de waarde van bijvoorbeeld het maximum te vinden. Hier zie je hoe dat kan.

Je ziet hier de grafiek (in het rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek is de hellingsgrafiek van f, dus de grafiek van de afgeleide f'. Als je goed kijkt, zie je dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (dit is het geval voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (dit is het geval voor $x = 0$).



Figuur 9.3

Je zoekt dus naar de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dat moet dus bij een nulpunt van de afgeleide zijn.

Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

Extremen berekenen doe je dus zo:

- Bereken voor welke x-waarden de afgeleide 0 is.
- Controleer of de afgeleide daar van positief naar negatief of andersom gaat.
- Bereken de extreme waarde door de gevonden waarden voor x in te vullen in de functie zelf.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 336** wat $f'(x)$ zegt over het verloop van $f(x)$.

a Wat weet je van $f'(x)$ als de grafiek van f stijgend is?

b Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x) = 0$?

c Wat gebeurt er met $f'(x)$ als de grafiek van f een minimum heeft?

d Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x)$ een maximum heeft?

Opgave 4

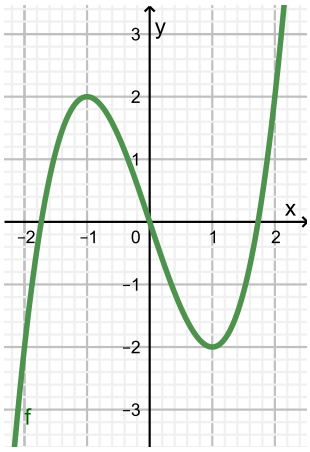
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Maak de grafiek van de afgeleide van f.

b Lees de nulpunten van de afgeleide uit de figuur af. Bekijk of er bij deze nulpunten van $f'(x)$ extreme waarden optreden (minima of maxima) voor f.

c Bereken de extremen van f.

d Ga na dat ook f' een minimum heeft.
Welke betekenis heeft dit minimum voor de grafiek van f?



Figuur 9.4

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ en die van zijn afgeleide.

a Bepaal de waarden van x waarin $f'(x) = 0$.

b Heeft de functie een extreme waarde?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het hellingsgetal van een grafiek voor een bepaalde waarde van x, zeg a, van een functie f bereken je met het differentiequotiënt op $[a,a+h]$. Je herleid dit differentiequotiënt en neemt $h \to 0$ (h mag ook negatief zijn). Als dit differentiequotiënt dan een bepaalde waarde nadert dan is die waarde

- het **hellingsgetal** of
- de **afgeleide waarde** of
- het **differentiaalquotiënt**

van $f(x)$ voor $x = a$.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je zo: $f'(a)$. Uitspraak: ‘f accent a’.

Of zo: $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$. Uitspraak: ‘dy dx als x is a’.

De afgeleide voor alle mogelijke waarden van x is $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Deze functie van x heet de **afgeleide (functie)** of **hellingfunctie**.

Bekijk de applet

De afgeleide geeft bij iedere waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x. Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x. Met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kun je bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide laten maken.

Veel functies hebben **extremen**. Dat zijn waarden waarbij de functie maximaal is of juist minimaal is. Je kunt die waarden niet altijd goed uit de grafiek van een functie aflezen, bijvoorbeeld omdat die grafiek niet gemakkelijk in beeld is te krijgen. Je bepaalt ze dan zo:

- Bepaal $f'(x)$ en maak er een grafiek van.
- Bepaal de nulpunten van $f'(x)$.
- Als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat in zo'n nulpunt heeft f een maximum.
- Als $f'(x)$ van negatief naar positief gaat in zo'n nulpunt heeft f een minimum.

Als de afgeleide niet van teken wisselt in een nulpunt, is er daar geen extreme waarde. In de grafiek van f is dan vaak een buigpunt met een horizontale raaklijn te zien.

Optimaliseren is het berekenen van extremen in praktijksituaties: minimale hoeveelheid materiaal bij een gegeven inhoud, het berekenen van een maximale oppervlakte van een stuk land bij een vaste lengte van de omheining, enzovoort.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 4$.
Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie. Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f voor willekeurige x op het interval $[x,x + h]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+h)^2+4-(3x^2+4)}{h} = \frac{6xh+3h^2}{h} = 6x + 3h$$

Als $h \to 0$ krijg je de afgeleide: $f'(x) = 6x$.

Wil je nu de vergelijking opstellen van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ dan heb je het hellingsgetal nodig voor die waarde van x. De afgeleide is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x, dus het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 3$ is: $f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$

De vergelijking van de raaklijn wordt daarmee: $y = 18x + b$

$f(3) = 31$, dus $31 = 18 \cdot 3 + b$ en hieruit volgt $b = -23$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 18x - 23$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$.

a Met behulp van het differentiequotiënt op $[x,x + h]$ kun je de afgeleide van de functie $f(x)$ bepalen. Stel de formule van de afgeleide functie op. Laat duidelijk zien hoe je eraan komt.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ lijkt de grafiek te raken. Laat zien dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 7

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.
Bepaal de extremen van f met behulp van een grafiek van de afgeleide.

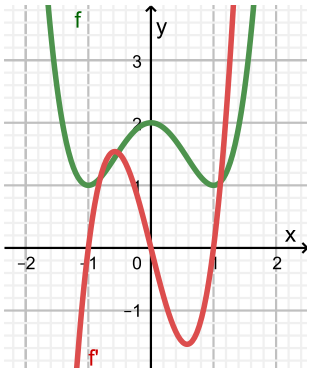
Antwoord

Hier zie je hoe dit is gedaan met behulp van GeoGebra. Maar je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.

Je kunt aflezen dat $f'(x) = 0$ als $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$.

Of er sprake is van een maximum of een minimum of geen van beide kun je aan de grafiek van de afgeleide zien:

- Als $x = -1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: min. $f(-1) = 1$.
- Als $x = 0$ gaat f' over van positief naar negatief.
  Dat betekent dat f daar een maximum heeft: max. $f(0) = 2$.
- Als $x = 1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: min. $f(1) = 1$.



Figuur 9.5

Omdat je hier de extremen ook gemakkelijk direct uit de grafiek van de functie zelf kunt halen, lijkt het werken met zo'n afgeleide overbodig. Maar dat wordt heel anders als je straks met functies te maken krijgt waarvan de grafiek niet zo gemakkelijk in beeld komt.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2 op pagina 339** zie je hoe de extremen van een functie kunnen worden bepaald vanuit de grafiek van de afgeleide.
Gegeven is nu de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 200$.

a Waarom krijg je nu de grafiek van f niet automatisch met de standaardinstellingen in beeld?

b Waarom krijg je de hellingsgrafiek wel gemakkelijk in beeld?

c Welke extremen heeft deze functie?

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1000 - 3x^2 + x^3$.

a Maak een grafiek van de hellingfunctie (de afgeleide) van f.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide.

c Welke extremen heeft deze functie?

Voorbeeld 3

De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

Teken de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Geef aan bij welk aantal verkochte producten de opbrengst maximaal is en leg uit hoe je dat aan de hellingsgrafiek kunt zien.

Antwoord

Omdat de afgeleide functie voor elke waarde van q de helling van de grafiek van R geeft, is de grafiek van $R'(q)$ de hellingsgrafiek van R. Maak beide grafieken in één figuur.

Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek: waar hij de horizontale as snijdt, heeft de grafiek van R een maximum. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.

Figuur 9.6

Opgave 10

In **Voorbeeld 3 op pagina 340** wordt bij een opbrengstfunctie R de grafiek van de hellingsfunctie getekend.

a Laat zien, hoe je een formule voor R' kunt afleiden

b Wat betekent het voor de grafiek van R als $R' > 0$? en als $R' < 0$?

c Laat zien dat uit $R'(q) = 0$ inderdaad volgt $q = 12$.

Opgave 11

De kosten $K(q)$ (euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Maak de hellingsgrafiek van K.

b Hoe kun je aan de hellingsgrafiek zien dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Oefenen

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken $f'(2)$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Bepaal de afgeleide functie (of hellingsfunctie) door het differentiequotiënt van f op het interval $[x,x + h]$ uit te werken en dan h naar 0 te laten naderen.

c Controleer nu je antwoord bij a door $x = 2$ in te vullen in de afgeleide functie die je bij b hebt gevonden.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

a Maak de grafiek van f'.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide en daarmee de extremen van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 14

Voor een vallend voorwerp geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden van de val.

b De snelheid na tien seconden is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 15

De winst van een bedrijf is te beschrijven met een winstformule: $W(q) = -3q^2 + 200q - 300$, waarbij q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt en W de winst in honderden euro.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze winstfunctie.

b Welke betekenis heeft $W'(50)$ voor de opbrengstfunctie?

c De fabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale winst te bereiken. Bereken deze productieomvang en de maximale winst met behulp van de afgeleide.

Opgave 16

De helling van een raaklijn aan de de grafiek van de functie $f(x) = -5x^2 + 4$ is 7.

Bereken voor welke x dit het geval is.

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 17

Bekijk de algemene formule van de afgelegde weg van een (van niet al te grote hoogte) vallend voorwerp.

a Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden. Gebruik het differentiequotiënt op $[t,t + h]$.

b Stel een formule op voor de snelheid waarmee de steen valt.

c Controleer je antwoord bij a met de formule bij b.

Opgave 18

Voor een voorwerp dat je van 500 m hoogte laat vallen geldt $h(t) = 500 - 4{,}9t^2$, waarin h de hoogte (in m) boven de grond en t de tijd in seconden is.

Met welke snelheid komt zo'n voorwerp op de grond?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval $[-2,4]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken de veranderingssnelheid van $f(x)$ voor $x = 2$.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 20

Voor een bepaalde autofabrikant geldt voor de totale opbrengst TO van de verkoop : $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro's en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uit gegaan dat alle geproduceerde auto’s ook worden verkocht.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(5)$ voor de opbrengstfunctie?

c De autofabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale opbrengst te krijgen. Bereken deze productieomvang met behulp van de afgeleide functie die je bij a heb gevonden.

9.3 Differentiëren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je door differentiëren afgeleide functies kunt bepalen;
- regels toepassen bij het differentiëren;
- raaklijnen en extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Voorkennis

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat bij functie f een afgeleide functie is te maken door

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

te herleiden, dan $h \to 0$ te nemen en te bekijken of daar iets uitkomt dat allen van h afhangt.

a Laat zien, dat $f(x) = x^2$ dan $f'(x) = 2x$ als afgeleide heeft.

b Welke betekenis heeft deze afgeleide functie?

c Laat zien, dat bij $f(x) = x^3$ hoort $f'(x) = 3x^2$.

d Welke afgeleide zal $f(x) = x^4$ hebben? Ontdek je regelmaat?

Uitleg 1

Je kunt met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de afgeleide functie gemakkelijk in beeld brengen. Alleen zijn daarvan niet altijd de nulpunten goed af te lezen. Je wilt een formule voor de afgeleide.

Je kunt van elke functie de afgeleide bepalen door het differentiequotiënt op het interval $[x,x+h]$ te berekenen en dan $h \to 0$ te nemen.

Voor $f(x) = x^2$ gaat dit zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt $f'(x) = 2x$.

Voor $f(x) = x^3$ gaat het zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt: $f'(x) = 3x^2$

Zo vind je bij $f(x) = x^4$ de afgeleide $f'(x) = 4x^3$

Nu zie je wellicht de regelmaat al.

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Er zijn meer regels:

- Van de constante functie $f(x) = c$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.
- Als $f(x) = c \cdot x^n$ dan is $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$
- Als een functie bestaat uit een optelling/aftrekking van meerdere functies is de afgeleide de optelling/aftrekking van de afgeleiden.

De afgeleide van $f(x) = 3x^2 - 25x + 10$ bepaal je dus zo: $f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 25x^{1-1} + 0 = 6x - 25$.

Dit noem je differentiëren.

Opgave 1

Bepaal de afgeleide functie van de volgende functies.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 12x^2 + 4x - 2$

b $g(x) = -4x^3 + 5x$

c $h(x) = 5x^{10} + 2x^5 - 3x^3$

Uitleg 2

Je hebt gezien, dat:

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Deze differentieerregel blijkt ook op te gaan voor gebroken en/of negatieve exponenten.
Wiskundigen hebben bewezen dat deze regel geldt voor alle mogelijke exponenten:

Als $f(x) = x^r$ dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Dit heet de algemene machtsregel voor differentiëren.

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Door de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{-1}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Opgave 3

In Uitleg 2 op pagina 345 zie je hoe de algemene machtsregel kan worden toegepast bij het differentiëren.

a Bepaal zelf de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

b Bepaal de afgeleide van $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

c Bepaal de afgeleide van $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a Bepaal de afgeleide $f'(x)$.

b Bereken de extreme waarden van f met behulp van de afgeleide.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Met het differentiaalquotiënt is de afgeleide van elke functie te bepalen (als die bestaat). Dat kan wel heel bewerkelijk zijn. Door voor bepaalde soorten functies de afgeleide te bepalen ontstaan de **differentieerregels**. Het gebruik van deze regels heet **differentiëren**.

Hier zie je enkele differentieerregels:

- **machtsregel**:
  als $f(x) = c \cdot x^r$ is $f'(x) = c \cdot rx^{r-1}$ voor elke waarde van c en voor elke waarde van r
- **constante-regel**:
  als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **somregel**
  als $f(x) = u(x) + v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
  als $f(x) = u(x) - v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

De afgeleide functie van $y = f(x)$ kun je schrijven als: $f'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $y'(x)$.

Je kunt met behulp van differentiëren bij functies een afgeleide bepalen.
Daarmee kun je bij een gegeven waarde van x de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie berekenen.
Ook kun je er extreme waarden van de functie mee berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met de afgeleide.

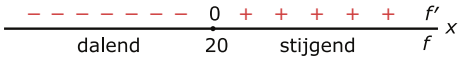
$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Kies zowel links als rechts van $x = 20$ een getal en vul dit in de afgeleide in om te kijken of de afgeleide van teken wisselt. Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en dus negatief en $f'(25) = 762500$ en dus positief.

In schema:



Figuur 9.1

f' gaat voor $x = 20$ over van negatief naar positief.

En dus geldt dat f een minimum heeft voor $x = 20$.
Omdat $f(20) = -12012345$ schrijf je: min.$f(20) = -12012345$.

Opgave 5

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 10x^3 - 60x + 100$

b $g(x) = 15 + 2x - 5x^2 - 10x^4$

c $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$

d $A(d) = \frac{1}{2}\pi d^2 + 10\pi d$

e $k(x) = x^2(x - 4)$

f $P(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van de afgeleide van f. Geef er de plaats van de extremen in aan en bereken die extremen.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

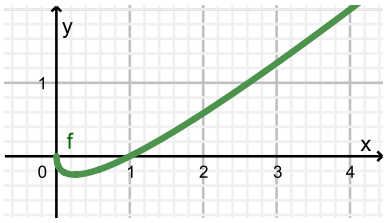
b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Voor welke waarden van x hebben beide functies dezelfde helling?

Voorbeeld 2

Je ziet hier de grafiek van de functie $f(x) = x - \sqrt{x}$.

Bereken het exacte minimum van f.



Figuur 9.2

Antwoord

Deze functie heeft een minimum. Je kunt dit niet nauwkeurig aflezen uit de grafiek. Je werkt daarom met de afgeleide.

Eerst schrijf je $f(x) = x - \sqrt{x} = x - x^{\frac{1}{2}}$.

Differentiëren: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ en dus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.
Dit geeft $2\sqrt{x} = 1$ en $x = 0{,}25$.

Dus: min. $f(0{,}25) = -0{,}25$.

Opgave 8

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2x$

b $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

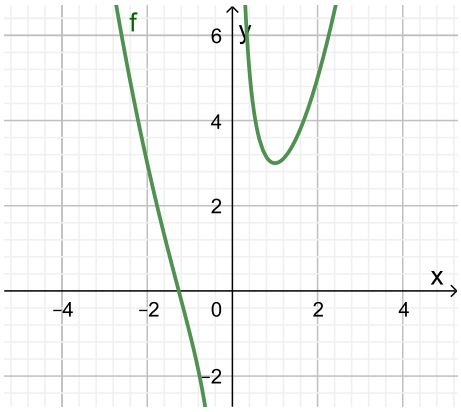
d $K(p) = \frac{300+5p}{p}$

Opgave 9

Je ziet hier een deel van de grafiek van $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
De functie lijkt alleen één minimum te hebben en geen maximum.

a Laat met behulp van de afgeleide zien dat f inderdaad precies één extreme waarde heeft.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 9.3

Voorbeeld 3

Een timmerman maakt voor een klant een houten kist met deksel. Voor die kist gebruikt hij 192 dm^2 hout. De lengte van de kist moet twee keer zo groot zijn als de breedte. Bij welke afmetingen heeft de doos een maximale inhoud?

Antwoord

Neem aan dat de kist de vorm van een balk heeft.

De inhoud van een balk met afmetingen $l \times b \times h$ is: $I = l \cdot b \cdot h$.

Neem je $b = x$ dan is $l = 2x$, dus $I = 2x^2h$.

Voor de oppervlakte van de kist geldt $A = 4x^2 + 6xh = 192$.

Je wilt de inhoud maximaliseren. Dus maak je daarvan een functie door beide formules te combineren.

Uit $4x^2 + 6xh = 192$ volgt $h = \frac{192-4x^2}{6x}$

De inhoud (in dm^3) is dan: $I = 2x^2h = 2x^2 \cdot \frac{192-4x^2}{6x} = 64x - 1\frac{1}{3}x^3$.

Bekijk de grafiek van $I(x)$.

Omdat $x > 0$ heeft de grafiek van I alleen een maximum, dat je met behulp van differentiëren kunt bepalen.
$I'(x) = 64 - 4x^2 = 0$ geeft $x^2 = 16$ en dus $x = 4$.

Dus als $x = 4$ is de inhoud maximaal. Dit betekent dat als de doos 8 dm lang, 4 dm breed en $5\frac{1}{3}$ dm hoog is, de inhoud maximaal is.

Figuur 9.4

Opgave 10

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben precies de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm. De fabrikant vraagt zich nu af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat er dus om de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet hij kiezen?

a Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

b Noem de zijde van het vierkante grondvlak x. Druk de hoogte h uit in x.

c Druk de inhoud I uit in de x.

d Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

e Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud. Geef je antwoord in centimeters afgerond op één cijfer achter de komma.

Oefenen

Opgave 11

Bepaal eerst de afgeleide van de gegeven functie door differentiëren. Bepaal vervolgens ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(1,y)$.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

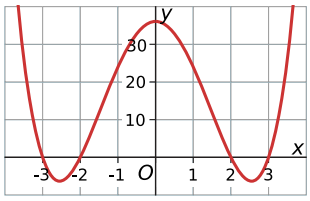
d $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

e $TK(p) = 8{,}5 + \frac{200}{p^2}$

f $h(x) = 2\sqrt{x} - 4x$

Opgave 12

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.



Figuur 9.5

a Bereken de nulpunten van f.

b Bepaal de afgeleide van f .

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los exact op: $f'(x) = 0$

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Opgave 13

Als een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek, dan is zijn baan parabolisch wanneer je de luchtweerstand verwaarloost. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

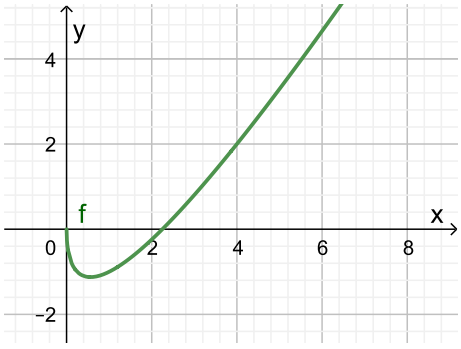
d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 14

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.



Figuur 9.6

Opgave 15

Van een balkvormige kartonnen doos is de lengte gelijk aan de breedte. In verband met de beschikbare hoeveelheid karton moet de oppervlakte van elke doos 120 dm^2 zijn.

Bereken bij welke afmetingen de doos een maximale inhoud heeft.

Toepassen

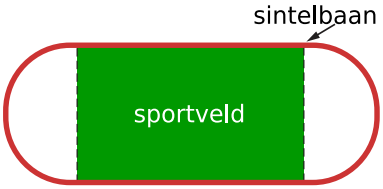
Onder **optimaliseren** versta je het vinden van waarden waarbij iets zo goed mogelijk functioneert, zo groot of zo klein mogelijk is, zo efficiënt mogelijk werkt, en dergelijke.

Je kunt dan bijvoorbeeld denken aan het omheinen van een zo groot mogelijk stuk land met een bepaalde beschikbare hoeveelheid materiaal om die omheining tot stand te brengen. Je optimaliseert dan de oppervlakte.

Opgave 16: Sportveld binnen atletiekbaan

Om een rechthoekig sportveld ligt een atletiekbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de atletiekbaan is 400 meter. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken exact de afmetingen van dit sportveld.



Figuur 9.7

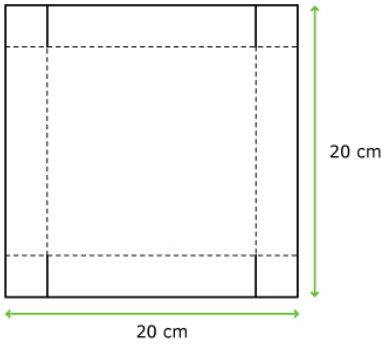
Opgave 17: Een weiland tegen de stal

Een boer omheint een rechthoekig weiland met een hek van 200 meter lengte. De stal grenst aan het weiland en heeft een lengte van 12 meter. Waar de stal staat, hoeft geen omheining te komen.

Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van het omheinde weiland.

Opgave 18: Maximaal bakje

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.



Figuur 9.8

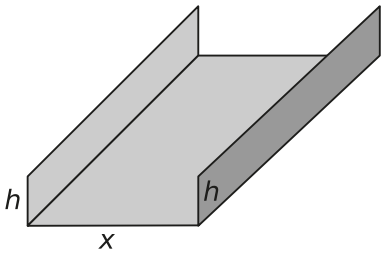
a Stel dat de zijde van het ingeknipte vierkantje x wordt genoemd. Welke formule kun je dan opstellen voor de inhoud I van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van dit bakje met behulp van differentiëren. Rond af op hele cm^3.

Opgave 19: Goten in ontwikkelingslanden

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.



Figuur 9.9

Hoeveel water kan zo'n goot maximaal bevatten?

Testen

Opgave 20

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $g(x) = 3x^4 - \frac{1}{5}x^2$

c $h(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $k(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$

Opgave 21

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

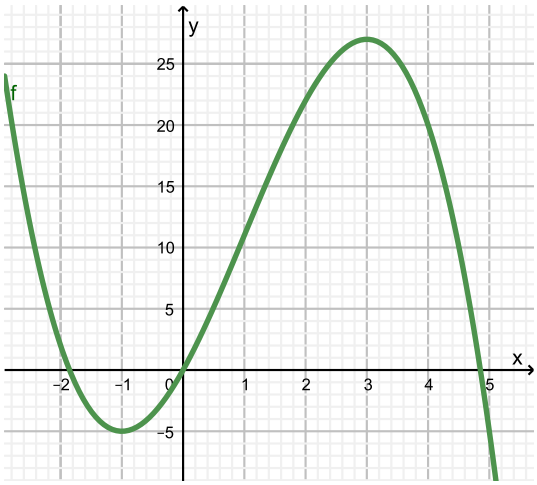
Opgave 22

Dit is (een deel van) de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt $(0,0)$ met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?



Figuur 9.10

9.4 De kettingregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de uitgebreide machtsregel en de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).

Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Soms bestaat een functievoorschrift uit een serie geschakelde functies.

Bijvoorbeeld: $S(x) = (3x + 1)^2$
Een functiewaarde $S(x)$ bereken je in twee stappen met functies g en f:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(g(x)) = (g(x))^2$

De functie $f(x) = (3x + 1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x))$ heet een samengestelde functie of kettingfunctie:

$$x \xrightarrow{g(x)} 3x + 1 \xrightarrow{f(g(x))} (3x + 1)^2$$

Deze kettingfunctie kun je niet zo maar differentiëren met de machtsregel:

$f'(x) \neq 2(3x + 1)^1 = 6x + 2$

Dat zie je door bij de functie S eerst de haakjes weg te werken en dan pas te differentiëren.
$f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ en $f'(x) = 18x + 6$

Er is ook een andere manier.

Schrijf $g(x) = 3x + 1 = u$ en $f(u) = u^2$. Dan is $f(x) = f(g(x))$.

Het differentiëren van S gaat als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $f(u)$: $f'(u) = 2u$
- Bepaal de afgeleide van $g(x)$: $g'(x) = 3$
- De afgeleide van S is het product van bovenstaande twee afgeleides:

  $S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 2u^1 \cdot 3 = 2 \cdot (3x+1)^1 \cdot 3 = 6(3x+1) = 18x + 6$

In het algemeen geldt dat als $f(x) = f(g(x))$ dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit is de kettingregel voor differentiëren.

Opgave 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \left(3x^2 + 1\right)^2$

a Waarom is f een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?

b De functie $f(x)$ kan geschreven worden als $f(u) = f(g(x))$. Geef $g(x) = u$ en $f(u)$.

c Bepaal $g'(x)$ en $f'(u)$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x)$ met de kettingregel.

Opgave 2

Gegeven is functie: $g(x) = \left(3x^2 + 2x\right)^4$

a Deze functie kun je zien als een samenstelling van twee functies. Welke twee functies?

b Bepaal met behulp van de kettingregel de afgeleide van g.

Uitleg 2

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Het domein van functie f is $[0, \rightarrow\rangle$. Maar bij de afgeleide is $x = 0$ geen toegelaten waarde. De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale raaklijn. Zo'n raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ kun je herleiden naar $f(x) = \left(2x^2 + 1\right)^{0,5}$.
Je kunt hier geen haakjes wegwerken. Wel kun je de functie als kettingfunctie beschouwen en met de kettingregel differentiëren.

Schrijf $g(x) = 2x^2 + 1 = u$ en $f(u) = \sqrt{u}$, dan is

- $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
- $g'(x) = 4x$

Dus $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Noem $g(x) = x^2 - 4 = u$, dan is $f(u) = \sqrt{u}$.

a Schrijf functie f als een machtsfunctie en differentieer de functie.

b Functie $f(x)$ is een kettingfunctie. Differentieer de functie.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

a Neem $g(x) = x^2 + 3 = u$, schrijf het functievoorschrift op van $f(u)$ en differentieer deze functie.

b Differentieer $f(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat:

$$x \xrightarrow{g(x)} \ldots \xrightarrow{f(\ldots)} f(g(x))$$

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als f de vorm $f(g(x))$ heeft, dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (1 - 2x)^4$.

Antwoord

Dit is een samengestelde functie $f(x) = f(g(x))$.

Schrijf $g(x) = 1 - 2x = u$ en $f(u) = u^4$.

- $f'(u) = 4u^3$
- $g'(x) = -2$

$f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4u^3 \cdot -2 = -8(1 - 2x)^3$

Dus $f'(x) = -8(1 - 2x)^3$.

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = (3x - 1)^8$

a Neem $g(x) = 3x - 1 = u$. Functie f heeft de vorm $f(u)$. Schrijf de voorschriften van f en g op.

b Laat zien dat $f'(x) = 24(3x - 1)^7$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(u) = \sqrt{u}$ en $u = g(x) = x^2 + x$

a Schrijf het functievoorschrift op van $f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van $f(x)$.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$.

Antwoord

Neem $u = g(x) = 1 - x$ en $f(u) = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$. Dan is

- $f'(u) = -2u^{-3}$
- $g'(x) = -1$

En dus is $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = -2u^{-3} \cdot -1 = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

c Toon aan dat f een maximum heeft voor $x = 0$ en bereken dit maximum.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$. Bepaal ook het bereik van functie f.

Antwoord

Schrijf de wortelvorm als een macht:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(g(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Differentieer f met de kettingregel:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(g(x)\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

De gevraagde richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) is: $f(x) = \sqrt{x}$ $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

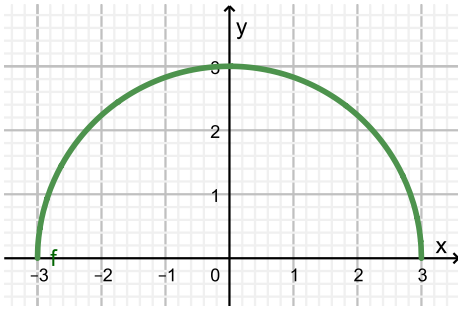
Eigenlijk zie je aan de grafiek wel meteen wat het bereik van f is.

Maar voor de zekerheid bereken je het domein en het maximum van f.

Het domein is $[-3,3]$.

Het maximum vind je uit $f'(x) = 0$ en dit geeft $x = 0$.

Omdat $f(0) = 3$ wordt het bereik $B_f = [0,3]$.



Figuur 9.1

Opgave 8

Bekijk de functie in **Voorbeeld 3 op pagina 357**.

a Hoe bepaal je het domein van f uit het functievoorschrift?

b Waarom levert $f'(x) = 0$ de waarde $x = 0$ op?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van de afgeleide het maximum van f.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Oefenen

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

c $h(x) = 25(2 - 4x)^3$

d $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(5 + 2r)^2$

Opgave 11

Gegeven is $f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x}$. Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ en stel de vergelijking van de bijbehorende raaklijn op.

Opgave 12

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \sqrt{3x}$

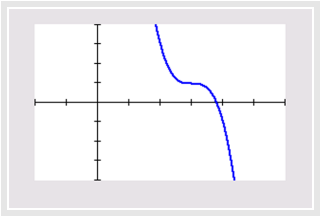
b $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $h(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$

d $j(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x-6)^3 + 4$ die is gemaakt met een grafische rekenmachine.



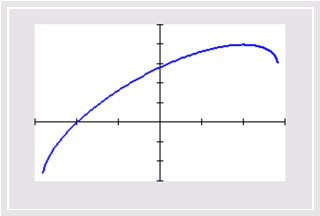
Figuur 9.2

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve voor $x = 3$. Toon aan dat dit zo is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de y-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$ zoals die met een grafische rekenmachine is gemaakt.



Figuur 9.3

a Bepaal het domein van f.

b Bereken het bereik van f.

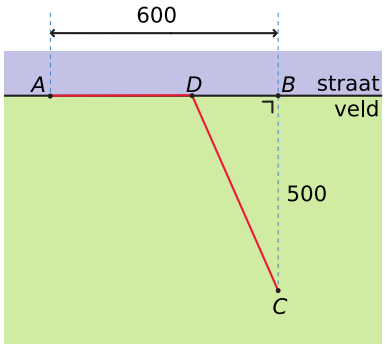
c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

Toepassen

Opgave 15: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt B. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C;
- direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar punt C;
- of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 9.4

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

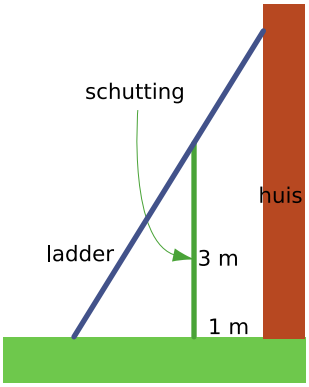
c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Opgave 16: Ladder over een schutting

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 9.5

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6(1 + 2x)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 2}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Bepaal het bereik van deze functie f.

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

9.5 De product- en de quotiëntregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de productregel en de quotiëntregel voor het differentiëren;
- alle differentieerregels door elkaar gebruiken.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren, ook met de kettingregel en de uitgebreide machtsregel;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven de functies $u(x) = x^3$ en $v(x) = x^4$.

Bekijk eerst de functie $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

a Laat zien dat $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$.

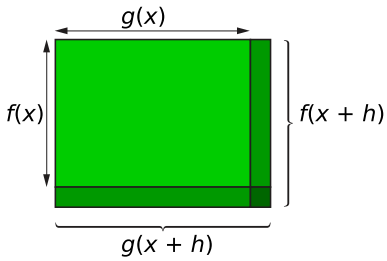
Bekijk nu $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

b Laat zien dat je niet de afgeleide van deze functie kunt bepalen door de afgeleide van de teller te delen door de afgeleide van de noemer.

c Wat betekent dit voor het differentiëren van functies die bestaan uit het product of het quotiënt van twee functies?

Uitleg 1

Als de lengte en de breedte van een rechthoek functies van x zijn, dan is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$
Verander de oppervlakte van deze rechthoek door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte is:
$A(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$



Figuur 9.1

De toename van $A(x)$ bestaat uit drie rechthoekjes:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x + h) - g(x))$
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x + h) - f(x))$
- een klein vierkantje met een oppervlakte die 0 wordt als $h \to 0$

Deel je die toename door h, dan geldt als $h \to 0$:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + 0$$

En voor $h \to 0$ is dit:
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
Dit is de productregel, een differentieerregel om de afgeleide van een productfunctie te bepalen.

Opgave 1

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^5$

a Schrijf de productfunctie $P(x)$ van deze twee functies zo kort mogelijk.

b Bepaal $P'(x)$.

c Ga na dat $P'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

De functie $A(x) = 6x^2\left(x^3 - 5x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g.

d Bepaal de afgeleide van A met behulp van de productregel.
Is de productregel hier noodzakelijk?

Opgave 2

Gegeven is de functie: $h(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{x}$

a Je kunt functie h zien als het product van twee functies. Welke twee?

b Bepaal $h'(x)$ met behulp van de productregel.

Uitleg 2

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen:

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$. Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$.
- $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ is een deling van $t(x) = 2x$ en $n(x) = x - 1$ die niet te herleiden is tot een machtsfunctie. Er blijft altijd een gebroken functie over.

Een functie die bestaat uit een deling (quotiënt) van twee functies heet een quotiëntfunctie.
Functie f kun je na de vereenvoudiging differentiëren.
Bij functie g ligt dat anders. Maar je kunt de afgeleide bepalen met de productregel:

- Schrijf de functie als: $g(x) = 2x \cdot (x - 1)^{-1}$
- Pas de productregel toe:
  $g'(x) = 2 \cdot (x - 1)^{-1} + 2x \cdot -1(x - 1)^{-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2}$

Je kunt een gebroken functie differentiëren. Je krijgt een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen:

$$g'(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Het kan sneller met de volgende regel:

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Dit is de quotiëntregel. Je kunt die regel zelf vinden door $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ te schrijven en daarop de productregel toe te passen. Een mooie puzzel...

Opgave 3

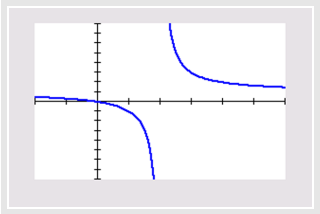
Bekijk de functie g in **Uitleg 2 op pagina 362**.

a Bepaal de afgeleide van de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ afzonderlijk.

b Ga na dat je $g'(x)$ kunt berekenen met de quotiëntregel.

Opgave 4

Met een grafische rekenmachine is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$ gemaakt. Dit is een quotiëntfunctie.



Figuur 9.2

a Bepaal de afgeleide van deze functie met behulp van de quotiëntregel.

b Hoe kun je aan de afgeleide zien, dat deze functie altijd dalend is (behalve voor $x = 2$)?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

De productregel gebruik je vaak in combinatie met de voorgaande differentieerregels. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:
Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

De functie f is de teller van de breuk, de functie g is de noemer van de breuk.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
De quotiëntregel komt vaak in combinatie met andere differentieerregels voor. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $u(x) = 2x + 1$ waarvoor geldt: $u'(x) = 2$
- $v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ waarvoor geldt: $v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

De afgeleide van f vind je door de productregel toe te passen:
$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$
Je kunt ook eerst de haakjes van functie f wegwerken en zonder productregel differentiëren.

Opgave 5

Bekijk de functie die in **Voorbeeld 1 op pagina 363** is gegeven.

a Probeer eerst zelf de afgeleide te vinden met behulp van de productregel.

b Bepaal de afgeleide van f ook door eerst de haakjes weg te werken.
Laat zien, dat je hetzelfde krijgt als bij a en in het voorbeeld.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 6

Bepaal met de productregel de afgeleide van:

a $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \sqrt{x}$

b $K(p) = \frac{1+3p}{p^2}$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + 2x}$
Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek in het punt $(0,0)$.

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel en de kettingregel:

$$f(x) = x \cdot (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 1 \cdot (1 + 2x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \tfrac{1}{2}(1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden niet nodig: $f'(0) = 1$.

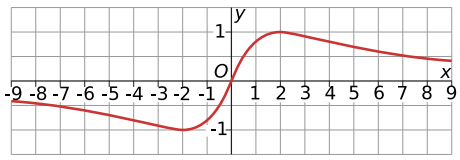
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0,0)$ is: $y = x$.

Opgave 7

Gegeven is functie $f(x) = 2x\sqrt{3x + 4}$. Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(0,0)$ op.

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.
Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 9.3

Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4\cdot(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Een breuk kan alleen op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).

Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
De oplossing van deze vergelijking is: $x = -2 \ \vee \ x = 2$ (de noemer wordt bij die waarden niet 0).

De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Oefenen

Opgave 9

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = (x^3 + 6)(4x^2 - 5x)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

c $h(x) = 3x(x + 5)^4$

d $j(x) = x \cdot \sqrt{5 + 2x}$

e $k(x) = x - \sqrt{5 + 2x}$

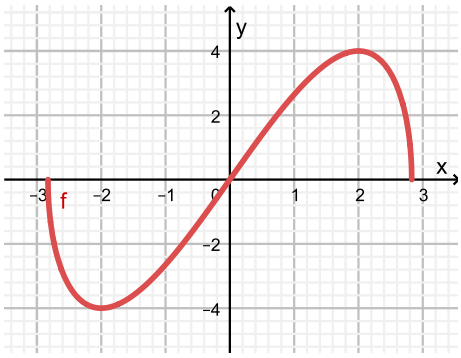
Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.



Figuur 9.4

Opgave 11

Differentieer.

a $f(x) = \frac{x}{x-3}$

b $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $h(x) = \frac{2x^3-10x^2+60x+120}{x}$

d $j(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

e $k(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

f $l(x) = 200x + 400 + \frac{2000}{x}$

Opgave 12

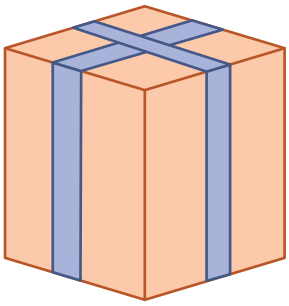
Gegeven is functie: $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$

a Bereken exact de extremen van f.

b Stel exact de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 13

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 9.5

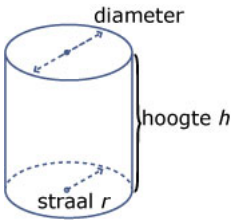
a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 14: Literblik

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.



Figuur 9.6

Voor het volume V van zo'n blik geldt $V = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte aan blik geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

a Neem alle afmetingen in cm en laat zien, dat $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

b Stel een formule op voor de blikoppervlakte A als functie van r

c Bereken voor welke waarde van r de blikoppervlakte minimaal is.

Opgave 15: Poster

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.

c Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x dm. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x.

d Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.

e Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

Testen

Opgave 16

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x(1 + 2x)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

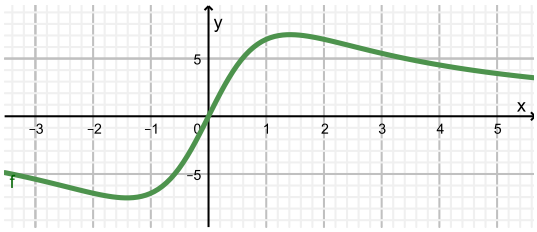
b $H(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Opgave 18

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de grootste waarde die de richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt van de grafiek van f kan hebben.



Figuur 9.7

9.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Differentiëren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- gemiddelde verandering en differentiequotiënt — momentane verandering en differentiaalquotiënt
- differentiaalquotiënt en afgeleide waarde — afgeleide functie
- differentiëren — somregel, constante-regel en machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie en productregel — gebroken functie en quotiëntregel

Activiteitenlijst

- gemiddelde verandering over een interval berekenen met een differentiequotiënt — momentane verandering berekenen met een differentiaalquotiënt
- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van een differentiaalquotiënt — de vergelijking van een raaklijn aan een grafiek opstellen
- differentiëren met de basisregels — de extreme waarden van een functie berekenen met behulp van de afgeleide
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel en met de quotiëntregel

Testen

Opgave 1

Differentieer.

a $f(x) = 2(3x - 6)^8$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 4x\sqrt{2x + 1}$

d $j(x) = \frac{4x}{x^2-1}$

e $k(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

f $l(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4x}$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f. Rond af op twee decimalen.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ snijdt de y-as in punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$

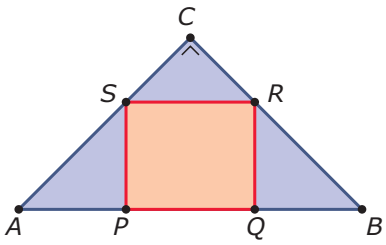
a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b In welke punt(en) is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn $y = \frac{5}{24}x - 5$?

Opgave 4

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; AB = 16 cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



Figuur 9.1

Opgave 5

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm?

Toepassen

Opgave 6: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

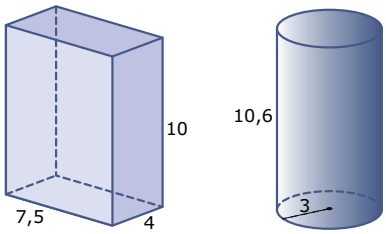
Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 7: Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking. Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.



Figuur 9.2

Er geldt: $F = \frac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.
We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. In de figuur zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.

Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank. De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

a Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).

De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \frac{8000}{\pi r^2}$. Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

b Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
'De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.'
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \frac{2}{r} + \frac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

c Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

10

Werken met e

10.1 Het getal e 372
10.2 Exponentiële functies 380
10.3 Logaritmische functies 387
10.4 Groeimodellen 393
10.5 Totaalbeeld 404

10.1 Het getal e

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het getal e kennen;
- het getal e gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële functies;
- werken met logaritmen met grondtal e.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In GeoGebra, of Desmos, of met een grafische rekenmachine kun je van een functie $f(x)$ de afgeleide $f'(x)$ in beeld brengen zonder die afgeleide te berekenen.

Breng van $f(x) = 2^x$ de afgeleide in beeld, noem hem $g(x)$.

Maak ook de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Wat valt op als je de grafiek van f vergelijkt met die van g?

b Hoe kun je nu de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ verklaren?

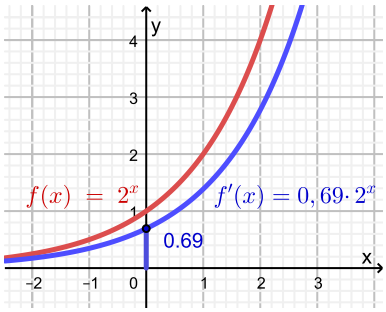
c Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?

d Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

Uitleg

Bekijk de applet.

Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = 1$, dan hebben deze functies de vorm $f(x) = g^x$. In de figuur zie je zo'n functie f met de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek. De helling van de grafiek hangt af van de grootte van g. Neem je $x = 0$, dan wordt $f'(0)$ groter als g groter wordt.
De helling is voor elke x recht evenredig is met $f(x)$, dus $f'(x) = c \cdot g^x$. En $c = f'(0)$.



Figuur 10.1

- Voor $g = 2$ geldt: $c = f'(0) \approx 0{,}69$.
  Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c = f'(0) \approx 1{,}10$.
  Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$.

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2{,}7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π. Dit getal heeft de letter e gekregen: $\mathrm{e} \approx 2{,}71828...$
Als $g = \mathrm{e}$ dan vallen de functie en de afgeleide samen, ze zijn dan gelijk.

Dus als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies.
Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

Lees eerst de goed door.
In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en zijn afgeleide met behulp van GeoGebra, of Desmos.
Laat zien dat $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1{,}10$.

b Bekijk de grafiek van $f(x) = 2{,}5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c.

c Doe ditzelfde ook voor $f(x) = 2{,}7^x$ en $f(x) = 2{,}8^x$.

d Er is een grondtal g waarvoor $c = 1$. Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Als het grondtal van de functie $f(x) = g^x$ gelijk is aan $\mathrm{e} \approx 2{,}7182...$ dan is de afgeleide gelijk aan de functie zelf. Dus:

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$ dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

a Maak de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.

b Hoe groot is de helling van deze grafiek in $(0{,}1)$?

c Waar in de grafiek vind je het getal e?

d Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ in het punt $(1, \mathrm{e})$? Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a Welke asymptoot heeft die grafiek?

b Los met behulp van de grafiek op $\mathrm{e}^x = 10$.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $\mathrm{e}^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^{\mathrm{e}}\log(10)$.

In plaats van $x = {}^{\mathrm{e}}\log(...)$ wordt in de wiskunde $\ln(...)$ gebruikt. Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(...)$.

c Laat zien dat $\ln(10)$ dezelfde waarde voor x oplevert als bij b.

d Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $\mathrm{e}^x = 20$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

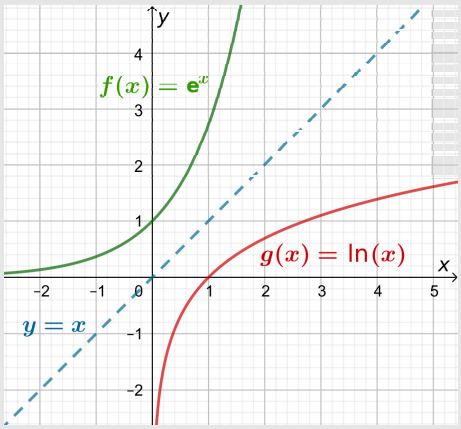
De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen.
Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.
Een benadering voor e is: e ≈ 2,71828...

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij.



Figuur 10.2

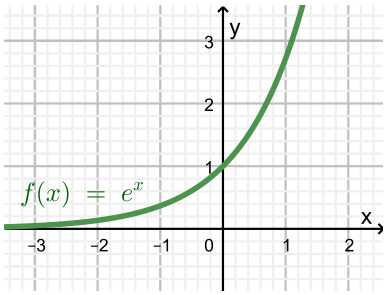
Ook nu is $\mathrm{e}^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.
In plaats van ${}^{\mathrm{e}}\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.
De functies $y = \mathrm{e}^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.
Los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord

Deze grafiek is met GeoGebra gemaakt, je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.



Figuur 10.3

Voor de raaklijn:

- $f'(x) = \mathrm{e}^x$, dus $f'(2) = \mathrm{e}^2$.
  De raaklijn wordt $y = \mathrm{e}^2 \cdot x + b$.
- $f(2) = \mathrm{e}^2$ en dit vul je in de vergelijking in: $\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 \cdot 2 + b$.
  Dit geeft $b = -\mathrm{e}^2$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = \mathrm{e}^2 x - \mathrm{e}^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarde van x bepalen waarvoor $\mathrm{e}^x = 3$

Dit geeft: $x = \ln(3)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $x \leq \ln(3)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 374**.

a Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.

b Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.

c Los op: $f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $2^x = \frac{1}{8}$

b $e^x = \frac{1}{e^3}$

c $5\,e^x = 125$

d $e^x = e\sqrt{e}$

Voorbeeld 2

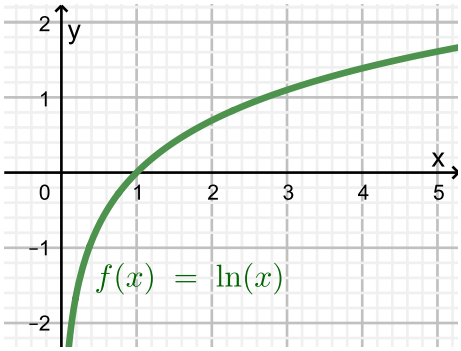
Bekijk de grafiek van $f(x) = \ln(x)$.
Los in twee decimalen nauwkeurig op: $f(x) \leq 1{,}5$.

Antwoord

Omdat $\ln(x) = {}^{e}\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.
De verticale asymptoot is $x = 0$.

$\ln(x) = {}^{e}\log(x) = 1{,}5$ geeft $x = e^{1,5}$.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:
$0 < x \leq e^{1,5}$.
In twee decimalen nauwkeurig $0 < x \leq 4{,}48$.



Figuur 10.4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 375**.

a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?

b Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.

c Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Voor de groei van een hoeveelheid bacteriën heeft een onderzoeker deze formule opgesteld:

$N(t) = N(0) \cdot e^{0,69t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

Wat is de betekenis van $N(0)$?
Laat zien dat het aantal bacteriën volgens deze formule elk uur ongeveer verdubbelt.
De groeisnelheid van deze bacteriën verandert steeds. Hoe groot is die groeisnelheid op $t = 0$ als $N(0) = 60$?

Antwoord

$N(0)$ is het aantal bacteriën op $t = 0$.
Immers op $t = 0$ is het aantal bacteriën: $N(0) \cdot e^0 = N(0)$.

Je kunt de groeifactor g per uur bepalen door de formule in de vorm $N(t) = N(0) \cdot g^t$ te schrijven:

$N(t) = N(0) \cdot e^{0,69t} = N(0) \cdot \left(e^{0,69}\right)^t \approx N(0) \cdot 1,99^t$

Je ziet dat de groeifactor per uur ongeveer 2 is.

Voor de groeisnelheid heb je de afgeleide nodig. Denk daarbij om de kettingregel.

$N(t) = 60 \cdot e^{0,69t}$ geeft $N'(t) = 60 \cdot e^{0,69t} \cdot 0,69 = 41,4 \cdot e^{0,69t}$

De groeisnelheid op $t = 0$ is dus $N'(0) = 41,4$ bacteriën per uur.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 376**.
Voor een andere soort bacteriën geldt de formule $N(t) = 50 \cdot e^{1,10t}$.
De betekenis van N en t is hetzelfde als in het voorbeeld.

a Hoeveel bedraagt nu de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën voor $t = 2$.

Opgave 8

Het verloop van de populatie bijen in West-Europa kan volgens wetenschappers worden beschreven door de formule:

$N(t) = N(0) \cdot e^{-0,01t}$

Hierin is:

- N het aantal bijen in een bepaald gebied
- t de tijd in jaren

$N(0) = 12 \cdot 10^3$ is het aantal bijen in een bepaald gebied op $t = 0$.

a Bereken de groeifactor per jaar van de bijenpopulatie in dit gebied.
Hoe kun je aan de formule zien dat er van verval sprake is?

b Bereken na hoeveel jaar de bijenpopulatie in dit gebied volgens de gegeven formule zou zijn gehalveerd.

c Bereken ook de groeisnelheid van de bijenpopulatie in dit gebied op $t = 0$.
Hoe kun je aan die groeisnelheid zien dat er van verval van de populatie sprake is?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot e^x$.

a Maak de grafiek van f en lees daaruit de oplossing van $f(x) = 12$ af.

b Los $f(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $g(x) = e^{3x}$.

a Maak de grafiek van g en lees daaruit de oplossing van $g(x) = 12$ af.

b Los $g(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$.

Opgave 11

India had in 2007 naar schatting 1,129 miljard inwoners.
In de voorgaande periode bedroeg de bevolkingsgroei gemiddeld 1,9% per jaar.

Hierbij kun je een groeimodel opstellen zoals dit:

$N(t) = 1{,}129 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}019t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid inwoners van India
- t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2007

a Laat zien dat deze formule overeen komt met het gegeven groeipercentage.

b Hoeveel inwoners zal India in 2027 hebben als de groei zo door gaat?

c In welk jaar zal India volgens dit groeimodel de 2 miljard inwoners overstijgen?

d Hoeveel bedraagt de groeisnelheid van de bevolking van India in 2020 volgens de gegeven formule?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $e^x = 3$

b $e \cdot x = 3$

c $\ln(x) = 3$

d $2 \cdot e^{0{,}1x} = 40$

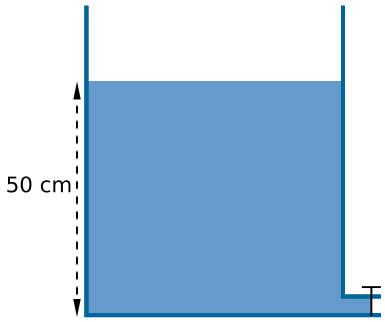
Opgave 13

Een rechthoekige open bak is tot op een hoogte van 0,5 m gevuld met water. In de bodem van de bak is een kraan gemonteerd die op $t = 0$ wordt open gezet. Het water loopt uit het vat. De waterhoogte h neemt steeds langzamer af. Er geldt:

$h(t) = 0{,}5 \cdot e^{k \cdot t}$

Hierin is:

- h de waterhoogte in m
- t de tijd in minuten



Figuur 10.5

Om k te berekenen wordt een meting verricht: op $t = 5$ is de waterhoogte $h = 0{,}25$ m.

a Bereken hiermee de waarde van k tot op twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken hoeveel minuten na het openen van de kraan de waterhoogte lager dan 0,1 m is.

c Als je de uitstroomopening groter maakt, wordt k dan een groter getal of juist een kleiner getal?

Toepassen

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan, koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

Als een les melk uit de koelkast wordt gehaald en een tijdje in een warmere kamer staat, warmt de melk langzaam op. Maar ze wordt nooit warmer dan de kamertemperatuur. Hoe verloopt die opwarming precies?

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Figuur 10.6

Opgave 14

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80 °C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}22t}$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

a Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80 °C heeft.

b Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Opgave 15

Een glas melk heeft een temperatuur van 6 °C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$T(t) = 20 - 14 \cdot e^{-0,05t}$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

a Ga na dat de melk volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 6 °C heeft.

b Na hoeveel minuten is de melk opgewarmd tot 15 °C?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er van opwarming sprake is?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 4\,e^x$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen de oplossing van $f(x) = 8$.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

d Los op: $f(x) \geq 6$.

Opgave 17

Voor een bepaalde soort bacteriën geldt de groeifunctie:

$N(t) = 120 \cdot e^{0,95t}$.

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën op $t = 0$.

10.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op exponentiële functies;
- bij exponentiële functies het grondtal wisselen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- werken met het getal e en de afgeleide van $f(x) = e^x$.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.

a Maak de grafiek van f en die van zijn afgeleide.

b Maak ook de grafiek van $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
Hoe ziet deze grafiek er uit en wat betekent dat?

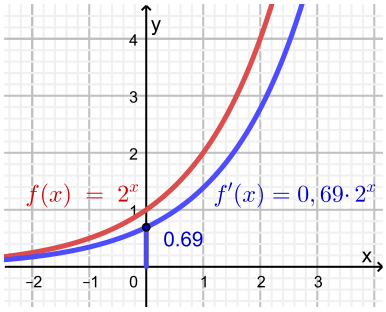
c Maak ook de grafiek van $y = \ln(2) \cdot 2^x$. Wat valt je nu op?

d Laat zien dat $g'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$ de afgeleide van $g(x) = 3^x$ is.

Uitleg

Bekijk de applet.

Hier zie je de grafiek van $f(x) = 2^x$ en de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek, de grafiek van de afgeleide.
Die afgeleide is een veelvoud van de functie zelf: $f'(x) = c \cdot 2^x$.
Je kunt de waarde van c aflezen bij $x = 0$ want $f'(0) = c \cdot 2^0 = c$. Je ziet $f'(0) \approx 0{,}69$.



Figuur 10.1

Maar je kunt de waarde van c ook zelf berekenen: $c = \ln(2)$.

De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$.

Je kunt dit vinden door de functie f van grondtal te veranderen:

$f(x) = e^{c \cdot x}$ met $f'(x) = e^{c \cdot x} \cdot c$ (kettingregel!).

En omdat $e^{c \cdot x} = 2^x$ moet $e^c = 2$, dus $c = \ln(2)$.

Zo'n redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen.
Dus de afgeleide van $f(x) = g^x$ is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 380** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.

a Bepaal de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

b Bepaal de afgeleide van $h(x) = 0{,}5^x$.

c Bepaal de afgeleide van $f(x) = 200 \cdot 1{,}5^x$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x) = 20 \cdot 1{,}2^x + 140$.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 380** wordt de functie $f(x) = 2^x$ omgeschreven naar de vorm $f(x) = e^{c \cdot x}$ omdat de afgeleide van een e-macht gemakkelijk is te bepalen.

a Laat zelf zien, dat $2^x \approx e^{0{,}69x}$.
Leg ook uit dat die 0,69 eigenlijk $\ln(2)$ is.

b Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{0{,}69x}$ met behulp van de kettingregel en laat zien dat deze afgeleide is te schrijven als $f'(x) = 0{,}69 \cdot 2^x$.

c Schrijf de functie $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ in de vorm $N(t) = 200 \cdot e^{k \cdot t}$.

d Bepaal de afgeleide van $N(t)$ op twee manieren, eerst vanuit de vorm $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ en daarna vanuit de vorm met grondtal e. Laat zien dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

Opgave 3

Je hebt in de **Uitleg op pagina 380** gezien hoe je van een exponentiële functie met grondtal 2 een exponentiële functie met grondtal e maakt.

Een bacterie groeit onder bepaalde omstandigheden volgens de groeiformule:

$N(t) = 50 \cdot 8^t$

Hierin is:
- N het aantal bacteriën per kolonie
- t de tijd in uren

a Laat zien, dat je deze formule ook kunt schrijven als $N(t) = 50 \cdot e^{2{,}1t}$.

b Bereken de groeisnelheid van deze bacteriën op $t = 0$.
Gebruik eerst de gegeven formule en daarna de formule bij a. Laat zien dat beide uitkomsten gelijk zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:
- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Je kunt elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven door **veranderen van grondtal**. Als je op $t = 0$ start met een hoeveelheid $N(0)$ dan kun je $N(t)$ schrijven als:
- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ waarin $e^k = g$ dus $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $10^k = g$ dus $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot e^{1,61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0,5t}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$ geeft $f'(x) = 100 \cdot \ln(5) \cdot 5^x \approx 161 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot e^{1,61x}$ geeft $f'(x) = 100 \cdot e^{1,61x} \cdot 1,61 \approx 161 \cdot e^{1,61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0,5t}$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0,5t} \cdot \ln(10) \cdot -0,5 = 1000 \ln(10) \cdot 10^{-0,5t}$

Opgave 4

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1 op pagina 382** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 5

Bepaal de afgeleide van:

a $f(x) = 1,3^x$

b $f(x) = 50 \cdot 2^x + 10$

c $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0,1x}$

d $f(x) = 100\, e^{-0,1x} + 200$

Voorbeeld 2

Een radiatorplaat warmt op volgens de formule:

$T(t) = 50 - 40 \cdot 0,9^t$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten is

Laat zien hoe je deze formule kunt schrijven met grondtal e en bereken de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$.

Antwoord

De formule moet de vorm $T(t) \approx 50 - 40 \cdot e^{k \cdot t}$ krijgen.

Omdat $0,9 = e^k$ wordt $k = \ln(0,9) \approx -0,11$ en geldt $T(t) \approx 50 - 40 \cdot e^{-0,11t}$.

De opwarmsnelheid is: $T'(t) = -40 \cdot e^{-0,11t} \cdot -0,11 \approx 4,21 \cdot e^{-0,11t}$.

Op $t = 0$ bedraagt de opwarmsnelheid $T'(0) \approx 4,21$ °C/min.

Opgave 6

Bekijk het temperatuurverloop van de opwarmende radiator in **Voorbeeld 2 op pagina 382**.

a Welke temperatuur heeft de radiator aan het begin van het opwarmingsproces?

b Je kunt de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$ ook rechtstreeks vanuit $T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$ afleiden. Laat zien, dat je dan dezelfde opwarmsnelheid krijgt.

Opgave 7

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van 3,5 atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. Er geldt:

$p(t) = 3{,}5 - 2{,}1 \cdot 0{,}97^t$

Hierin is:

- p de luchtdruk in de band in atmosfeer
- t de tijd in seconden

a Maak een passende grafiek bij dit verband.

De luchtdruk in de band begint met 1,4 atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot 2,0 atmosfeer.

b Laat zien dat dit uit de gegeven formule volgt.

c Je stopt de pomp als de druk in de band 2,6 atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?

d Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

e Schrijf de gegeven formule in de vorm met grondtal e en bereken daarmee opnieuw de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Oefenen

Opgave 8

Differentieer.

a $f(x) = 1{,}2^x$

b $g(x) = 30 \cdot 1{,}2^x$

c $N(t) = 20 - 15 \cdot 0{,}8^t$

Opgave 9

Schrijf de volgende functies met grondtal e en bereken daarmee het hellingsgetal op $t = 0$.

a $P(t) = 2400 \cdot 2{,}5^t$

b $N(t) = 40 + 20 \cdot 0{,}85^t$

Opgave 10

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven het zeeniveau. Op een zekere plek geldt bij bepaalde weersomstandigheden

$p(h) = 1013 \cdot 10^{-0,53h}$

Hierin is:

- h de hoogte boven zeeniveau in km
- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)

a Bereken snelheid waarmee de luchtdruk verandert op een hoogte van 5 km in gehelen nauwkeurig.

b Je kunt deze veranderingssnelheid van de luchtdruk op 5 km hoogte ook berekenen door eerst de formule in de vorm $p(h) = 1013 \cdot g^h$ te schrijven. Laat dat zien.

Opgave 11

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Er geldt:

$T(t) = 20 - 14\,e^{-0,16t}$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

a Maak een grafiek van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.

b Laat zien, dat voor deze formule inderdaad de warmtewet van Newton geldt.

c Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Opgave 12

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$m = m_0 \cdot e^{-kt}$

Hierin is:

- t de tijd in dagen
- m_0 de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$

a Bereken k, dat is de zogenaamde desintegratieconstante.

b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?

c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke radioactieve stof is de radiumisotoop $^{226}_{88}$Ra. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α-deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}$Rn. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N. Je kunt het verval van radium dan op drie manieren met een formule beschrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0{,}9996^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $e^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot e^{-0{,}00043t}$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0{,}00019t}$

Opgave 13

Bekijk **Toepassen op pagina 385**.

a Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.

b Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.

c Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?

d In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 14: C-14 methode

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.
Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

a Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot e^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.

b Van de Dode-Zeerollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?

c Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?

d Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?

Testen

Opgave 15

Differentieer de volgende functies en bepaal het hellingsgetal voor $t = 1$.
Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $H(t) = 3 \cdot 0{,}5^t - 4$

b $N(t) = 50 - 30 \cdot e^{-0{,}50t}$

Opgave 16

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.
De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als lood. Als die stralingsintensiteit in procenten wordt voorgesteld door I, dan geldt:

$I(d) = 100 \cdot e^{-\alpha \cdot d}$

Hierin is:

- d de dikte van de loden plaat in cm
- α een constante die afhangt van het materiaal

a Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α.

b Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

10.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = {}^{g}\log(x)$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op logaritmische functies.

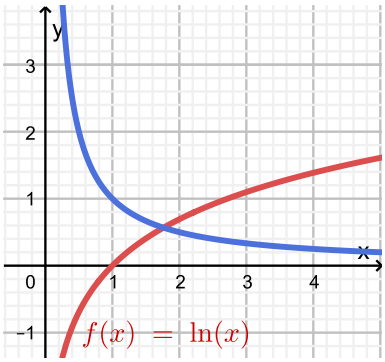
Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van exponentiële functies berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide, gemaakt in GeoGebra.



Figuur 10.1

a Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?

b De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?

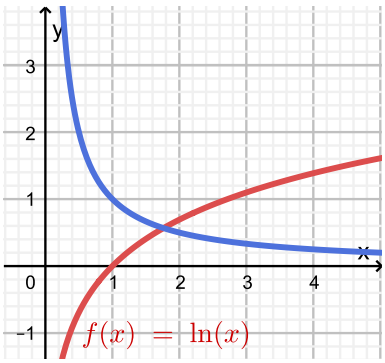
c Maak zelf de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide met GeoGebra, Desmos of met een grafische rekenmachine.

d Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet in de figuur dat de afgeleide (blauwe grafiek) van een logaritmische functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$ erg lijkt op een gebroken functie van de vorm $y = \frac{c}{x}$ waarin c een constante is die van het grondtal g afhangt.



Figuur 10.2

Kies je voor het grondtal het getal e dan is precies $c = 1$:

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kent, kun je die van bijvoorbeeld $f(x) = {}^{2}\log(x)$ ook bepalen.

Je wisselt dan van grondtal 2 naar grondtal e met behulp van een rekenregel:

$f(x) = {}^{2}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.

En dus is $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} \approx 1{,}44 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1{,}44}{x}$.
Met andere grondtallen gaat dit net zo:

- De afgeleide van $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Nu kun je alle logaritmische functies differentiëren.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 387** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(x)$

b $f(x) = 3\ln(x) + 1$

c $f(x) = \ln(2x)$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide van $f(x) = {}^{3}\log(x)$ en daarmee het hellingsgetal van deze functie voor $x = 2$ in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de *g*-logaritme** $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$.
Je vindt:

Als $f(x) = {}^{g}\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^{g}\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = \ln(2x)$
- $f(x) = {}^{5}\log(x)$
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$

Antwoord

- $f(x) = \ln(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = {}^{5}\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{x} \approx 0{,}62 \cdot \frac{1}{x} = \frac{0{,}62}{x}$.
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$ geeft $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$.
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{t} \approx -869 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-869}{t}$.

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1 op pagina 388** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(4x)$

b $f(x) = {}^{0,5}\log(x)$

c $f(x) = 5\log(x)$

d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p hangt af van de hoogte k in km boven zeeniveau. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$$h = -6{,}5\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)
- h de hoogte boven zeeniveau in km

p_0 is de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa.
Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Figuur 10.3

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6{,}5\ln(0{,}001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0{,}235$ km.
Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$$h'(p) = -6{,}5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0{,}001p} \cdot 0{,}001 = -\frac{2{,}823}{p}.$$

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0{,}003$.
Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 389**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

a Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.

b Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.

c Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Oefenen

Opgave 6

Bepaal $f'(x)$ en bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

a $f(x) = \ln(0{,}5x)$

b $f(x) = 4 \cdot {}^{2}\log(x) + 10$

c $f(x) = 200 \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - \ln(2x)$.

a Maak de grafiek van f.
Welke asymptoot heeft deze grafiek?

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

c Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van - 1?

Opgave 8

Gegeven de functies $y_1 = \ln(6 - x)$ en $y_2 = -\ln(x)$ met domein $[0,6]$.

a Bekijk de grafieken van deze functies.

Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x-waarde k. Neem aan dat $1 < k < 4$.

b Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2 \cdot \ln(3)$ is.

Opgave 9

Voor het geluidsdrukniveau L geldt de formule:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierin is l de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootheid L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

a Bij de gehoorgrens ($L = 0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2. Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2. Bereken het geluidsdrukniveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluidsdrukniveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluidsdrukniveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

b Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluidsdrukniveau.

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10 \log (2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluidsdrukniveau in dB is. L_0 is het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg.

c Als op 20 m een geluidsdrukniveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan L_0?

d Hoe groot is het geluidsdrukniveau van die weg op 100 m afstand?

e Op welke afstand van die weg is het geluidsdrukniveau 60 dB?

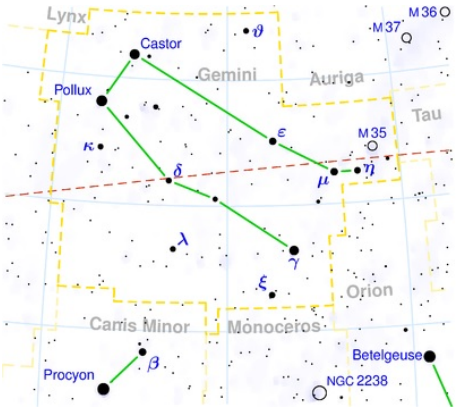
Toepassen

De helderheid van sterren wordt vanouds aangegeven door de grootteklasse of magnitude m. Heldere sterren zijn van de eerste grootte: $m = 1$. Sterren die met het blote oog nog net zichtbaar zijn, hebben magnitude 6. Die magnitude wordt echter nog fijner onderverdeeld. De ster **Castor** in het sterrenbeeld 'Tweelingen' heeft een magnitude van 1,58.

Volgens de wet van Fechner is de magnitude afhankelijk van de lichtsterkte l volgens de formule:

$m = a \ln (l) + b$

Daarin is de lichtsterkte van een ster met magnitude 6 gelijk aan 1: dus voor $l = 1$ geldt $m = 6$. Een ster van de eerste grootte is echter 100 keer zo lichtsterk: dus voor $l = 100$ geldt $m = 1$.



Figuur 10.4

Opgave 10

Bekijk **Toepassen op pagina 391**.

a Bereken met behulp van de gegevens a en b.

b Voor de ster 'Regulus' geldt dat $l = 73$. Bereken de magnitude van Regulus.

c De helderste ster is 'Sirius' met een magnitude van $m = -1{,}6$. Bereken de bijbehorende lichtsterkte.

d Schrijf l als functie van m. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

De lichtsterktes van twee sterren die samen een dubbelster vormen kun je optellen, hun magnitudes echter niet. De ster ε in het sterrenbeeld 'Lier' is zo'n dubbelster. De magnitudes van de afzonderlijke sterren zijn 4,5 en 4,7.

Bereken de magnitude van de dubbelster.

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en bereken $f'(10)$ in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = {}^{3}\log(x)$

b $f(x) = 2\ln(11 - x)$

c $f(x) = 30\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Opgave 13

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$S(t) = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Hierin is:

- t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan
- S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm. Ga er van uit dat hij elke dag 16 uur actief is en verder slaapt.

a Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Laat met behulp van de afgeleide van $S(t)$ zien, dat deze functie dalend is.

10.4 Groeimodellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier;
- groeimodellen opstellen en de eigenschappen ervan kennen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

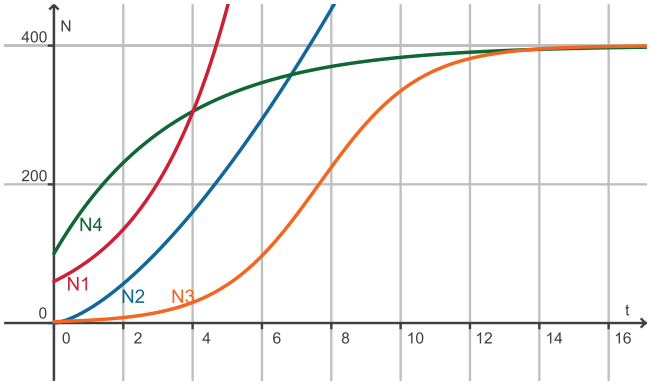
Verkennen

Opgave V1

Hier zie je in één figuur vier grafieken. De bijbehorende functies zijn:

- $N_1(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$
- $N_2(t) = 20 \cdot t^{1{,}5}$
- $N_3(t) = \frac{400}{1+200 \cdot 0{,}5^t}$
- $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$

Elk van deze functies is te gebruiken als groeimodel.



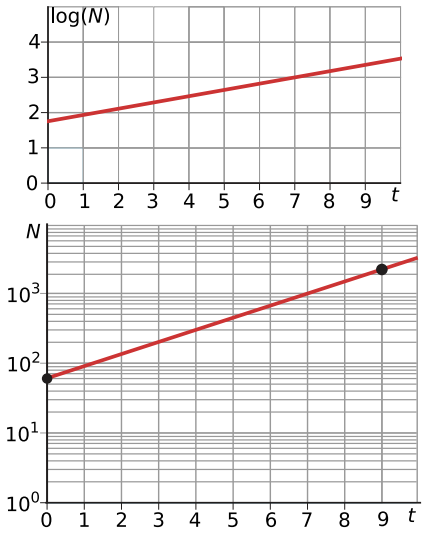
Figuur 10.1

a Beschrijf bij elk van deze functies de wijze waarop de groei verloopt.

b Beschrijf ook telkens het verloop van de groeisnelheid.

Uitleg 1

Een functie zoals $N(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$ beschrijft **exponentiële groei**. Je kunt deze functie opvatten als een exponentieel groeimodel. De groei is dan nogal explosief, bij betrekkelijk kleine waarden van t heb je al met hele grote uitkomsten te maken.
Dat is lastig als je een geschikte grafiek wilt maken.
Neem je daarentegen aan beide zijden de logaritme dan krijg je:
$\log(N) = \log(60 \cdot 1{,}5^t)$.
Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit:
$\log(N) = \log(60) + t \cdot \log(1{,}5)$.
Omdat zowel $\log(60)$ als $\log(1{,}5)$ getallen zijn, staat hier dat tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat. En daarom wordt een exponentiële functie een rechte lijn als je op de verticale as een **logaritmische schaal** gebruikt.



Figuur 10.2

Er bestaat speciaal grafiekenpapier waar de verticale as zo is aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een exponentiële functie. Dat heet **enkellogaritmisch papier**. De onderste grafiek is die van $N(t)$ op dergelijk papier.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 393**. Daarin gaat het over het tekenen van de grafiek van een exponentiële functie.

a Ga na dat de bovenste grafiek juist is.

b Ga na dat de onderste grafiek ook juist is.

Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot 0{,}8^t$.

c Laat met de rekenregels van logaritmen zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van t is.

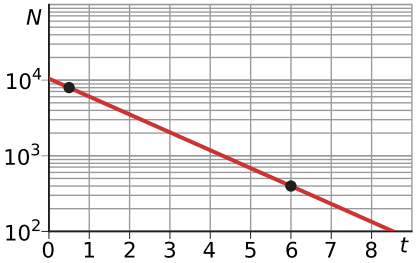
d Teken de grafiek van $\log(K)$ als functie van t.

De grafiek van K kun je ook op enkellogaritmisch grafiekenpapier tekenen. Je hoeft dan niet eerst de formule te herleiden.

e Neem een blad van dit grafiekenpapier en teken daarop de grafiek van deze functie.

Opgave 2

Je ziet hier de grafiek van een nieuwe functie $N(t)$ op enkellogaritmisch grafiekenpapier.



Figuur 10.3

a Leg uit dat de grafiek door $(0{,}5; 8000)$ en $(6{,}400)$ gaat en stel het functievoorschrift op.

b Lees uit de figuur af hoe groot $N(1)$ en $N(4{,}5)$ (bij benadering) zijn. Controleer je antwoorden met behulp van het functievoorschrift.

c Heeft $N(t) = 0$ oplossingen? Kan er op de verticale as een 0 voorkomen?

Opgave 3

Bekijk de functie $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$.

a Teken de grafiek van N_4 op enkellogaritmisch grafiekenpapier.

b Kun je verklaren waarom de grafiek geen rechte lijn wordt?

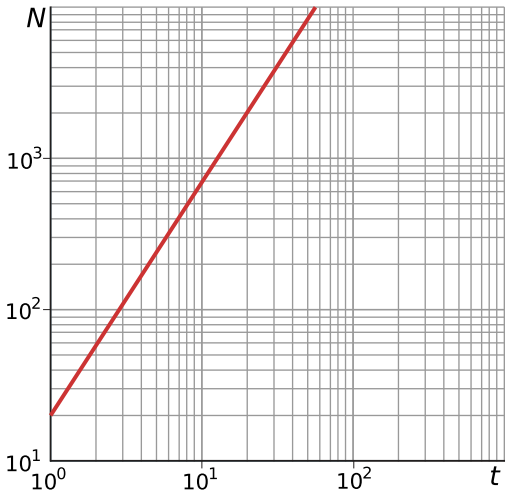
Uitleg 2

Een functie zoals $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ is een **machtsfunctie**. Ook daarvan is de grafiek lastig te tekenen, want in de buurt van $t = 0$ heb je uitkomsten vlak bij 0, maar bij grotere waarden van t als snel uitkomsten die behoorlijk groot zijn. Weer kun je het voorschrift herleiden met de rekenregels voor logaritmen:

$\log(N) = \log\left(20 \cdot t^{1,5}\right)$ levert op:
$\log(N) = \log(20) + 1,5 \cdot \log(t)$.

Er bestaat dus een lineair verband tussen $\log(N)$ en $\log(t)$. Nu gebruik je op beide assen een logaritmische schaal.

Ook hiervoor bestaat speciaal grafiekenpapier waar de beide assen zo zijn aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een machtsfunctie. Dat heet **dubbellogaritmisch papier**. Hier zie je de grafiek van $N(t)$ op dergelijk papier.



Figuur 10.4

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 395** over het tekenen van een machtsfunctie.

a Maak bij de functie N met $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ een tabel van $\log(N)$ afhankelijk van $\log(t)$. Teken de grafiek van $\log(N)$ uitgezet tegen $\log(t)$.

b Neem een blad dubbellogaritmisch papier. Teken daarop zelf de grafiek van $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$. Waarom gaat de grafiek niet door (0,0)?

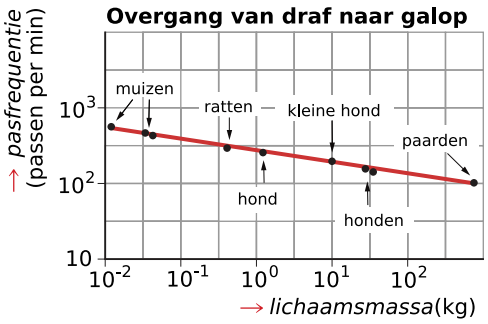
Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot t^{0,8}$.

c Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van $\log(t)$ is.

d Teken de grafiek van $K(t)$ op dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Opgave 5

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa (in kg).



Figuur 10.5

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Noem de lichaamsmassa m (in kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden. Leg uit dat het punt dat hoort bij paarden ongeveer de coördinaten $\left(10^{2,9}, 10^{2,0}\right)$ heeft. Bepaal zelf de coördinaten van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af voor P als functie van m.

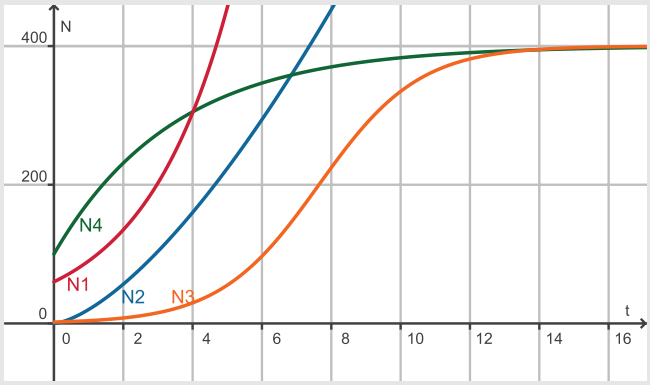
d Bereken bij welke pasfrequentie een pony van 120 kg van draf naar galop overgaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort een functie van de vorm $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$.
(In de figuur is $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Teken je dergelijke functies op **enkellogaritmisch papier** dan wordt de grafiek een rechte lijn.

Bij een **machtsfunctie** als model hoort een voorschrift van de vorm $N_2(t) = b \cdot t^p$.
(In de figuur is $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Van dergelijke functies is de grafiek op **dubbellogaritmisch papier** een rechte lijn.



Figuur 10.6

Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort een functie als $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.
Kenmerkend voor dit groeimodel is, dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt, maar op zeker moment (voedselgebrek, te weinig ruimte) afremt. De groeisnelheid die eerst toeneemt, gaat vanaf dat moment afnemen. In dit groeimodel is $N = G$ de horizontale asymptoot en vind je de grootste groeisnelheid bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (In de figuur is $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Er zijn tenslotte nog situaties waarin het verschil met een constante waarde exponentieel afneemt. Daarbij hoort een groeimodel van de vorm $N_4(t) = G + b \cdot g^t$. Kenmerkend voor dit groeimodel is dat de groeisnelheid vanaf het begin afneemt. (In de figuur is $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0{,}75$.)

Voorbeeld 1

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156

Tabel 10.1

Figuur 10.7

De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.
Teken de grafiek van $\log(N)$ als functie van t en/of teken de grafiek van $N(t)$ op **enkellogaritmisch papier** en stel een passende formule voor $N(t)$ op.

Antwoord

Zie de figuur hiernaast. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.

Een passende formule heeft bijvoorbeeld de vorm $N(t) = b\,e^{kt}$.

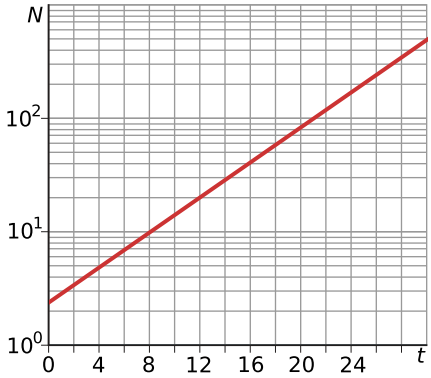
De getekende grafiek gaat ongeveer door (4,5) en (12,20). Invullen geeft:

- $b \cdot e^{4k} = 5$
- $b \cdot e^{12k} = 20$

Beide zijden op elkaar delen: $e^{8k} = 4$ en dus $k = \frac{\ln(4)}{8} \approx 0{,}17$.

En daarmee bereken je b. Je vindt uit $b \cdot e^{0{,}17 \cdot 4} = 5$, dat $b = 2{,}5$.

Dus $N(t) = 2{,}5\,e^{0{,}17t}$ is een passende formule.



Figuur 10.8

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 396**. De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Teken een lijn die zo goed mogelijk past bij de getekende punten. Deze lijn stelt de grafiek van $N(t)$ voor op enkellogaritmisch papier.

b Stel zelf een formule op voor $N(t)$. Ga er vanuit dat de grafiek door (8,10) en door (21,100) gaat.

c Controleer of de punten uit de tabel passen bij de gevonden formule.
Waarom zal geen enkele formule precies de gegeven tabel opleveren?

d Na hoeveel dagen zouden er volgens jouw formule meer dan 1000 fruitvliegjes zijn?

Opgave 7

In deze tabel zie je hoe de groei van het aantal fruitvliegjes (‘Drosophila melanogaster’) verder gaat.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 10.2

a Waaraan zie je dat er op den duur toch geen sprake is van exponentiële groei?

Voor het aantal fruitvliegjes is deze formule opgesteld: $N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^t}$.

b Maak een grafiek voor $N(t)$ en bepaal het maximale aantal fruitvliegjes volgens dit rekenmodel.
Met welke soort groei heb je hier te maken?

c Bepaal de waarde van t waarin de groeisnelheid van N zo groot mogelijk is.

Voorbeeld 2

Johannes Kepler (1571 — 1630) beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (in jaren) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R. Voor de Aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen. In de tabel vind je de gegevens van de andere planeten in ons zonnestelsel.

planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (in AE)	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07
T (in jaren)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	25,5	84,0	164,8

Tabel 10.3

Het verloop van $T(R)$ doet een machtsfunctie vermoeden.
Teken de grafiek van $T(R)$ op **dubbellogaritmisch papier** en stel een passende formule op.

Antwoord

Zie de figuur. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.

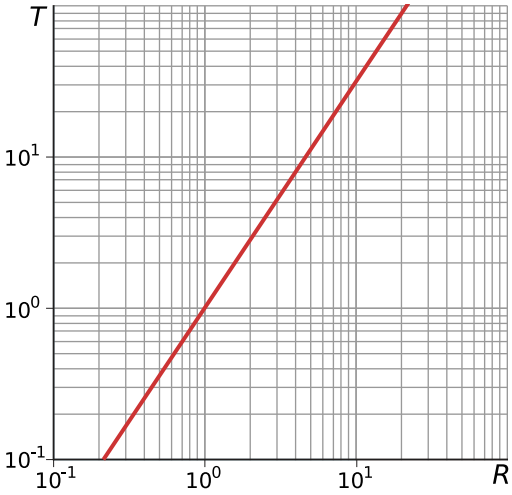
Bij deze machtsfunctie hoort een formule van de vorm $T = b \cdot R^p$.

De grafiek gaat door de punten (1,1) en (ongeveer) (20,90). Invullen:

- $1 = b \cdot 1^p$ zodat $b = 1$
- $90 = b \cdot 20^p$ met $b = 1$ geeft $20^p = 90$

$20^p = 90$ geeft $p = {}^{20}\log(90) \approx 1{,}50$.

Je ziet, dat $T = 1 \cdot R^{1,50}$ een redelijk passende formule is.



Figuur 10.9

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 398**.

a Teken zelf de grafiek van $T(R)$ op dubbellogaritmisch papier.

b Door welk punt moet je grafiek in ieder geval gaan? En waarom?

c Stel zelf een formule op voor $T(R)$ als je aanneemt dat de grafiek door (30,165) gaat.

In 1930 ontdekte astronoom **Clyde Tombaugh** een nieuw hemellichaam dat om de zon draaide op een (gemiddelde) afstand van 38,4851 AE. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en is lang als planeet geclassificeerd.

d Welke omlooptijd heeft Pluto?

Voorbeeld 3

Een kop vers gezette koffie heeft een temperatuur van 80 °C. Als je die koffie rustig laat afkoelen in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt (warmtewet van Newton) het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

t (min.)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T (°C)	80,0	58,4	44,6	35,7	30,1	26,4	24,1	22,6	21,7	21,1	20,7	20,4	20,3

Tabel 10.4

Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule voor $T(t)$ op.
Bereken de snelheid van afkoelen na 5 minuten.

Antwoord

Je gaat uit van: $T(t) = 20 + b \cdot g^t$.
Dit is geen zuiver exponentiële functie, dus logaritmisch papier is niet bruikbaar.
De grafiek van $T(t)$ gaat door (0,80) en dit geeft: $b = 60$.
De grafiek gaat ook (ongeveer) door $(24; 20{,}3)$ en dit geeft: $60 \cdot g^{24} = 0{,}3$ en dus $g \approx 0{,}80$.
Een passende formule is: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}80^t$.

De afkoelsnelheid na vijf minuten is $T'(5) = 60 \cdot \ln(0{,}80) \cdot 0{,}80^5 \approx 4{,}39$ °C/minuut.

Opgave 9

Bekijk het afkoelingsproces van een kop koffie in **Voorbeeld 3 op pagina 399**.

a Ga uit van het beschreven groeimodel en stel zelf een bijpassende formule op als je aanneemt dat de grafiek door de punten (0,80) en $(20; 20{,}7)$ gaat.

b Bereken de snelheid van afkoelen na 10 minuten.

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 399**.

a Bepaal op welk tijdstip t de afkoelsnelheid 10 °C/minuut is.
Geef je antwoord in seconden.

b Bepaal met de grafische rekenmachine op welk tijdstip t de groeisnelheid maximaal is.

Oefenen

Opgave 11

Je ziet hier een tabel van de afname van een bepaalde hoeveelheid H met de tijd t in weken.

t (weken)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H (gram)	200	188	177	166	156	147	138	130	122

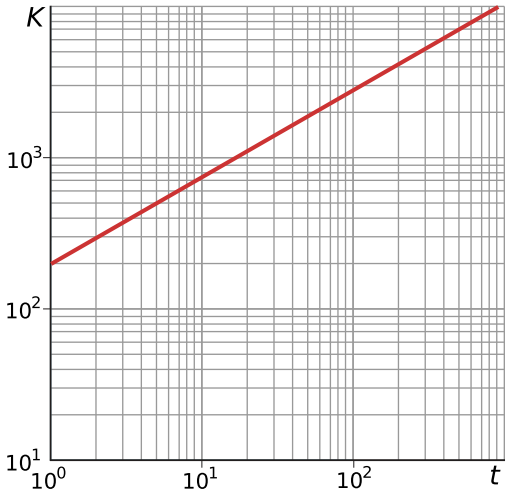
Tabel 10.5

Onderzoek met behulp van enkellogaritmisch papier of $H(t)$ exponentieel vervalt en stel - als dit zo is - een bijpassende formule op.

Opgave 12

Je ziet hier een grafiek van de functie $K(t)$.

Stel een formule voor $K(t)$ op.



Figuur 10.10

Opgave 13

De tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van de zonnebloemen op een bepaalde akker op verschillende tijdstippen na het ontkiemen. De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken is 256 cm.

- t is de tijd in weken na het ontkiemen
- $H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op tijdstip t

Figuur 10.11

aantal weken	2	4	6	8	10	12
hoogte in cm	36	98	170	228	251	255

Tabel 10.6

a Als je hierbij een grafiek tekent, lijkt er van geremde exponentiële groei sprake te zijn.

Een bijpassende formule is $H(t) = \frac{256}{1+b \cdot g^t}$.

Bereken de bij de tabel passende waarden van b en g.

b Welke hoogte zullen deze zonnebloemen uiteindelijk gaan bereiken volgens dit groeimodel?

c Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 1$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tweede week groter?

d Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 10$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tiende week kleiner?

e Op welke dag na het ontkiemen van de zonnebloemen groeien ze het snelst? Hoe snel groeien de zonnebloemen dan?

Opgave 14

In de tabel zie je de meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van het dier en de energie E die het nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	$1{,}7 \cdot 10^3$
hond (klein)	$2{,}6 \cdot 10^3$	$4{,}4 \cdot 10^3$
hond (groot)	$1{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$
schaap	$3{,}9 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^4$
paard	$5{,}8 \cdot 10^5$	$5{,}8 \cdot 10^5$

Tabel 10.7

a Teken deze gegevens op dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Zet m uit op de horizontale as en E op de verticale as.

b Waarom kun je bij benadering aannemen, dat er tussen m en E een verband van de vorm $E = a \cdot m^b$ bestaat?

c Bereken passende waarden van a en b.

d Bereken het energieverbruik per km van een kat met een massa van 3,2 kg.

Opgave 15

De volgende alinea's zijn vrij naar een artikel dat in 1991 in een krant stond.

FAO luidt noodklok

Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980. Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties, in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

1. In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.
2. Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.
3. De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen waar de ontbossing een halt is toegeroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren. Zij noemt de oppervlakte aan tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) dat op tijdstip t nog aanwezig is $y(t)$. Zij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en t in jaren.

a Leg uit waarom zowel een formule van de vorm $y(t) = a \cdot t + b$ als een formule van de vorm $y(t) = a \cdot g^t$ niet in overeenstemming is met de gegevens uit het krantenartikel.

De lezer kiest voor een formule van de vorm $y(t) = b - a \cdot g^t$.
Uit de in de alinea's 1, 2 en 3 verstrekte gegevens leidt zij deze waarden af: $b = 3311$, $a = 274$ en $g = 1{,}0414$.

b Laat zien dat de formule met die waarden in overeenstemming is met de in de alinea's 1, 2 en 3 gegeven informatie.

Wanneer de ontbossing op dezelfde wijze blijft voortduren, zal op een gegeven moment minder dan 1000 miljoen hectare tropisch oerwoud overblijven.

c Bereken in welk jaar dat volgens de door de lezer gevonden formule zal gebeuren.

Het oorspronkelijke krantenartikel begon met de zin: 'De tropische oerwouden verdwijnen anderhalf keer zo snel als 10 jaar geleden.'

d Onderzoek met behulp van differentiëren of de door de lezer gevonden formule ook hiermee in overeenstemming is.

Toepassen

Bij het oogsten van koren wordt vaak gewerkt met een combine, of maaidorser. In zo'n maaidorser wordt in twee etappes gedorst: eerst in de dorstrommel en daarna op de zogenaamde 'schudder', waar het graan (de graankorrels) tijdens het doorlopen van een traject uit het stro wordt geschud. De snelheid waarmee de hoeveelheid graan G (in kg) in het stro door het schudden afneemt, is recht evenredig met die hoeveelheid zelf:

$G'(x) = -k \cdot G(x)$

waarin x de afstand tot het begin van de schudder in meters is.

Figuur 10.12

Opgave 16

Bekijk **Toepassen op pagina 402**.

a Verklaar de formule in de tekst, met name ook het minteken.

Neem $k = 0{,}2$. Dan moet gelden $G'(x) = -0{,}2 \cdot G(x)$.

b Toon aan dat de functie $G(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$ hieraan voldoet.

c Ga uit van een schudder met een totale lengte van 6 m. Hoeveel procent van de hoeveelheid graan aan het begin van de schudder is aan het einde nog niet uit het stro geschud?

Opgave 17

k heet de scheidingsfactor van het proces van schudden zoals beschreven in **Toepassen op pagina 402**.
De scheidingsfactor hangt af van de snelheid v (in m/s) van de maaidorser. Er geldt $k = \frac{1}{v}$.

a Verklaar de naam 'scheidingsfactor'. Hoeveel procent van het graan wordt niet uit het stro geschud als de maaidorser rijdt met een snelheid van 2 m/s?

b Is er een snelheid mogelijk waarbij alle graan uit het stro wordt geschud?

Testen

Opgave 18

Bij een slingerproef is de slingerperiode T voor een aantal verschillende slingerlengten l gemeten.

l (cm)	T (s)
63,5	1,65
87,5	1,87
140,5	2,38
225,0	3,00
320,0	3,55

Tabel 10.8

a Laat zien met behulp van logaritmisch papier, dat de meetresultaten in overeenstemming zijn met de veronderstelling, dat T een machtsfunctie is van l: $T = A \cdot l^a$.

b Bereken A en a.

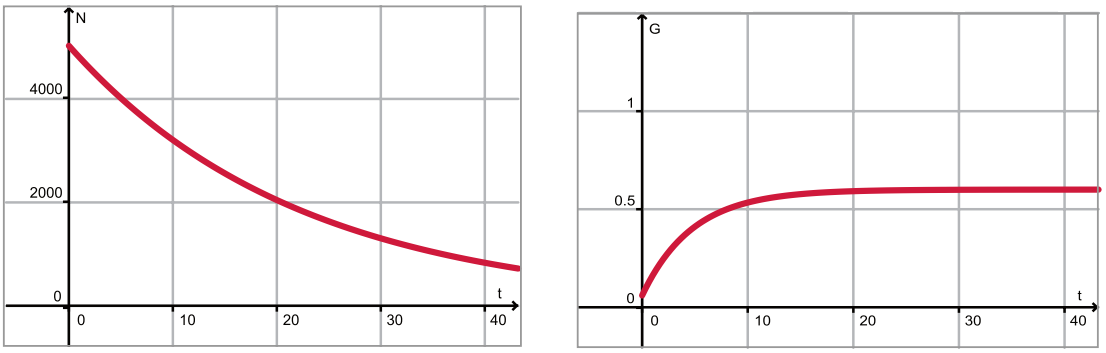
Opgave 19

Een forellenkweker zet in elk van zijn kweekvijvers steeds 5000 jonge forellen uit. Die forellen nemen vanaf dat moment ($t = 0$) in gewicht toe, maar er sterven ook forellen. Hij heeft al een aantal jaren maandelijks de stand van de forellen bijgehouden. Op grond daarvan kan hij formules opstellen voor de groei van zo'n populatie forellen. Als t de tijd in maanden is, dan geldt:

- $N(t) = 5000 \cdot e^{a \cdot t}$ waarin N het aantal forellen is.
- $G(t) = G_{\text{eind}} - b \cdot e^{c \cdot t}$ waarin G het gewicht per forel in kg is.

G_{eind} stelt het gewicht voor dat een gemiddelde forel steeds meer zal benaderen naarmate hij ouder wordt.

Figuur 10.13



Figuur 10.14

a De uitgezette forellen wegen gemiddeld 65 gram. Stel nu met behulp van de grafieken de juiste formules op voor $N(t)$ en $G(t)$.

b Stel een formule op voor het totale gewicht aan forellen in deze vijver.

c Als de forellenkweker zijn kweekvijver wil leegvissen als het totale gewicht aan forellen maximaal is, hoeveel maanden na het uitzetten moet hij dat dan doen?

10.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Het getal e** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het getal e — de natuurlijke logaritme — afgeleide van $f(x) = e^x$
- afgeleide van een exponentiële functie
- afgeleide van een logaritmische functie
- groeimodellen, o.a. exponentiële groei, machtsverband, etc. — enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- werken met het getal e en de natuurlijke logaritme
- exponentiële functies differentiëren
- logaritmische functies differentiëren
- verschillende groeimodellen herkennen — werken met enkel- en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Testen

Opgave 1

Het aantal inwoners van een bepaalde stad B groeide vanaf 1990 met 1,5% per jaar. Op 01-01-2018 heeft deze stad 600 . 000 inwoners.

Er wordt verondersteld dat de groei de komende jaren zo door gaat. Op het stadhuis is de volgende formule opgesteld:

$N(t) = 6 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}015t}$

Hierin is:

- t de tijd in jaren na 2018
- N het aantal inwoners van B

a Laat zien dat deze formule inderdaad een bevolkingsgroei van 1,5% laat zien.

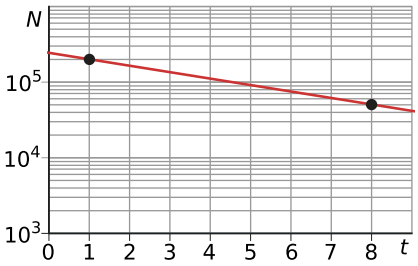
b Hoeveel inwoners had B volgens dit groeimodel in 2000?

c Hoeveel bedraagt de groeisnelheid 2018? En in 2028?

d In welk jaar overstijgt het aantal inwoners van B volgens dit groeimodel de 1 mln?

Opgave 2

Je ziet hier hoe een hoeveelheid N afneemt met de tijd t in dagen.



Figuur 10.1

a Stel een bij deze grafiek passende formule op.

b Voor welke waarde van t (in één decimaal nauwkeurig) is $N(t) \leq 10.000$?

Opgave 3

Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule

$$N(t) = 1200\left(1 - e^{-0,31t}\right)$$

Hierin is t in uren en is $t = 0$ om 09:00 uur.

a Op grond van deze formule kun je concluderen dat het aantal leerlingen dat van een belangrijk feit op de hoogte is uiteindelijk ongeveer constant wordt? Leg uit waarom.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $N(t)$.

c Bereken algebraïsch op welk tijdstip er 550 leerlingen van het feit gehoord hebben. Rond in het antwoord af op minuten.

d Voor de snelheid v waarmee het nieuws zich verspreidt geldt: $v(t) = \frac{dN}{dt}$. Hoe ziet de formule voor de snelheid van de nieuwsverspreiding er uit? Kun je op grond van deze formule dezelfde conclusies als bij a trekken?

e Toon algebraïsch aan dat de grafiek van N stijgend is.

f Met welke snelheid verspreidt het nieuws zich om kwart voor 11? Geef het antwoord in gehelen per minuut.

g Op welk tijdstip is de snelheid van de nieuwsverspreiding de helft van die om 09:00 uur? Geef dit tijdstip in minuten nauwkeurig.

Opgave 4

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand. De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0,06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

a Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

In de onderstaande tabel staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.

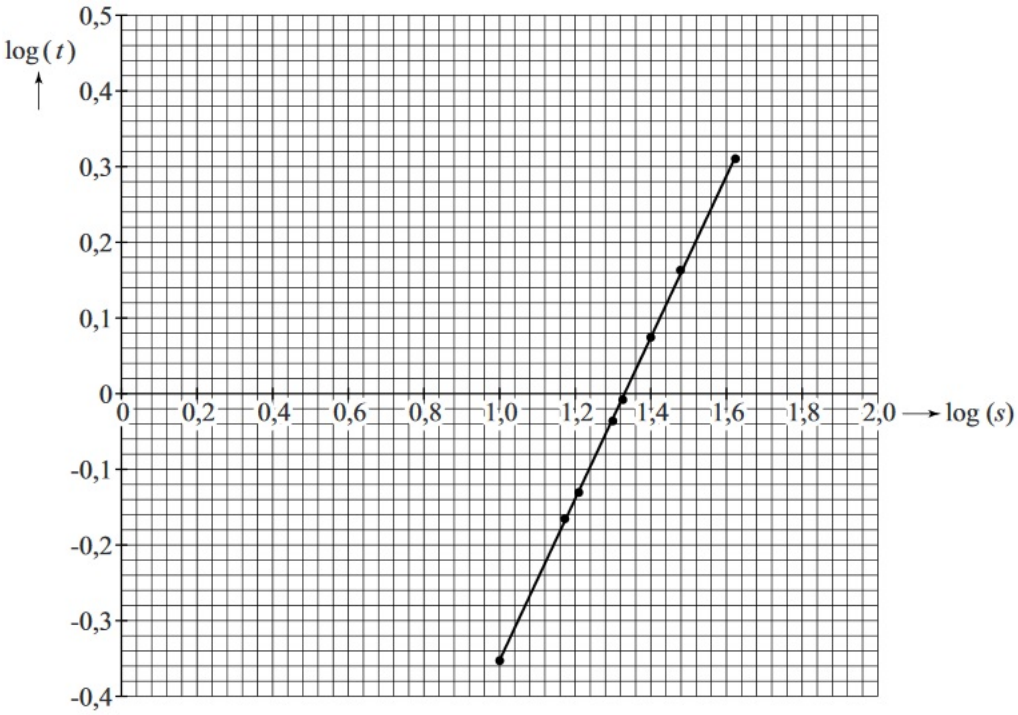
		Wereldtijd in 2015		
Wedstrijd	**Afstand (m)**	**Uren**	**Minuten**	**Seconden**
10 km	10000		26	44
15 km	15000		41	13
10 mijl	16093		44	23
20 km	20000		55	21
halve marathon	21097		58	23
25 km	25000	1	11	18
30 km	30000	1	27	37
marathon	42195	2	02	57

Tabel 10.1

In de hardloopsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het looptempo genoemd.

b Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in de figuur is getekend.

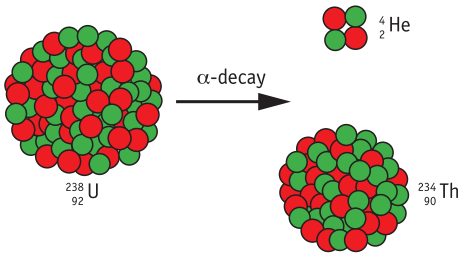


Figuur 10.2

c Bepaal met behulp van de lijn in de figuur het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

Opgave 5

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.



Figuur 10.3

Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd is voor elke radioactieve stof een bepaald constant getal. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.

a Omdat de halfwaardetijd voor een radioactieve stof een constant getal is, is de hoeveelheid H van die stof als functie van de tijd t te beschrijven met een formule van de vorm $H(t) = H(0) \cdot e^{kt}$. Leg uit waarom dat zo is.

b Op $t = 0$ heb je 1 kg U-238. Stel nu een formule op voor $H(t)$.

Neem t in miljarden jaren. k heet de desintegratieconstante.

c Waarom is de desintegratieconstante niet afhankelijk van de hoeveelheid U-238 waarmee je begint?

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is radioactief en daardoor kunnen deeltjes ervan in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

d Bereken de desintegratieconstante van jodium-131.

e Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

f Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

g Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

h Als een meetnauwkeurigheid in mg van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Opgave 6: Vissen in de Grevelingen

De Grevelingen (thans het Grevelingenmeer) is een voormalige zeearm van de Noordzee, gelegen tussen de eilanden Goeree-Overflakkee en Schouwen-Duiveland, op de grens van de provincies Zuid-Holland en Zeeland. In het kader van de Deltawerken werd de Grevelingen door de Grevelingendam (1965) en de Brouwersdam (1971) van zee afgesloten. Het Grevelingenmeer is het grootste zoutwatermeer van West-Europa, en is vooral van belang voor de watersport en recreatie. Het zoutgehalte van het Grevelingenmeer wordt op peil gehouden door de Brouwerssluis, een doorlaatsluis in de Brouwersdam, waarmee zeewater ingelaten wordt. Een gebied met een oppervlakte van 13.872 ha is aangemerkt als beschermd Natura 2000-gebied.

In 1985 werd voor enkele vissoorten het verloop van hun populatiegrootte in modellen beschreven. Omdat enkele vissoorten zoals de schol zich in het afgesloten Grevelingenmeer niet meer konden voortplanten moest de mens een handje helpen. De larven van de schol zwemmen recht op na hun geboorte en zien er dan ook uit als andere vissen. Na ongeveer 6 weken ondergaan ze een gedaanteverwisseling, waarbij een van hun ogen naar de andere kant groeit en ze zich tot platvis ontwikkelen en een jonge schol worden. Voor de schol werden er twee modellen ontworpen:

Figuur 10.4

- Model A: Er worden jaarlijks 5 miljoen larven en 200.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.
- Model B: Er worden jaarlijks 2 miljoen larven en 100.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.

Voor beide modellen geldt dat de sterfte onder jonge schollen (jonger dan 1 jaar) 90% per jaar is en onder schollen ouder dan 1 jaar 33% per jaar. Alle larven worden jonge schollen. Neem aan dat er in 1985 nog 300.000 schollen ouder dan 1 jaar in het Grevelingenmeer zaten.

a Maak op grond van model A een tabel van het aantal schollen ouder dan 1 jaar gedurende de eerste 10 jaren na 1985.

b Teken een grafiek van het aantal schollen S ouder dan 1 jaar in de loop van de jaren.

c Voor S geldt een groeimodel van de vorm $S(t) = G - a \cdot e^{bt}$. Welke waarde voor G schat je op grond van de grafiek bij b? Bereken nu ook de waarden van a en b.

d Er is in dit model nog geen rekening gehouden met bevissing. De visserijmortaliteit is 23% per jaar. Wat betekent dit?

e Pas je model A aan en onderzoek wat dit betekent voor het aantal schollen op den duur.

Opgave 7: Verouderende populaties

Van een zekere populatie neemt met een toenemende leeftijd x van het individu het aantal individuen van die leeftijd meestal af. Die afname wordt door demografen uitgedrukt in het sterftecijfer m (van 'mortality'), dat is het deel van het aantal individuen van een bepaalde leeftijd dat er jaarlijks sterft. Bij een constant sterftecijfer neemt het aantal individuen van een bepaalde leeftijd $S(x)$ (van 'survivors') exponentieel af.

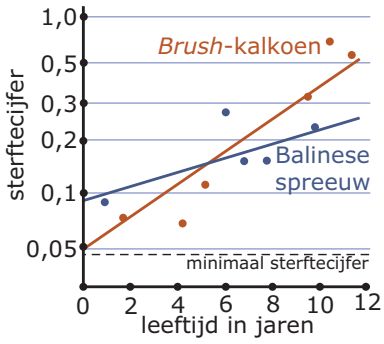
a Verklaar waarom dat zo is.

Bij verouderende populaties blijft het sterftecijfer niet constant, maar wordt het bij hogere leeftijden steeds groter. In dat geval geldt de zogenaamde Gompertzvergelijking:

$m(x) = M \cdot e^{G \cdot x}$

Hierin is:

- M het sterftecijfer van volgroeide individuen
- x de leeftijd van een individu
- G de Gompertz-constante, een maat voor de verouderingssnelheid



Figuur 10.5

Hier zie je de grafieken van $m(x)$ voor de Australische Brush-kalkoen en de Balinese spreeuw. Van Australische Brush-kalkoenen is $M = 0{,}05$ en $G = 0{,}21$.

b Ga na hoe deze getallen zijn terug te vinden in de grafieken van het sterftecijfer.

c Stel voor deze soort een Gompertz-vergelijking voor het sterftecijfer op en ga na of hij past bij de getekende grafiek.

d Als een populatie Brush-kalkoenen 100 volgroeide 0-jarige individuen kent, hoeveel 10-jarige individuen zou die populatie dan moeten hebben?

e Schat nu zelf met behulp van de grafiek de waarden van M en G die gelden voor de Balinese spreeuw. Stel ook voor deze soort de Gompertz-vergelijking op.

Een andere maat voor de veroudering van een populatie is de verdubbelingstijd van het sterftecijfer, de $SCVT$.

f Toon aan dat $SCVT = \frac{\ln(2)}{G}$.

g Bereken de $SCVT$ voor zowel de Brush-kalkoen als de Balinese spreeuw.

h $S(x)$ stelt het aantal volwassen individuen van een populatie met de leeftijd x voor. Teken grafieken van $S(x)$ voor een populatie Australische Brush-kalkoenen en voor een populatie Balinese spreeuwen. Ga bij beide populaties uit van 100 volgroeide 0-jarige individuen. Vergelijk beide grafieken en de verouderingsprocessen van beide populaties.

11

Goniometrische functies

11.1 Goniometrische functies 412
11.2 Goniometrische formules 420
11.3 Differentiëren van goniometrische functies 428
11.4 Harmonische trilling 435
11.5 Totaalbeeld 442

11.1 Goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip goniometrische functie en eigenschappen van dergelijke functies onderzoeken;
- de functie $f(x) = \tan(x)$ en zijn eigenschappen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt leren werken met periodieke functies, met name met sinusoïden. Een voorbeeld is de functie

$h_P(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$

Hierin is:

- t de tijd in seconden
- h de hoogte van een punt P boven de grond in m

a Lees uit het gegeven functievoorschrift de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van h af.
Maak vervolgens die grafiek. (Denk om het gebruik van radialen.)

b Hoe ziet de baan die punt P beschrijft er uit?

c Hoe lang doet P over deze baan?

Voor een ander punt Q geldt $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-1)\right)$.

d Wat is het verschil tussen de banen van P en Q?

Voor het hoogteverschil van beide punten geldt $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$.

e Is h ook een sinusoïde?

f Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-3)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

g Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi(t-1)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

Uitleg 1

Je kent de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen al. Omdat in deze functies de goniometrische verhoudingen sinus en cosinus voorkomen zijn het voorbeelden van goniometrische functies. De belangrijkste eigenschap is wel hun periodiciteit. Maar wat als je $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$ gaat gebruiken om ingewikkelder functievoorschriften te maken? Bekijk eerst maar eens een paar grafieken:

- $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$
- $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- $y_5 = \sin\left(x^2\right)$
- $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$
- $y_7 = \sin(2x) - \sin(x)$
- $y_8 = x + \sin(x)$

Je weet dat y_3 een zuivere sinusoïde is, dus daarbij is sprake van een periode (4π), een amplitude (2), een evenwichtsstand ($y = 1$) en een horizontale verschuiving (2 in de positieve x-richting). Ga dit na, eigenlijk moet je dit vooraf meteen kunnen zien.
Verder lijken ook y_4 en y_6 zuivere sinusoïden. Dat is ook inderdaad het geval, al kun je nu nog niet aantonen dat dit zo is. Je kunt wel periode, amplitude, evenwichtsstand en horizontale verschuiving uit de grafiek aflezen.
Van de overige functies is alleen y_7 periodiek, de andere twee niet.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 413**.
Gegeven is onder andere de goniometrische functie $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$.
Je weet dat dit een zuivere sinusoïde is.

a Maak de grafiek van deze functie. Waarom is het hierbij handig om vooraf te bedenken dat het een sinusoïde betreft en de periode, de amplitude en de evenwichtsstand te bepalen?

b Welke horizontale verschuiving moet je op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Bereken de toppen van de grafiek van f op het interval $[0{,}4\pi]$.

d Los op: $y_3 \leq 2$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 413**. Ga van elk van de volgende functies na of de grafiek op een sinusoïde lijkt of niet.

a $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$

b $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$

c $y_5 = \sin\left(x^2\right)$

d $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

e $y_9 = \sin(9x) - \sin(11x)$

Uitleg 2

Bekijk de applet: Tangens

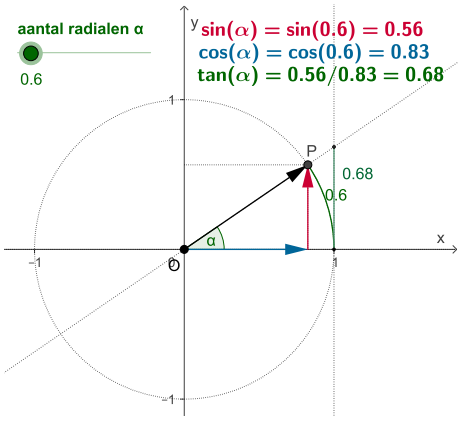
In een eenheidscirkel kun je zo de **tangens** definiëren:

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En daarom geldt voor de **tangensfunctie**:

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.



Figuur 11.1

Terugrekenen vanuit deze functie doe je met behulp van arctan, op veel apparatuur genoteerd als $\tan^{-1}$. Bijvoorbeeld is de oplossing van $\tan(x) = 0{,}5$ gelijk aan $x = \arctan(0{,}5) + k \cdot \pi \approx 0{,}464 + k \cdot \pi$.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 414**. Bekijk de grafiek van $y = \tan(x)$.

a Breng die grafiek zo in beeld, dat je precies twee periodes ziet.

b Waar zitten de verticale asymptoten van deze functie? Leg ook uit hoe je dat kunt afleiden uit de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

c Voor welke waarden van x is $\tan(x) = 1$?

Opgave 4

Ook bij de tangensfunctie komen exacte waarden voor bij $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{3}\pi$.

a Bereken de exacte waarden van $\tan(x)$ voor deze x-waarden.

b Schrijf alle oplossingen op van $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Theorie en voorbeelden

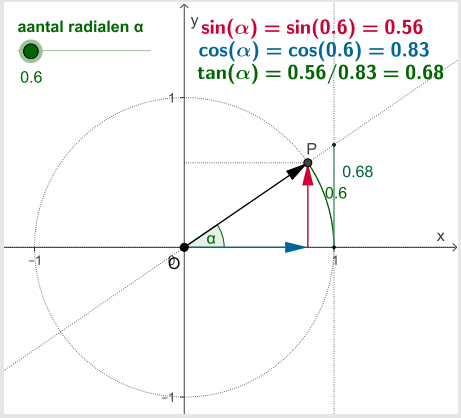
Om te onthouden

Bekijk de applet: Tangensfunctie

Onder **goniometrische functies** versta je functies waarin sin, cos (en tan) voorkomen.
De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al. De tangensfunctie is nieuw.
In deze eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens gedefinieerd als:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En dus geldt voor de **tangensfunctie**: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Figuur 11.2

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De bekende sinusoïden zijn goniometrische functies die zuiver periodiek zijn en een amplitude en een evenwichtsstand hebben. Maar dat geldt niet voor alle goniometrische functies.

Bekijk de applet.

$f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a\tan(b(x-c)) + d$

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Voorbeeld 1

Los op $[-\pi,\pi]$ op: $\tan(x) \leq 1$.

Antwoord

Maak eerst de grafiek van $y = \tan(x)$, minstens op $[-\pi,\pi]$. De verticale asymptoten vallen meteen op. Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vind je ze bij x-waarden waarvoor $\cos(x) = 0$.

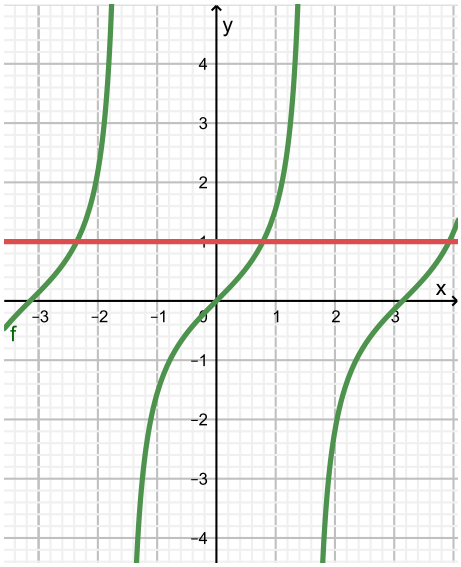
Dus: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Los nu op: $\tan(x) = 1$.

Omdat $\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$ en de tangensfunctie een periode van π heeft, wordt dit: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uit de grafiek lees je de oplossing af, rekening houdend met de verticale asymptoten:

$-\pi \leq x < -\frac{3}{4}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$.



Figuur 11.3

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 416**. Los zelf op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > \sqrt{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 10\sin(0{,}1\pi(x-5)) + 15$ op het interval $[0,50]$.

a Lees periode, amplitude, evenwichtsstand en de horizontale verschuiving t.o.v. de y-as uit het functievoorschrift af.

b Maak de grafiek van f.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) = 12$.

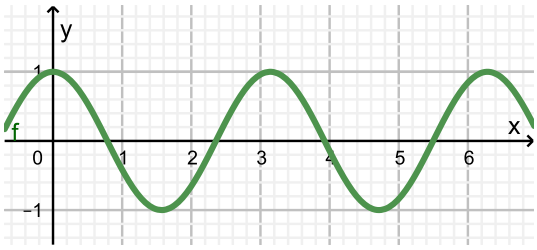
Voorbeeld 2

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

(Met $\cos^2(x)$ wordt $(\cos(x))^2$ bedoeld.)
Onderzoek of deze goniometrische functie periodiek is en bepaal dan de bijbehorende periode.

Antwoord

De standaard cosinusgrafiek heeft een periode van 2π. Het ligt dus voor de hand om de grafiek van f in beeld te brengen op bijvoorbeeld $[0,2\pi]$. Die grafiek lijkt op een zuivere sinusoïde met periode π, amplitude 1 en evenwichtsstand $y = 0$. Als je er een formule met cos bij wilt maken is de horizontale verschuiving 0. Kortom: de grafiek lijkt op die van $y = \cos(2x)$.



Figuur 11.4

Of dit echt het geval is, kun je (nog) niet aantonen. Wel kun je de nulpunten berekenen en kijken of die hetzelfde zijn als die van $y = \cos(2x)$.

$f(x) = 0$ als $2\cos^2(x) - 1 = 0$, dus als $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dit levert dezelfde waarden op als $\cos(2x) = 0$ oplossen.
Ga dat zelf na.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 417**.

a Maak zelf de grafiek van f en bepaal twee opeenvolgende toppen met een maximum.

b Welke periode kun je hieruit afleiden voor de sinusoïde die lijkt te ontstaan?

c Welke andere formule zou je bij deze sinusoïde kunnen opstellen?

d Waarom weet je nog niet helemaal zeker dat de grafiek van f ook echt een sinusoïde is?

Opgave 8

Gegeven de functie f met $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Zo ja, welke formule past er dan bij die sinusoïde?

c Los op: $f(x) = 0{,}5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

d Gebruik nu de formule van de sinusoïde die je bij b hebt gemaakt en los exact op: $y = 0{,}5$. Komen deze antwoorden overeen met die bij c?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2x\sin(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Waarom kan hier geen sprake zijn van een sinusoïde?

b Is dit een periodieke functie?

c Beschrijf de regelmaat van de grafiek van f.

Oefenen

Opgave 10

Als je de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(x)$ optelt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a Maak de grafiek van f. Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Waarom mag je op grond hiervan nog niet aannemen dat het er ook werkelijk één is?

De grafiek van f is een sinusoïde.

b Geef de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y_1 = \sin(x)$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor deze sinusoïde.

d Bereken met behulp van je formule bij b de toppen en de nulpunten van de grafiek van f.

e Los op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > 1$.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

a Deze grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?

b Is de grafiek van g een sinusoïde?

c Bepaal de nulpunten en de toppen van de functie g. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Opgave 12

De grafiek van de functie $y_2 = \sin^2(x)$ is een zuivere sinusoïde.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van de grafiek van $y = \cos(x)$.

b Geef een passende formule voor deze sinusoïde.

c Los op: $y_2 = 1$ door gebruik te maken van het oorspronkelijke functievoorschrift.

d Doe hetzelfde nog eens door gebruik te maken van de gevonden formule voor de sinusoïde.

Opgave 13

Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.

b Neem aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

c Los nu algebraïsch op: $f(x) < 0{,}5$.

Toepassen

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaats vindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld

$u(t) = a \cdot \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$

De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a. Neem voor het gemak $a = 1$.

Bij een grondtoon klinken meestal boventonen mee.
De eerste boventoon heeft een frequentie die de helft is van die van de grondtoon.
De tweede boventoon heeft een frequentie die éénderde is van die van de grondtoon. Enzovoorts.

De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld)
$u_1(t) = 0{,}8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$.
En bij de tweede boventoon past (bijvoorbeeld): $u_1(t) = 0{,}6 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$.
Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

Opgave 14

Bekijk de formules voor een grondtoon en twee boventonen die je in **Toepassen op pagina 419** aantreft.

a Maak eerst de grafiek van de grondtoon A. Zorg dat je precies drie periodes in beeld krijgt, bepaal dus eerst de periode.

b Zet de twee boventonen er bij en tel deze functies op. Maak de bijbehorende grafiek.

c Is de resulterende snaartrilling een zuivere sinusoïde?

Opgave 15

De stamtoon E heeft een frequentie van 330 Hz.

a Welke formule past bij deze toon als je weer uitgaat van een amplitude van 1 en een evenwichtsstand van $u = 0$?

b De eerste boventoon hoor je maar voor 50 % van de geluidssterkte van de grondtoon E.
Welke formule past daar bij?

c Waarom levert het samen horen van de grondtoon E met zijn eerste boventoon wel een periodieke trilling op, maar geen sinusoïde?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Geef een formule voor deze sinusoïde met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 17

De grafiek van $y = \cos^2(x)$ is een sinusoïde. Schrijf de formule in de vorm $y = a\cos(b(x + c)) + d$.

11.2 Goniometrische formules

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- goniometrische formules (symmetrieformules, somformules, verdubbelingsformules, enz.) kennen;
- goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van functievoorschriften en het oplossen van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies met de grafische rekenmachine onderzoeken;
- werken met de functie $y = \tan(x)$.

Verkennen

Opgave V1

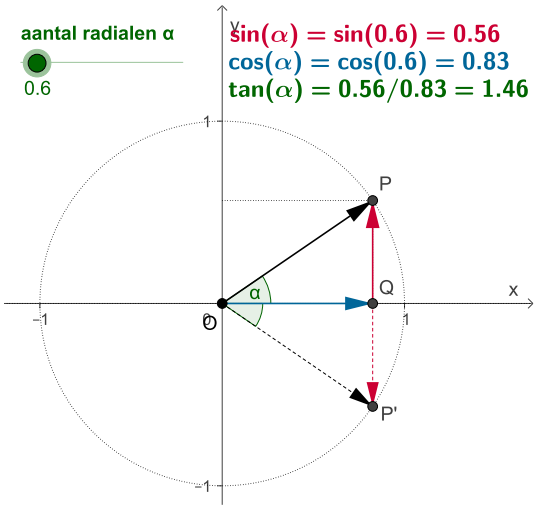
Bekijk de applet.

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

Hier zie je α en $-\alpha$ in één figuur.



Figuur 11.1

a Leg uit waarom $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

b Welk verband is er tussen $\sin(\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$?

c Kun je nog meer van dit soort symmetrieformules afleiden?

d Denk ook eens aan de stelling van Pythagoras. Kun je iets zeggen over $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

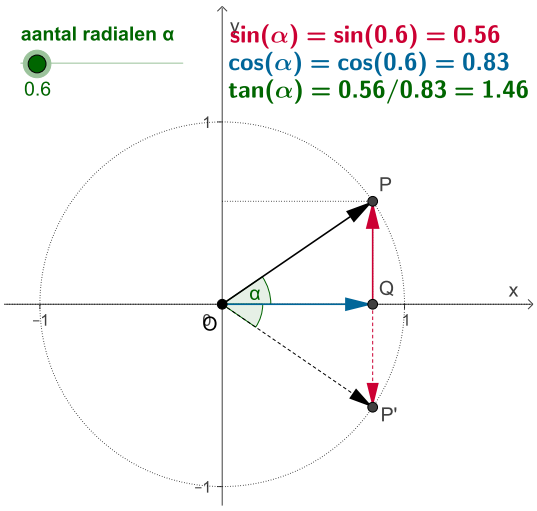
$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$

$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

In deze figuur zie je de hoeken α en $\beta = \pi - \alpha$.

Omdat ΔOQP en $\Delta OQ'P'$ congruent zijn vanwege de symmetrie van de figuur geldt:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$



Figuur 11.2

Kijk je alleen naar ΔOQP dan zie je met de stelling van Pythagoras: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Op deze wijze kun je allerlei formules voor sin, cos en tan afleiden.
Bijvoorbeeld: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Of: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

Of: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 1

Bekijk de symmetrieformules die in **Uitleg 1 op pagina 421** worden afgeleid.

a Laat zelf zien, dat: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

b Laat zien, dat: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

c Laat ook zien dat: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 2

Breng de grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ in beeld.

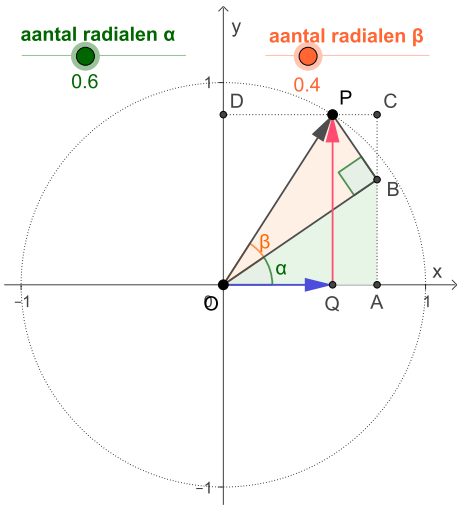
a Welke formule heb je nu zichtbaar gemaakt? En hoe wordt die formule in **Uitleg 1 op pagina 421** afgeleid?

b Maakt het daarbij verschil of je in graden of radialen werkt?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Met behulp van de figuur hiernaast kun je de zogenaamde somformules afleiden. Je ziet hoe hier de hoeken α en β 'op elkaar gestapeld' zijn. Het is de bedoeling om $\sin(\alpha+\beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ en $\cos(\beta)$ met behulp van rechthoek $OACD$ en de rechthoekige driehoeken OBP en BCP. Dit gaat alleen zolang $\alpha+\beta$ tussen 0 en $0{,}5\pi$ blijft. Alle andere situaties moet je met behulp van de symmetrieformules en de eenheidscirkel tot deze herleiden!



Figuur 11.3

Ga na, dat $\sin(\alpha+\beta) = \frac{QP}{OP} = \frac{AC}{OP}$.

Ga ook na, dat $\angle PBC = \alpha$ en daarmee

$\sin(\alpha) = \frac{AB}{OB}$, $\cos(\alpha) = \frac{OA}{OB} = \frac{BC}{BP}$, $\sin(\beta) = \frac{BP}{OP}$ en $\cos(\beta) = \frac{OB}{OP}$.

Dan is:

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP} + \frac{BC}{BP}\cdot\frac{BP}{OP} = \frac{AB}{OP} + \frac{BC}{OP} = \frac{AC}{OP} = \sin(\alpha+\beta)$.

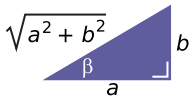
Hiermee heb je afgeleid: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.
Met behulp van de symmetrieformules kun je hier dan weer varianten op maken.
En bovendien geldt als je $\alpha = \beta = x$ neemt: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Dit is een voorbeeld van een verdubbelingsformule.

Opgave 3

In **Uitleg 2 op pagina 422** wordt de formule $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ afgeleid.

a Laat zien dat hieruit volgt $\sin\left(x+\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin(x) + \frac{1}{2}\cdot\cos(x)$.

Voor β geldt $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$, zie figuur.



Figuur 11.4

b Laat zien, dat $\sin(x+\beta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos(x)$.

c Laat zien, dat $a\cdot\sin(x) + b\cdot\cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Je hebt nu ontdekt dat elke formule van de vorm $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ een sinusoïde is.

d Laat zien, dat $3\sin(x) + 4\cos(x) \approx 5\sin(x+0{,}93)$.

e Laat zien, dat $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$.

Opgave 4

In Uitleg 2 op pagina 422 worden verdubbelingsformules afgeleid.

a Laat zien dat $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Je hebt al eerder gezien, dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

b Laat zien dat je hierbij uit de formule bij a kunt afleiden $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Dit is een overzicht van de belangrijkste **goniometrische formules**. Je kunt ze gebruiken om goniometrische functies te herleiden en/of bijbehorende vergelijkingen op te lossen.

Symmetrieformules

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Verbanden tussen sin en cos

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Somformules

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Verdubbelingsformules

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

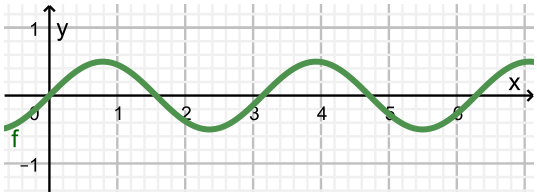
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

Formule voor a sin(x) plus b cos(x)

$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Voorbeeld 1

Je ziet hier de grafiek van de functie f met
$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.
De grafiek lijkt op een sinusoïde. Toon aan dat dit ook echt zo is.



Figuur 11.5

Antwoord

Het functievoorschrift $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ past bij de verdubbelingsformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Die verdubbelingsformule kun je schrijven als $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Het functievoorschrift kun je hiermee herleiden: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

En $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ is een sinusoïde met amplitude $\frac{1}{2}$, periode π en evenwichtsstand $y = 0$. En dat klopt ook netjes met de grafiek.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = \cos^2(x)$. De grafiek van f lijkt een zuivere sinusoïde te zijn.

a Ga dat na.

b Toon aan dat f een sinusoïde is.
Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van die sinusoïde.

c Los algebraïsch op $f(x) = 1$.

Opgave 6

Waarom is $f(x) = 2\sin(x) + \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ een sinusoïde?

Voorbeeld 2

Laat zien, dat $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ een sinusoïde is.
Stel een bijpassende formule op in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Eerst gebruik je de somformule $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Dat geeft $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en dus:

$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)$.

Vervolgens gebruik je $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Dat geeft $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 424** wordt de functie $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ als sinusoïde geschreven.

a Laat zelf zien, dat $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

De vergelijking $\sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$ kun je in deze vorm niet algebraïsch oplossen.
Maar door het schrijven van het functievoorschrift als sinusoïde kan dit wel.

b Los deze vergelijking op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oefenen

Opgave 8

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

a Bereken de nulpunten van deze functie.

b Laat zien dat je het voorschrift van deze functie kunt herschrijven tot $f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$.

c Bereken de nulpunten opnieuw vanuit de formule die je bij b hebt gevonden.

d Los algebraïsch op: $f(x) > \frac{1}{2}$.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $S(x) = f(x) + g(x)$.

a Onderzoek met je grafische rekenmachine of de functie S een sinusoïde zou kunnen zijn.

b Toon met behulp van de somformules voor sinus aan dat S een sinusoïde is.

c Los algebraïsch op: $S(x) \geq 1$.

Opgave 10

Los algebraïsch op $\sin(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

Opgave 11

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 0{,}5\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

b Breng de grafiek in beeld en bepaal de asymptoten.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 12

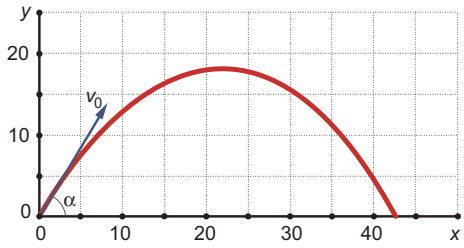
Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Toon aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Los nu algebraïsch op: $f(x) < 1$.

Toepassen

De baan die een afgeschoten voorwerp onder invloed van de zwaartekracht aflegt noem je de kogelbaan. De vorm van deze baan is een parabool. Dat kun je zelf afleiden uit een paar natuurkundige formules.



Figuur 11.6

Als je een voorwerp afschiet met een beginsnelheid v_0 (in m/s) onder een bepaalde hoek α dan ondervindt het zwaartekracht en luchtweerstand. Stel je voor dat die luchtweerstand kan worden verwaarloosd. Je wilt de baan tekenen in een gewoon rechthoekig Oxy-assenstelsel.

- In de x-richting geldt dan: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$.
- In de y-richting geldt dan: $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0{,}5gt^2$.

Hierin is $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de zwaartekrachtversnelling en t de tijd in seconden.

Wellicht herken je de formules voor de eenparige beweging in de x-richting en die voor de eenparig versnelde beweging in de y-richting wel uit de natuurkunde. En natuurlijk wil je weten bij welke hoek de kogel het verst verwijderd op de grond komt.

Opgave 13

Bekijk de formules voor de kogelbaan in **Toepassen op pagina 426**.

a Licht toe hoe je aan deze formules komt.

Voor de kogelbaan in de figuur geldt $\alpha = 60°$ en $v_0 = 96$ m/s.

b De kogel komt op de grond als $y = 0$. Bij welke waarden van t is dat?

c Bereken de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt.

d Laat zien dat in het algemeen voor het punt waar de kogel na het afschieten weer op de grond terecht komt geldt: $t = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

e Laat zien dat voor de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt geldt: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$.

Opgave 14

De afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt is: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$. Bij een bepaalde beginsnelheid hangt deze afstand alleen van α af.

a Bij welke hoek α is x maximaal?

b Hoeveel m na het afschieten met een beginsnelheid van 300 m/s komt de kogel weer op de grond als je deze beste hoek kiest?

c Laat zien, dat de baan parabolisch is.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(2x) - \sin^2(x)$ op $[-\pi,\pi]$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Toon dat aan.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \tan(x - \pi) + 1$ op $[0,2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze grafiek.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Los op: $f(x) \leq 2$.

11.3 Differentiëren van goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een sinusoïde bepalen;
- de differentieerregels toepassen op functies waarin sinus, cosinus of tangens voorkomen.

Voorkennis

- werken met goniometrische functies en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- werken met de functie $y = \tan(x)$;
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

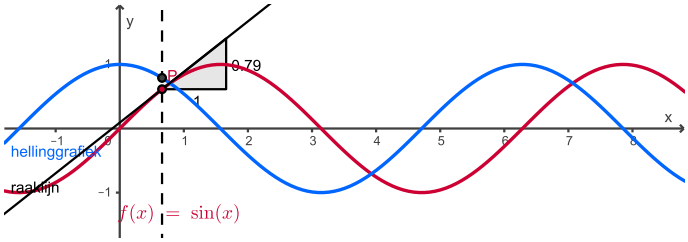
Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en een bijpassende hellinggrafiek.

a Ga na dat die blauwe grafiek inderdaad de hellinggrafiek van f is.

b Welke afgeleide heeft $f(x) = \sin(x)$, denk je?

c Welke afgeleide heeft $f(x) = \cos(x)$, denk je?



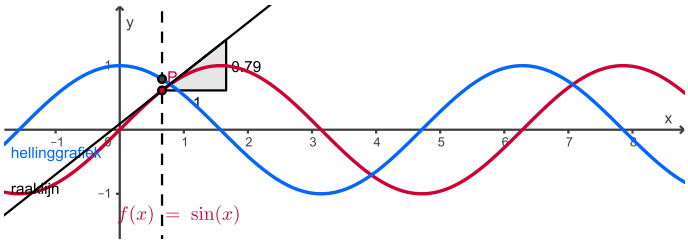
Figuur 11.1

Uitleg

Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Het differentiëren van functies waarin sinus en/of cosinus voorkomen is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.



Figuur 11.2

In de applet wordt dit voor $f(x) = \sin(x)$ aannemelijk gemaakt. Je ziet hierin dat de hellingsgrafiek van f gelijk is aan de grafiek van $f'(x) = \cos(x)$.

Op dezelfde manier zie je dat afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ gelijk is aan $f(x) = -\sin(x)$.

Opgave 1

Bekijk de afgeleiden van sinus en cosinus in de **Uitleg op pagina 428**. In de figuur kun je zien dat de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ gelijk is aan $f'(x) = \cos(x)$.

Maak de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ en de bijbehorende hellingsgrafiek.

Opgave 2

Je kent nu de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$.

a Bereken daarmee de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Bewijs 1

Om de afgeleide van $y = \sin(x)$ te bepalen kijk je naar het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ als $h \to 0$

Gebruik de goniometrische formule $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$

Omdat $\cos(h) \to 1$ als $h \to 0$ kun je dit schrijven als

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} = \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$

En omdat voor $h \to 0$ geldt dat $\sin(h) \to h$, staat hier

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \to \cos(x)$ als $h \to 0$

Precies wat je wilde aantonen...

De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ kun je op dezelfde wijze afleiden.

De afgeleide van $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ leid je met behulp van de quotiëntregel af.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel en met de constante-regels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$
- $h(t) = 3\sin^2(t)$

Antwoord

Gebruik - behalve de afgeleiden van sinus en cosinus - ook de differentieerregels.

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$ geeft $f'(x) = 5\cos(x)$.
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$ geeft $p'(t) = 4 \cdot -\sin(0{,}15t) \cdot 0{,}15 = -0{,}6\sin(0{,}15t)$ (kettingregel!).
- $h(t) = 3\sin^2(t) = 3 \cdot (\sin(t))^2$ geeft $h'(t) = 3 \cdot 2(\sin(t))^1 \cdot \cos(t) = 6\sin(t)\cos(t)$.

Opgave 3

Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2\sin(x)$

b $f(x) = \sin(2x)$

c $f(x) = \sin^2(x)$

d $h(t) = 12\sin(0{,}5\pi t) + 1$

e $I(t) = 30\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$

f $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Opgave 4

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ kun je vinden door de quotiëntregel voor differentiëren en de afgeleiden van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ te gebruiken. Laat dat zien.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = -10 + 20\sin(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$ met domein $[-10{,}10]$.
Stel m.b.v. differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

$f'(x) = 20\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi) \cdot 0{,}1\pi = 2\pi\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$.

Daaruit volgt: $f'(0) = 2\pi\cos(-0{,}2\pi) \approx 5{,}08$.
Verder is: $f(0) = -10 + 20\sin(-0{,}2\pi) \approx 21{,}76$.

De vergelijking van de raaklijn wordt bij benadering: $y = 5{,}08x - 21{,}76$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 430**.

Stel zelf de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ op.

Opgave 6

Bekijk het **Voorbeeld 2 op pagina 430**. Je ziet daar hoe de vergelijking van de raaklijn aan een sinusoïde wordt opgesteld. Differentieer nu de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 0$.

a $f(x) = 20 \sin(440\pi x)$

b $f(x) = \tan(x)$

Voorbeeld 3

Bij in- en uitademen varieert het longvolume V (in liters) periodiek met de tijd t (in seconden). Stel je voor dat iemand's longvolume varieert tussen 3,05 en 3,15 L en dat deze persoon 40 keer per minuut in- en uitademt. Neem verder aan dat $V(t)$ een zuivere sinusoïde is.
Op $t = 0$ is zijn longvolume maximaal. Bereken de grootste snelheid van uitademen.

Antwoord

Dit is een passende formule: $V(t) = 3{,}10 + 0{,}05 \cos\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right)$.
Hierin is t in seconden (er gaan 40 ademhalingen in 60 seconden, dus de periode is 1,5 s).

De grootste snelheid van uitademen vindt plaats als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum. Bijvoorbeeld op $t = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$.
Die snelheid is dan gelijk aan de afgeleide van $V(t)$ op dat tijdstip.

Nu is: $V'(t) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5}$.

En daarom is: $V'(0{,}375) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot 0{,}375\right) \cdot \frac{2\pi}{1}{,}5 \approx -0{,}209$.
De maximale snelheid van uitademen in ongeveer 0,2 L/s.

Opgave 7

Voorbeeld 3 op pagina 431 gaat over iemand's longvolume en de snelheid van in- en uitademen.

a Laat zien hoe je de formule voor $V(t)$ uit de tekst kunt afleiden.

b Leg uit waarom de grootste snelheid van uitademen plaats vindt als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.

c Voer nu zelf de berekening van die maximale snelheid van uitademen uit.

d En bij welke waarden van t krijg je de grootste snelheid van inademen? Hoe groot is die snelheid?

Oefenen

Opgave 8

Differentieer deze goniometrische functies.

a $f_1(x) = 4 \cos(x)$

b $f_2(x) = 4 \sin(2x - 0{,}25\pi) + 10$

c $f_3(x) = 50 \cos^2(x)$

d $f_4(x) = 2 - 2 \sin(x - 1)$

Opgave 9

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 1$.

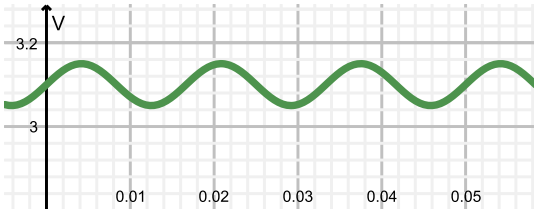
a Laat zien, dat $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 1$.

b Bereken de exacte extremen van deze functie.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Opgave 10

Het longvolume V (in L) van een mens kun je registreren met een zogenaamde spirograaf. Bij iemand die hyperventileert geeft de spirograaf de grafiek die je hiernaast ziet. Horizontaal zie je de tijd t in minuten.



Figuur 11.3

a Hoeveel keer per minuut ademt deze patiënt uit?

b Stel een formule op voor V als functie van de tijd t. Ga ervan uit dat de grafiek een zuivere sinusoïde is.

c Benader in twee decimalen nauwkeurig de toenamesnelheid van het longvolume op $t = \frac{7}{480}$.

Opgave 11

Gegeven een functie waarvan de grafiek lijkt op een sinusoïde. Alleen de evenwichtsstand is geen horizontale lijn, maar een lijn met helling van $\frac{1}{2}$. Bij deze functie hoort het voorschrift $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + 2\sin(x)$. Je spreekt nu niet van een evenwichtsstand, maar van een trendlijn.

a Welke formule geldt voor de trendlijn? Breng op je grafische rekenmachine zowel de grafiek van f als de trendlijn in beeld.

b Bereken algebraïsch de toppen van de gegeven functie.

c Vallen de x-waarden van die toppen samen met die van de toppen van $y = \sin(x)$? Geef een verklaring.

Toepassen

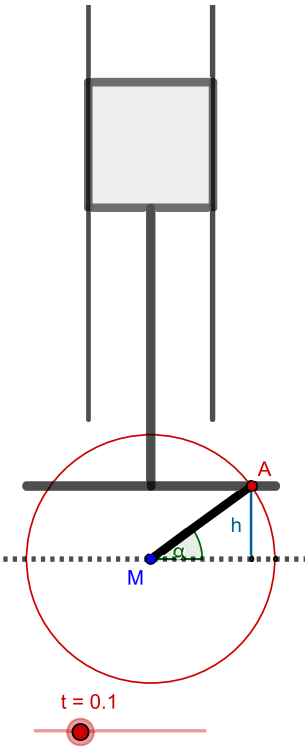
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 11.4

Opgave 12

Bekijk de formule voor $h(t)$ in **Toepassen op pagina 433**.
De zuiger beweegt op en neer.

a Beweegt de zuiger steeds met dezelfde snelheid omhoog?

De snelheid waarmee h verandert is gelijk aan de afgeleide van h.

b Stel een formule voor die snelheid op.

c Hoe groot is de snelheid waarmee h verandert op $t = 0$?

Opgave 13

Bekijk de formule voor de snelheid waarmee de hoogte van de zuiger verandert in de vorige opgave.

a Tussen welke waarden kan deze snelheid variëren?

b Op welke twee manieren kun je de hoogste snelheid die de zuiger kan aannemen nog verhogen?

Testen

Opgave 14

Je doorloopt in een bepaald reuzenrad een cirkelbaan waarbij geldt $h(t) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, met:

- h de hoogte boven de begane grond in m;
- t de tijd in seconden.

a Je vertrekt op $t = 0$. Hoe snel gaat de hoogteverandering op dat moment?

b Hoe snel gaat de hoogteverandering als je een kwart cirkel hebt doorlopen?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x + 2\sin(x)$ op het domein $[0,2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Stel vergelijkingen op van de rechte lijnen l en m die de grafiek van f raken en evenwijdig zijn aan de lijn met vergelijking $y = x$.

11.4 Harmonische trilling

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- harmonische trillingen beschrijven m.b.v. sinusoïden;
- sinusoïden optellen en onderzoeken of er dan opnieuw sprake is van een sinusoïde.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies differentiëren.
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.

Figuur 11.1

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880\pi \cdot t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

a Breng de bijbehorende grafiek in beeld, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Een boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

b Laat zien hoe de grafiek van $u(t) = \sin(880\pi \cdot t) + 0{,}5\sin(1760\pi \cdot t)$ er uit ziet.
Is dit een zuivere sinusoïde?

Uitleg

Bekijk de applet: Harmonische trillingen

Een harmonische trilling is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

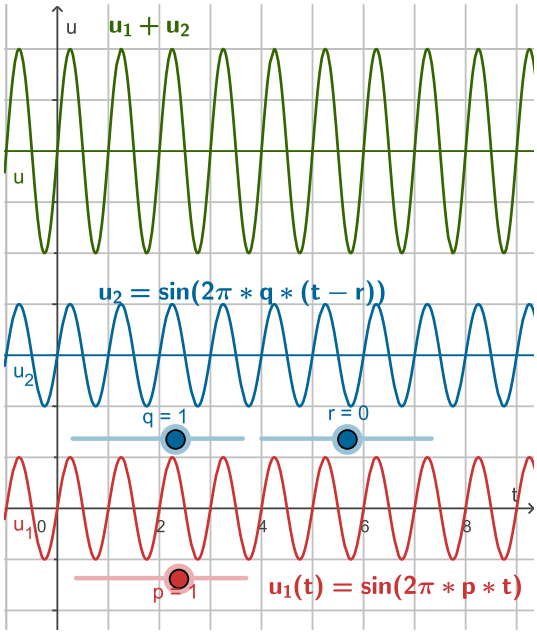
Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking uit de evenwichtsstand heeft dan bijvoorbeeld een formule zoals

$u(t) = 10 \sin(2\pi t)$

Hierin is:

- u de uitwijking uit de evenwichtsstand in cm
- t de tijd in seconden

De periode van deze trilling is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ seconde.



Figuur 11.2

Je kunt ook twee harmonische trillingen optellen, ze werken dan tegelijkertijd. Soms zijn ze 'in fase' (ze starten dan op hetzelfde moment), soms niet, er is dan een faseverschil. Ze kunnen ze elkaar versterken, dan wel uitdoven. Altijd ontstaat er een nieuwe periodieke functie, niet altijd is het weer een harmonische trilling, een sinusoïde. Wanneer wel en wanneer niet?

Even experimenteren en je zult wel vermoeden dat dit te maken heeft met de periodes van u_1 en u_2: alleen als die gelijk zijn krijg je weer een zuivere sinusoïde.

Opgave 1

Neem $u_1 = 10 \sin(2\pi t)$ en $u_2 = 5 \sin(2\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a Laat algebraïsch zien dat u een sinusoïde is.

b Hebben u_1 en u_2 een faseverschil?

Je gaat nu met een faseverschil werken. Gebruik de applet of maak zelf grafieken.

c Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(2\pi(t - 0{,}2))$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$. Wat valt op?

d Het faseverschil van de voorgaande trillingen is 0,2.
Wat gebeurt er als het faseverschil 0,5 wordt?

Opgave 2

Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a De periodes van u_1 en u_2 zijn nu verschillend. Is u een sinusoïde?

b Experimenteer met de periodes van u_1 en u_2. Wanneer wordt u een sinusoïde?

c Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(0{,}2\pi t)$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.
Welke periode heeft u?

Opgave 3

Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(3\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

Hoe groot is de periode van $u(t)$?
Hoe kun je die berekenen uit de periodes van u_1 en u_2?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde. Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking u (in m) uit de evenwichtsstand is een functie van de tijd t (in s):

$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- Als beide sinusoïden dezelfde periode hebben, is hun som ook een sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen met dezelfde periode is weer een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 1 op pagina 437**.
- Als beide sinusoïden verschillende periodes hebben, is hun som geen sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen is geen zuiver harmonische trilling, maar wel een periodiek verschijnsel. Zie **Voorbeeld 2 op pagina 438**.

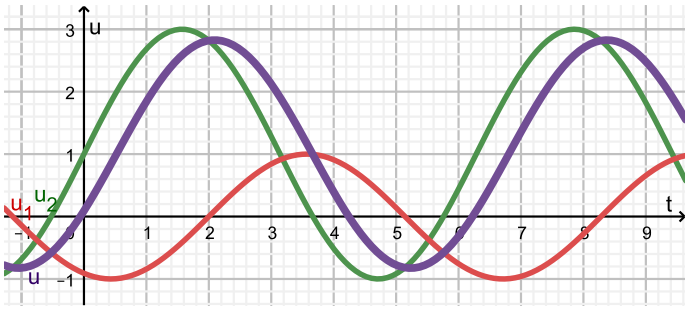
Voorbeeld 1

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = 2\sin(t) + 1$ en $u_2 = \sin(t - 2)$.
Beide trillingen hebben dezelfde periode, dus $u = u_1 + u_2$ is ook een harmonische trilling.

Stel met behulp van de grafiek een formule op voor $u(t)$.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van u_1, u_2 en u in één figuur in bijvoorbeeld GeoGebra.



Figuur 11.3

Bepaal nu met behulp van GeoGebra de maxima en de minima van de grafiek van u.
Je vind maxima bij $x \approx 2{,}09 + k \cdot 2\pi$ van $\approx 2{,}83$.
Je vind minima bij $x \approx 5{,}23 + k \cdot 2\pi$ van $\approx -0{,}83$.

De evenwichtsstand lees je uit de figuur af: $u = 1$.
De periode is dezelfde als die van u_1 en u_2, dus 2π.

De amplitude is $2{,}83 - 1 = 1{,}83$.

Het eerste punt op de evenwichtsstand waarin een complete trilling begint ligt bij $t = 2{,}09 - \frac{1}{4} \cdot 2\pi \approx 0{,}52$.
Dit getal bepaalt de horizontale verschuiving.

De formule wordt $u(t) \approx 1{,}83 \sin(t - 0{,}52) + 1$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 437** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode worden opgeteld.

a Breng zelf de grafiek van $u(t)$ in beeld op je grafische rekenmachine. Ga na dat hij op een sinusoïde lijkt en bepaal frequentie, amplitude en evenwichtslijn.

b Bepaal op dezelfde manier de formule van $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ als sinusoïde.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen met dezelfde frequentie.
Bepaal de amplitude van de resulterende harmonische trilling.

a $y_1(t) = 20 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $y_2(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-1)\right)$

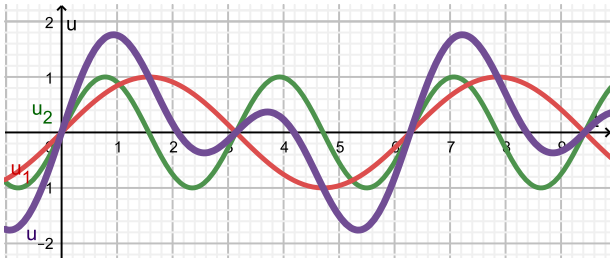
b $y_1(t) = 20 \sin(t)$ en $y_2(t) = 10 \cos(t)$

Voorbeeld 2

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(2t)$.
Beide trillingen hebben verschillende periodes, dus $u = u_1 + u_2$ is geen harmonische trilling.
Hoe groot is de periode van $u(t)$?

Antwoord

Omdat de periodes verschillen heeft u niet de gedaante van een sinusoïde.
Maar $u(t)$ is wel periodiek. Omdat $\sin(t)$ zich herhaalt met een periode van 2π en $\sin(2t)$ met een periode van π, past de trillingstijd van de $\sin(2t)$ precies twee keer in die van $\sin(t)$. De periode is daarom 2π.



Figuur 11.4

(In het algemeen is in een dergelijk geval de periode het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van beide afzonderlijke periodes.)

Opgave 6

Bekijk de twee harmonische trillingen in **Voorbeeld 2 op pagina 438**.
Hun som is geen harmonische trilling.

a Waarom niet?

Neem nu $u_1(t) = \sin(3t)$ en $u_2(t) = \sin(4t)$.

b De grafiek van $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ is geen harmonische trilling, maar wel periodiek.
Hoe leid je de periode van u af uit die van u_1 en die van u_2?

Oefenen

Opgave 7

Ga uit van twee harmonische trillingen u_1 en u_2. Bepaal in de elk van de volgende gevallen of $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een harmonische trilling is. Bepaal in dat geval de frequentie en amplitude.

a $u_1 = 2\cos(t)$ en $u_2 = 5 + \sin(t)$

b $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi t)$

c $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi(t-2))$

d $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(100\pi t)$

Opgave 8

Je kunt met een hoorn lage tonen spelen. Zo'n toon heeft bijvoorbeeld een frequentie van 80 Hz. De toon kun je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 10.
Op een hobo speel je hogere tonen met een frequentie van bijvoorbeeld 400 Hz. Deze toon kun je je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 5.

Figuur 11.5

a Stel voor beide tonen een formule op voor de bijbehorende sinusoïde.

b Iemand hoort de beide tonen tegelijk. Teken de grafiek van de toon die hij hoort. Zorg ervoor dat er precies twee periodes zichtbaar zijn.

c De amplitudes zijn een maat voor de sterkte van het geluid. Welke amplitude heeft de grafiek die je bij b hebt gemaakt?

Opgave 9

Twee trillingen hebben alleen een faseverschil. Als voor de ene trilling geldt $y_1 = \sin(t)$ dan geldt voor de andere $y_2 = \sin(t - p)$. Een puntmassa trilt zuiver harmonisch onder invloed van beide trillingen.

a Neem $p = 0$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

b Neem $p = \pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

c Neem $p = \frac{1}{2}\pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

Opgave 10

Een passerend schip veroorzaakt op een rivier een golf die tegen de wal wordt teruggekaatst. Gedurende enige tijd ondervindt een klein vissersbootje zowel invloed van de oorspronkelijke golf als van de teruggekaatste golf. Bij de terugkaatsing wordt door demping de amplitude kleiner en wel $\frac{2}{3}$ deel van de oorspronkelijke amplitude.
De teruggekaatste golf is het spiegelbeeld van de voortzetting van de oorspronkelijke golf. Stel je voor dat voor de oorspronkelijke golf geldt $h(t) = \sin(t)$ met t in radialen. Verder bevindt de dichtstbijzijnde golftop zich $\frac{5}{6}$ periode uit de wal.

a Leg uit dat voor de combinatie van beide golven geldt: $h(t) = \sin(t) + \frac{2}{3}\sin\left(t + 3\frac{1}{3}\pi\right)$.

b De combinatie van beide golven is een sinusoïde. Welke amplitude heeft deze sinusoïde?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.

Figuur 11.6

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

Hier zie je een geluidsspoor van een A zoals die op een klarinet wordt gespeeld (blauw). Je kunt aan de grondtoon boventonen toevoegen en bekijken hoe het geluidsspoor verandert. Je kunt zo het geluidsspoor van de A op de klarinet nabootsen.

Bekijk de applet: Geluidsapplet

Opgave 11

Bekijk het trillingspatroon van een A van 440 Hz gespeeld op de klarinet.

Maak zelf dit trillingspatroon na met de applet. Welke formule hoort er bij?

Opgave 12

Van een aangeslagen pianosnaar zijn de grondtoon en de eerste boventoon hoorbaar. Voor de grondtoon geldt de formule $u_0 = \sin(880\pi t)$. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en een amplitude die half zo groot is.

a Het geluid dat deze snaar produceert ontstaat door beide trillingen op te tellen. Welke formule geldt voor de trilling van de snaar?

b Waarom trilt de snaar niet zuiver harmonisch? Welke frequentie heeft de trilling?

c Welke formule geldt er dan voor de uitwijking van de pianosnaar? Met welke frequentie trilt de snaar?

Testen

Opgave 13

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen. Leg uit in welk van de volgende gevallen de puntmassa zelf ook zuiver harmonisch trilt. Bepaal in die gevallen de frequentie en de amplitude van de trilling.

a $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(t + 2)$

b $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(2t)$

c $u_1 = 5\sin(220\pi t)$ en $u_2 = 10 + 3\sin(220\pi t)$

11.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- goniometrische functie — de functie $f(x) = tan(x)$
- goniometrische formules: symmetrieformules, verdubbelingsformules, somformules — verbanden tussen sin en cos
- afgeleiden van sin, cos en tan
- harmonische trilling — frequentie en trillingstijd

Activiteitenlijst

- werken met goniometrische functies (o.a. $f(x) = tan(x)$) op een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos
- de goniometrische formules afleiden — de goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van goniometrische functies en het oplossen van vergelijkingen
- de afgeleide van een goniometrische functie bepalen en toepassen
- bepalen of een som van harmonische trillingen weer een harmonische trilling is

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$ met domein $[0,2\pi]$.

a De grafiek van P is een zuivere sinusoïde. Bepaal grafisch de amplitude en de evenwichtsstand van deze functie.

b Toon algebraïsch aan dat $P(t) = 25 - 25\cos(2t)$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 12{,}5$.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ en $g(x) = 1 + \sin(x)$.

Beide hebben ze als domein $[0,2\pi]$.
Verder is gegeven de functie h met $h(x) = f(x) - g(x)$.

a De grafiek van h is een zuivere sinusoïde. Bereken de amplitude en de evenwichtsstand van h.

b Los op: $h(x) < 0$.

Opgave 3

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = 3\sin(\pi x)$

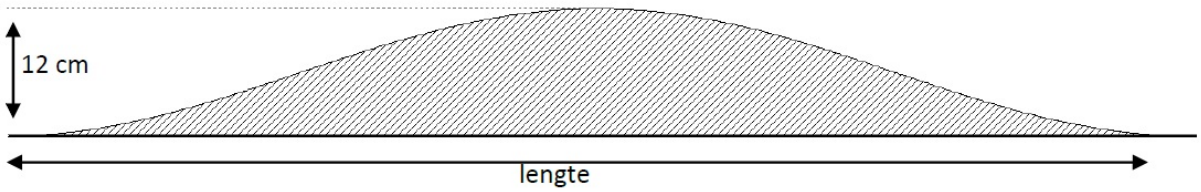
b $g(x) = 5\cos(x + 2) - 10$

c $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$

d $W(t) = 0{,}5t + 4 + 3\sin(2t)$

Opgave 4

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.



Figuur 11.1

Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

b Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is. Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

c De helling van de drempel is niet overal even groot. Geef een formule voor de helling van deze verkeersdrempel en laat daarmee zien tussen welke waarden de helling varieert.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee harmonische trillingen $u_1(t) = 2\sin(2\pi t)$ en $u_2 = \cos(2\pi t) + 1$ heen en weer.

a Laat met behulp van een grafiek zien dat de uitwijking $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ van deze puntmassa door een sinusoïde kan worden beschreven. Stel een formule van deze sinusoïde op.

b Bereken de waarden van t waarin de puntmassa het snelst beweegt.

Toepassen

Opgave 6: Zwevingen

Als je twee tonen met vrijwel dezelfde frequentie tegelijk laat horen merk je het (onaangename) verschijnsel **zweving** op. De applet maakt meteen duidelijk hoe dit werkt: de rode grafiek is een A van 440 Hz, de blauwe grafiek is een toon die daar v.w.b. de frequentie vlak bij zit. Je ziet hoe hun optelling een grafiek oplevert die een frequentie heeft die weinig van de A verschilt, maar waarvan de amplitude toeneemt en weer afneemt...

Bekijk de applet: Zwevingen

Stel in de applet naast de trilling $u_1(t) = sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$ de trilling $u_2(t) = sin(2\pi \cdot 430 \cdot t)$ in, met t in seconden.

a Stel je hoort deze trillingen tegelijk. Bekijk de grafiek van de resulterende trilling. Waaraan herken je de zweving?

b De amplitude van de trilling is een maat voor de sterkte van het geluid. Tussen welke waarden zweeft de resulterende trilling? Welk verband is er met de amplitudes van de twee afzonderlijke harmonische trillingen?

c Onderzoek of zweving zich altijd voordoet als de frequenties van twee trillingen verschillen. Als dat niet het geval is, probeer dan vast te leggen wanneer zweving zich wel voordoet. Is er verband tussen de waarden waartussen de geluidssterkte zweeft en de amplitudes van de afzonderlijke harmonische trillingen?

Opgave 7: Gedempte trillingen

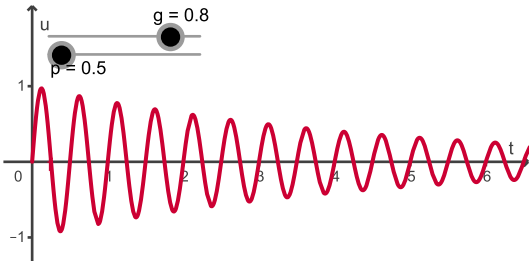
Een gedempte trilling is een trilling waarvan de amplitude met de tijd afneemt. In praktische situaties heb je bijna altijd met demping te maken: wegstervend geluid, een steeds minder uitslaande slinger, een veer die steeds minder trilt...

Bekijk de applet: Gedempte trilling

Bij een trillende snaar bijvoorbeeld wordt door de luchtweerstand de amplitude steeds iets kleiner. Op zeker moment zo klein, dat de toon niet meer te horen is. De amplitude is dan een dalende functie van t.

$u(t) = g^t \cdot sin\left(\frac{2\pi}{t} \cdot t\right)$

Bekijk hoe de demping afhangt van g en de 'periode' p. De amplitude is $A(t) = g^t$ met $0 < g < 1$.



Figuur 11.2

a Waarom is exponentiële afname in praktijksituaties van de amplitude voor de hand liggender dan lineaire afname? Beschrijf een paar van die praktijksituaties.

Neem aan dat $g = 0{,}8$.

b Na hoeveel tijd is de amplitude dan telkens gehalveerd?

c Bij een periode van $p = 1$ heeft $u(t)$ een maximum op $t = 0{,}25$. Hoe groot is dit maximum? Is er een maximum dat precies de helft van dit maximum is? Zo ja, op welk tijdstip?

12

Meetkunde in 3D

12.1 Parallelprojectie 446
12.2 Hoeken en afstanden 455
12.3 Oppervlakte en inhoud 466
12.4 Doorsneden construeren 476
12.5 Totaalbeeld 486

12.1 Parallelprojectie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Voorkennis

- de vlakke (rechthoek, vierkant, parallellogram, ruit, vlieger, trapezium) en ruimtelijke (balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel) basisvormen en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een tekening van een woonhuis. Het onderste deel kun je je voorstellen als een wiskundige balk (dus met rechte hoeken). Zo'n balk heeft drie groepen evenwijdige lijnen. De tekening is zo gemaakt dat hij levensecht lijkt, net een foto. Je ziet dat evenwijdige lijnen nu niet langer evenwijdig zijn, er vindt dus vertekening plaats.

Figuur 12.1

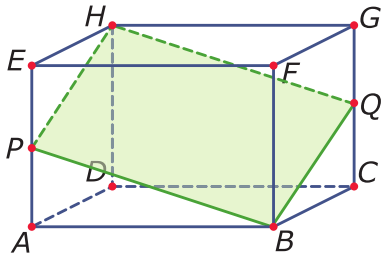
a Waarom lopen op een foto evenwijdige lijnen niet altijd evenwijdig?

b Het gebouw lijkt uit meerdere ruimtelijke basisvormen te zijn samengesteld. Noem er zoveel mogelijk.

c De gevels vormen vlakke figuren. Welke basisvormen tref je aan?

Opgave V2

Je ziet een afbeelding van een balk. Er is een vlak $PBQH$ in getekend, P en Q zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.



Figuur 12.2

a Welke drie groepen lijnstukken zijn in werkelijkheid evenwijdig?

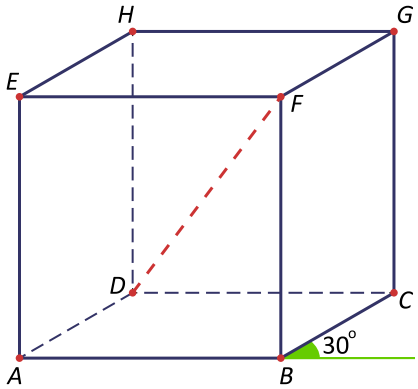
b Welke vorm heeft het zijvlak $BCGF$ in werkelijkheid?

c Welke vorm heeft het diagonaalvlak $ACGE$ in werkelijkheid?

d Welke vorm heeft het vlak $PBQH$ in werkelijkheid?

Uitleg 1

Bij het afbeelden van ruimtelijke figuren op een plat vlak, kunnen niet alle eigenschappen van de ruimtelijke figuur behouden blijven. Bekijk deze projectie van kubus $ABCD.EFGH$ op een plat vlak. Om zoveel mogelijk eigenschappen te behouden is parallelprojectie gebruikt:



Figuur 12.3

- ribben die in werkelijkheid parallel zijn in de afbeelding ook evenwijdig;
- ribben die in evenwijdig zijn aan het tekenvlak hebben hun ware grootte;
- ribben die loodrecht op het tekenvlak staan worden ongeveer half zo lang als ze in werkelijkheid zijn en schuin naar achteren getekend;
- hoeken houden alleen hun ware grootte als ze in een vlak liggen dat evenwijdig aan het tekenvlak is.

De hoek die de ribben die schuin naar achteren zijn getekend met een horizontale lijn maken, heet de wijkhoek.

Deze ribben zijn korter gemaakt met een vaste verkortingsfactor.

Om de lichaamsdiagonaal DF op ware grootte te zien, kun je diagonaalvlak $DBFH$ als een rechthoek en op ware grootte tekenen.

Opgave 1

Bekijk de afbeelding van de kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg 1 op pagina 447**. Neem aan dat alle ribben van de kubus 4 cm lang zijn.

a Welke vorm heeft vlak $ABFE$ in werkelijkheid?

b Welke ribben zijn evenwijdig met ribbe AD?

c Teken vlak $ABCD$ op ware grootte en in de juiste vorm. Je kunt nu de lengte van BD opmeten. Controleer jouw antwoord met een berekening.

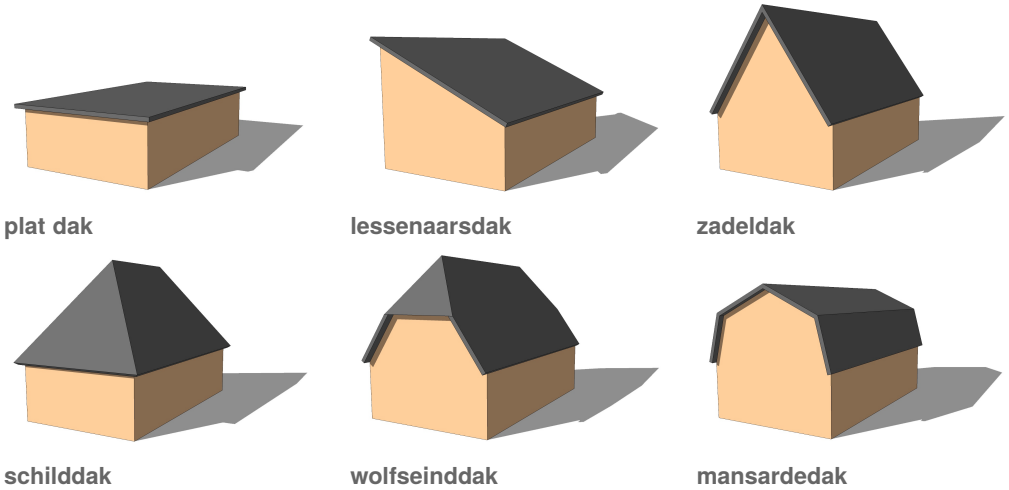
d Teken diagonaalvlak $DBFH$ op ware grootte (en in de juiste vorm). Bepaal de lengte van lichaamsdiagonaal DF in één decimaal nauwkeurig. Controleer jouw antwoord met behulp van een berekening.

Opgave 2

Teken zelf een parallelprojectie van deze kubus. Neem een wijkhoek van 30°, een verkortingsfactor van 0,5 en ribben van 6 cm.

Uitleg 2

Hier zie je zes tekeningen van huizen met een bepaald soort dak, gemaakt door Michel Stomphorst van **Dutch Design Studio**. Je ziet meteen dat het geen parallelprojecties zijn, maar perspectieftekeningen.



Figuur 12.4

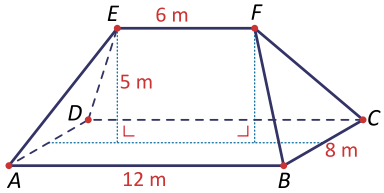
In elk van deze figuren kun je verschillende ruimtelijke en vlakke basisvormen herkennen.

Zo bestaat het huis met het schilddak uit een balk, een prisma (of twee halve balken) en twee halve piramides.

Opgave 3

Bekijk de figuren in **Uitleg 2 op pagina 448**.

Je ziet hier een parallelprojectie van het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit.



Figuur 12.5

a Teken zo'n parallelprojectie met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik een schaal van 1 : 200.

b Laat in je figuur zien, dat het schilddak kan worden verdeeld in een prisma (twee halve balken) en twee (halve) piramides.

c ‘Elke ruit is ook een parallellogram.’
Klopt deze uitspraak? En klopt het omgekeerde?

d Bestaat er een rechthoekige ruit?

e Hoeveel diagonalen heeft elke vierhoek?

f Heeft een parallellogram symmetrieassen? Heeft een parallellogram een centrum van symmetrie?

Opgave 4

Bekijk weer de figuren in **Uitleg 2 op pagina 448**.

a Uit welke twee basisvormen bestaat het huis met het zadeldak?

b Het huis met het mansardedak kun je opdelen in een balk en een prisma. Wat voor prisma?

c Je kunt het huis met het mansardedak ook opdelen in balken en halve balken. Leg uit hoe.

d In welke figuren kun je het huis met het wolfseindedak opdelen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afbeelding van een ruimtelijke figuur op een plat vlak heet een **projectie** van dit lichaam. Omdat dit een vereenvoudiging van het lichaam is, heeft de afbeelding niet meer alle eigenschappen van het lichaam.

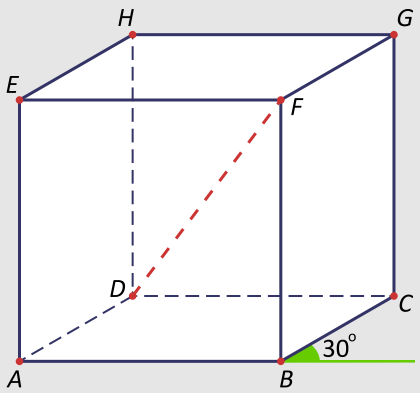
Bij **parallelprojectie** geldt:

- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;
- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).

Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven bij parallelprojectie zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

Bekijk deze parallelprojectie van een kubus $ABCD.EFGH$.

De ribben AB, BF, FE, AE en DC, CG, GH, DH zijn evenwijdig aan het tekenvlak en dus op ware grootte. De vierkanten $ABFE$ en $DCGH$ zijn ook in de tekening vierkant. De ribben BC, FG, AD, EH zijn ook in de tekening evenwijdig. Ze zijn iets korter gemaakt om de figuur echt op een kubus te laten lijken. Op een blanco tekenblad werk je met een **wijkhoek** (bijvoorbeeld de hoek tussen BC en het verlengde van AB) en een **verkortingsfactor** (de vergrotingsfactor van de lengte van BC ten opzichte van die van AB).

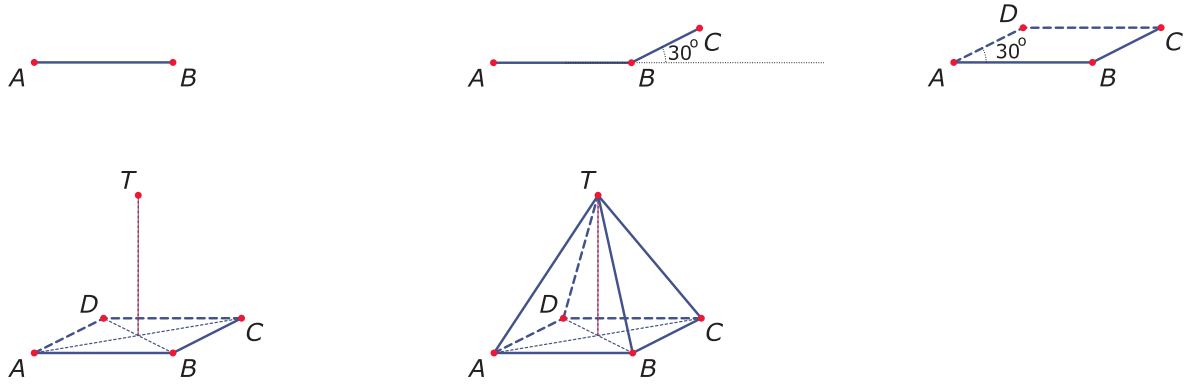


Figuur 12.6

De meeste objecten kun je opvatten als **samengestelde figuren**. Ze bestaan uit een samenstelling van de bekende basisvormen balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel.

Voorbeeld 1

Bekijk hoe je een parallelprojectie maakt van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ op een blanco tekenblad. Je gebruikt een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.



Figuur 12.7

Het grondvlak van een piramide is vierkant $ABCD$ met ribben van 4. De hoogte TS is 5. De constructie gaat zo:

- Teken eerst lijnstuk $AB = 4$ en teken bij B een hoek van 30°.
- Teken BC maar nu met een verkorte lengte: $0{,}5 \cdot 4 = 2$.
- Vervolgens teken je met behulp van evenwijdige lijnen punt D.
- Omdat de piramide regelmatig is, zit de top T recht boven het snijpunt S van de diagonalen AC en BD. Je tekent dus eerst S en dan 5 recht daarboven punt T.
- Ten slotte teken je de opstaande ribben en de figuur is klaar.

Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een parallelprojectie van een object tekent op een blanco papier met behulp van een wijkhoek en een verkortingsfactor.

a Teken een parallelprojectie van een kubus met ribben van 4 cm.
Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.

b Teken een parallelprojectie van een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 8$ en $AE = 2$. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.

c Teken een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T \cdot ABCD$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en hoogte $TS = 2$ waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is. Neem een wijkhoek van 60° en een verkortingsfactor van 0,5.

Opgave 6

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte AD van het prisma is ook 4.

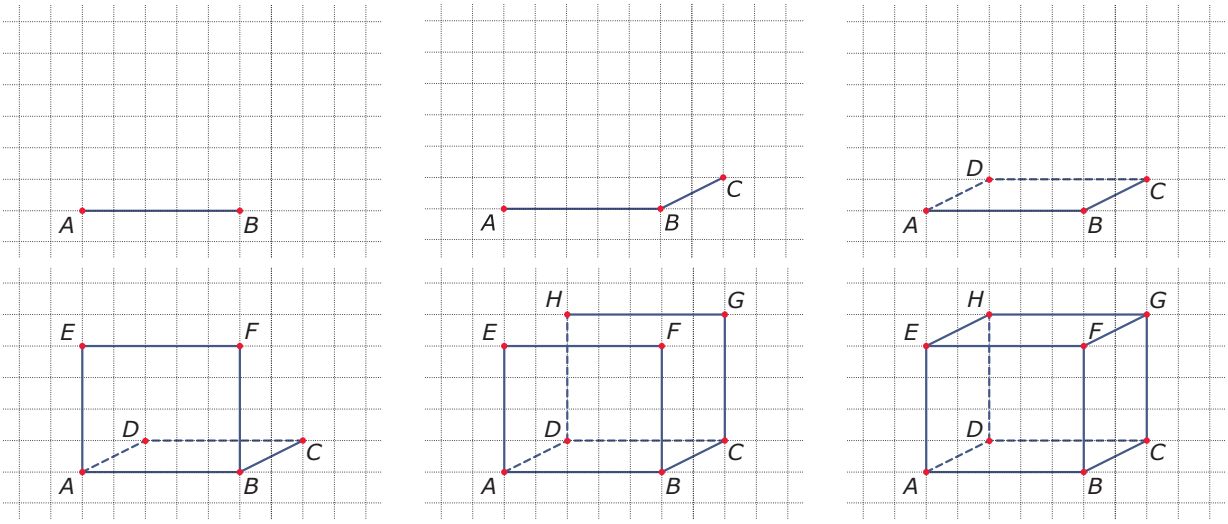
a Teken dit driehoekige prisma $ABC.DEF$ in parallelprojectie op een rooster.

P is het midden van DE, Q is het midden van EB en R is het midden van EF.

b Teken de driehoek PQR in de figuur en op ware grootte.

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je zelf op roosterpapier een parallelprojectie van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 4$ kunt tekenen. Merk op dat $BC = AD = 4$ korter wordt getekend. Op een rooster is het handig om de ribben schuin naar achteren te tekenen als '2 naar rechts 1 omhoog'.



Figuur 12.8

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je op een rooster een parallelprojectie van een balk maakt. Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en $AE = 6$.

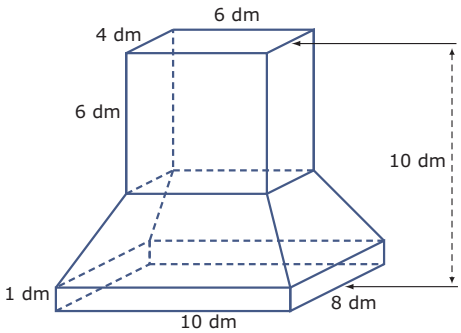
Teken hiervan een parallelprojectie waarbij het vlak $ABEF$ op ware grootte te zien is.

Opgave 8

Maak op een cm-rooster een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak een vierkant is met $AB = 4$ en de hoogte $TS = 6$, waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is.

Voorbeeld 3

Je ziet hier het metalen omhulsel van een afzuigkap.
Hij bestaat uit diverse basisvormen
Beschrijf die basisvormen en noem hun afmetingen.



Figuur 12.9

Antwoord

De onderkant is een balk van 10 × 8 × 1 dm.

De bovenkant is een balk van 6 × 4 × 6 dm.

Het middenstuk lijkt misschien op een afgeknotte piramide, maar dat klopt niet. De opstaande schuine ribben komen niet alle vier in één punt uit. In een bovenaanzicht kun je dat zien.

Het middenstuk kun je bijvoorbeeld opdelen in:

- een balk van 6 × 4 × 3 dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van 6 × 1 × 3 dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van 2 × 2 × 3 dm;
- vier kwart piramides die samen een piramide met een grondvlak van 4 × 4 dm en een hoogte van 3 dm vormen.

Opgave 9

Bekijk de tekening van de afzuigkap in **Voorbeeld 3 op pagina 451**.

a Teken een voor-, een zij- en een bovenaanzicht van deze afzuigkap.
Laat in het bovenaanzicht zien dat het middenstuk geen afgeknotte piramide is.

b Teken het middendeel van de afzuigkap zelf in parallelprojectie op een rooster.
Gebruik schaal 1 : 20.

c Uit welke vlakke figuren bestaat dit middendeel? (Reken geen bodem en geen bovenvlak.)

d Teken het schuine voorvlak van het middendeel op schaal 1 : 20. Laat de benodigde berekeningen zien.

Oefenen

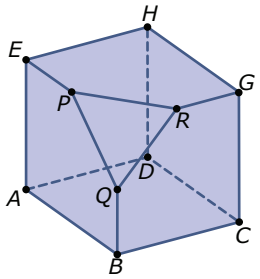
Opgave 10

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten P, Q en R zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik $ABQPE$ als voorvlak.

b Teken ΔPQR op ware grootte.

c Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte.



Figuur 12.10

Opgave 11

Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. De zijden van $ABCD$ zijn 6 cm en de hoogte TS van de piramide is 10 cm. S is het snijpunt van AC en BD.

a Teken een parallelprojectie van deze piramide op een rooster.

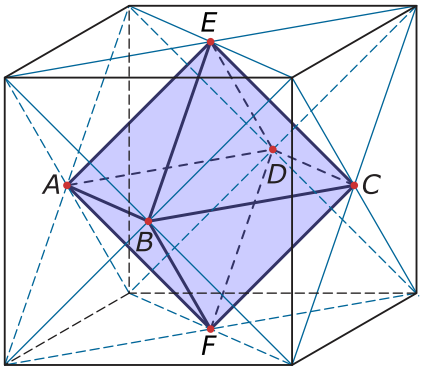
b Verdeel alle zijden van het grondvlak in drie gelijke delen. Licht je werkwijze toe.

c Verbind de getekende punten in het grondvlak, zodat je een achthoek krijgt.

d Is deze achthoek het grondvlak van een regelmatige achtzijdige piramide? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Als je de middens van de grensvlakken van een kubus met elkaar verbindt, dan krijg je een octaëder (regelmatig achtvlak) $ABCDEF$. Van dit octaëder is $AC = BD = EF = 8$ cm.



Figuur 12.11

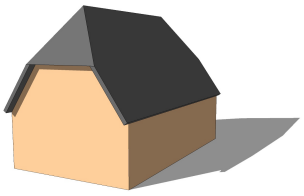
a Teken een parallelprojectie van het octaëder.

b Welke vorm hebben alle grensvlakken van het octaëder? Teken één ervan op ware grootte.

c Welk lichaam heeft als hoekpunten de middens van de zijden van het octaëder?

Opgave 13

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.
Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.
De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.


Figuur 12.12

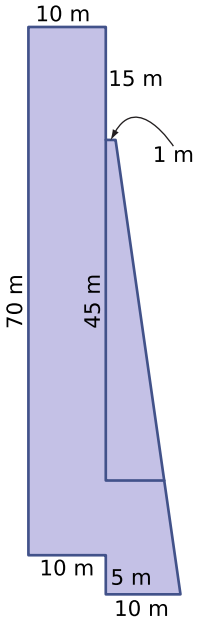
a Teken een parallelprojectie van dit wolfseinddak op een cm-rooster op schaal 1 : 200.

b Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken. Bereken de lengtes van de zijden van die gelijkbenige driehoeken.

c Teken ook één zo'n symmetrische vijfhoek op schaal 1 : 200.

Opgave 14

Bekijk de foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Je ziet een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak.



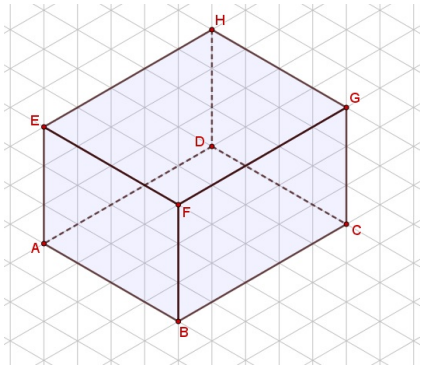
Figuur 12.13

a Teken een parallelprojectie van de vereenvoudigde versie van het gebouw 'Willemswerf' op een rooster op schaal 1 : 500.

b De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium. Teken dat grensvlak op schaal 1 : 1000.

Toepassen

Een bijzondere parallelprojectie is de **isometrische projectie**.
Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met ribben $AB = 4$, $BC = 5$ en $AE = 3$ cm, getekend in GeoGebra met een isometrisch rooster. Omdat zo'n rooster uit gelijkzijdige driehoeken bestaat is er van een verkortingsfactor geen sprake.
Wel zijn er twee wijkhoeken.



Figuur 12.14

Opgave 15

Hierboven zie je een isometrische projectie van een balk.

a Waarom is hier ook sprake van parallelprojectie?

b Welke twee wijkhoeken worden er gebruikt?

c Hoe zit het met de rechte hoeken van de balk?

d Hebben de lichaamsdiagonalen van de balk hun ware lengte behouden?

Opgave 16

Teken nu een isometrische projectie van de volgende figuren.
Maak eventueel gebruik van het isometrisch rooster van GeoGebra.

a Een kubus $ABCD.EFGH$ waarvan alle zijden 4 cm zijn.

b Een piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak zijden van 4 cm heeft en de hoogte $AT = 6$ cm.

Testen

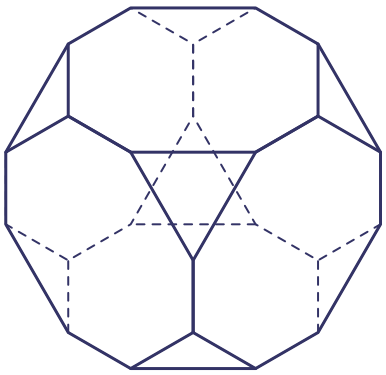
Opgave 17

Bekijk de afgeknotte kubus. De oorspronkelijke kubus was 4 bij 4 bij 4 cm. Van die ribben van 4 cm zijn nu alleen nog de middenstukken van 2 cm over.

a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus op een rooster. Gebruik een achthoek als voorvlak.

b Bepaal de lengte van de zijden van de driehoekige grensvlakken in mm nauwkeurig. Teken zo'n grensvlak op ware grootte.

c Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus. Gebruik nu een verkortingsfactor van 0,5 en een wijkhoek van 60°.



Figuur 12.15

12.2 Hoeken en afstanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoeken en afstanden berekenen in ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

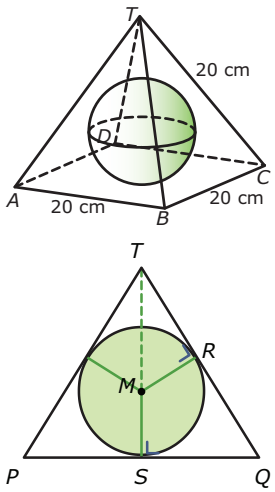
Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet. Om aan te geven dat A en D recht achter elkaar liggen staat links onder bij de figuur A,D.

a In welke richting bekijk je de figuur als je dit vooraanzicht ziet?

b Je wilt de straal van de bol berekenen. Kun je die op (een) geschikte plek(ken) in de figuur aangeven?

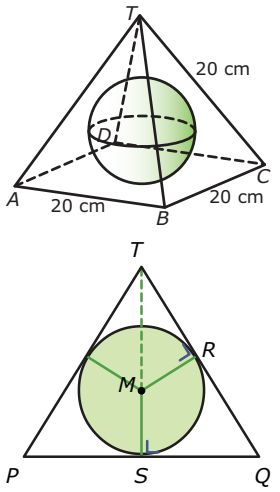
c Kun je driehoeken bedenken waarin je die straal zou kunnen uitrekenen?



Figuur 12.1

Uitleg 1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet.



Figuur 12.2

Om de straal te berekenen van de grootste bol die nog in deze piramide past, moet je bedenken dat deze bol precies tegen de zijvlakken van de piramide aan gaat komen. Om dat goed te kunnen zien kun je het beste even de aanzichten van piramide met bol bekijken.
Het vooraanzicht dat hier is getekend, is hetzelfde als ΔPQT als P het midden van AD en Q het midden van BC is. Dit noem je een doorsnede van de piramide met bol en het vlak door T, P en Q. Hierin is de bol een cirkel die raakt aan PQ, PT en QT. Er zijn dus stralen vanuit het middelpunt M te tekenen die loodrecht op deze zijden staan. Van ΔPQT weet je alle zijden: $PQ = 20$ en $PT = QT = \sqrt{300}$.

Neem je r voor de straal van de bol, dan kun je de gelijkvormigheid van de driehoeken QST en MRT gebruiken om r uit te rekenen.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg 1 op pagina 456**.

a Waarom is het handig om een geschikte doorsnede te tekenen?

b Laat met een berekening zien, dat $PT = QT = \sqrt{300}$.

c Je weet dat $MS = r$. Laat zien dat $TM = \sqrt{200} - r$.

d Waarom zijn de driehoeken QST en MRT gelijkvormig?

e Bereken nu r in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bij de vorige opgave is het werken met gelijkvormigheid niet echt noodzakelijk. Je kunt ook werken met goniometrie en bijvoorbeeld $\angle Q$ uitrekenen. Laat zien, hoe je zo r berekent op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Een ander probleem is: Hoeveel bedraagt de afstand van deze bol tot de ribben van de piramide?

a Nu is ΔACT een geschikte doorsnede om de gevraagde afstand uit te rekenen. Waarom?

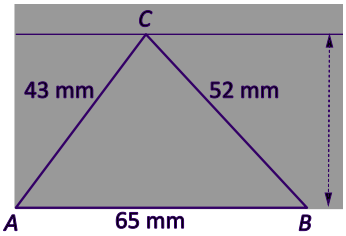
b Teken zelf die driehoek op schaal en teken de cirkel die de bol voorstelt er in. (De straal heb je in de voorgaande opgaven uitgerekend.)

c Geef in je figuur de gevraagde afstand aan.

d Bereken de gevraagde afstand. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Je hebt een metalen driehoekig plaatje nodig met zijden van 65 mm, 43 mm en 52 mm.



Figuur 12.3

Je wilt het uit een rechthoekig stuk metaal zagen, de langste zijde komt langs de rand van de rechthoek. De lengte van de rechthoek moet daarom 65 mm of meer zijn. Maar hoe lang moet de breedte zijn?

Je kunt dit bepalen door de driehoek op papier te construeren en de afstand van C tot lijn AB te meten. Dat gaat prima, je moet dan wel de juiste afmetingen omcirkelen en niet maar even een schets maken zoals de figuur hiernaast.

Maar je kunt dit ook berekenen. Daartoe moet je inzien dat de gevraagde afstand de lengte is van hoogtelijn CD in ΔABC.

Je berekent dan met behulp van de cosinusregel bijvoorbeeld $\angle A$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$

geeft

$52^2 = 65^2 + 43^2 - 2 \cdot 65 \cdot 43 \cdot \cos(\angle A)$.

Ga na dat dit oplevert: $\angle A \approx 52{,}9°$.

Nu je een hoek weet, kun je gemakkelijk de hoogte CD berekenen.

Opgave 4

Bekijk het probleem in **Uitleg 2 op pagina 457**.

a Construeer de driehoek op papier en meet de gevraagde afstand.

Bekijk vervolgens de berekening van CD.

b Laat zelf zien hoe je komt aan $\angle A \approx 52{,}9°$

c Laat vervolgens zien hoe je daarmee CD berekent.

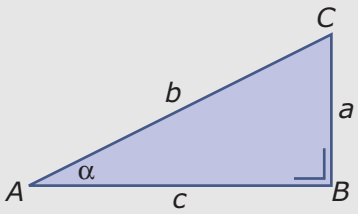
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je in de ruimtefiguur geschikte vlakke figuren. Teken deze vlakke figuren (eventueel op ware grootte). Zet de gegevens erbij en bereken de gevraagde lengte en/of grootte.

Meestal zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken**, want daarin gelden:

- De **stelling van Pythagoras**: $c^2 + a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$



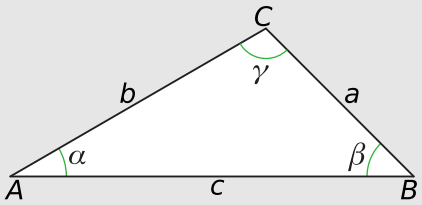
Figuur 12.4

Merk op dat in dit geval b de schuine zijde (hypothenusa) is, a de voor hoek α overstaande rechthoekszijde en c de voor hoek α aanliggende rechthoekszijde is.

Verder maak je vaak gebruik van **gelijkvormigheid**. Twee figuren zijn gelijkvormig als hun overeenkomende paren hoeken gelijk zijn en de lengtes van de overeenkomende paren zijden recht evenredig met elkaar zijn. Alle lengtes van de zijden van de ene figuur kunnen dan door vermenigvuldiging met een vaste **vergrotingsfactor** uit de lengtes van de zijden van de andere figuur worden berekend.

Tenslotte zijn daar nog:

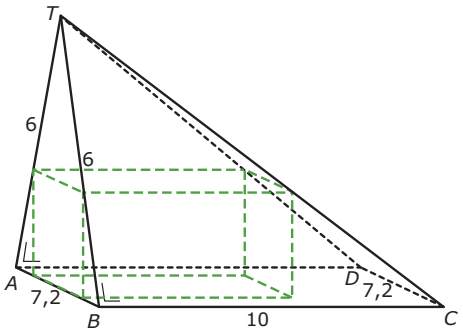
- De **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- De **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$



Figuur 12.5

Voorbeeld 1

Hier zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT, ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Bereken de afmetingen van die kamer.



Figuur 12.6

Antwoord

Om rechte hoeken ook inderdaad recht te zien kun je in dit geval goed met aanzichten werken. Vooral een vooraanzicht en een zijaanzicht zijn handig omdat daarin zowel de rechte hoeken als de schuine vlakken zichtbaar zijn.
Aan deze twee aanzichten zie je, dat er het beste kan worden gerekend in ΔABT (want die is gelijk aan het vooraanzicht) en in ΔSRT als S het midden van AB en R dat van CD is (deze driehoek is een doorsnede die gelijk is aan het zijaanzicht).
Met gelijkvormigheid of goniometrie bereken je nu de afmetingen van de kamer.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 458** zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT, ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Je gaat de afmetingen van die kamer berekenen.

a Teken de twee driehoeken waarin je gaat rekenen. Bereken eerst TS om goede figuren op schaal te kunnen tekenen.

b Zet nu alle bekende afmetingen in je figuren.

c Gebruik ΔSBT om de breedte van de kamer te berekenen.

d Gebruik ΔSRT om de lengte van de kamer te berekenen.

Opgave 6

Bekijk de zolderverdieping van de twee-onder-één-kap woning in de figuur in **Voorbeeld 1 op pagina 458**.

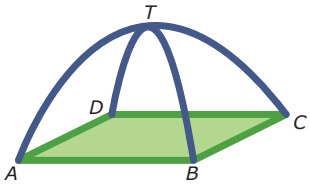
Wil je de dakoppervlakte berekenen (bijvoorbeeld omdat er een nieuwe dakbedekking nodig is), dan gebruik je een uitslag van de figuur.

a Teken de uitslag op schaal 1 : 200.

b Bereken de oppervlakte van het dak van deze zolderverdieping. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een bedrijf slaat zijn afval op in een grote vierkante verdiepte betonnen bak. Om stankoverlast tegen te gaan wordt deze bak overdekt met een groot stevig tentdoek dat wordt opgespannen over twee bogen. In de figuur stelt $ABCD$ de bovenrand van de ingegraven bak voor, een vierkant van 10 m bij 10 m. De bogen ATC en BTD zijn identieke delen van een cirkel. Punt T ligt 4 m boven vlak $ABCD$. Bereken de straal van de cirkel waar zo'n boog een deel van is en bereken hoe ver het middelpunt van die cirkel onder vlak $ABCD$ ligt.



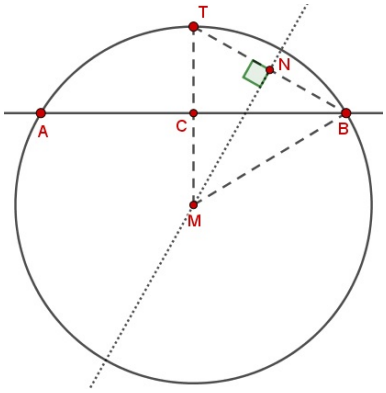
Figuur 12.7

Antwoord

Je ziet hier het vlak door A, B en T getekend in GeoGebra.

$AC = \sqrt{200}$ en dus is $AC = CB = \frac{1}{2}\sqrt{200} = 5\sqrt{2}$.

Het middelpunt M ligt op de middelloodlijn van BT en op de verticale lijn door T.
Het midden van BT noem je bijvoorbeeld N.
Je kunt in ΔCBT zowel BT als $\angle CBT$ uitrekenen.
Daarmee weet je van ΔMNT de grootte van $\angle MTN$ en de lengte van TN.
Nu kun je de straal van de cirkel berekenen.



Figuur 12.8

Opgave 7

Bekijk het probleem van de grote afvalbak in **Voorbeeld 2 op pagina 459**.

a Laat zien dat $CB = 5\sqrt{2}$.

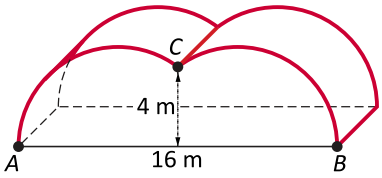
b Bereken BT en $\angle CBT$.

c Bereken de straal van de cirkel in cm nauwkeurig.

d Beantwoord de vraag in het voorbeeld.

Opgave 8

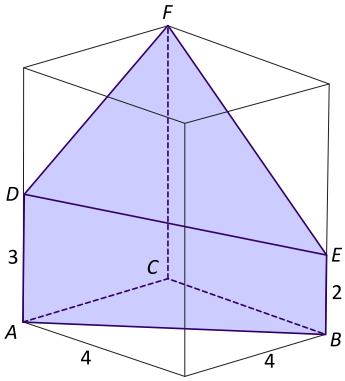
Je ziet hier een opslagruimte die bestaat uit twee in elkaar geschoven gelijke halve cilinders. De gegeven afmetingen staan in de figuur. Hoe hoog is deze opslagruimte?



Figuur 12.9

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.
Bereken de afstand van punt E tot lijn DF.



Figuur 12.10

Antwoord

Je berekent eerst de lengtes van de zijden van ΔDEF.

Ga na, dat $EF = \sqrt{32}$, $DF = 5$ en $DE = \sqrt{33}$.

Cosinusregel: $EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DF \cdot DE \cdot \cos(\angle EDF)$.

Dit geeft: $32 = 25 + 33 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{33} \cdot \cos(\angle EDF)$.

Dus: $32 = 58 - 10\sqrt{33}\cos(\angle EDF)$. En: $\cos(\angle EDF) = \frac{-26}{-10\sqrt{33}} \approx 0{,}4526$, zodat $\angle EDF \approx 63°$.

De gevraagde afstand is de lengte van hoogtelijn EP op lijnstuk DF.
Deze lengte kun je nu met de sinus van de gevonden hoek berekenen.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 460** de berekening van de hoeken van ΔDEF.

a Laat zien, hoe je de lengte van DE berekent.

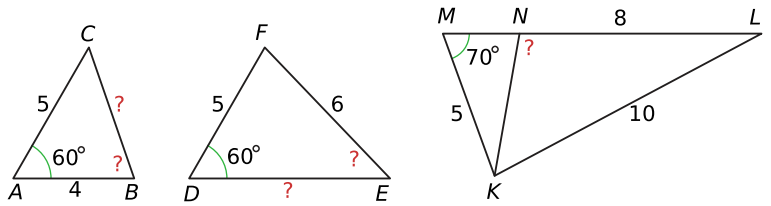
b Bereken nu ook $\angle DEF$.

c Heb je bij b opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?

d Bereken de afstand van E tot lijn DF.

Opgave 10

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



a b c

Figuur 12.11

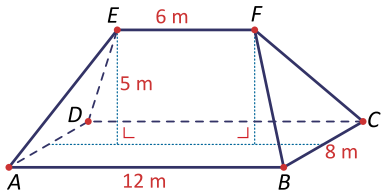
Oefenen

Opgave 11

Een bestelbus levert schilderijen. De opslagbak achterin heeft een lengte van 2 m, breedte 1,6 m en hoogte 1,3 m. Bereken de oppervlakte van het grootst mogelijke schilderij dat erin past, in m^2 in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 12.12

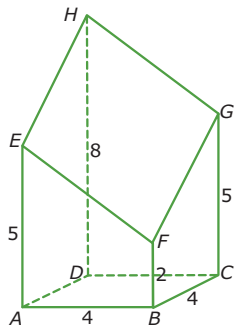
a Bereken de lengte van de ribben AE, DE, BF en CF.

b Bereken de grootte van $\angle ABF$ en $\angle BCF$.

c Op 3 meter boven de zoldervloer $ABCD$ wordt een rechthoekige verdiepingsvloer aangebracht. Bereken de oppervlakte van die verdiepingsvloer.

Opgave 13

Dit is een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen vind je in de figuur.



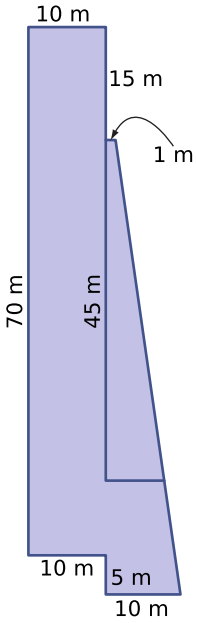
Figuur 12.13

a Bereken de hoek tussen de lijnstukken EH en HG. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de afstand van punt G tot de lijn EH. Rond af op twee decimalen.

Opgave 14

Hier zie je een foto van het gebouw ‘Willemswerf’ in Rotterdam. Daarnaast zie je een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak. De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium.



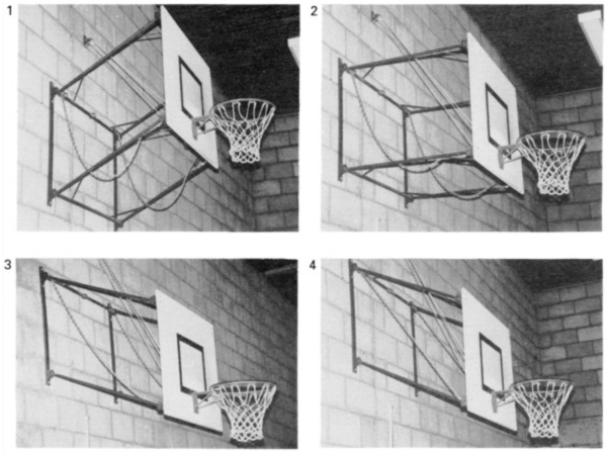
Figuur 12.14

a Bereken de lengtes van de zijden van dat trapezium.

b Bereken de grootte van de hoeken van dat trapezium.

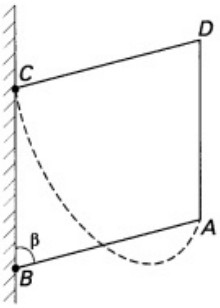
Opgave 15

Hier zie je vier momentopnamen van het neerlaten van een basketbalbord.



Figuur 12.15 Bron: havo-examen wiskunde B1,2 in 1994

De stellage bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan de basket bevestigd is. Twee even lange kettingen dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel. Het zijaanzicht van het frame is een parallellogram $ABCD$. Hierin is $BC = 90$ cm en $AB = 100$ cm. In de gymzaal waarin de foto's zijn genomen zit bevestigingspunt B op een hoogte van 280 cm van de grond. Eén van de kettingen is bevestigd in A en C. De ketting is zo lang dat bij het neerlaten van de stellage punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de begane grond.



Figuur 12.16

a Bereken de lengte van de ketting AC in twee decimalen nauwkeurig.

b Het frame wordt helemaal vanaf de laagste stand omhoog getrokken tot aan de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een cirkelboog. Bereken de lengte van de baan die punt A aflegt. Rond af op twee decimalen.

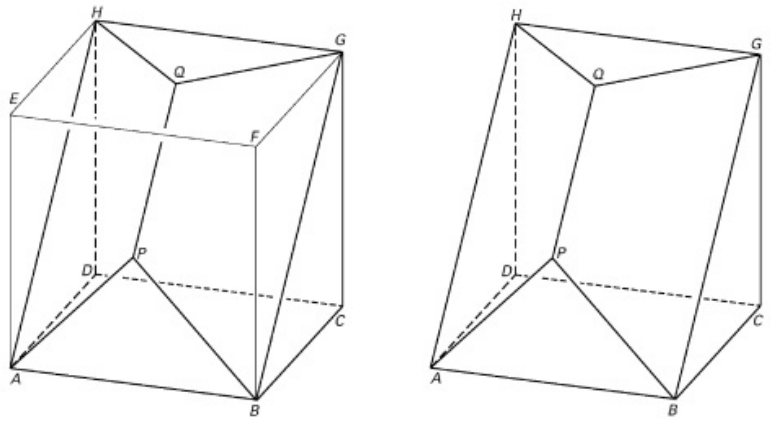
c Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat A op 300 cm boven de begane grond zit in twee decimalen nauwkeurig.

d De afstand a tussen de stangen AB en CD is de lengte van het kortste lijnstuk tussen beide. Deze lengte hangt af van de grootte van hoek β. Druk die afstand a uit in β.

e Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat afstand a precies 45 cm is.

Opgave 16

In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 cm past een lichaam L met hoekpunten A,B,C,D,P,Q,G en H. P is het snijpunt van AF en BE, Q is het snijpunt van EG en FH. In de rechter figuur is L apart getekend.



Figuur 12.17 Bron: examen havo wiskunde B1,2 in 2000

a Bereken de afstand van punt P tot punt G in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de grootte van $\angle BPQ$ in graden nauwkeurig.

De afstand tussen de lijnen PQ en CD is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen beide.

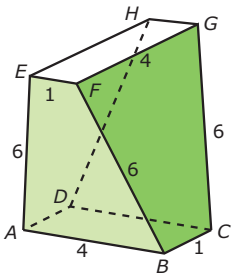
c Bereken de lengte van het bedoelde lijnstuk in één decimaal nauwkeurig.

d Punt R is het midden van GH.
Door P,Q en R gaat een cirkel c. Bereken de straal van deze cirkel in twee decimalen nauwkeurig.

e Bereken de lengte van het deel van de cirkel tussen de punten P en Q in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

In de figuur zie je een betonnen zuil die wordt gebruikt in een viaduct als ondersteuning van het bovenliggende wegdek. Zowel het ondervlak $ABCD$ als het bovenvlak $EFGH$ zijn rechthoeken van 1 m bij 4 m. Alle opstaande zijvlakken zijn gelijke symmetrische trapezia. Je wilt de afstand tussen ondervlak $ABCD$ en bovenvlak $EFGH$ berekenen.



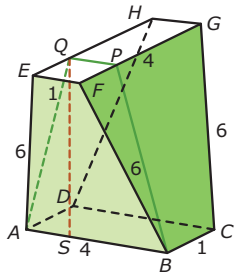
Figuur 12.18

Die afstand kun je het beste zien in een vooraanzicht. Zo'n vooraanzicht heeft dezelfde vorm als een verticale dwarsdoorsnede van de figuur. De gevraagde afstand kun je daarin aangeven.

Je wilt nu rekenen in de doorsnede $ABPQ$, maar dan moet je wel eerst de lengtes van AQ en BP weten. En daarvoor bekijk je één van de zijvlakken, bijvoorbeeld $BCGF$ waarin je de lengte van BP kunt berekenen.

Opgave 17

Bekijk het probleem in **Toepassen op pagina 464**. Hier zie je een verticale doorsnede $ABPQ$ getekend. De gevraagde afstand tussen ondervlak en bovenvlak is de lengte van QS.



Figuur 12.19

a Bereken de lengte van QS in cm nauwkeurig.

b Bereken de afstand tussen de punten B en G in twee decimalen nauwkeurig.

Er zitten ook allerlei hoeken in. Nu is het gebruik van goniometrie onvermijdelijk.

c Bereken $\angle BAE$ in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken $\angle AGC$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

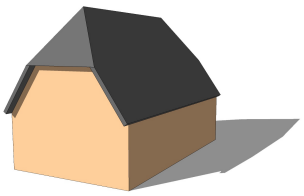
De betonnen zuil heeft een bijzondere eigenschap. Als je op hoogte x boven het grondvlak een horizontale band om de zuil maakt, dan heeft zo'n band altijd dezelfde lengte.

Toon dit aan.

Testen

Opgave 19

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.
Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.
De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.


Figuur 12.20

a Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken.
Bereken de hoeken van die twee gelijkbenige driehoeken.

b Bereken de afstand van de onderste dakrand tot aan de nok van het dak in cm nauwkeurig.

12.3 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- oppervlakte en inhoud berekenen van (delen van) ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Figuur 12.1

a Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in cL.

b Bereken de oppervlakte aan plastic in mm^2.

c Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan plastic waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffiebeker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het plastic blijft hetzelfde.

Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Uitleg 1

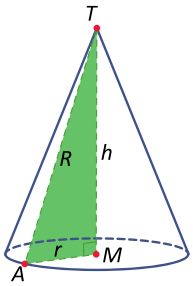
Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Die afmetingen bepalen hoeveel er in kan, de inhoud van het bekertje.

Om die uit te rekenen gebruik je de formule voor de inhoud van een kegel.

$inhoud(kegel) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Hierin is r de straal (de halve diameter) en h de hoogte van de kegel.



Figuur 12.2

Voor de inhoud van het bekertje trek je als het ware twee kegels van elkaar af: een kegel met hoogte h en diameter 46 mm trek je af van een kegel met hoogte $h + 90$ en diameter 64 mm.
Omdat beide kegels gelijkvormig zijn is

$\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$

waaruit volgt: $h = 230$ mm.

De inhoud van de koffiebeker is daarom $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32^2 \cdot 320 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 23^2 \cdot 230 \approx 215733$ mm^3.

De inhoud van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^3 = 8$ keer zo groot.

Opgave 1

Bekijk het koffiebekertje in **Uitleg 1 op pagina 466**.

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Voor welke figuren geldt deze formule?

b Waarom geldt voor een kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?

c Leg uit waarom geldt: $\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$.

d Laat zien dat $h = 230$

e Bereken tenslotte zelf het volume van het koffiebekertje.

f Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 8 keer zo grote inhoud heeft.

Opgave 2

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Voor welke figuren geldt deze formule?

b Waarom geldt voor een cilinder $V = \pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?

c Bereken de inhoud van een kubus waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

d Bereken de inhoud van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

e Bereken het volume van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.

f Bereken het volume van een bol met diameter 6 cm.
Zoek eventueel de formule voor de inhoud van een bol op in de **Theorie op pagina 469**.

Uitleg 2

Het kartonnen koffiebekertje van **Uitleg 1 op pagina 466** is een afgeknotte kegel met diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en hoogte 90 mm.

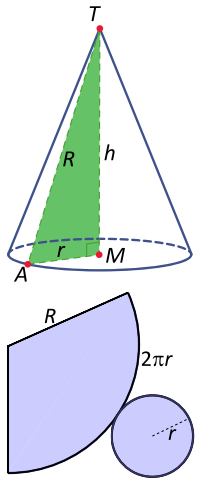
Die afmetingen bepalen hoeveel karton er voor het bekertje nodig is.

Om dat uit te rekenen gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegel.

oppervlakte(kegelmantel) $= \pi r R$.

Hierin is r de straal (de halve diameter) en R de straal van de kegelmantel (een deel van een cirkel).

Er geldt: $R = \sqrt{r^2 + h^2}$.



Figuur 12.3

Voor de oppervlakte van het bekertje trek je als het ware twee kegelmantels van elkaar af: een kegelmantel met straal $\sqrt{230^2 + 23^2} \approx 231$ en kegelstraal 23 mm trek je af van een kegelmantel met straal $\sqrt{320^2 + 32^2} \approx 322$ en kegelstraal 32 mm.

De oppervlakte van de mantel van de koffiebeker is daarom $\pi \cdot 32 \cdot 322 - \pi \cdot 23 \cdot 231 \approx 15628$ mm^2.

De totale oppervlakte van de koffiebeker is $\approx 15628 + \pi \cdot 23^2 \approx 17290$ mm^2.

De oppervlakte van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^2 = 4$ keer zo groot.

Opgave 3

In **Uitleg 2 op pagina 468** wordt de oppervlakte van het koffiebekertje berekend.
Daarbij gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegelmantel.

a Welke vorm heeft een kegelmantel?

De formule *oppervlakte(kegelmantel)* $= \pi r R$ kun je zelf afleiden.
Bedenk dat de kegelmantel een deel is van een cirkel met straal R.

b Hoe groot is de oppervlakte van zo'n cirkel?

De kromme rand van de kegelmantel heeft een lengte van $2\pi r$.
De hele cirkel waar de kegelmantel een deel van is heeft een omtrek van $2\pi R$.

c Welk deel van de hele cirkel is de kegelmantel?
Leid nu zelf de formule voor de oppervlakte van de kegelmantel af.

d Bereken met die formule zelf de oppervlakte van het koffiebekertje.

e Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 4 keer zo grote oppervlakte heeft.

Opgave 4

De oppervlakte van een ruimtelijke figuur is de oppervlakte van de uitslag van zo'n figuur.

a Geldt dit ook voor een bol?

b Hoe kom je aan de formule $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ voor de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h? Welke aanname moet je dan doen?

c Bereken de oppervlakte van een bal waarvan de ribben 6, 5 en 4 cm lang zijn.

d Bereken de oppervlakte van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

e Bereken de oppervlakte van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.

f Bereken de oppervlakte van een bol met diameter 6 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag ervan, dus het aantal eenheidsvierkantjes dat op die oppervlakte past.

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** (of het volume) is gelijk aan de het aantal eenheidskubusjes dat er in past.

Hier zie je de bijbehorende formules.

figuur	oppervlakte A	inhoud/volume V
kubus $r \times r \times r$	$A = 6 \cdot r^2$	$V = r^3$
balk $l \times b \times h$	$A = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$V = l \cdot b \cdot h$
n-zijdig prisma $G \times h$	$A = 2 \cdot G \cdot h + n \cdot A_{\text{rechthoek}}$	$V = G \cdot h$
n-zijdige piramide $G \times h$	$A = G + n \cdot A_{\text{driehoek}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
bol met straal r	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
cilinder straal r hoogte h	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
kegel straal r hoogte h	$A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

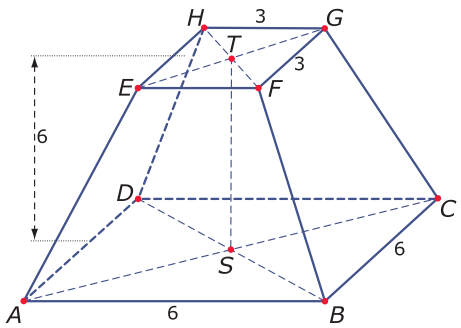
Tabel 12.1

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$

Bereken de totale oppervlakte en het volume van de afgeknotte piramide.



Figuur 12.4

Antwoord

De uitslag van zo'n afgeknotte piramide bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 en een vierkant van 3 bij 3 en vier gelijke trapezia. De hoogte van zo'n trapezium kun je berekenen door bijvoorbeeld vanuit F een

loodlijn naar het grondvlak te tekenen. Je vindt dan dat die hoogte gelijk is aan $\sqrt{6^2 + 1{,}5^2}$. De hoogte van het trapezium is dus $\sqrt{38{,}25}$ en heeft twee evenwijdige zijden van 6 en 3.

oppervlakte (ABCD.EFGH)$= 6^2 + 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \sqrt{38{,}25} \approx 156{,}3$

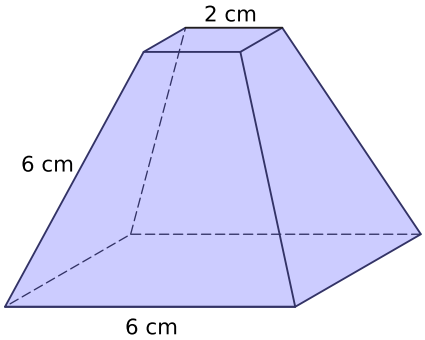
De afgeknotte piramide is het verschil van een grote piramide met grondvlak 6 bij 6 en hoogte $x + 6$ en een kleinere piramide met grondvlak 3 bij 3 en hoogte van x.
Nu is: $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{6}$ en dus is $x = 6$.

De inhoud van de afgeknotte piramide is: $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 126$

Opgave 5

Leg uit waarom de hoogte van het trapezium uit **Voorbeeld 1 op pagina 469** gelijk is aan $\sqrt{38{,}25}$.

Opgave 6



Figuur 12.5

Bereken exact de oppervlakte en de inhoud van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.

Voorbeeld 2

Dit is een ‘amsterdammertje’, een paaltje in Amsterdam om onder andere wildparkeren tegen te gaan. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovencirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend. Ga ervan uit dat er 5 liter verf nodig is voor een oppervlakte van 40 m^2. Hoeveel liter verf is er dan nodig om alle 6500 amsterdammertjes in een bepaalde wijk te schilderen?

Figuur 12.6

Antwoord

Geschilderd worden de (afgeknotte) kegelmantel en de halve bol. De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h. Met verhoudingen bereken je h: $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een oppervlakte van $\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + 225^2} - \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 135^2} \approx 4528{,}4$ cm^2.

De halve bol heeft een oppervlakte van $0{,}5 \cdot 4\pi \cdot 6^2 \approx 226{,}2$ cm^2.

De te schilderen oppervlakte is ongeveer $6500 \cdot (4258{,}4 + 226{,}2) = 30904900$ cm^2.
Dat is ongeveer 3090,5 m^2 en daar is ongeveer 386,3 liter verf voor nodig.

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van het amsterdammertje uit het voorbeeld berekent. Stel je voor dat het amsterdammertje van binnen hol is en dat het metaal overal een dikte heeft van 2 mm.

Hoeveel metaal is er dan voor nodig? Geef je antwoord in gehele cm^3.

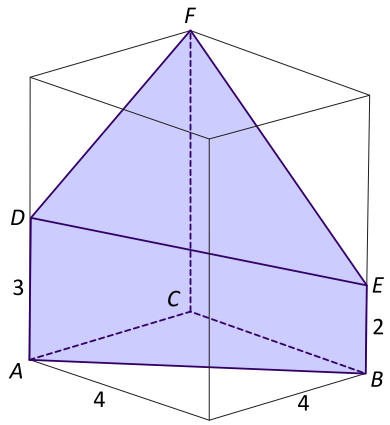
Opgave 8

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van een figuur kunt berekenen die is samengesteld uit een afgeknotte kegel en een halve bol. Heel vaak is een lichaam op te vatten als een samenstelling van (delen van) andere lichamen.
Een surprise zit in een cilinder met een diameter van 10 cm en een hoogte van 20 cm met daarop een kegelvormige punt met een hoogte van 5 cm.

Bereken in cm^2 de totale buitenoppervlakte van de verpakking. Maak eventueel zelf een schets van de situatie.

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.
Bereken de inhoud en de totale oppervlakte $ABC.DEF$



Figuur 12.7

Antwoord

Voor de oppervlakte van ΔDEF heb je de lengtes van de zijden nodig om met de cosinusregel een hoek uit te rekenen. Dan kun je een hoogte berekenen en de oppervlakte van ΔDEF berekenen. De oppervlakte van de andere grensvlakken tel je er nog bij op.

Voor de inhoud moet je de figuur verdelen in herkenbare lichamen.
Teken daartoe een vlakje EGH evenwijdig aan ΔABC.
De figuur wordt dan verdeeld in driehoekig prisma $ABC.GEH$ en piramide $E.GHFD$.
De totale inhoud is de inhoud van prisma en piramide samen.

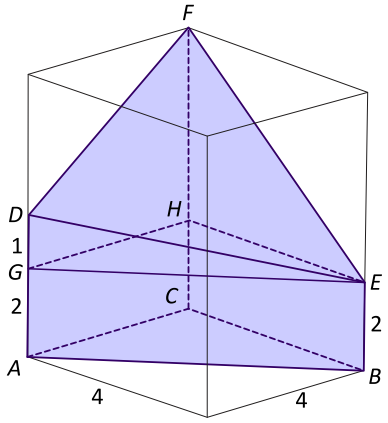
Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 471** het afgeknotte prisma $ABC.DEF$.

a Bereken de oppervlakte van ΔDEF berekent.

b Bereken de totale oppervlakte van $ABC.DEF$.

c In de figuur zie je de verdeling van $ABC.DEF$ in een prisma en een piramide.
Bereken het volume van $ABC.DEF$.

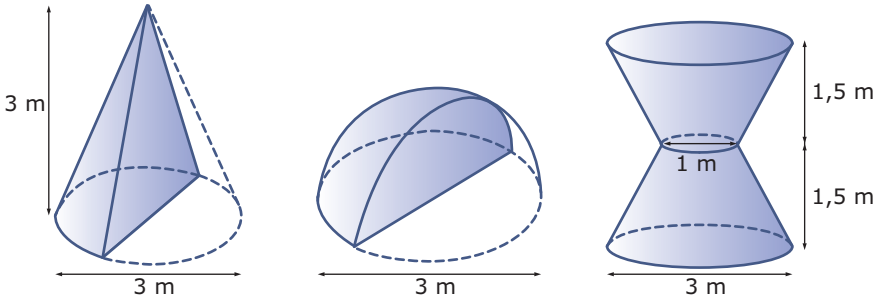


Figuur 12.8

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier drie figuren.



Figuur 12.9

a Bereken de oppervlakte ervan.

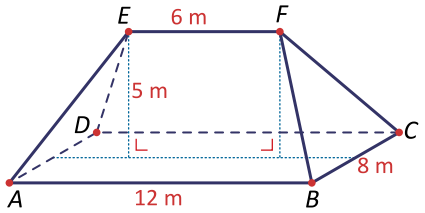
b Bereken de inhoud ervan.

Opgave 11

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.

a Bereken de exacte oppervlakte van dit schilddak.

b Bereken het volume onder dit schilddak.



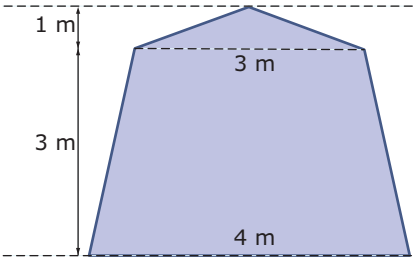
Figuur 12.10

Opgave 12

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

a Bereken de oppervlakte van deze tent, dus de hoeveelheid tentdoek die je ervoor nodig hebt, in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de inhoud van deze tent.



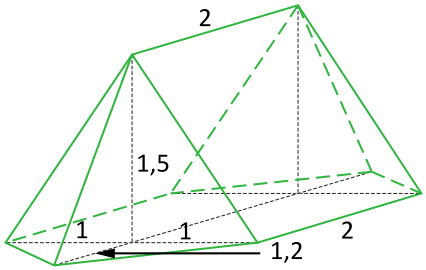
Figuur 12.11

Opgave 13

Bekijk de afbeelding van een tent met een symmetrische vorm. Door dunne stippellijnen is de onderverdeling weergegeven, de verticale dunne stippellijnen staan loodrecht op de horizontale dunne stippellijnen. Alle afmetingen zijn in meter.

a Bereken de oppervlakte van het ervoor benodigde tentdoek, inclusief het grondzeil.

b Bereken de inhoud van deze tent.



Figuur 12.12

Opgave 14

Van een cocktailglas heeft de bovenkant een wijde kegelvorm. Dat heeft een goede reden.

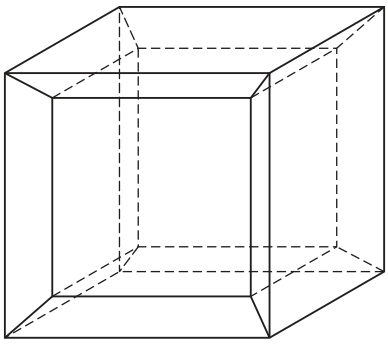
a Stel dat de vloeistofspiegel van de cocktail tot halverwege de hoogte van de kegel staat, hoeveel procent van de totale inhoud van het cocktailglas is dan gevuld?

b Stel dat het cocktailglas half vol is, hoe hoog is dan de vloeistofspiegel?
Neem aan dat de vloeistofspiegel maximaal 10 cm vanaf de bodem van het glas kan zijn.

Figuur 12.13

Opgave 15

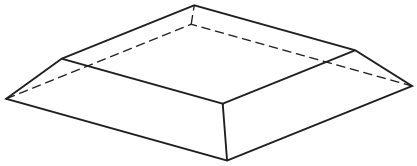
In Parijs staat een groot gebouw, La Grande Arche, dat vrijwel de vorm van een uitgeholde kubus heeft.



Figuur 12.14

Bij benadering geldt dat de buitenste acht hoekpunten van het gebouw een grote kubus vormen met ribben van 110 meter. De binnenste acht hoekpunten vormen een kleinere kubus met ribben van 88 meter. Beide kubussen hebben hetzelfde middelpunt en overeenkomstige zijvlakken zijn evenwijdig.

a Bereken de verhouding van de oppervlaktes van de grote en de kleine kubus.



Figuur 12.15

Om de inhoud van het gebouw te bepalen kan het volgende model worden gebruikt. Als aan alle zijden van de kleine kubus hetzelfde lichaam dat staat afgebeeld wordt toegevoegd, ontstaat precies de grote kubus. La Grande Arche bevat vier van deze zes lichamen.

b Bereken de inhoud van het gebouw in kubieke meters nauwkeurig.

Toepassen

In de modelbouw willen mensen het liefst dat de eigenschappen van bijvoorbeeld de voertuigen en gebouwen op werkelijke grootte in hun modellen behouden blijven. Dit geldt niet alleen voor hobbyisten, maar ook bijvoorbeeld voor ontwerpers van vliegtuigen die de aerodynamische eigenschappen van hun ontwerp willen uittesten op een model.

Figuur 12.16

Opgave 16

In de luchtvaart wordt de vorm van de vleugels in een getal uitgedrukt met het begrip slankheid. De formule voor slankheid is $\lambda = \frac{b^2}{A}$. Hierbij is b de spanwijdte en A de oppervlakte van de vleugels. Ga er voor het gemak van uit dat de vleugels rechthoekig zijn.

a Een modelvliegtuig heeft een vleugeloppervlak dat 900 keer kleiner is dan die van het werkelijke vliegtuig. Wat gebeurt er met de slankheid?

Een modeltrein weegt 1,5 kg. Het is gemaakt van hetzelfde materiaal als de werkelijke trein. De werkelijke trein weegt 768 ton.

De snelheid van de modeltrein moet de werkelijkheid zo goed mogelijk nabootsen. De werkelijke trein heeft een topsnelheid van 100 km/h. Wat moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

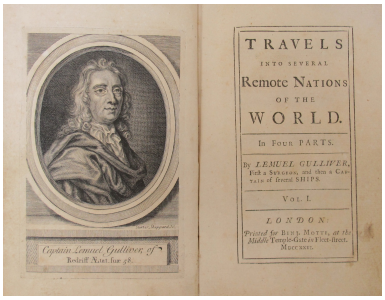
b Hoe groot moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

Een raket bestaat grofweg uit een cilinder met een kegel erop. Een amateur-raketwetenschapper heeft een modelraket van 125 kg gebouwd die, wanneer afgevuurd, 250 m hoog in de lucht komt. Hij heeft berekend dat een raket met de verhoudingen van zijn model een hoogte h (m) behaalt die evenredig is met het verschil van de massa van de cilinder en de massa van de kegel. Dus $h = c \cdot (m_1 - m_2)$, waarbij c een constante is, m_1 de massa van de cilinder en m_2 de massa van de kegel.

c Stel dat de kegel en de cilinder van een raket op werkelijke grootte van precies dezelfde materialen gemaakt worden als het model. Je wilt dat een raket 100 km de lucht in gaat. Hoe zwaar moet de werkelijke raket worden?

Opgave 17

Jonathan Swift bedacht in zijn boek ‘Gulliver's travels’ het volk uit Lilliput. De bewoners van Lilliput zijn verkleiningen van echte mensen met een factor 10. Ga eens uit van een Lilliputter die een perfecte verkleining is van jouzelf.



Figuur 12.17

a Hoeveel weegt die Lilliputter ten opzichte van jou?

b Hoeveel keer minder huidoppervlakte heeft die Lilliputter in vergelijking met jijzelf?

c De voedselbehoefte van zoogdieren is ongeveer recht evenredig met de huidoppervlakte omdat dit vooral nodig is om de lichaamstemperatuur op peil te houden en het temperatuurverlies vooral afhangt van de huidoppervlakte. Schat hoeveel gram voedsel jij per dag zelf nodig hebt en bereken hoeveel dat voor de Lilliputter zou moeten zijn.

d Hoeveel procent van je eigen lichaamsgewicht moet jij dagelijks eten? En de Lilliputter? In deze opgave wordt uitgegaan van een lichaamsgewicht van 80 kg.

e Waarom geldt voor zoogdieren dat de benodigde hoeveelheid voedsel recht evenredig is met het kwadraat van de lengte?

f Leg uit dat voor zoogdieren de benodigde hoeveelheid voedsel per kg lichaamsgewicht recht evenredig is met $l^{\frac{2}{3}}$, waarin l de lichaamslengte is.

Testen

Opgave 18

Deze stenen vijzel met stamper bestaat uit een wat poreuze soort steen met een soortelijke massa van 2,1 gram/cm^3. De vijzel zelf heeft ongeveer de vorm van een balk met een vierkant grondvlak en bovenvlak van 14 × 14 cm. De vier opstaande ribben zjn 8 cm. In die vijzel is een halve bol zo uitgeslepen, dat het diepste punt van die bol 2,5 cm boven het grondvlak zit.

De inhoud van een bol met straal r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$.

Figuur 12.18

a Hoeveel weegt deze vijzel in grammen nauwkeurig?

b Af en toe moet deze vijzel worden ingesmeerd met een bepaalde olie. Hoe groot is de oppervlakte van de vijzel in cm^2 nauwkeurig?

Opgave 19

Uit Wikipedia november 2016: “Een obelisk is een gedenknaald. Het gaat om een vierkante, naar boven toe iets dunner wordende zuil of kolom, met een piramidevormige stompe punt, meestal van graniet gemaakt.”
Neem aan dat een bepaalde obelisk bestaat uit een 16 m hoge afgeknotte piramide met een grondvlak van 1,8 × 1,8 m en een bovenvlak van 1,0 × 1,0 m. Op dit bovenvlak staat een piramide met opstaande zijden van 2,0 m.

a Hoeveel hoog is deze obelisk in dm nauwkeurig?

b Graniet heeft een soortelijke massa van 2,7 g/cm^3. Hoe zwaar is zo'n obelisk als hij van graniet wordt gemaakt?

12.4 Doorsneden construeren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden uit een ruimtelijke figuur halen en in hun werkelijke vorm tekenen, eventueel op schaal;
- doorsneden in een ruimtelijke figuur construeren.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

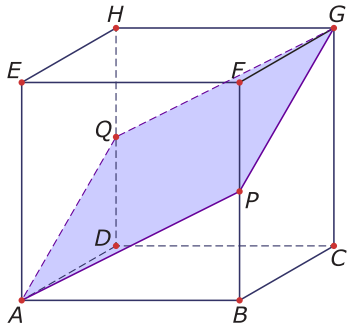
a Kun je uitleggen waarom dit de doorsnede van de kubus met een plat vlak is? Weet je zeker dat het een vlakke figuur is? En zo ja, waarom?

b Vanuit welke richting moet je de kubus bekijken om $APGQ$ als een lijnstuk te zien?

c Welke vlakke figuur is doorsnede $APGQ$?

d Bereken er de zijden en de hoeken van.

e Bereken er de oppervlakte van.



Figuur 12.1

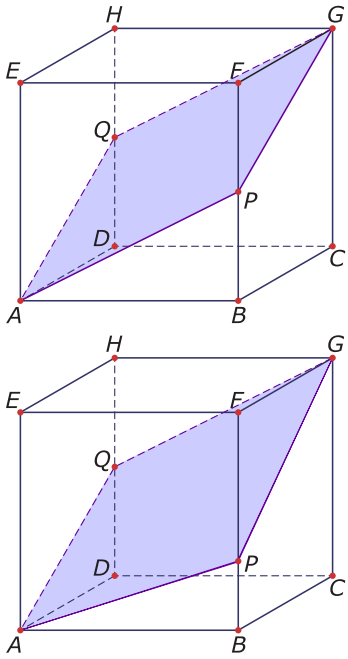
Uitleg

Bekijk in de bovenste figuur de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.
Deze doorsnede ligt in een plat vlak omdat (bijvoorbeeld) AP en QG evenwijdig zijn.

In de onderste figuur is P niet het midden van BF en daarom is $APGQ$ geen plat vlak en dus ook geen doorsnede met de kubus.
AP en QG zijn nu kruisende lijnen.

Wil je in de bovenste figuur $APGQ$ op ware grootte zien, moet je inzien dat $APGQ$ een ruit waarvan alle zijden $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm zijn.

De diagonaal PQ is $\sqrt{50}$ cm.
Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.



Figuur 12.2

Opgave 1

Bekijk de bovenste kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg op pagina 476**.
M is het midden van AC.

a Waarom zijn de twee ribben AP en QG evenwijdig?

b Teken diagonaalvlak $ACGE$ op ware grootte en laat zien dat AG en EM loodrecht op elkaar staan.

c Waarom zie je $APGQ$ op ware grootte als je in de richting EM op dat vlak kijkt?

d Bereken zelf de lengte van de twee diagonalen van ruit $APGQ$.

e Teken de ruit op ware grootte en bereken de hoeken ervan in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. P is het midden van BF. Teken zelf die kubus als een schets. Door A, P en H gaat een vlak. Dat vlak kun je binnen de kubus nog groter maken.

a Licht toe waarom het midden R van FG ook in dit vlak ligt. Denk aan evenwijdigheid!

b Teken vierhoek $APRH$ in de kubus.

c Waarom is vierhoek $APRH$ de doorsnede van het vlak door A, P en H met de kubus?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

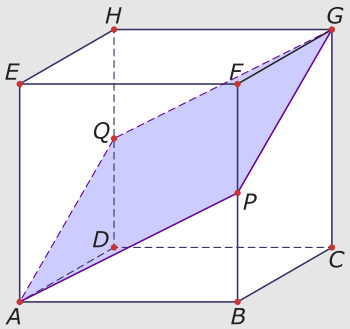
Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak.

Bij het tekenen van een doorsnede gebruik je:

- Door drie punten bestaat één vlak.
- Door twee snijdende lijnen bestaat één vlak.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als lijnen elkaar kruisen liggen ze niet in één vlak.

Bekijk de kubus. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen. De vierhoek $APGQ$ is een doorsnede van de kubus omdat AP en QG evenwijdig zijn.

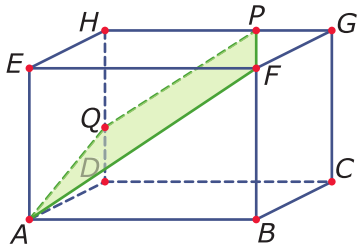
Soms wil je de doorsnede op ware grootte of op schaal tekenen. Dan moeten alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (op schaal).



Figuur 12.3

Voorbeeld 1

Bekijk doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$.
Gegeven is $AB = 6$, $BC = 4$, $CG = 3$ en $GP = 2$.
Teken doorsnede $AFPQ$ op ware grootte.



Figuur 12.4

Antwoord

De ware lengte van AF kun je halen uit rechthoek $ABFE$: $AF = \sqrt{45}$.

De ware lengte van FP kun je halen uit rechthoekige ΔFGP: $FP = \sqrt{20}$. De ware lengte van AP kun je halen uit rechthoekige ΔAHP: $AP = \sqrt{41}$. Nu teken je eerst ΔAFP met behulp van passer en lineaal.

Omdat $AFPQ$ een plat vlak is, moet $AF//PQ$. Dus zijn de driehoeken AFE en QPH gelijkvormig. Omdat $PH = \frac{4}{6}EF$ is ook $PQ = \frac{4}{6}AF$.
Hiermee kun je het trapezium $AFPQ$ afmaken.

Opgave 3

Bekijk de doorsnede $AFPQ$ in **Voorbeeld 1 op pagina 478**.

a Laat zien hoe de lengtes van de zijden van vierhoek $AFPQ$ kunnen worden berekend.

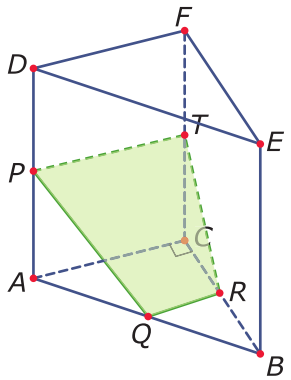
b Bereken zelf de lengte van de diagonalen van vierhoek $AFPQ$.

c Waarom weet je zeker dat vierhoek $AFPQ$ een trapezium is?

d Teken nu dit trapezium op ware grootte.

Voorbeeld 2

In het rechte prisma $ABC.DEF$ ligt P op het midden van AD, Q op het midden van AB, R op het midden van BC en T op het midden van CF. Hoek BCA is recht, $BC = BE = 4$ en $AC = 3$.
Teken doorsnede $PQRT$ op ware grootte.



Figuur 12.5

Antwoord

Van vierhoek $PQRT$ zijn hoek PTR en hoek TRQ recht. Verder is $TP = 3$, $TR = \sqrt{8}$ en $QR = 1{,}5$ (gelijkvormigheid). De figuur is nu eenvoudig te tekenen.
Ga na hoe je de hoeken en de oppervlakte van trapezium $PQRT$ berekent.

Opgave 4

Bekijk het rechte prisma $ABC.DEF$ in **Voorbeeld 2 op pagina 478**.

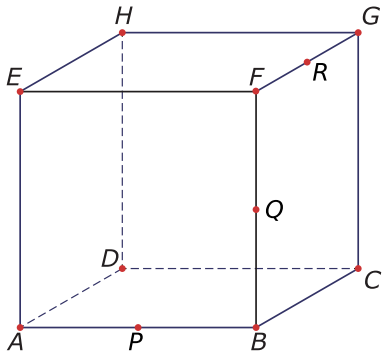
a Teken zelf de doorsnede $PQRT$ op ware grootte. Controleer alle berekende lengtes.

b Bereken de hoeken en de oppervlakte van het trapezium.

Voorbeeld 3

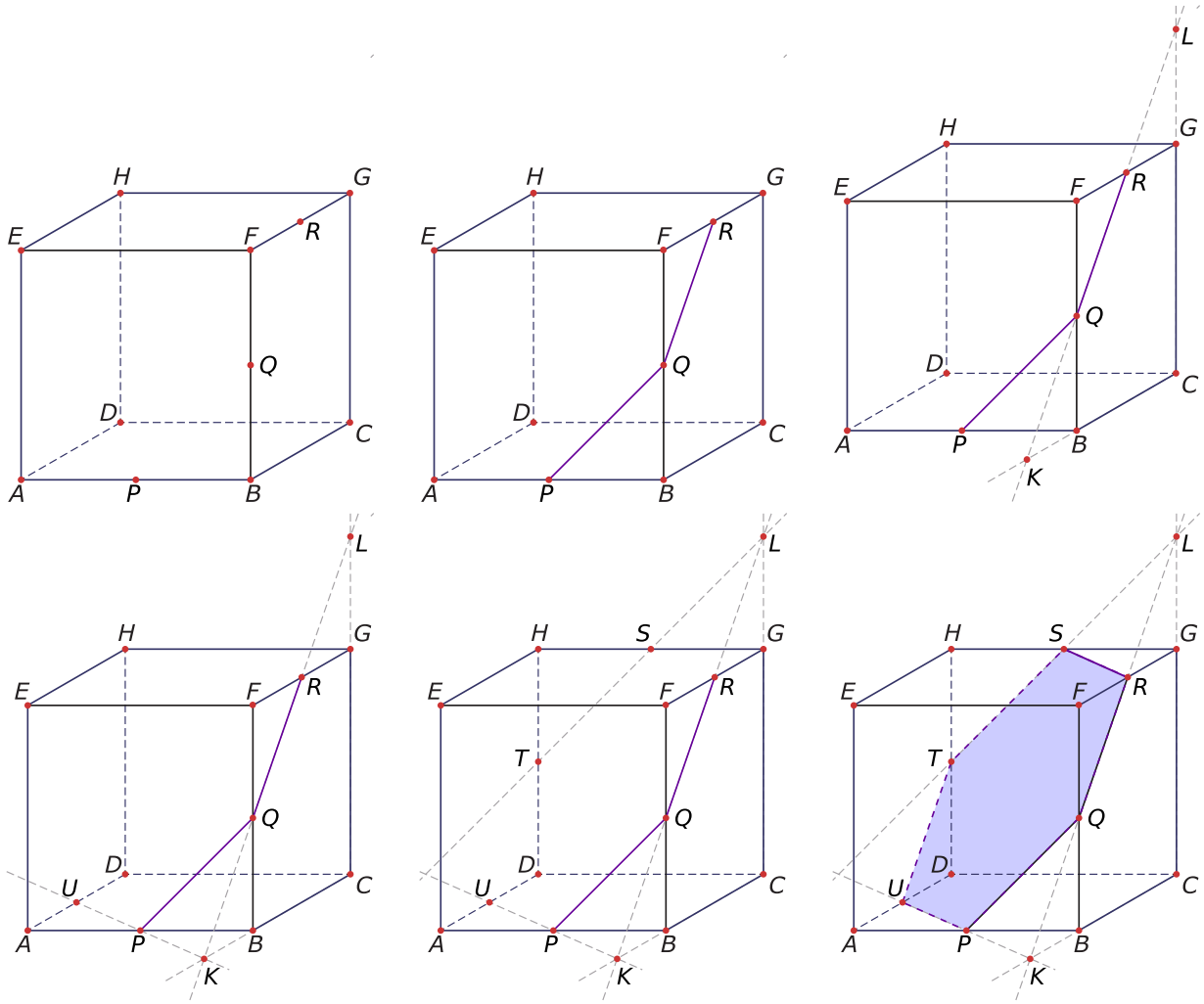
Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 8 cm. P is het midden van AB, Q dat van BF en R dat van FG.

1. Teken de doorsnede van het vlak door deze drie punten met de kubus.
2. Teken die doorsnede ook op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.



Figuur 12.6

Antwoord

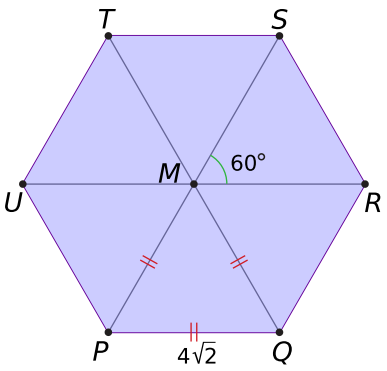


Figuur 12.7

- Bij het tekenen van de lijn door L die de punten S en T oplevert, is gebruikgemaakt van de evenwijdigheid van de snijlijnen in twee evenwijdige vlakken. Je krijgt een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met alle zijden $4\sqrt{2}$.
- Zeshoek $PQRSTU$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, want de hoeken bij punt M zijn allemaal $60°$.
  Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van $60°$ is gelijkzijdig.

De hoogte van één van die gelijkzijdige driehoeken is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. En daarmee bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek.

Ga na dat de zeshoek een oppervlakte heeft van $48\sqrt{3}$ cm^2.



Figuur 12.8

Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een doorsnede tekent door drie gegeven punten in een kubus. Gegeven is opnieuw de kubus $ABCD.EFGH$ met de punten P, Q en R. Bekijk de afbeelding.

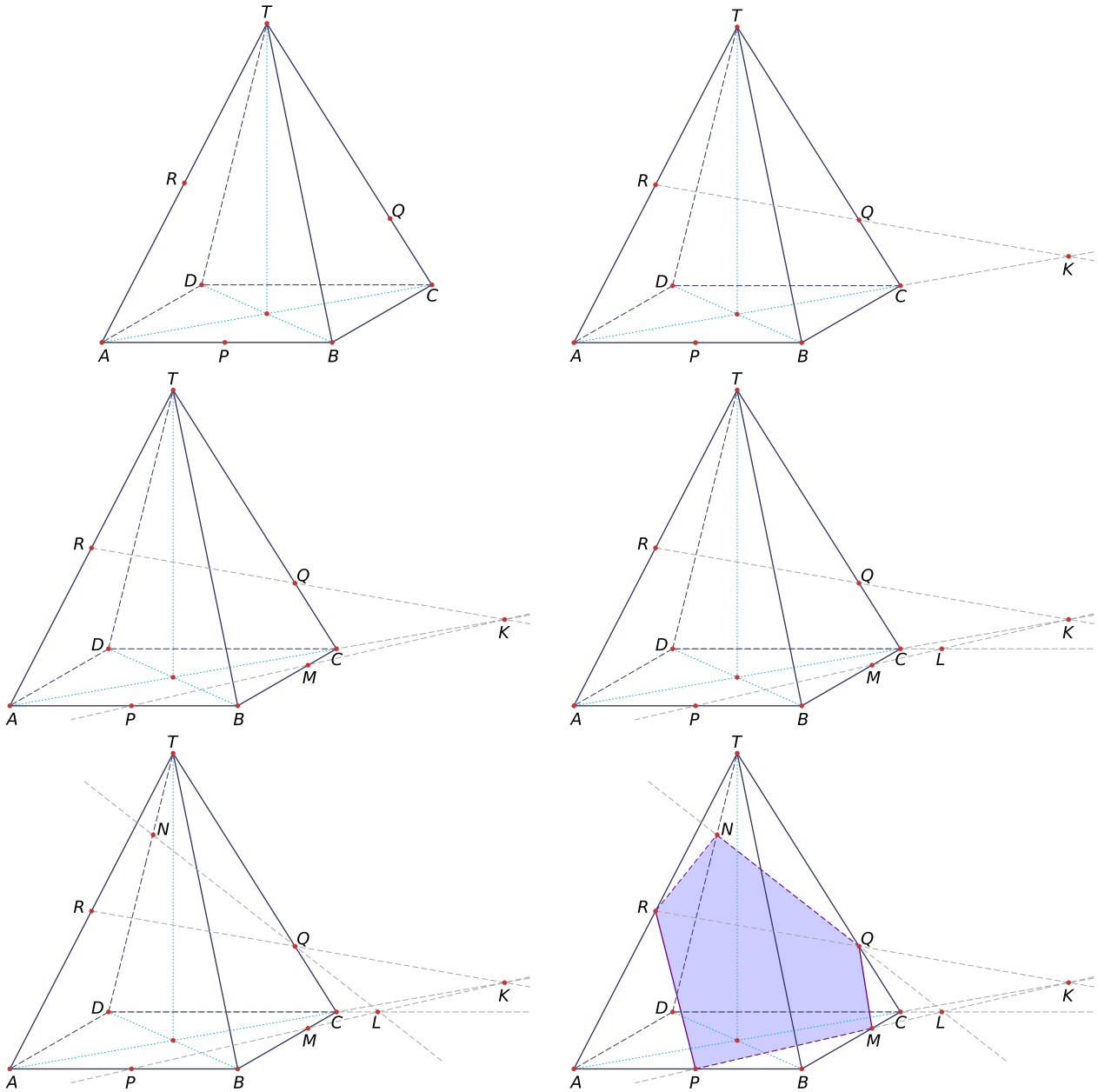
a Teken zo'n kubus met de punten P, Q en R. Voer daarna zelf de constructie van de doorsnede door deze punten stap voor stap uit. Leg bij elke stap uit hoe en waarom hij wordt gezet.

b Toon aan dat de oppervlakte van de doorsnede inderdaad $48\sqrt{3}$ cm^2 is.

c Teken de kubus nog eens. Het midden van GH is punt S, het midden van BF is punt Q. Teken de doorsnede van het vlak door E, Q en S met de kubus. Geef ook nu een uitgebreide beschrijving van je constructie.

Voorbeeld 4

Bekijk de constructie van de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de piramide $T.ABCD$.



Figuur 12.9

Opgave 6

Je hebt gezien hoe de doorsnede van het vlak door P, Q en R in een gegeven regelmatige vierzijdige piramide geconstrueerd wordt.

a Waarom weet je zeker dat de lijnen RQ en AC elkaar snijden? Waarom ligt dit snijpunt K in het grondvlak $ABCD$ van de piramide?

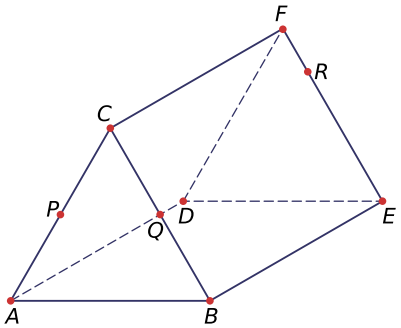
b Geef een nauwkeurige beschrijving van de constructie.

c Teken zelf deze piramide en daarin de doorsnede van het vlak door R, B en Q.

Oefenen

Opgave 7

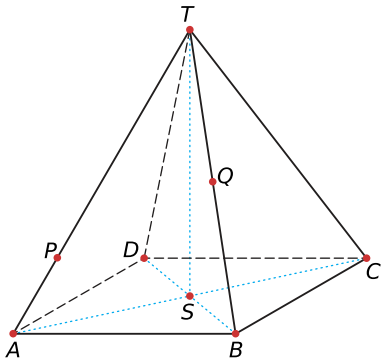
Neem het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en R. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 12.10

Opgave 8

Neem de piramide over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en C en de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Geef een beschrijving van de constructie.



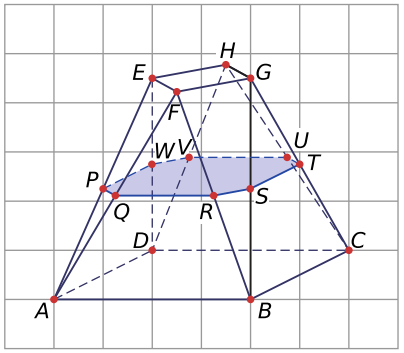
Figuur 12.11

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door het midden van alle opstaande ribben.

a Teken deze doorsnede op ware grootte. Laat zien hoe je daarbij te werk gaat.

b Bereken de totale omtrek van deze doorsnede.



Figuur 12.12

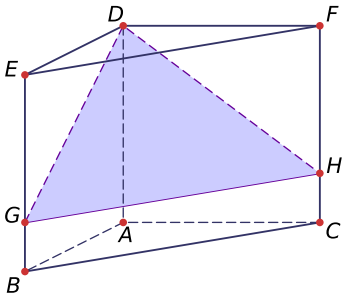
Opgave 10

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90°$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

a Teken de doorsnede van vlak GHD en het prisma op ware grootte.

b Bereken de grootte van de hoeken van driehoek GHD in één decimaal nauwkeurig.

c Neem de figuur over en teken de snijlijn van vlak GHD met het vlak waarop het grondvlak ABC ligt.

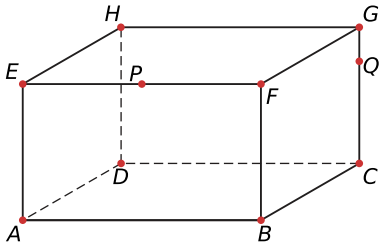


Figuur 12.13

Opgave 11

In deze balk $ABCD.EFGH$ is P het midden van EF en ligt Q op CG zo, dat $CQ : QG = 4 : 1$.

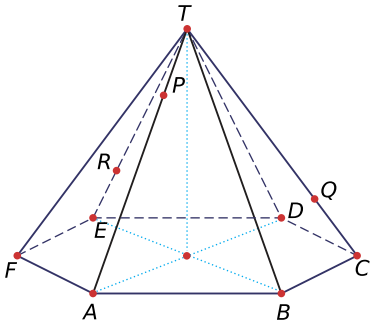
Neem de balk over en teken de doorsnede van het vlak APQ en de balk. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 12.14

Opgave 12

Gegeven is een piramide $ABCDEF.T$ met een regelmatige zeshoek als grondvlak. Zie ook de figuur. Punt P ligt op AT, punt Q ligt op TC en punt R op TE. Teken de doorsnede door de punten P, Q en R. Licht je antwoord toe.

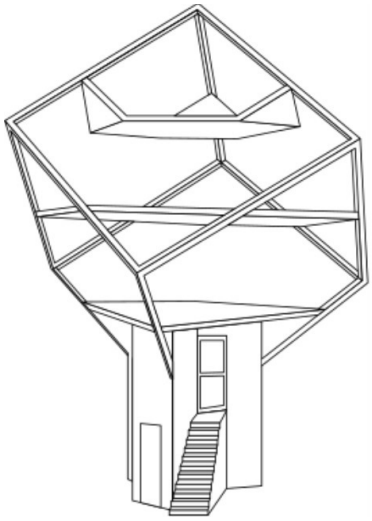


Figuur 12.15

Toepassen

Het ontwerp van de kubuswoningen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn dergelijke kubuswoningen gebouwd.

Figuur 12.17



Figuur 12.16

Opgave 13

Bekijk de kubuswoningen in de figuren hierboven.

a Teken zo'n kubus die op zijn punt staat: één van de lichaamsdiagonalen is verticaal.

b Teken de vloeren van de drie verdiepingen in de kubus. Deze drie vloeren verdelen de verticale lichaamsdiagonaal in vier gelijke delen.

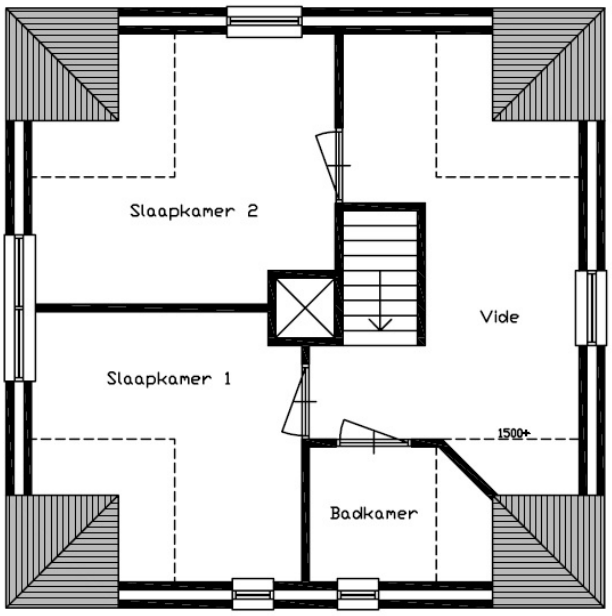
Opgave 14

Hier zie je een rondwandeling door het vakantiehuisje ‘Heideheuvel’.
Dit huisje past precies in een kubus van 8 × 8 × 8 m, als je de schoorsteen niet meerekent.

a Teken de verdiepingsvloer op schaal 1 : 100 als je weet dat hij 3 m boven de begane grond zit.

b Hoe groot is oppervlakte van die verdiepingsvloer?

c Je ziet hier de plattegrond van de verdieping.
Het muurtje tussen de badkamer en de vide bestaat uit twee delen. Teken deze delen op ware grootte.



Figuur 12.18

Testen

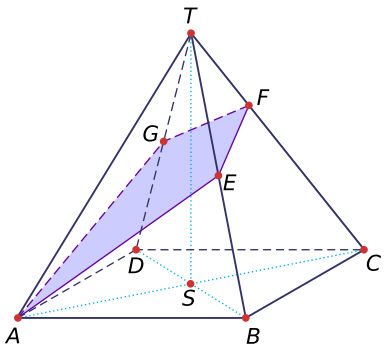
Opgave 15

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. De hoogte van deze piramide is 5 cm. Punt E is het midden van BT en punt G is het midden van DT. De doorsnede $AEFG$ heeft de vorm van een vlieger. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD. M is het snijpunt van TS en GE.

a Leg uit waarom deze doorsnede de vorm van een vlieger heeft.

b Teken doorsnede $AEFG$ op ware grootte. Licht je antwoord met berekeningen toe.

c Bereken de grootte van $\angle EAG$.

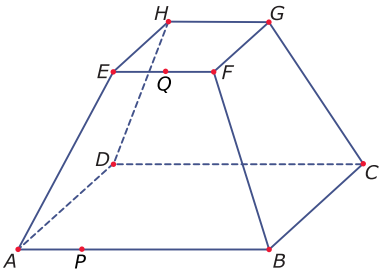


Figuur 12.19

Opgave 16

Dit is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. P ligt zo op AB dat $AP : PB = 1 : 3$ en Q is het midden van EF.

Teken de doorsnede van het vlak PQG en de afgeknotte piramide. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 12.20

12.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met vlakke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakteformules, soorten bijzondere lijnen in een driehoek voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Meetkunde in 3D** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- parallelprojectie — wijkhoek, verkortingsfactor
- gelijkvormig — stelling van Pythagoras — goniometrie — sinusregel, cosinusregel
- oppervlakte — inhoud, volume
- doorsnede — snijdende, kruisende, evenwijdige lijnen

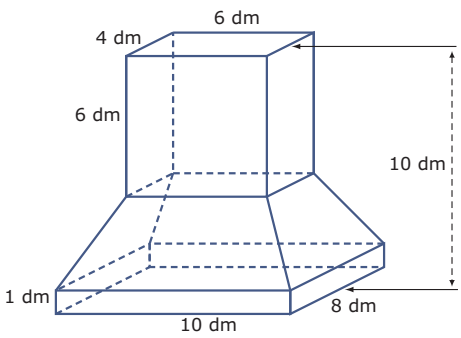
Activiteitenlijst

- eigenschappen parallelprojectie gebruiken — figuren in parallelprojectie tekenen (ook met wijkhoek en verkortingsfactor);
- hoeken en afstanden berekenen met behulp van gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinus- en de cosinusregel;
- oppervlakte en inhoud van een (samengestelde) ruimtelijke figuur berekenen — lengte- oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken;
- een doorsnede van een vlak met een ruimtelijke figuur construeren.

Testen

Opgave 1

Je ziet een stalen afzuigkap in een keuken. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.



Figuur 12.1

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de afzuigkap.

b Bereken de hoeken in graden nauwkeurig en bereken exact de lengte van de zijden van de trapezia.

c Teken een uitslag op schaal 1:20 van de afzuigkap.

d Bereken de totale oppervlakte van deze afzuigkap in dm^2 nauwkeurig.

e Bereken de inhoud van deze afzuigkap in dm^3 nauwkeurig.

Opgave 2

Bekijk de foto van de toren van de Walfriduskerk in Bedum. Deze toren is ongeveer 35,70 meter hoog en heeft vier gelijke ruitvormige dakdelen. Iemand maakt een papieren model van deze torenspits. Daarbij maakt hij als grondvlak van de toren een vierkant van 6 cm bij 6 cm. De totale hoogte van het bouwsel wordt 36 cm. De vier onderste punten van deze ruiten komen 30 cm boven het grondvlak.

Figuur 12.2

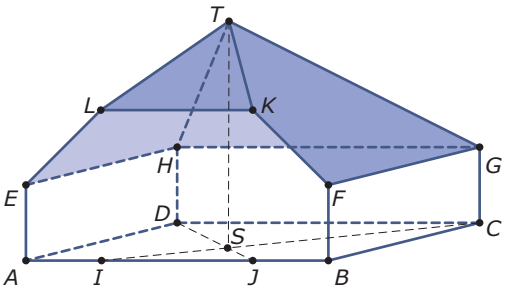
a Teken de drie aanzichten van de torenspits.

b Bereken exact de lengtes van de zijden van zo'n ruitvormig dakdeel. Bereken ook de hoeken daarvan.

c Teken een parallelprojectie van de torenspits met daarin een serie horizontale doorsneden op 2 meter, 4 meter en 6 meter onder de top.

Opgave 3

Bekijk de vereenvoudigde weergave van een boerenschuur. Grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ m en $BC = 6$ m. De zijvlakken $BCGF$ en $ADHE$ zijn rechthoeken van 6 m bij 2 m. Verder is $AI = BJ = 2$ m, $KL = IJ$ en $TS = 6$ m. Punt L zit recht boven I, punt K zit recht boven J en punt T zit recht boven S. Verder is gegeven dat $KJ = 4$ m.



Figuur 12.3

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de schuur.

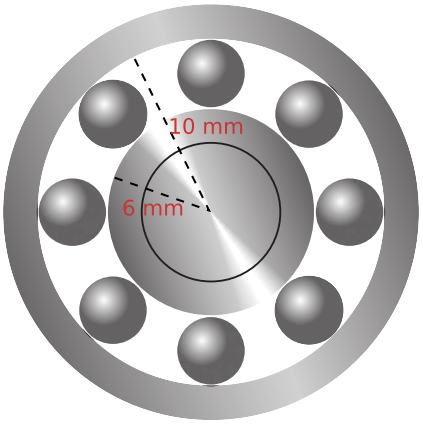
b Teken het grensvlak $FGTK$ op schaal 1:100 en bereken alle hoeken ervan in graden nauwkeurig.

c Teken in de figuur de doorsnede van een vlak door C, L en K met de schuur.

Opgave 4

Je ziet een doorsnede van een kogellager. In je fiets zit om de as van elk wiel zo'n kogellager om ervoor te zorgen dat de draaibeweging van elk wiel met weinig wrijving kan worden uitgevoerd. De kogeltjes van dit lager zijn zuivere bollen en hebben een diameter van 4 mm. De kogeltjes zitten in een cilindervormige ring met een buitenstraal van 10 mm en een binnenstraal van 6 mm. De hoogte van die ring is gelijk aan de diameter van elk kogeltje. De ruimte tussen de kogeltjes is opgevuld met vet.

Hoeveel procent van de inhoud van de ring waarbinnen de kogeltjes zitten, bestaat uit vet? Geef een exact antwoord.

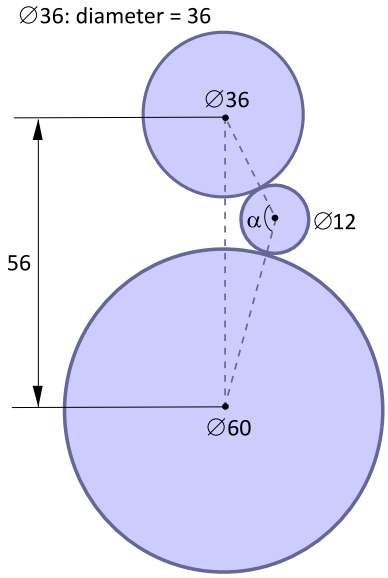


Figuur 12.4

Opgave 5

Je ziet hier twee tandwielen met een tussentandwiel.
Alle lengtematen zijn in mm.

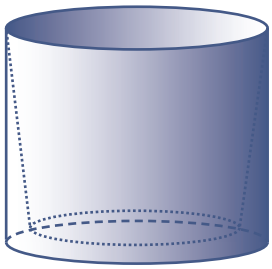
Bereken de grootte van hoek α.



Figuur 12.5

Opgave 6

Een warenhuis heeft een nieuwe plastic vaas op de markt gebracht. Je ziet een afbeelding. Hij bestaat uit een massieve cilinder met een diameter van 40 cm en een hoogte van 41 cm waaruit een afgeknotte kegel is weg geboord. De bodem van deze afgeknotte kegel is 1 cm dik en de diameter van de grondcirkel van de afgeknotte kegel is 30 cm. De vaas is behoorlijk zwaar hoewel de soortelijke massa van het plastic maar 0,5 gram/cm^3 is.



Figuur 12.6

a Bereken de hoeveelheid plastic van de vaas in cm^3.

b Bereken het gewicht van de vaas in grammen.

Opgave 7

In een cilindervormige koker passen precies drie tennisballen boven elkaar.
Hoeveel procent van de inhoud van de koker bestaat uit lucht (de lucht in de tennisballen niet meegerekend)?

Opgave 8: Schaatshouding

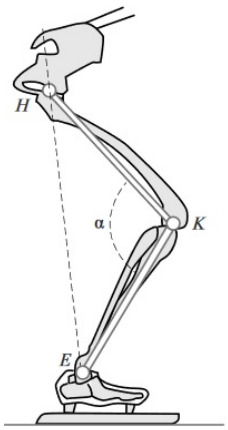
Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.

Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H, het kniegewricht K en het enkelgewricht E.

De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α. Zie de figuur.

We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser:
$HE = 69$ cm en $\alpha = 100°$.



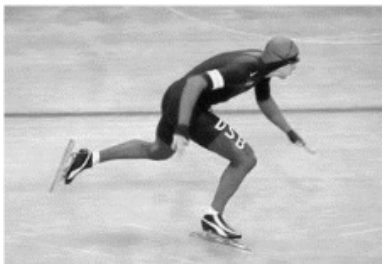
Figuur 12.7

a Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.

b Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.



Figuur 12.8

Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken. Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180°.
Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt:

$HE = \sqrt{3625 - 3600 \cos \alpha}$.
Hierbij is α in graden en HE in cm.

c Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180°. Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.

Toepassen

Opgave 9: De ‘kegel’ van Marius van der Made

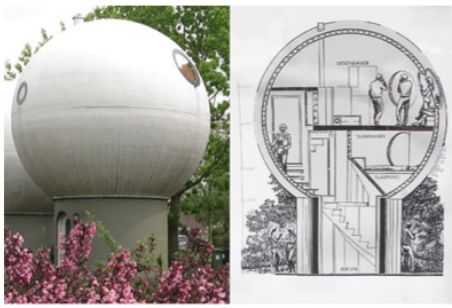
Figuur 12.9

Marius van der Made maakte deze ‘kegel’. De doorsnede van het grote cirkelvormige deel van de kegel is 1,50 m. De doorsnede van het kleinere cirkelvormige deel van de kegel is 50 cm. Als de kegel op de grond staat met de punt omhoog, is de hoogte 3 meter. Het achtste deel van de kegel is ‘weggesneden’. De top van de kegel ligt recht boven het midden van het grondvlak. Veronderstel dat het oppervlak van de kegel een speciale behandeling nodig heeft. Deze behandeling kost € 50 euro per m^2.

Bereken de kosten van deze behandeling.

Opgave 10: Bolwoningen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in 's-Hertogenbosch. De bolwoning is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk, door de bolvorm heeft de wind er bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor 1 of 2 personen.



Figuur 12.10

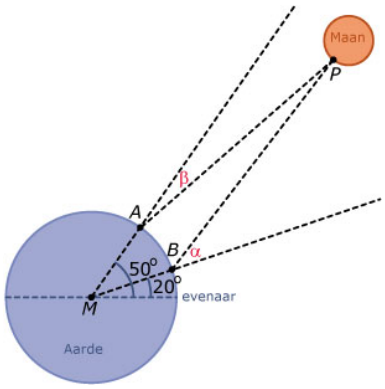
De diameter van de bol zelf is 8 meter en die van de cilinder is 6 meter, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is. Voor de oppervlakte A van een bolsegment met hoogte h van een bol met straal r geldt $A = 2\pi rh$ en voor de inhoud I geldt $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

a Bereken de totale inhoud van zo'n bolwoning.

b Bereken de totale oppervlakte van zo'n bolwoning.

Opgave 11: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M, A, B en P liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.



Figuur 12.11

13

Plaats en beweging

13.1 Coördinaten in 2D 492
13.2 Vectoren 500
13.3 Lijnen en snijpunten 511
13.4 Hoeken en inproduct 519
13.5 Bijzondere lijnen 528
13.6 Totaalbeeld 535

13.1 Coördinaten in 2D

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een cartesisch coördinatenstelsel in 2D is;
- de afstand tussen twee punten berekenen in 2D;
- het midden tussen twee punten berekenen in 2D.

Voorkennis

- werken met coördinaten in twee dimensies;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

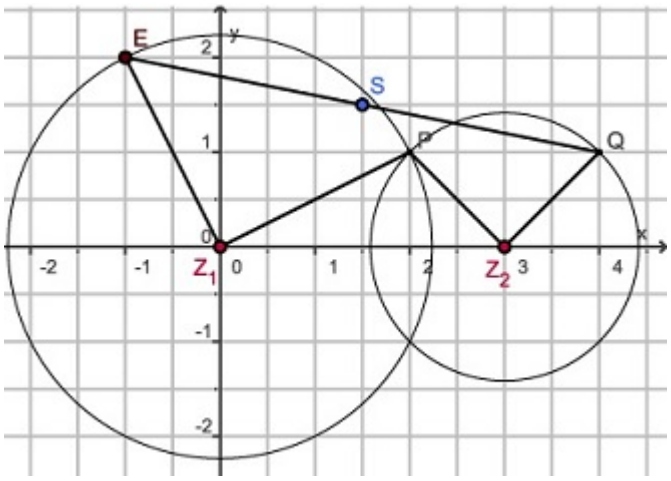
Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Loop vervolgens dezelfde afstand, in een lijn loodrecht op de vorige richting. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga tenslotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: schatgraversprobleem



Figuur 13.1

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

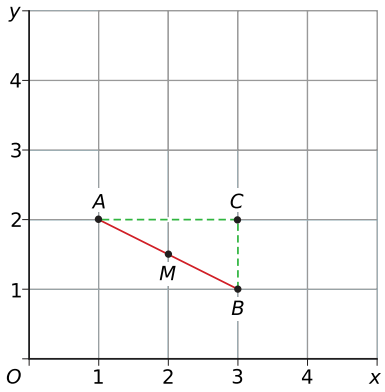
Eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst.

Is de plaats van de oude eik belangrijk voor de positie van de schat?

Uitleg

Bekijk de applet

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke. Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel wordt gebruikt: onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling. In twee dimensies (in 2D) spreek je van een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as. In drie dimensies komt er nog een z-as bij.



Figuur 13.2

Bekijk het 2D cartesisch coördinatenstelsel met de punten A en B. Door de manier waarop het assenstelsel is gekozen, heeft A de coördinaten $(1,2)$ en is $B(3,1)$.

De afstand van A tot B is de lengte van lijnstuk AB. De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte AB door in ΔABC de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van lijnstuk AC vind je door de x-coördinaten van A en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk CB vind je door de y-coördinaten van B en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

De coördinaten van M, het midden van AB, bereken je als volgt: De x-coördinaat van M is het gemiddelde van de x-coördinaten van A en B. De y-coördinaat van M is het gemiddelde van de y-coördinaten van A en B. Dus M is $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(1, 1\frac{1}{2}\right)$.

In een 3D coördinatenstelsel kun je op een vergelijkbare manier rekenen, er komt alleen een coördinaat bij.

Opgave 1

Je weet nu wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

a Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?

b Teken een cartesisch coördinatenstelsel met punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ en bereken de lengte van lijnstuk AB.

c Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 2

Gegeven zijn in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van AB.

c Laat zien hoe je M en de lengte van AB berekent als $A(-1,3,2)$ en $B(1,4,5)$.

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(-10{,}33)$ en $B(20,-45)$ in een coördinatenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdelingen op de assen gelijk zijn.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$.

a Druk de lengte van lijnstuk AB uit in x en y.

b Druk de coördinaten van punt M uit in x en y.

c Hoe zien de coördinaten van punt M en de lengte van AB eruit als $A(x_A,y_A,z_A)$ en $B(x_B,y_B,z_B)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

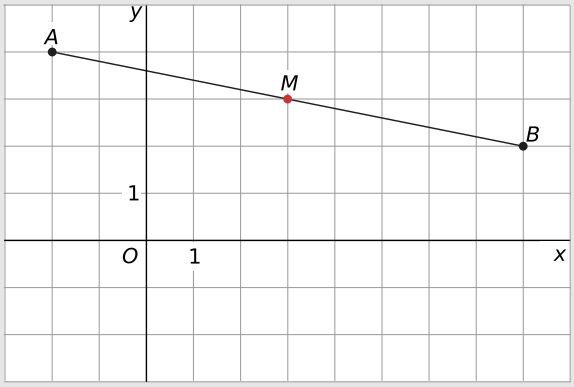
Bekijk de applet

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.

Een **cartesisch assenstelsel** is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

In twee **dimensies**, dus in 2D, gaat het om een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as, in 3D komt daar nog een z-as bij.

In 2D kan het **midden** M van lijnstuk AB op deze manier worden bepaald: Als door de keuze van het cartesische coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A,y_A) en B aan (x_B,y_B), geldt: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.



Figuur 13.3

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een 2D cartesisch coördinatenstelsel: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

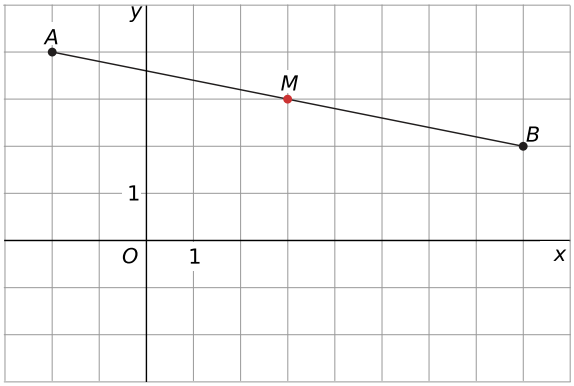
De 'omgekeerde stelling van Pythagoras' is: als in een driehoek geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is die driehoek rechthoekig.

In een 3D cartesisch coördinatenstelsel gelden vergelijkbare formules.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(-2,2)$ en $B(3,1)$.
M is het midden van lijnstuk AB.
Laat zien hoe je de coördinaten van M berekent.
Laat ook door berekening zien, dat $|AM| = |MB|$.



Figuur 13.4

Antwoord

$$M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (0{,}5; 1{,}5).$$

$$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-2 - 0{,}5)^2 + (2 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}.$$

$$|MB| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{(3 - 0{,}5)^2 + (1 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}.$$

Dus inderdaad is $|AM| = |MB|$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 495** zie je hoe het midden van AB wordt berekend en vervolgens wordt aangetoond dat $|AM| = |MB|$.

a Laat dit zelf zien. Neem de punten $A(-2,-1)$ en $B(3,2)$.

b Neem zelf twee andere punten A en B en voer dezelfde berekeningen uit.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten de punten $A(2{,}8{,}3)$ en $B(10{,}14{,}5)$.

Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB en controleer dat $|AM| = |MB|$.

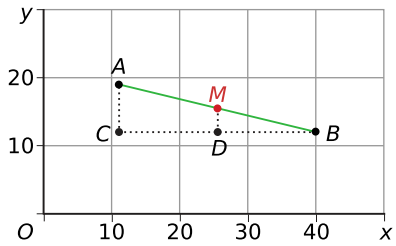
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$.
Bereken de lengte van AB met de formule

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.

Laat ook zien, dat $|MB| = \frac{1}{2}|AB|$.



Figuur 13.5

Antwoord

$|AB| = \sqrt{(40-11)^2 + (12-19)^2} = \sqrt{890}$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarop de stelling van Pythagoras toe te passen.

$M = \left(\frac{11+40}{2}, \frac{19+12}{2}\right) = (25{,}5; 15{,}5)$

$|MB| = \sqrt{(25{,}5-11)^2 + (15{,}5-19)^2} = \sqrt{222{,}5} = \frac{1}{2}\sqrt{890}$

Hoe zou je kunnen aantonen dat ook de 3D-versie van de afstandsformule klopt?

Opgave 7

In Voorbeeld 2 op pagina 496 zijn de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$ gegeven.

a Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de formule voor de lengte van lijnstuk AB klopt.

b Neem nu in 3D de punten $A(11,19,2)$ en $B(40,12,5)$.
Bereken $|AB|$ met de formule voor de lengte.

c Hoe kun je meetkundig laten zien, dat de voorgaande berekening in 3D geldig is?

Opgave 8

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de punten $A(-3,6)$, $B(6,0)$ en $C(18,18)$.

a Bereken de lengtes van de lijnstukken AB, BC en AC.

b Laat zien, dat driehoek ABC rechthoekig is.

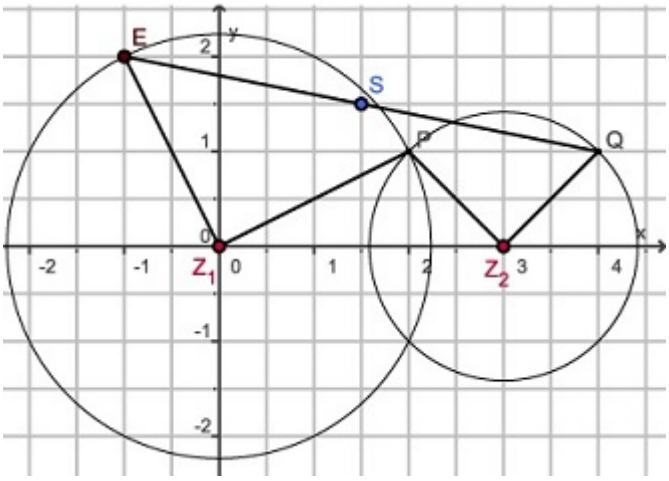
c Noem het midden van AB punt D, het midden van BC punt E, en het midden van AC punt F.
Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF.

d Laat zien, dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: schatgraversprobleem

In de figuur is E variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Gevraagd is aan te tonen dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen, ook als punt E van plaats verandert.



Figuur 13.6

Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoeken: $\Delta EAZ_1 \cong \Delta Z_1$ en $\Delta PBZ_2 \cong \Delta Z_2CQ$.

Neem voor het variabele punt $E(-x,y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3 - y$. Tenslotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x, 3 - y)$. Het midden van EQ is dus $S = \left(\frac{-x+3+x}{2}, \frac{y+3-y}{2}\right) = (1{,}5; 1{,}5)$.

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk en dus ook niet van de positie van punt E.

Opgave 9

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3 op pagina 497**. Punt E kan van positie veranderen, maar de positie van punt S zou daardoor niet moeten veranderen.

a Neem $E(-1{,}2)$ en toon door berekening aan dat de positie van het punt S niet verandert.

b Neem $E(-x,y)$ en toon zelf door berekening aan dat het punt S niet verandert.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-11{,}23)$ en $B(106{,}133)$.

a Bereken $|AB|$ en de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

b B is het midden van lijnstuk AC. Bereken de coördinaten van C.

Opgave 11

Teken de punten $A(6,0)$, $B(10,8)$, $C(6,10)$ en $D(2,2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

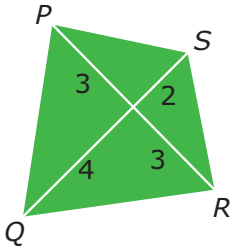
a Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

b Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.

c Bereken de oppervlakte van driehoek ABS.

Opgave 12

Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger $PQRS$ vormen een rechthoek (zoals dat bij elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.



Figuur 13.7

a Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?

b Nu zijn de hoekpunten $P(-3,0)$, $Q(0,-4)$, $R(3,0)$ en $S(0,2)$. Noem A midden PQ, B midden QR, C midden SR en D midden PS en bereken de coördinaten van A, B, C en D.

c Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l : y = 5x + 3$, $m : y = 2\frac{1}{2}x - 12$ en $n : y = -2x + 6$.

Lijnen l en m snijden elkaar in punt A, en m en n snijden elkaar in punt B.
Bereken $|AB|$ algebraïsch.

Opgave 14

Van een lijnstuk KL in 3D is het punt $K(2,8,0)$ gegeven en het midden $M(4,12,3)$.

a Bereken het eindpunt L.

b Bereken de lengte van het lijnstuk KL.

c Bereken de coördinaten van het midden N van ML.

Toepassen

Opgave 15: Schepen op zee

Twee schepen varen op zee een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die zich in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S verwijderd. Hoe dicht zullen de schepen bij elkaar komen?

a De variabele t is de tijd in uren. Kies $t = 0$ op het moment van de beschreven situatie en maak een passende tekening met een geschikt assenstelsel. Zet de afstand tussen beide schepen in het assenstelsel.

b Neem nu $t = 1$ en teken de onderlinge afstand tussen beide schepen. Doe dit ook voor $t = 2$, $t = 3$ enzovoort.

c Hoe groot is de onderlinge afstand van de schepen op $t = 0$ (t in uren)?

d Hoe groot is die afstand op $t = 1$?

e Druk de onderlinge afstand a uit in t.

f Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand tussen beide schepen?

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn in 2D de punten $P(120,36)$ en $Q(0,12)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk PQ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Gegeven zijn in 3D de punten $P(120,35,20)$ en $Q(0,12,10)$.

c Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(3,2)$ en $C(1,6)$ en verbind de punten met elkaar.

a Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

b Verbind het midden P van AC met B. Toon aan dat ΔABP een gelijkbenige driehoek is.

13.2 Vectoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een vector is;
- de begrippen draaihoek en lengte van een vector;
- vectoren in componenten ontbinden;
- werken met componenten van vectoren;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

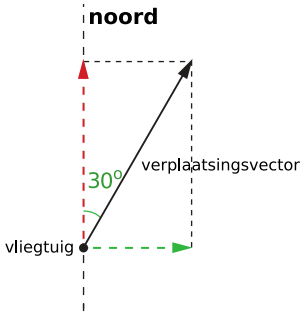
- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand, e.d., gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de snelheid). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.



Figuur 13.1

a Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30°, hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component?

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

b Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?

c Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30°?

d Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?

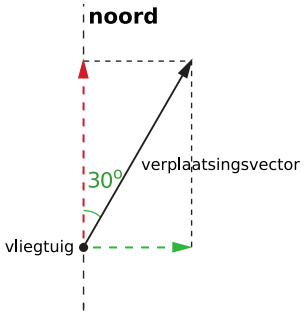
e Als je de verplaatsingen met een westelijke component meetelt, zijn er nog twee hoeken met dezelfde noordelijke of zuidelijke component als de noordelijke component bij 30°. Hoe groot zijn deze hoeken?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

De verplaatsing van bijvoorbeeld een vliegtuig beschrijf je met twee grootheden:

- de richting, bijvoorbeeld de hoek met het noorden is 30°.
- de afstand, bijvoorbeeld over 500 km.



Figuur 13.2

Teken een pijltje, een vector, wanneer zowel afstand als richting belangrijk is. De lengte van de vector is de afstand in kilometer, de richting is de richtingshoek ten opzichte van de hoofdrichting, in dit geval het noorden.
Geef deze verplaatsingsvector als (30°,500).

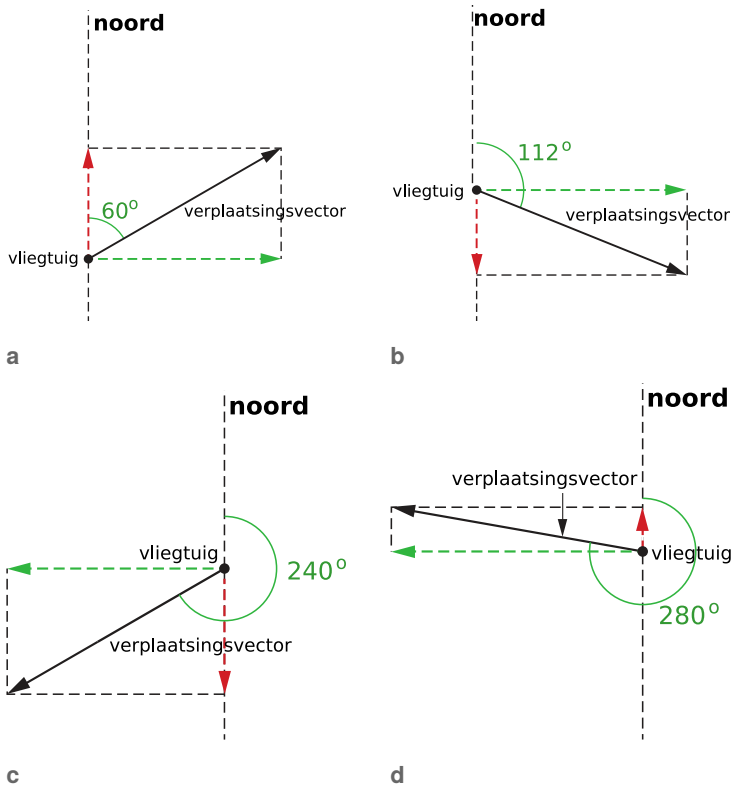
Omdat er een hoofdrichting is (het noorden), kun je doen alsof de vector bestaat uit een noordelijke component samen met een oostelijke component. De richting van een component kan negatief zijn. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.
Bepaal de lengte van de twee componenten door de vector te ontbinden in twee onderling loodrechte richtingen (noord en oost). Je kunt de lengte van die componenten meten (of berekenen met behulp van sinus of cosinus).

De lengte van de oostelijke component is 250.
De lengte van de noordelijke component is ≈ 433.

Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van de vector. Als er meerdere vliegtuigen van verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend, maar toch kunnen de verplaatsingsvectoren gelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de vier figuren waarin een verplaatsingsvector met lengte 400 is getekend. Bepaal met behulp van cosinus of sinus bij elke situatie de lengte van de noordelijke component en de lengte van de oostelijke component. Rond zo nodig af op gehele getallen. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



Figuur 13.3

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.

b noordelijke component: - 300 km, oostelijke component: 400 km.

c noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 300 km.

d noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: - 150 km.

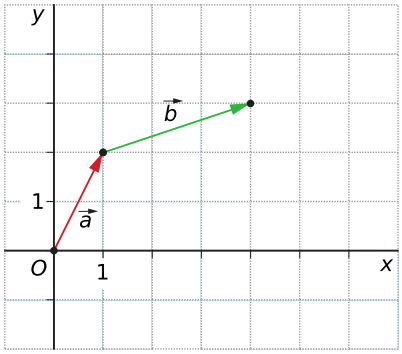
e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: - 100 km.

f noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 0 km.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

In de wiskunde bestudeer je verplaatsingen het liefst in een cartesisch assenstelsel *Oxy*. Daarin neem je aan dat de positieve *x*-as de hoofdrichting is en elke hoek vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in wordt gemeten. Een vector kun je dan gemakkelijk beschrijven met een component in de *x*-richting en een component in de *y*-richting: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 13.4

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector. Zo'n vector kun je gemakkelijk verlengen, de componenten worden dan beide met hetzelfde getal vermenigvuldigd: $3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ of meer algemeen: $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$.

Je telt vectoren op door twee verplaatsingen na elkaar uit te voeren. Dan zet je de vectoren na elkaar, 'staart aan kop'. De vector vanaf het allereerste startpunt tot het allerlaatste eindpunt is dan de som van beide vectoren, de vectoren worden opgeteld. Dit kan eenvoudig door de kentallen op te tellen: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Als je twee vectoren van elkaar wilt aftrekken, tel je het tegengestelde van de tweede vector op bij de eerste vector: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 503** hoe er met vectoren wordt gewerkt. Gebruik de gegeven vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

a Teken $\vec{p} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

b Teken $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

c Teken $\vec{p} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

Theorie en voorbeelden

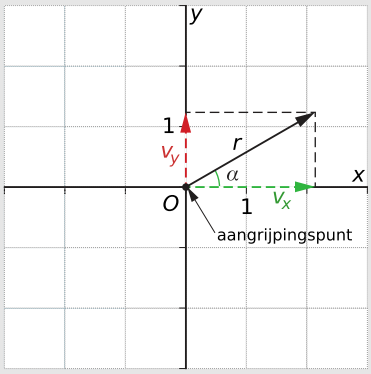
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Bekijk de applet.

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met **lengte** r en **richtingshoek** α, de hoek die de vector maakt met de gekozen hoofdrichting.

In de wiskunde is de standaard hoofdrichting in een assenstelsel de positieve x-as. Verder wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.



Figuur 13.5

Er geldt:

- de x-**component** $v_x = r\cos(\alpha)$;
- de y-**component** $v_y = r\sin(\alpha)$.

Dit zijn de **kentallen** van vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van de vector is: $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van een vector.

Maak de vector $\vec{v}$ langer (of korter) door hem met een factor k te vermenigvuldigen. Dit noem je **scalaire vermenigvuldiging** van de vector met k.

$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$

Als $k = -1$ dan krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** door ze 'staart aan kop' te leggen.

Je krijgt dan de **somvector** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

De kentallen van $\vec{r}$ ontstaan door de overeenkomstige kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op te tellen.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **aftrekken** door gebruik te maken van $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$

Tel dan bij $\vec{a}$ het tegengestelde van $\vec{b}$ op.

Als je $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ optelt, krijg je de **nulvector** $\vec{0}$.
De nulvector heeft geen richting en heeft lengte 0.

Noteer de vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B als $\overrightarrow{AB}$.

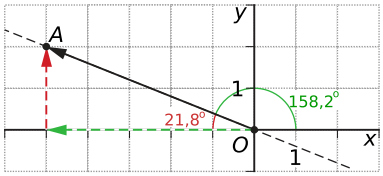
Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(-5,2)$, $B(23,16)$ en $C(28,14)$ in een cartesisch assenstelsel.

Bereken de lengte en de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$.

Laat zien dat de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{CB}$ gelijk zijn.

Waarom is $\overrightarrow{BC}$ niet gelijk aan $\overrightarrow{OA}$?



Figuur 13.6

Antwoord

De componenten van $\overrightarrow{OA}$ zijn -5 en 2. Dit geeft: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hoek α die lijn OA met de x-as maakt en daarvoor geldt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$.

Die hoek is ongeveer 21,8°.

Hieruit volgt de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$: $180 - 21{,}8 = 158{,}2°$.

De componenten van $\overrightarrow{CB}$ zijn $23 - 28 = -5$ en $16 - 4 = 2$. Dit geeft: $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dus dezelfde kentallen en dezelfde lengte en richtingshoek als $\overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{BC}$ heeft de tegenovergestelde richting ten opzichte van $\overrightarrow{CB}$ en ook ten opzichte van $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA}$.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-31,12)$ en $D(-28,17)$ in een cartesisch assenstelsel. Bereken $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ en $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 5

Bepaal lengte en richtingshoek van de vectoren:

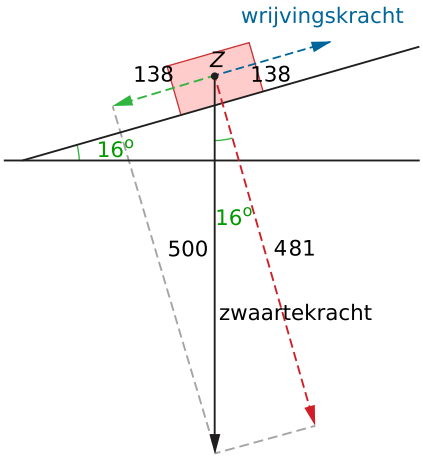
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?



Figuur 13.7

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is aan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2 - 200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$ dus de gevraagde hoek is 23,6°. Om α te berekenen, gebruik je de arctan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 506** de toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

a Hoe groot zal in de weergegeven situatie de wrijvingskracht zijn?

b Bij welke hellingshoeken blijft het gewicht liggen?

c Leg uit waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.

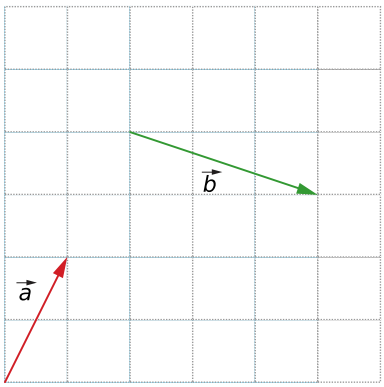
d Bereken de maximale hellingshoek waarbij een gewicht dat een zwaartekracht van 350 N ondervindt, nog blijft liggen op het hellende vlak.

Voorbeeld 3

Bekijk de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ worden opgeteld tot $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

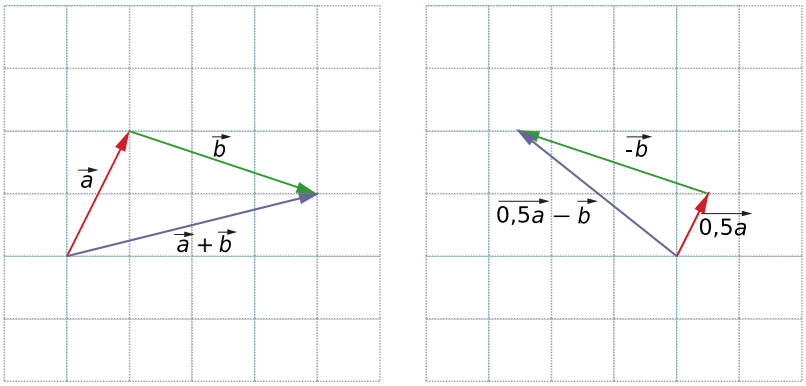
Dit heet de ‘staart aan kop’-methode.



Figuur 13.8

Op dezelfde manier maak je $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

Bekijk de applet.



Figuur 13.9

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 506** hoe je vectoren kunt optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Gebruik de gegeven vectoren.

a Teken de vector $2\,\vec{a}$ en bepaal de kentallen ervan.

b Teken de vector $2\,\vec{a} + 1{,}5\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

c Teken de vector $-2\,\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

d Teken de verschilvector van $-\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

a Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Gegeven zijn de punten $A(a_x,a_y)$ en $B(b_x,b_y)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

b Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Bepaal de x-component en de y-component, in één decimaal nauwkeurig.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135°$

b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210°$

c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 300°$

d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270°$

Opgave 10

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek van deze vector. Geef de lengte exact, rond de hoek af op één decimaal.

a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\vec{v} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

d $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

Opgave 11

Gegeven is $O(0,0)$ en punt A met $|\overrightarrow{OA}| = 5$. Voor een ander punt B geldt $|\overrightarrow{OB}| = 2 \cdot |\overrightarrow{OA}|$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OB}$ ten opzichte van de x-as tegen de klok in is $30°$. Bepaal de coördinaten van punt B en rond af op één decimaal.

Opgave 12

Gegeven zijn de vectoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Bepaal de kentallen van de vectoren.

a $\vec{v_1} = \vec{b} + \vec{c}$

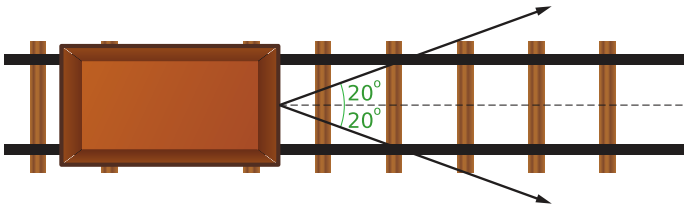
b $\vec{v_2} = \vec{f} + 0{,}5\,\vec{c}$

c $\vec{v_3} = \vec{a} - \vec{e} - 2\,\vec{d}$

d $\vec{v_4} = \vec{e} + \vec{d} - \vec{b}$

Opgave 13

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken een lorrie met dezelfde kracht van 8 N elk aan een touw.



Figuur 13.10

a Met welke kracht trekken beide personen samen aan het karretje in de rechter richting? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Beantwoord dezelfde vraag als de ene persoon trekt met een kracht van 8 N en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

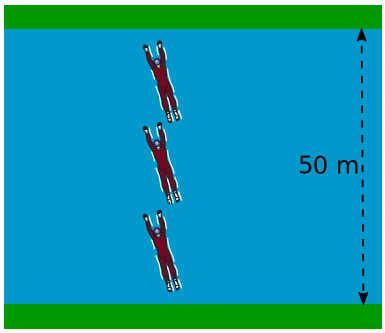
a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{AS}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 15: Zwemmer (1)

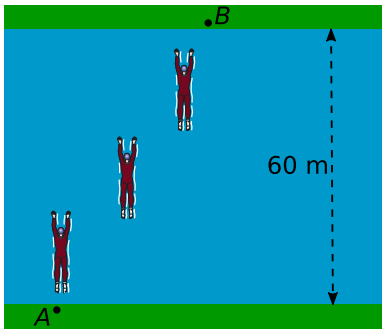
Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier met een stroomsnelheid van 0,6 km/h in. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 m breed. Hoe lang doet hij over de overtocht?



Figuur 13.11

Opgave 16: Zwemmer (2)

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar hij heeft last van de stroming. Tot zijn verbazing komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar in een punt B dat verder stroomafwaarts ligt.
De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in 5 minuten de overkant van de rivier. Wat is de snelheid in km/h waarmee hij AB aflegt? Geef je antwoord in drie decimalen.



Figuur 13.12

Opgave 17: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

a Maak van deze vlucht een tekening op schaal.

b Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$ en $0{,}5\,\vec{a} - \vec{b}$.

d Bereken de kentallen van de vector $\vec{c}$ zo, dat $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 19

Gegeven zijn de punten $P(0,12)$ en $Q(8,2)$.

a Bereken $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt, zo nodig in één decimaal.

b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x-as. Bepaal de coördinaten van R.

13.3 Lijnen en snijpunten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je met een plaatsvector en een richtingsvector lijnen kunt beschrijven en er vectorvoorstellingen van maakt;
- vergelijkingen van lijnen omzetten in vectorvoorstellingen en omgekeerd;
- vectorvoorstellingen van lijnen toepassen bij berekeningen, onder andere van snijpunten.

Voorkennis

- het begrip vector (componenten, lengte, richtingshoek) en rekenen met vectoren;
- werken met vergelijkingen van lijnen.

Verkennen

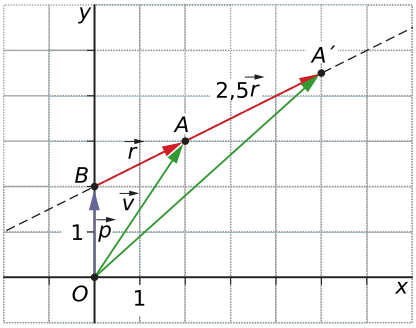
Opgave V1

Bekijk de applet

Je kunt punt A bewegen door de richtingsvector $\vec{r}$ te verlengen.

Je ziet hier de vectoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Verder is $\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.



Figuur 13.1

a Bekijk de eindpunten van de vectoren $\vec{p}+1\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+2\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+3\cdot\vec{r}$ en $\vec{p}-1\cdot\vec{r}$.

b Hoe komt het dat deze eindpunten allemaal op dezelfde rechte lijn liggen?

c Laat dit zien door een vergelijking op te stellen waaraan elk eindpunt van vector $\vec{v}$ voldoet.

d Als t de tijd in seconden voorstelt, met welke snelheid beweegt punt A dan?

Uitleg

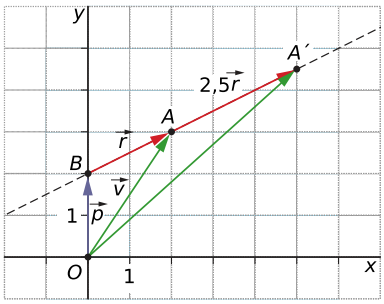
Bekijk de applet

Als je de vector $\vec{r}$ langer maakt zie je punt A over een rechte lijn bewegen.

Bij elk punt A hoort een vector

$\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}=.$

$$=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$



Figuur 13.2

Dit noem je een vectorvoorstelling van de lijn waar A op ligt.

$\vec{r}$ heet een richtingsvector en $\vec{p}$ een plaatsvector (of steunvector) van de lijn.

Uit de kentallen van de richtingsvector kun je afleiden dat de richtingscoëfficiënt van de lijn $\frac{1}{2}$ is. De bijbehorende vergelijking is $y=\frac{1}{2}x+2$ ofwel $-x+2y=4$.

Voor elk punt A op de lijn geldt $x=0+2t$ en $y=2+t$. Door hieruit t weg te werken, kun je ook de vergelijking van de lijn maken.

Je kunt de variabele t opvatten als de tijd.

Opgave 1

Bekijk in de wat een vectorvoorstelling van een lijn is.

a Waarom is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van de getekende lijn? Welk verschil is er met de in de uitleg gegeven vectorvoorstelling als ook nu p de tijd voorstelt?

b En is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ook een geschikte vectorvoorstelling? Licht je antwoord toe.

c Hoe bepaal je vanuit een richtingsvector van de lijn de richtingscoëfficiënt?

d Laat zien, hoe je een vergelijking van de lijn opstelt vanuit de richtingscoëfficiënt.

Je kunt de vergelijking van de lijn ook rechtstreeks uit de vectorvoorstelling halen.

e Laat zien hoe dit gaat door t weg te werken.

Opgave 2

De lijn m gaat door de punten $A(2,3)$ en $B(4,0)$.

a Stel voor l een vectorvoorstelling op.

b Waarom wordt bij a gesproken over ‘een’ vectorvoorstelling?

c Stel een vergelijking van l op.

d Controleer nu dat de vergelijking die je hebt gevonden een richtingscoëfficiënt heeft die past bij de richtingsvector.

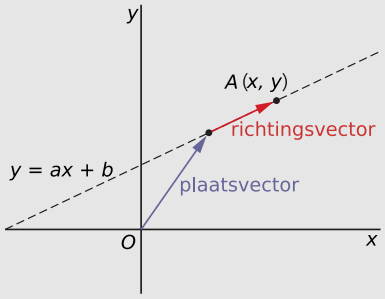
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe je de plaats een willekeurig punt A dat over een rechte lijn beweegt door t te variëren kunt beschrijven met twee vectoren:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$)



Figuur 13.3

Neem lijn l door $B(-1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst een vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit noem je een **vectorvoorstelling van de lijn** l. De plaatsvector is een vector vanuit $O(0,0)$ naar een punt B op de lijn, de richtingsvector ligt op de lijn. Voor elk punt op l geldt: $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

En daarom is de richtingscoëfficiënt van de lijn 0,5. De vergelijking is dus $y = 0{,}5x + 2{,}5$, ofwel $x - 2y = -5$. Je kunt deze vergelijking ook vinden door t weg te werken uit $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door $P(-2,3)$ en $Q(4,0)$. Maak vervolgens vanuit de vectorvoorstelling een vergelijking van lijn PQ.

Antwoord

Elk punt van die lijn bereik je vanuit O door eerst naar een punt ervan (bijvoorbeeld P) te 'lopen' en vervolgens de richtingsvector (bijvoorbeeld $\overrightarrow{PQ}$) te verlengen, of verkorten. Dus:

- een plaatsvector (steunvector) van l is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- een richtingsvector van l is $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Die richtingsvector kun je nog inkorten door beide kentallen door 3 te delen.

Een mogelijke vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Je kunt hierbij een vergelijking maken door in $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ de t weg te werken. Je krijgt dan $x + 2y = 4$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 513** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door twee gegeven punten.

a Maak een andere vectorvoorstelling van deze lijn door $\overrightarrow{OQ}$ als plaatsvector en (een verlengde of verkorte vector) $\overrightarrow{QP}$ als richtingsvector te gebruiken.

b Gebruik $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ en stel een vergelijking van lijn PQ op door hieruit de t weg te werken.

c Laat ook zien, dat je vanuit de vectorvoorstelling die je bij a hebt gevonden dezelfde vergelijking voor lijn PQ kunt opstellen.

Opgave 4

a Maak een vectorvoorstelling en een vergelijking van de lijn door $R(-4,1)$ en $S(2,-1)$.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op de van de lijn door $A(-3,0)$ en $B(2,5)$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lijn $l : 4x + 3y = 12$. Stel een vectorvoorstelling op van lijn l.

Antwoord

Er zijn verschillende manieren om dit te doen:

- Neem bijvoorbeeld $x = 3t$, dan is $4 \cdot 3t + 3y = 12$ en dus $y = 4 - 4t$.
  Je vindt dan $x = 3t$ en $y = 4 - 4t$. De bijbehorende vectorvoorstelling kun je meteen opschrijven.
- Bepaal twee punten op lijn l, bijvoorbeeld $A(3,0)$ en $B(0,4)$ en stel een vectorvoorstelling op van een lijn door deze twee punten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 514** wordt uitgelegd hoe je vanuit een vergelijking van een lijn een bijpassende vectorvoorstelling kunt maken. Een algebraïsche manier is het invoeren van t door bijvoorbeeld $x = 3t$ te kiezen.

a Waarom wordt $x = 3t$ gekozen en niet $x = t$?

b Schrijf zelf de vectorvoorstelling op.

Bekijk de meer meetkundige methode van het bepalen van twee punten op de lijn en daarmee de vectorvoorstelling maken.

c Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

Opgave 6

Stel van de volgende lijnen een vectorvoorstelling op.

a $l : 2x - 5y = 10$

b $m : y = 12 - 0{,}25x$

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0,1)$ en Q in $(-2,6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6,3)$ en Q in $(4,0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S. Bereken de exacte coördinaten van dit punt en licht toe waarom beide punten niet met elkaar in botsing komen.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ en dus $x = t$ en $y = 1 + \frac{1}{3}t$.
- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en dus $x = -2 + t$ en $y = 6 - t$.

Denk er op dat je beide richtingsvectoren nu niet mag vergroten of verkleinen!

Als je een waarde van t zoekt waarvoor beide punten op dezelfde plek zitten (botsen), dan moet $t = -2 + t$ en $1 + \frac{1}{3}t = 6 - t$. En dat levert geen mogelijke waarde voor t op.

Toch hebben beide banen een snijpunt. Dat kun je op diverse manieren berekenen:

- Kies in de vectorvoorstelling (of parametervoorstelling) van m een andere letter voor de parameter en los het stelsel vergelijkingen dat hoort bij het snijpunt van beide banen exact op.
- Maak van beide parametervoorstellingen vergelijkingen in x en y en bereken daarmee het gevraagde snijpunt.
- Maak van één van beide parametervoorstellingen een vergelijking in x en y en vul daarin de parametervergelijkingen van de andere lijn in.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3 op pagina 515** wordt het snijpunt van de banen van twee bewegende punten berekend.

a Laat zien hoe je aan de twee vectorvoorstellingen komt.

b Waarom mogen de richtingsvectoren nu niet worden verlengd of verkort?

c Bereken het snijpunt van beide banen door in de vectorvoorstelling van m de parameter t te vervangen door s en $t = -2 + s \wedge 1 + \frac{1}{3}t = 6 - s$ op te lossen.

d Je kunt ook eerst vergelijkingen maken van beide lijnen. Bereken het snijpunt ook op deze manier.

e En bereken tenslotte het snijpunt nog eens vanuit een vergelijking van de éne lijn en een parametervoorstelling van de andere.

Opgave 8

Bereken exact het snijpunt van de lijnen p en q in de volgende gevallen.

a $l : 2x - y = 12$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en m door $x = 1 + s$ en $y = 3s$.

Opgave 9

In een cartesisch assenstelsel bewegen de punten A en B over de lijnen l en m. Op $t = 0$ zit A in $(1,4)$ en B in $(-1,0)$. Op $t = 4$ zit A in $(6,3)$ en B in $(4,1)$.

a Stel de vectorvoorstellingen van l en m op.

b Waarom botsen deze punten nu wel tegen elkaar?

c Bereken de coördinaten van het botsingspunt.

d Laat zien dat je dit punt ook kunt berekenen vanuit twee vergelijkingen van l en m.

Oefenen

Opgave 10

Maak bij de volgende lijnen een passende vectorvoorstelling:

a de lijn l door $P(-20,45)$ en $Q(30,15)$;

b de lijn m met vergelijking $2x - 5y = 10$;

c de lijn n door $P(-20,45)$ en evenwijdig met m;

d de x-as.

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l door $A(30,0)$ en $B(0,20)$ en $m : x - y = 50$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken exact het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 12

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. P beweegt over de lijn $l : x + 2y = 20$, zit op $t = 0$ op de y-as en op $t = 10$ op de x-as. Q beweegt over lijn m en zit op $t = 0$ in het punt $(2,0)$ en op $t = 6$ in $(8,12)$.

a Stel een parametervoorstelling op voor de beweging van punt Q.

b Bereken het snijpunt van l en m.

c Komen beide punten P en Q met elkaar in botsing?

Opgave 13

Stel in de volgende gevallen een vectorvoorstelling van l op.

a l is evenwijdig met de lijn $m : 4x - y = 16$ en gaat door $P(2,5)$.

b l gaat door $P(2,5)$ en maakt een hoek van $45°$ met de x-as.

Opgave 14

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde. Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(0,0)$, $A(8,2)$ en $B(4,6)$.

Bereken het snijpunt van de zwaartelijn door A en de zwaartelijn door B. Laat zien, dat de zwaartelijn door O ook door ditzelfde snijpunt gaat.

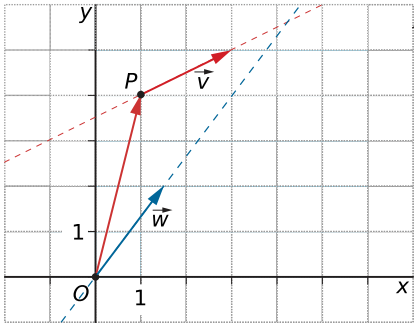
Toepassen

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe een roofdier dat zich op $t = 0$ in punt O bevindt, de achtervolging inzet op een prooi die hij op dat moment opmerkt in het punt $P(1,4)$. De prooi rent voorbij met een constante snelheid en in een constante richting. t is de tijd in seconden.

De snelheid en de richting waarin het roofdier beweegt is nog instelbaar. Wel wordt er van uitgegaan dat ook dit roofdier vanaf $t = 0$ een constante snelheid en een constante richting heeft (in werkelijkheid zal het vanuit stilstand die snelheid nog moeten halen en misschien ook de beweegrichting aanpassen).

Welke snelheidsvector moet je instellen opdat het roofdier de prooi te pakken krijgt?



Figuur 13.4

Opgave 15: Roofdier en prooi (1)

Bekijk Toepassen op pagina 517 en de applet die je daar ziet.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de beweging van de prooi.

b Bereken de snelheid van de prooi in eenheden per seconde.

c In de applet is $k = 1{,}5$ ingesteld. Hoe snel beweegt dan het roofdier?

d Laat zien, dat in dit geval het roofdier de prooi gaat missen.

e Hoe kan het dat toch beide lijnen een snijpunt hebben en hoe bereken je dat?

Opgave 16: Roofdier en prooi (2)

Bekijk Toepassen op pagina 517 en de applet die je daar ziet.

a Stel $k = 3$ in. Krijgt het roofdier de prooi te pakken?

b Voor welke waarde van k krijgt het roofdier de prooi te pakken? En hoeveel seconden duurt dit dan?

Testen

Opgave 17

Gegeven de lijnen l door $A(-3,2)$ en $B(5,1)$ en m met vergelijking $x + 2y = 24$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken het snijpunt van beide lijnen.

Punt P beweegt over lijn l en punt Q over lijn m. Op $t = 0$ zitten beide punten op de y-as en op $t = 6$ zit P en Q op de x-as.

c Onderzoek met behulp van een berekening of beide punten met elkaar botsen.

Opgave 18

Gegeven is lijn l door: $3x - 5y = 15$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn m door $P(2,3)$ en evenwijdig met l.

b Bereken de snijpunten met de assen van lijn m.

13.4 Hoeken en inproduct

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een vector die is gegeven door twee loodrechte componenten de draaihoek en de lengte berekenen;
- het inproduct van twee vectoren berekenen;
- de hoek tussen twee vectoren berekenen met behulp van het inproduct.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Verkennen

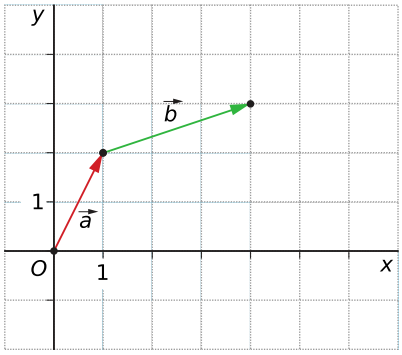
Opgave V1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De groottes van de componenten heten de kentallen. Elke vector heeft een lengte die je aangeeft met $|\vec{a}|$.



Figuur 13.1

a Hoeveel bedraagt de lengte van vector $\vec{a}$?

Elke vector heeft een richting die bepaald wordt door de draaihoek α ten opzichte van de positieve x-richting.

b Bereken de draaihoek van $\vec{a}$.

c Maakt het voor vector $\vec{a}$ wat uit als hij niet in $O(0,0)$ begint?

d Bereken de draaihoek (richtingshoek) van $\vec{b}$?

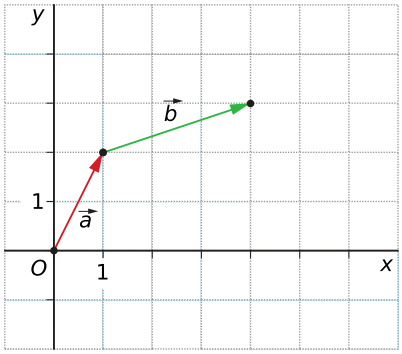
e Hoe groot is de hoek die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar maken?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 13.2

De grootte van de componenten heten de kentallen.

De lengte van deze vector is $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

De draaihoek α, ook wel de richtingshoek genoemd, is de hoek die de vector met de positieve x-as maakt. Deze hoek heeft waarden vanaf 0° tot 360°.

Je bepaalt hem uit $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{1} = 2$.

Hieruit volgt: $\alpha \approx 63{,}4°$.
Bij negatieve kentallen krijg je zo niet altijd de goede hoek. Bekijk dan goed de figuur.

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector.

Je ziet dat de vector $\vec{a}$ vanuit de oorsprong O is getekend. Dit punt wordt het aangrijpingspunt genoemd. Er zijn gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. Het aangrijpingspunt van vector $\vec{b}$ is $(1,4)$.

Als je de hoek tussen twee vectoren wilt berekenen, dan kun je gewoon beide richtingshoeken vergelijken. Ze hoeven daarvoor niet hetzelfde aangrijpingspunt te hebben. Let er wel op dat zo'n hoek altijd tussen 0° en 180° in ligt.

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Teken vector $\vec{c}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem de oorsprong als aangrijpingspunt.

b Teken vector $\vec{d}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem punt $(1,4)$ als aangrijpingspunt.

c Bereken de richtingshoeken van beide vectoren. Rond af op gehelen graden.

d Bereken de hoek die beide vectoren met elkaar maken. Rond af op gehelen graden.

Opgave 2

In Uitleg 1 op pagina 520 zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeven.

a Teken $\vec{p_1} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_1}$.

b Teken $\vec{p_2}=\vec{a}-\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_2}$.

c Teken $\vec{p_3}=3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_3}$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je kunt twee vectoren ook met elkaar vermenigvuldigen. Een manier om dit te doen heet het inproduct van twee vectoren. Onder het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

Hierin zijn $\left|\vec{a}\right|$ en $\left|\vec{b}\right|$ de lengtes van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en is φ de hoek tussen beide vectoren. Deze afspraak gaat je straks in staat stellen om hoeken te berekenen.

$\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zijn de twee eenheidsvectoren in een cartesisch xy-assenstelsel.

Deze twee vectoren maken een hoek van 90° en hebben daarom een inproduct van 0:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=\left|\vec{e_x}\right|\cdot\left|\vec{e_y}\right|\cdot\cos(90°)=1\cdot1\cdot0=0.$$

Zo is ook:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}=\left|\vec{e_x}\right|\cdot\left|\vec{e_x}\right|\cdot\cos(0°)=1\cdot1\cdot1=1.$$

En ook geldt $\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}=1$.

Elke vector is te schrijven als een samenstelling van eenheidsvectoren. Neem bijvoorbeeld:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-2\,\vec{e_x}+3\,\vec{e_y} \text{ en } \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\,\vec{e_x}+1\,\vec{e_y}.$$

Voor het inproduct van beide krijg je dan:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(-2\,\vec{e_x}+3\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(2\,\vec{e_x}+1\,\vec{e_y}\right)$$

Neem nu aan dat ook voor het inproduct van twee vectoren de regels voor het wegwerken van haakjes gelden. Gebruik verder de regels hierboven. Je vindt dan

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot2+3\cdot1=-1.$$

Kennelijk hoef je alleen de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en de twee uitkomsten op te tellen om het inproduct van beide vectoren te krijgen.

Opgave 3

Het inproduct van twee vectoren wordt gegeven door kentallen in een cartesisch assenstelsel te bepalen, en de vectoren te ontleden in eenheidsvectoren $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$.

a Laat zien dat het inproduct van $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ inderdaad $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$ is door haakjes weg te werken.

b Bereken op dezelfde manier met behulp van eenheidsvectoren het inproduct van $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

In het algemeen geldt voor het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Neem nu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen te berekenen.

Opgave 5

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bereken het inproduct van beide vectoren. Gebruik dit inproduct om de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen.

Opgave 6

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ en laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

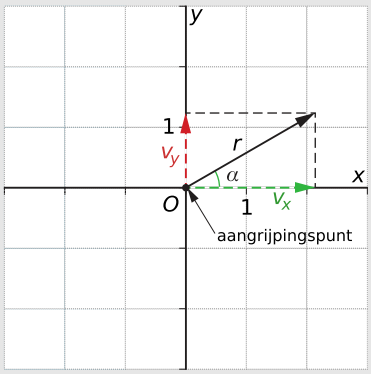
Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting.

Je kunt hem beschrijven door

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector met de x-richting maakt.

De richtingshoek wordt linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Je kunt een vector beschrijven met **kentallen**: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.



Figuur 13.3

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als aangrijpingspunt. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is dus geen eigenschap van een vector. Een vector die vanuit punt A naar punt B wijst, schrijf je als $\overrightarrow{AB}$.

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Dus: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

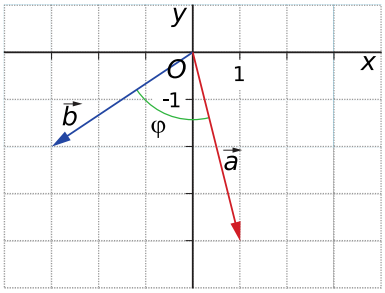
Voorbeeld 1

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf vliegveld O eerst naar een punt dat 3 km oostelijker en 5 km noordelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km oostelijker en 4 km zuidelijker ligt.
Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte van de vlucht. De retourvlucht is de kortste route terug. Bereken de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende afstand en draaihoek (ten opzichte van het oosten).

Antwoord

Voer een assenstelsel in met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

De vlucht kun je dan beschrijven als $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Figuur 13.4

De lengte van de vlucht is

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2} + \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{34} + \sqrt{20} \approx 10{,}3 \text{ km}.$$

De retourvlucht is $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En de lengte van de retourvlucht is $|-\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ km.

Voor de draaihoek φ die daarbij hoort, geldt: $\tan(\varphi - 180°) = \frac{-1}{-5} = 0{,}2$.
Dit geeft $\varphi \approx 191°$.

Opgave 7

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf O eerst naar een punt dat 2 km westelijker en 5 km noordelijker ligt en daarvandaan naar een punt dat 6 km oostelijker en 7 km zuidelijker ligt.

a Teken deze vlucht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van de vlucht.

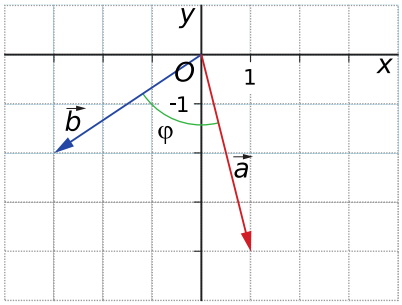
c De retourvlucht is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende draaihoek (ten opzichte van het oosten) en lengte.

d Bereken in km de lengte van de retourvlucht.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 13.5

Antwoord

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -3 + -4 \cdot -2 = 5.$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus $5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$.

Dus $\varphi \approx 70{,}3°$.

Opgave 8

De hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ is ongeveer 70,3°.

a Controleer dit met een berekening.

b Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in één decimaal nauwkeurig.

c In de applet kun je andere vectoren kiezen. Bereken zelf telkens de hoek ertussen met behulp van het inproduct. In de applet vind je het antwoord.

Opgave 9

Met behulp van voorbeelden kun je uitzoeken wanneer twee vectoren een inproduct van 0 hebben.

a Geef een voorbeeld van twee vectoren waarvoor dat geldt. Laat door berekening zien dat het inproduct dan ook 0 is.

b Toon algebraïsch aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} kb \\ -ka \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

c Geef ook een voorbeeld van twee vectoren waarvan het inproduct gelijk is aan het product van hun lengtes.

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0,1)$ en Q in $(-2,6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6,3)$ en Q in $(4,0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S. Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct van beide richtingsvectoren kun je de hoek tussen beide banen berekenen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot -1 = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \cos(\varphi)$$

geeft

$\frac{2}{3} = \sqrt{2\frac{2}{9}} \cdot \cos(\varphi)$ en dus $\varphi \approx 63{,}4°$.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3 op pagina 525** zie je hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent.

Gegeven zijn de lijnen $l : y = -x + 4$ en $m : 2x - 3y = 6$.

a Bepaal van beide lijnen de richtingsvectoren.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Punt P beweegt over een lijn door $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en punt Q beweegt over een lijn door $C(0,5)$ en $D(2,9)$.

a Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Waarschijnlijk heb je bij a een stompe hoek gevonden. Beide lijnen maken echter ook een scherpe hoek met elkaar.

b Hoeveel graden is die scherpe hoek?

c Waarom wordt meestal afgesproken dat de hoek tussen twee lijnen een scherpe hoek is?

d Waarom kun je voor de hoek tussen twee vectoren niet afspreken dat hij altijd scherp is?

Oefenen

Opgave 12

Bereken telkens de hoek tussen de gegeven vectoren in graden nauwkeurig.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Opgave 13

Een zeilboot vaart op het IJsselmeer vanuit de haven van Enkhuizen naar een punt dat 5 km oostelijker en 3 km zuidelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km westelijker en 8 km noordelijker ligt.

a Teken deze zeiltocht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf de zeiltocht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van deze zeiltocht.

c De retourvaart is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourtocht beschrijft met de bijbehorende en draaihoek (t.o.v. het oosten).

d Bereken in km de lengte van de retourvaart.

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $m : 2x - 5y = 10$.

Bereken de hoek tussen beide lijnen in één decimaal nawkeurig.

Opgave 15

a Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Geef een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{b}$ en twee keer zo lang is.

Opgave 16

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen vectoren $\overrightarrow{SA}$ en $\overrightarrow{SB}$.

Toepassen

Opgave 17: Bootje in een sloot

Een bootje wordt door een jongen en een twee keer zo sterke man aan touwen die beide aan dezelfde plek op de boeg van de boot zijn bevestigd door het midden van een sloot getrokken. De jongen en de man lopen ieder aan een andere kant van de sloot. De boot blijft in het midden van de sloot varen. De man trekt met een kracht van 10 N en onder een hoek van 20° met de vaarrichting.

a Construeer in een bovenaanzicht de vectoren die de twee trekkrachten voorstellen.

b Bereken de richtingshoek van de kracht die de jongen uitoefent in graden nauwkeurig.

De arbeid die door een kracht wordt verricht is het inproduct van deze kracht (de krachtvector) en de afgelegde afstand (de afstandsvector). Het is daarom ook het product van de component van die kracht in de bewegingsrichting en de afgelegde afstand.

c Welke arbeid verrichten beiden samen als ze het bootje 1 km voort trekken?

d Verrichten ze beiden evenveel arbeid?

Opgave 18: Gegeven hoek tussen twee vectoren

Voor welke exacte waarde(n) van a is de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$ gelijk aan 45°?

Testen

Opgave 19

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek tussen beide vectoren in graden nauwkeurig.

Opgave 20

Punt P beweegt over een lijn vanaf $A(0,10)$ op $t = 0$ en door $B(20,25)$ op $t = 10$.

Punt Q beweegt over een lijn vanaf $C(0,1)$ op $t = 0$ en door $D(20,31)$ op $t = 10$.

t is de tijd in seconden.

a Laat zien dat beide punten met elkaar botsen en bereken na hoeveel seconden dit het geval is.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

13.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn (normaal);
- een normaalvector van een gegeven vector berekenen;
- werken met middelloodlijnen, hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices;
- het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op coördinaten berekenen.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- werken met het inproduct van vectoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Gegeven zijn de lijn $l : 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
De (kortste) afstand van punt A tot lijn l is de lengte van een lijnstuk AS, waarbij S het snijpunt is van een loodlijn door A en loodrecht op l. (Ga dit na met de applet.) Om die afstand AS te berekenen moet je daarom eerst een lijn loodrecht op l en door punt A beschrijven.

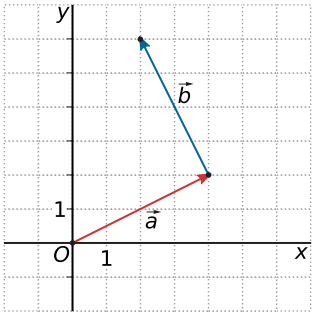
a Laat zien, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ een mogelijke richtingsvector van l is.

b Laat met behulp van het inproduct zien, dat de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht op die richtingsvector staat.

c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door A en loodrecht l en bereken daarmee punt S en de afstand van A tot lijn l.

Uitleg 1

Bekijk de applet



Figuur 13.1

Je ziet hier de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct van beide vectoren kun je laten zien dat ze loodrecht op elkaar staan:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot -2 + 2 \cdot 4 = 0$

zodat voor de hoek φ tussen deze vectoren geldt: $\cos(\varphi) = 0$ en dus $\varphi = 90°$.

Zo kun je met het inproduct laten zien dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ altijd loodrecht op elkaar staan. Je noemt $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ een normaalvector van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dit kun je gebruiken om een loodlijn op een gegeven lijn te maken. En met behulp van een loodlijn kun je dan weer de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

Opgave 1

In **Uitleg 1 op pagina 528** kun je met de applet nagaan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

a Laat dit ook zien met behulp van hun inproduct.

b Staat de vector $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ ook loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$?

c Staat de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -2a \end{pmatrix}$ loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -3a \end{pmatrix}$?

Opgave 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,2)$, $B(4,1)$ en $C(3,4)$.

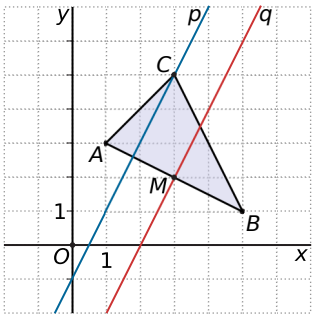
a Stel een vectorvoorstelling op van lijn AB.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door C en loodrecht op AB.

c Bereken de afstand van punt C tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Bekijk de applet



Figuur 13.2

Je ziet hier een driehoek ABC met $A(1,3)$, $B(5,1)$ en $C(3,5)$.

Punt M is het midden van AB.

De lijn p staat loodrecht op AB en gaat door punt C. Zo'n lijn wordt wel de hoogtelijn door C van ΔABC genoemd.

De lijn q staat loodrecht op AB en gaat door punt M. Zo'n lijn wordt wel de middelloodlijn van AB genoemd.

Als je een lijn r door C en het midden M van AB tekent, is dat de zwaartelijn door C van ΔABC.

Elke driehoek heeft drie hoogtelijnen, drie middelloodlijnen en drie zijden.

Door gebruik te maken van normaalvectoren kun je vanuit de gegeven hoekpunten vectorvoorstellingen (en dus ook vergelijkingen) van hoogtelijnen en middelloodlijnen maken. Vanuit de hoekpunten en de middens van de zijden kun je vectorvoorstellingen (en vergelijkingen) van zwaartelijnen maken. De snijpunten van de zwaartelijnen heet het zwaartepunt van de driehoek. Het snijpunt van de drie middelloodlijn is het middelpunt van een cirkel door de drie punten. En wat is het hoogtepunt?

Opgave 3

Bekijk de gegeven ΔABC in **Uitleg 2 op pagina 529**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

d Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door B.

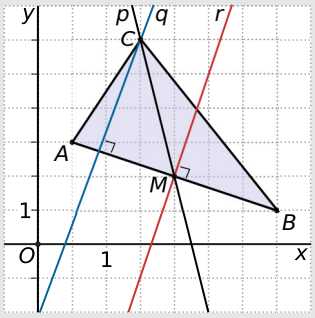
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In deze ΔABC zijn drie **bijzondere lijnen** getekend:

- p is de **zwaartelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt naar het midden M van de overstaande zijde AB;
- q is de **hoogtelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt en loodrecht op de overstaande zijde AB.
- r is de **middelloodlijn** van zijde AB, een lijn door het midden M van en loodrecht op lijnstuk AB.



Figuur 13.3

Een hoogtelijn is een voorbeeld van een **loodlijn**, een lijn die loodrecht op een andere lijn staat. De richtingsvector van zo'n loodlijn is de **normaalvector** van de richtingsvector van de lijn waar hij loodrecht opstaat.

Van een vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een vector zoals $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (of een veelvoud ervan) een normaalvector.

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de **afstand van een punt tot een lijn**.

In elke driehoek kun je drie zwaartelijnen tekenen die door één punt gaan: het **zwaartepunt**.

In elke driehoek kun je drie middelloodlijnen tekenen die door één punt gaan: het **middelpunt van de omgeschreven cirkel**.

Voorbeeld 1

Bereken de afstand van punt $A(4,2)$ tot de lijn $l : 4x + 3y = 12$.

Antwoord

Teken eventueel de situatie en ga na, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l is.

Bij deze richtingsvector van l hoort een normaalvector als $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nu kun je een vectorvoorstelling of een vergelijking van de loodlijn m door A en loodrecht op l opstellen.

Dan bereken je het snijpunt S van de lijnen l en m.

De gevraagde afstand is de lengte van AS. Ga na dat deze afstand precies 2 is.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 530**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de loodlijn m van AB.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l.

Opgave 5

Twee evenwijdige lijnen hebben overal dezelfde afstand tot elkaar.

a Wat versta je onder de afstand tussen twee evenwijdige lijnen?

b Hoe bereken je de afstand tussen twee evenwijdige lijnen k en l?

Voorbeeld 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee zwaartelijnen en bereken daarmee de coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

Antwoord

De zwaartelijn door C gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze zwaartelijn is $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking is $y = -2{,}5x + 9{,}5$.

De zwaartelijn door A heeft zo vergelijking $y = 2x - 1$.

Z is het snijpunt van deze twee lijnen: $Z\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 531**.

a Stel zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel ook zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

c Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z.

d Laat zien, dat ook de zwaartelijn door B door punt Z gaat.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee middelloodlijnen van de zijden en bereken daarmee de coördinaten van het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

Antwoord

De middelloodlijn van AB gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze middelloodlijn is de normaalvector van $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking ervan is $y = -2x + 8$.

De middelloodlijn van AC is $y = 4$.

M is het snijpunt van deze twee lijnen: $M(2,4)$.

Ga zelf na, dat dit punt gelijke afstanden heeft tot elk van de hoekpunten van ΔABC en dat er dus een cirkel met middelpunt M is die precies door A, B en C gaat.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 532**.

a Laat zien hoe je de coördinaten van punt M berekent.

b Stel zelf een vergelijking op van de middelloodlijn van BC.

c Laat zien, dat ook de middelloodlijn van BC door punt M gaat.

Opgave 8

Gebruik de drie punten uit **Voorbeeld 3 op pagina 532**.

a Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door punt C.

b Laat zien, dat alle drie de hoogtelijnen door één punt gaan.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven zijn de lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en punt $P(5,0)$.

Bereken de afstand van P tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Driehoek ABC is gegeven door de punten $A(-2,0)$, $B(4,2)$ en $C(0,6)$.

a Stel een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

d Bereken de afstand van punt C tot lijn AB.

Opgave 11

Een punt beweegt vanaf punt $A(0,10)$ op $t = 0$ in 10 seconden naar punt $B(20,0)$.

a Op welk tijdstip is dit punt het dichtst bij de oorsprong van het assenstelsel?

b Welke afstand tot $O(0,0)$ heeft het punt op dit moment?

Een ander punt P beweegt over de middelloodlijn van AB.
Op $t = 0$ zit dit punt in het midden van AB.

c Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand van beide punten? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $A(-4,0)$, $B(6,0)$ en $C(0,8)$.

a Bereken de exacte coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

b Bereken het exacte middelpunt M van de cirkel door A, B en C.

Opgave 13

Op de lijn $l : 3x + 4y = 24$ ligt een punt P dat gelijke afstanden heeft tot $A(0,2)$ en $B(6,0)$.

a Bereken de exacte coördinaten van punt P.

b Bereken de afstand van P tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet

In deze applet kunnen de punten A en B bewegen met de tijd t in seconden.

Voor punt A geldt $x = t$ en $y = 0{,}25t$.

De vectorvoostelling van de lijn die A doorloopt is dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Punt B begint in $(0,5)$ en zit na 4 seconden in $(2,4)$.

Beide punten botsen niet.

Beide punten passeren wel het driehoekige "grasveld" PQR.

Opgave 14: Bewegende punten (1)

Bekijk in de twee bewegende punten A en B.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de baan die punt B doorloopt.

b Bereken de hoek die beide banen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

c Bereken de kleinste onderlinge afstand van beide punten.

Opgave 15: Bewegende punten (2)

Bekijk in de twee bewegende punten A en B.

a Hoeveel seconden bevindt punt B zich op het 'grasveld'? (Ga er vanuit dat de punten en de lijnen geen breedtes hebben.)

b Bereken het tijdverschil waarmee de punten A en B de middelloodlijn van QR passeren.

Testen

Opgave 16

Bereken de afstand van $A(0,12)$ tot de lijn $l : y = 4x + 5$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Driehoek ABC heeft hoekpunten $A(2,0)$, $B(6,0)$ en $C(0,4)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde BC.

b Bereken het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

c Bereken het zwaartepunt Z van ΔABC.

13.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met vlakke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakteformules, soorten bijzondere lijnen in een driehoek voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Plaats en beweging** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch assenstelsel — dimensie — midden, lengte van een lijnstuk
- vector met kentallen, lengte en richtingshoek — x- en y-component — nulvector — aangrijpingspunt — som, verschil van twee vectoren — scalaire vermenigvuldiging
- vectorvoorstelling van een lijn — plaatsvector en richtingsvector
- inproduct van twee vectoren
- normaalvector — loodlijn — middelloodlijn — zwaartelijn en zwaartepunt — hoogtelijn

Activiteitenlijst

- werken met coördinaten in een cartesisch assenstelsel — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen;
- van een met kentallen gegeven vector de lengte en de richtingshoek berekenen en omgekeerd — vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- een lijn beschrijven met een vectorvoorstelling — een vectorvoorstelling van een lijn omzetten naar een vergelijking en omgekeerd — snijpunten van lijnen berekenen;
- de hoek tussen vectoren berekenen met behulp van hun inproduct — de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn — vectorvoorstellingen en vergelijkingen van middelloodlijnen, zwaartelijnen en hoogtelijnen opstellen — het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek berekenen.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m.

b Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB en evenwijdig met lijn l.

Opgave 2

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Bereken de hoeken van ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$ in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Bereken het middelpunt M en de straal r van de cirkel door de drie gegeven punten in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 5

Punt P beweegt vanaf $(0,12)$ op $t = 0$ in een rechte lijn door $(36,0)$ op $t = 12$.

Punt Q beweegt vanaf $(0,0)$ op $t = 0$ in een rechte lijn door $(24,36)$ op $t = 12$.

a Stel vectorvoorstellingen op voor de banen van deze punten.

b Toon aan dat beide punten niet botsen met elkaar.

c Beide punten bewegen langs $A(7,6)$. Welk punt komt er het dichtst in de buurt?

d Bereken de kortste afstand tussen beide punten in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Als er in een cartesisch assenstelsel vier punten zijn gegeven, dan kun je je afvragen **liggen de vier gegeven punten op één cirkel**?

Dit probleem kun je oplossen door een cirkel door drie van de vier punten te maken. Dat is dan de omgeschreven cirkel van de driehoek waar die punten de hoekpunten van zijn. Hoe je het middelpunt M van zo'n cirkel uitrekent, heb je eerder gezien. En de straal is gewoon de afstand tussen het middelpunt en een hoekpunt van de driehoek.

Opgave 6: Op de cirkel? (1)

Gegeven zijn in een cartisch assenstelsel de punten $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(6,4)$ en $D(1,6)$.
Je wilt nagaan of deze vier punten op één cirkel liggen.

a Bereken het middelpunt van de cirkel door A, B en C.

b Bereken de straal van de cirkel door A, B en C.

c Bereken de afstand van het middelpunt tot D. Ligt punt D op de cirkel?

Opgave 7: Op de cirkel? (2)

Gaat de cirkel door $A(-1,2)$, $B(2,1)$ en $C(6,3)$ door de oorsprong van het cartesisch assenstelsel?

Register

a
algebra 10
aangrijpingspunt 504
abc-formule 141
afgeleide g-logaritme 388
afgeleide exponentiële functie 381
afgeleide (functie) 338
afgeleide natuurlijke logaritmische functie 388
afgeleide waarde 338
afstand punt tot lijn 530
aftrekken 504
amplitude 278, 285, 437
analogierekenen 59, 79
arccosinus 269
arcsinus 269

b
balansmethode 64, 79, 110
begingetal 96
bereik 149
bergparabool 132
bijzondere lijnen 530
buiten haakjes 72
buiten haakjes halen 23

c
cartesisch assenstelsel 494
combineren 110
component van een vector 504
constante-regel 346
cosinusregel 458
cos-functie 260

d
dalparabool 132
derdegraadsfunctie 155
differentiaalquotiënt 329, 338
differentieerregel 346
differentiequotiënt 329
differentiëren 346
differentiëren van goniometrische functies 429
dimensie 494
discriminant 141
distributieve eigenschap 23
domein 149
nde machts worteltrekken 39
doorsnede 477
dubbellogaritmisch papier 396
dynamisch model 315

e
eerstegraadsfunctie 155
eigenschappen van machten 186
enkellogaritmisch papier 396
evenwichtsstand 278, 285
exact 65
exponent 30, 31, 177
exponentiële functie 196
exponentiële groei 176, 393
exponentiële groeimodel 396
exponentiële vergelijking 196
extremen 338

f
formule voor $a \sin(x)$ plus $b \cos(x)$ 423
factoren 23
formule 45
frequentie 437
functie 45
functievoorschrift 46
functiewaarden 142

g
gebroken vergelijking 79
gelijknamig 17
gelijksoortige termen 10
gelijkvormigheid 458
gemiddelde verandering 329
geremd exponentieel groeimodel 396
getal e 374
goniometrische formules 423
goniometrische functies 415
goniometrische verhoudingen 457
groeifactor 176
grondtal 30, 31, 177
grootste gemeenschappelijke deler 23

h
haakjes uitwerken 23
harmonische trilling 437
hellingfunctie 338
hellingsgetal 96, 338
herleiden 10
hoogtelijn 530
horizontale asymptoot 196
horizontale verschuiving 278, 285

i
inhoud lichaam 469
inklemmethode 57

inproduct 523
intervalnotatie 149
inverse functie 228
inwendig product 523

k

karakteristieken 155
kentallen van een vector 504, 522
kettingregel 356
kleinste gemeenschappelijke veelvoud 17
kwadraat afsplitsen 141
kwadratische functie 132, 141
kwadratische vergelijking 132

l

lengte lijnstuk 494
lengte van een vector 504, 522
lengtevergrotingsfactor 469
lineair model 117
lineair verband 102
lineaire functie 96, 117
logaritme 221, 243
logaritmen, eigenschappen 221
logaritmen, rekenregels 221
logaritmische functie 228
logaritmische ongelijkheid 234
logaritmische schaal 393
logaritmische schaalverdeling 243
logaritmische vergelijking 234
loodlijn, normaal 530

m

macht 30, 31, 177
machtsfunctie 205, 395, 396
machtsregel 346
middelloodlijn 530
middelpunt van de omgeschreven cirkel 530
midden 494
modelleren 300
momentane verandering 329

n

natuurlijke groeifactor 374
natuurlijke logaritme 374
normaalvector 530
nulpunt 56, 57
nulvector 504

o

onderzoeksopdrachten 320
ongelijkheid 162, 163
ongelijksoortige termen 10
ontbinden in factoren 23, 72
op 0 herleiden 72
oplossing 56
oplossing van een vergelijking 57
oppervlakte lichaam 469
oppervlaktevergrotingsfactor 469
optellen 504
optimaliseren 307, 338

p

parabool 132, 149
parallelprojectie 449
parameter 149
periode 278, 285, 437
plaatsvector 513
plotten 155
productregel 363
projectie 449

q

quotiëntregel 363

r

rekenen 10
recht evenredig 96
rechthoekige driehoek 457
rekenen met breuken 17
rekenregels voor machten 177
richtingscoëfficiënt 96, 329
richtingshoek van een vector 504, 522
richtingsvector 513

s

somformules 423
symmetrieformules 423
samengestelde figuur 449
samengestelde functie 356
scalaire vermenigvuldiging 504
sinusoïde 277
sinusregel 458
sin-functie 260
snijpunt 57
som product methode 72
somregel 346
somvector 504
splitsen 72
standaard exponentiële functie 195
stelling van pythagoras 457
stelsel van twee vergelijkingen 110
steunvector 513
strijdig stelsel 110
substitutie 110
symmetrieas 132

t

tangens 414
tangensfunctie 414, 415
technische notatie 31

tegengestelde 504
termen 23
terugrekenmethode 57
top 132
transformatie 196
trillingstijd 437
tweedegraadsfunctie 155
tweeterm 23

v

verbanden tussen sin en cos 423
verdubbelingsformules 423
variabelen 10
vector 504, 522
vectorvoorstelling van de lijn 513
veeltermfunctie 155
veranderen van grondtal 381
verandering in een punt 329
verdeeleigenschap 23
vergelijking 56, 57
vergrotingsfactor 458
verkortingsfactor 449
vierterm 23
volumevergrotingsfactor 469
voorschrift 132

w

worteltrekken 38, 39
wetenschappelijke notatie 31
wijkhoek 449
wisseleigenschap 10

z

zwaartelijn 530
zwaartepunt 530
zweving 444

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website `www.math4all.nl`.
De volgorde van de onderwerpen in dit boek is gekozen door de auteurs van Math4All. Indien u in uw klas een andere volgorde wilt hanteren, maar een boek nog steeds op prijsstelt nodigen we u uit om gebruik te maken van de Math4All maatwerkdienst waarmee u zelf boeken kunt genereren.

Stichting Math4All

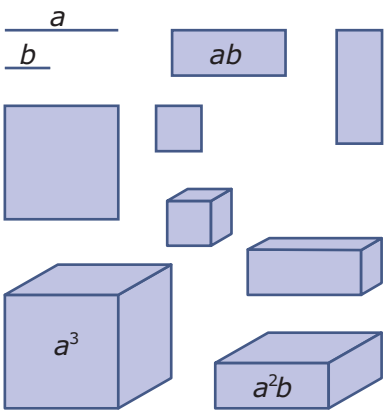
Math4all

www.math4all.nl

4Math MBO

www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 4 op pagina 11.



a Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.

b Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.

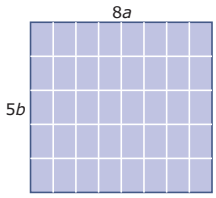
c Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?

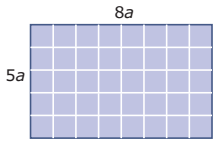
Spiekbriefjes bij Algebra

Rekenen met variabelen

Rekenen is het werken met getallen en **algebra** is het rekenen met **variabelen** met dezelfde rekenregels:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2 b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.





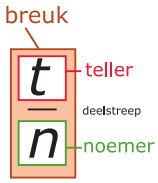
Ook gebruik je de **wisseleigenschap**: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

Schrijf uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk door **herleiden**. De variabelen zet je in alfabetische volgorde. En $1x$ wordt x en $0x = 0$ en een losse nul laat je weg.

meer info

Breuken

Het **rekenen met breuken** met variabelen gaat zo:



- Bij optellen en aftrekken maak je breuken eerst **gelijknamig**: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je tellers en noemers afzonderlijk: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je breuken eerst gelijknamig: $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b \cdot d$ vermenigvuldigen)

  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

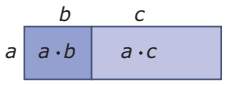
Delen door 0 heeft geen betekenis. Hierboven moet steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling ook $c \neq 0$. Kijk of je breuken kunt **vereenvoudigen** door teller en noemer door hetzelfde te delen.

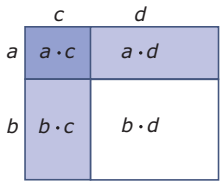
meer info

Haakjes

De figuren laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$





Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. In de bovenste figuur wordt de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.
Je gebruikt deze **verdeeleigenschap** (**distributieve eigenschap**) voor **haakjes wegwerken**.

Omgekeerd:

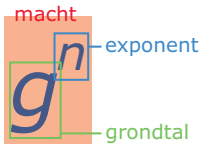
- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren**.

meer info

Machten

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n. g heet het **grondtal** en n de **exponent**.



Het werken met machten ken je al:

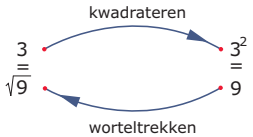
- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- $g^a / g^b = g^{a-b}$.
- $g^0 = 1$.
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.
In de **wetenschappelijke notatie** krijgt een getal de vorm $a \cdot 10^n$, met $1 \leq a < 10$ en n geheel. In de **technische notatie** krijgt een getal de vorm $a \cdot 10^n$, met $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud.

meer info

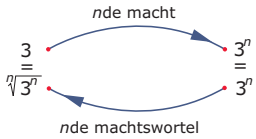
Wortels

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **n de machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een $n$de macht.
In het algemeen: $\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.



Het rekenen met $n$de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.



Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.
De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b.

meer info

Formules herleiden

Een **formule** beschrijft vaak een verband tussen variabelen, meestal een vergelijking zoals $l + b = 180$.
Je kunt er dan er een grafiek bij tekenen. Maakt eerst een tabel en zet de gevonden punten in een assenstelsel.
Je kunt soms formules herleiden tot de éne variabele een **functie** is van de andere.
Een formule zoals $2x + 4y = 5$ wordt $y = -0{,}5x + 1{,}25$.
Nu is y een functie van x, notatie: $y(x) = -0{,}5x + 1{,}25$.

Noem je de functie f dan is $y = f(x)$ met $f(x) = -0{,}5x + 1{,}25$ het **functievoorschrift**. Let op: de haakjes in $y(x)$ en $f(x)$ zijn geen haakjes die je gebruikt bij het rekenen (met variabelen), je kunt ze niet wegwerken.
Met iets als $f(2)$ bedoel je de waarde van y bij $x = 2$.

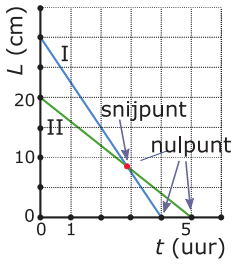
Bij het herleiden van formules naar functies gebruik je de balansmethode, haakjes wegwerken, rekenen met breuken met variabelen, etc.

meer info

Spiekbriefjes bij Vergelijkingen

Basistechnieken

Een formule waarin een isgelijkteken voorkomt heet een **vergelijking**.
Hier wordt het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen met grafieken in beeld gebracht. Als beide kaarsen gelijk zijn geldt $20 - 4t = 30 - 7{,}5t$.



De t-waarde die links en rechts gelijk maakt is de **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

In een **nulpunt** is de lengte van een kaars 0. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7{,}5t = 0$ op te lossen.
Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.

Een vergelijking met één onbekende los je op door **inklemmen**, of door slim rekenen, bijvoorbeeld **terugrekenen**.

meer info

Balansmethode

Om vergelijkingen op te lossen gebruik je vaak **balansmethode**. Je kunt links en rechts van het isgelijkteken:

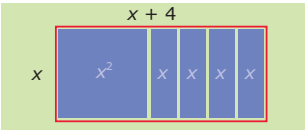
- hetzelfde optellen of aftrekken;
- met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen;
- door hetzelfde (behalve 0) delen.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe.
Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: “Links en rechts worteltrekken.”
Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: “Links en rechts kwadrateren.”
Dit kan niet altijd zomaar...

meer info

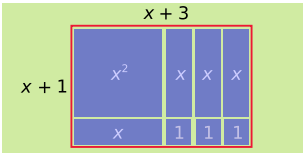
Ontbinden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen.



$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$

Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het ‘losse’ getal het product van dezelfde twee getallen.



$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen.
De vergelijking herleid je tot $a \cdot b = 0$. Dat heet **op 0 herleiden**. En daaruit volgt $a = 0 \vee b = 0$, twee eenvoudiger vergelijkingen.

meer info

Breuken in vergelijkingen

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.
Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.
Dit noem je wel **analogierekenen**.

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je met de balansmethode oplossen: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.
Veel gebroken vergelijkingen kun je oplossen door meteen links en rechts van het isgelijkteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

meer info

Wortels in vergelijkingen

Af en toe heb je te maken met een vergelijking waarbij de variabele binnen een wortelvorm voor komt.

Een voorbeeld is $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Zo'n vergelijking kun je oplossen door hem eerst in de vorm $\sqrt{x} = \ldots$ te schrijven.
Daarna ga je beide zijden kwadrateren.

Het is bij vergelijkingen met wortelvormen wel van belang om achteraf je oplossing(en) te controleren. Er mag immers geen negatief getal onder het wortelteken uitkomen, want dan krijg je geen reële waarde.

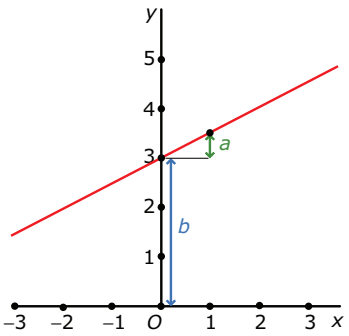
meer info

Spiekbriefjes bij Lineaire verbanden

Lineaire functies

Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.



De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Soms schrijf je $f(x) = a \cdot x + b$.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong en is de formule $y = a \cdot x$. Dan is y **recht evenredig** met x.

meer info

Lineaire verbanden

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar de lineaire functie $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ als $b \neq 0$.

Dit is een lineaire functie met begingetal $\frac{c}{b}$ en hellingsgetal $-\frac{a}{b}$.

Je kunt hem ook schrijven als $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking is $by = c$ of $y = \frac{c}{b}$.
  Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking is $ax = c$ of $x = \frac{c}{a}$.
  Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y-as.

meer info

Stelsels vergelijkingen

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je de snijpunten van de grafieken. Die snijpunten vind je vaak door:

- de vergelijkingen herleiden naar functies (als dat kan) en die gelijk stellen;
- de vergelijkingen **combineren** tot één vergelijking met één onbekende.

Bij het combineren gebruik je:

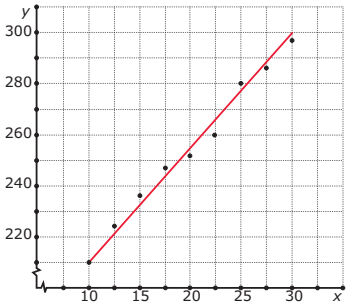
- **substitutie**: je drukt bij één van beide vergelijkingen de éne variabele in de andere uit en je vervangt in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking.
- de **balansmethode**: je neemt dan de linker- en de rechterkant van beide vergelijkingen bij elkaar na eerst handig vermenigvuldigen om één variabele kwijt te raken.

Soms is er geen oplossing. Het is dan een **strijdig stelsel**.

meer info

Lineaire modellen

Als het verband tussen y en x gegeven is door meetpunten die (ongeveer) op een rechte lijn liggen, kun je hierbij een **lineair model** opstellen. Daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.



Gaat de rechte lijn door de punten $(10{,}210)$ en $(30{,}300)$, dan bepaal je zo de formule:

- x neemt toe met $30 - 10 = 20$;
- y neemt toe met $300 - 210 = 90$;
- het hellingsgetal is $\frac{90}{20} = 4{,}5$;
- de gevraagde formule is $y = 4{,}5x + b$;
- $(10{,}210)$ op de lijn, dus $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$ en $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4{,}5x + 165$.

meer info

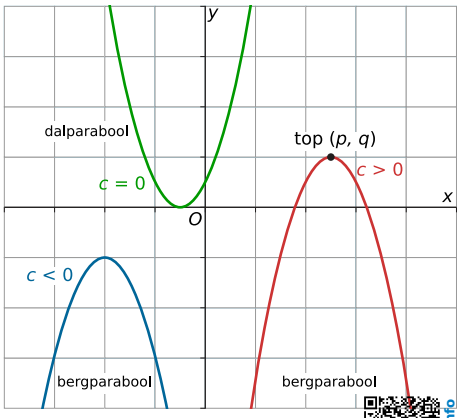
Spiekbriefjes bij Kwadratische functies

Kwadratische functies

De functie $f(x) = a(x-p)^2 + q$ is een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van deze functie ontstaat door verschuiven en/of vermenigvuldigen van $y = x^2$. De grafiek is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$.
$a > 0$ geeft een **dalparabool**.
$a < 0$ geeft een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking** $a(x-p)^2+q = u$ kun je herleiden tot: $(x-p)^2 = c$ met $c = \frac{u-q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.



meer info

De abc-formule

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Je ziet niet meteen wat de top en de nulpunten van de parabool zijn.
Door **kwadraat afsplitsen** kun je de formule omzetten naar: $f(x) = a(x-p)^2 + q$ waarin (p,q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij: $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

De nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je bepalen met de **abc-formule**.

De oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$ is: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant**. Die bepaalt het aantal oplossingen:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.

$\frac{-b}{2a}$ is de x-coördinaat van de top, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ is het maximum (bergparabool) of het minimum (dalparabool).

meer info

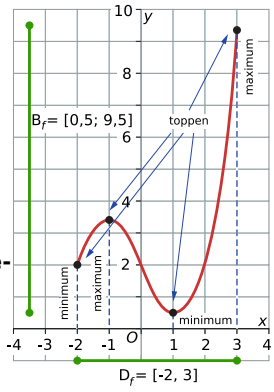
Kwadratische modellen

Bij elke **parabool** hoort de formule:

- $y = a(x-p)^2 + q$, als de top (p,q) bekend is.
- $y = ax^2 + bx + c$ als er drie punten bekend zijn.

Je vult de gegevens in en er ontstaan vergelijkingen om de **parameters** a, b en c, of a, p en q, te vinden.

De waarden van x waarop de functie f geldig is heet het **domein** D_f. Alle mogelijke functiewaarden vormen het **bereik** B_f.



Je noteert domein en bereik als een **interval**.
De getallen groter dan of gelijk aan 0 schrijf je zo: $[0, \rightarrow\rangle$.
De getallen groter dan 0 schrijf je zo: $\langle 0, \rightarrow\rangle$.
De vorm van de haakjes bepaalt of het getal dat er bij staat wel bij het interval hoort (rechte haken) of niet (puntige haken).

meer info

Veeltermen

Functies als $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$ heten **veeltermfuncties**.
Ze bestaan uit optellingen/aftrekkingen van machtsfuncties met gehele exponent groter of gelijk aan 0. Als de hoogst voorkomende macht 3 is, heb je een **derdegraadsfunctie**. Een kwadratische functie is een **tweedegraadsfunctie** en een lineaire functie een **eerstegraadsfunctie**.

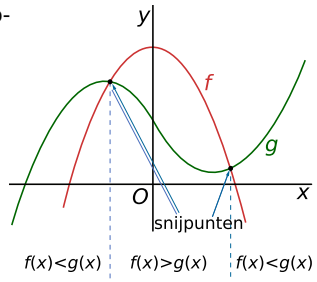
Om de **karakteristieken**, de nulpunten en de toppen van zo'n functie te berekenen heb je meestal verdergaande technieken nodig. Maar soms kun je er ook met behulp van ontbinden in factoren uitkomen.
De grafiek laat je maken door de computer (of een grafische rekenmachine).
Dit noem je het **plotten** van een grafiek.

Ook functies van de vorm $f(x) = a(x-p)^n + q$ (met $n \geq 0$ en geheel) kun je als veelterm opvatten, je kunt immers de haakjes wegwerken.
De grafieken van deze functies zijn door verschuiven en vermenigvuldigen af te leiden uit die van $y = x^n$.

meer info

Ongelijkheden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.



- Eerst plot je beide functies.
  Breng ze goed in beeld met de snijpunten zichtbaar.
- Bepaal de snijpunten. Dat kan met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.
  Dat kan vaak ook door $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
  Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

meer info

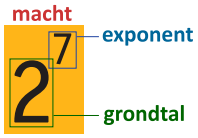
Spiekbriefjes bij Exponenten en machten

Exponentiële groei

Bij **exponentiële groei** vermenigvuldig je per tijdseenheid met hetzelfde getal, de **groeifactor** g. Altijd is $g > 0$. Dus het delen van opvolgende waarden (bij vaste tijdstappen) geeft steeds hetzelfde. De hoeveelheid op $t = 0$ is de beginwaarde.

Bij groei met p procent hoort groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ is $g > 1$: exponentiële toename.
Voor $p < 0$ is $0 < g < 1$: exponentiële afname.
Een **macht** zoals g^n heeft **grondtal** g en **exponent** n. Bij positieve gehele n en m zijn de **rekenregels voor machten**:



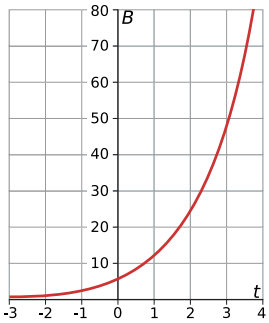
- $g^0 = 1$ als $g \neq 0$
- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$ en $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$ en $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$

meer info

Rekenregels voor machten

De **eigenschappen van machten** voor $g > 0$ en willekeurige a en b zijn:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a geheel
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a geheel
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$



Soms geldt dit ook als $g < 0$.
Een macht als g^a heeft voor $g > 0$ betekenis voor alle waarden van a.
Daarom zijn de grafieken bij exponentiële functies vloeiende kromme lijnen. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.

meer info

Exponentiële functies

Voor de grafiek van de **standaard exponentiële functie** $y = g^x$ geldt:

- De grafiek snijdt de y-as in $(0,b)$.
- De x-as is de horizontale asymptoot.
- Als $g > 1$, is de grafiek stijgend.
- Als $0 < g < 1$, is de grafiek dalend.

Elke **exponentiële functie** kun je schrijven als $f(x) = b \cdot g^x + d$.
De grafiek van f ontstaat uit die van $y = g^x$ door **transformaties**:

- vermenigvuldiging in de y-richting met factor b;
- verschuiving in de y-richting met d eenheden.

De grafiek van f heeft dus **horizontale asymptoot** $y = d$.
Het eventuele nulpunt vind je door de **exponentiële vergelijking** $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen met behulp van GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.

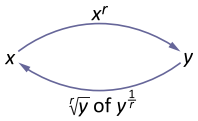
meer info

Machtsfuncties

Functies als $g(x) = a \cdot (x - p)^r + q$ heten **machtsfuncties**.
Hun grafieken ontstaan uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^r$, met:

- r geheel, positief en even, dan heeft de functie een minimum van 0 bij $x = 0$.
- r geheel, positief en oneven, dan is de grafiek stijgend en gaat hij door $(0,0)$.
- r geheel en negatief, dan heeft de functie beide assen als asymptoten.
- r niet geheel, dan zijn alleen positieve x-waarden toegestaan tenzij r een breuk met een oneven noemer is.

Veel wortelfuncties en gebroken functies zijn machtsfuncties.



De exponent r kan elke waarde aannemen.
Een vergelijking met een machtsfunctie los je op door de omgekeerde exponent te gebruiken.

meer info

Spiekbriefjes bij Logaritmen

Logaritmen

De **logaritme** $x = {}^{g}\log(y)$ is de oplossing van $g^x = y$.
Dus g^x en ${}^{g}\log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie, zodat:
${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$
${}^{g}\log(y)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.
Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$
- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

Het grondtal 10 laat je weg: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.
${}^{g}\log(a)$ kun je met de rekenmachine berekenen: ${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.

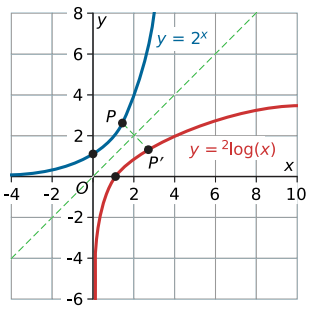
Soms kun je dit invoeren als: $\log_g(a)$

meer info

Logaritmische functies

$f(x) = {}^{g}\log(x)$ is een **logaritmische functie** met grondtal g en $g > 0$ en $g \neq 1$.

De grafieken van $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De karakteristieken van $y = {}^{g}\log(x)$ volgen uit die van $y = g^x$:



- alleen x-waarden boven 0 zijn toegestaan
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y-as is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door transformatie uit $f(x) = {}^{g}\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

meer info

Logaritmische vergelijkingen

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^{g}\log(x) = a$ geldt:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De oplossing vind je zo: ${}^{g}\log(x) = a$ geeft $g^{{}^{g}\log(x)} = g^a$ en $x = g^a$.

Een **logaritmische ongelijkheid** zoals ${}^{g}\log(x) < a$ los je zo op:

- Los de vergelijking ${}^{g}\log(x) = a$ op.
- Maak de grafieken van $y_1 = {}^{g}\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot).

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

meer info

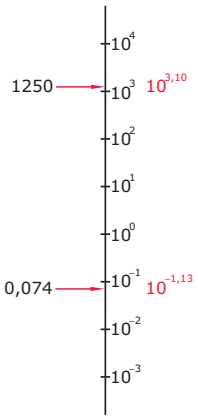
Logaritmische schalen

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Met de log-knop op de rekenmachine kun je vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$
  1250 komt 3,10 boven 10^0, tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$
  0,074 komt 1,13 onder 10^0, tussen 10^{-1} en 10^{-2}.

De grafiek van een exponentiële functie wordt een rechte lijn op **enkellogaritmisch papier**.

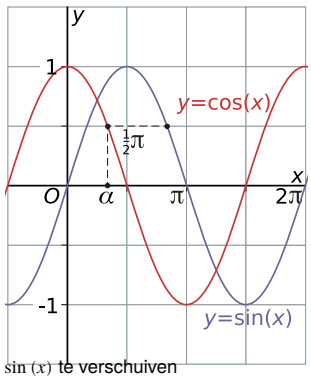
De grafiek van een machtsfunctie wordt een rechte lijn op **dubbellogaritmisch papier**.



meer info

Spiekbriefjes bij Periodieke functies

Sinus en cosinusfuncties



De **standaard sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$

De **standaard cosinusfunctie** $f(x) = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x - b) + c$ en $h(x) = a \cdot \cos(x - b) + c$ kun je door transformaties uit die van $y = \sin(x)$ of die van $y = \cos(x)$ laten ontstaan.

meer info

Vergelijkingen met sin en cos

Om $\sin(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.
Die oplossing heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.
Alle oplossingen van $\sin(x) = c$ zijn: $x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$.
Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

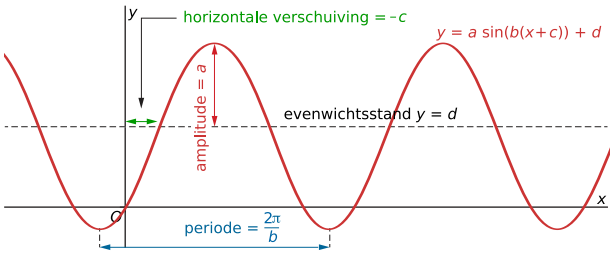
Om $\cos(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $[0, \pi]$.
Die oplossing heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.
Alle oplossingen van $\cos(x) = c$ zijn: $x = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$.
Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Gebruik de waarden uit de tabel als er gevraagd wordt naar exacte uitkomsten.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

meer info

Sinusoïden



Door transformaties van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies als $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken. Deze functies heten **sinusoïden**.
De grafiek van $h(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van g geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

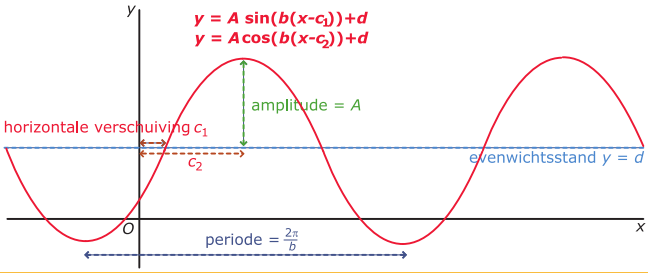
meer info

Periodieke modellen

Bij een sinusoïde kun je een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** c te bepalen.

In de figuur zie je dat er twee functievoorschriften mogelijk zijn.



meer info

Spiekbriefjes bij Differentiëren

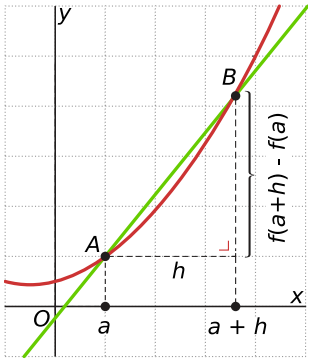
Verandering

De **gemiddelde verandering** van functie f op $[a, a+h]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Dit is het **differentiequotiënt** van f op $[a, a+h]$ en de richtingscoëfficiënt van lijn AB.

Als $h \to 0$ dan gaat dit differentiequotiënt over in de **momentane verandering** of de **verandering in een punt** met $x = a$.
Na herleiden en $h \to 0$ heet dit het **differentiaal-quotiënt** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$.



In plaats van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn** in het punt met $x = a$.

meer info

Het begrip afgeleide

Het **differentiaalquotiënt** van $f(x)$ voor $x = a$ heet de **afgeleide waarde** $f'(a) = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$. De afgeleide voor alle mogelijke waarden van x is $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Deze functie van x heet de **afgeleide (functie)** of **hellingfunctie** van f.
De afgeleide geeft bij iedere x het hellingsgetal van de raaklijn.

Veel functies hebben **extremen**, waarden waarbij de functie maximaal is of juist minimaal is. Je kunt die waarden zo berekenen:

- Bepaal $f'(x)$ en de nulpunten van $f'(x)$.
- Als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat in zo'n nulpunt heeft f een maximum.
- Als $f'(x)$ van negatief naar positief gaat in zo'n nulpunt heeft f een minimum.

Als de afgeleide niet van teken wisselt, is er geen extreme waarde.
Optimaliseren is het berekenen van extremen in praktijksituaties.

meer info

Differentiëren

Om de afgeleide te bepalen ga je **differentiëren**.
Hier zie je enkele **differentieerregels**:

- **machtsregel**:
  als $f(x) = c \cdot x^r$ is $f'(x) = c \cdot r x^{r-1}$ voor elke waarde van c en voor elke waarde van r
- **constante-regel**:
  als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **somregel**
  als $f(x) = u(x) + v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
  als $f(x) = u(x) - v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

De afgeleide van $y = f(x)$ schrijf je als: $f'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $y'(x)$.

Met die afgeleide bepaal je bij een gegeven x de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek.
Ook kun je er extreme waarden van de functie mee berekenen.

meer info

De kettingregel

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat:

$$x \xrightarrow{g(x)} \ldots \xrightarrow{f(\ldots)} f(g(x))$$

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als f de vorm $f(g(x))$ heeft, dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

meer info

De product- en quotiëntregel

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen. Deze beide regels gebruik je vaak in combinatie met andere differentieerregels, met name de kettingregel.

meer info

Spiekbriefjes bij Het getal e

Het getal e

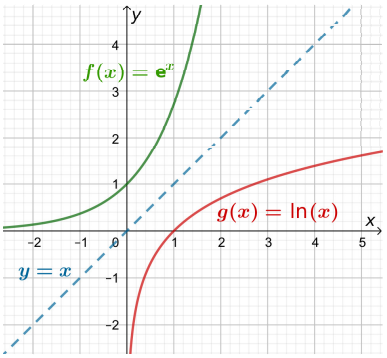
De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.
Deze **natuurlijke groeifactor** is het getal $\mathrm{e} \approx 2{,}71828...$

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor.

$\mathrm{e}^x = a$ geeft $x = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.
In plaats van ${}^{\mathrm{e}}\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.



meer info

Exponentiële functies

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Je kunt elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven door **veranderen van grondtal**:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}$ waarin $\mathrm{e}^k = g$ dus $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $10^k = g$ dus $k = \log(g)$

Je kunt zo verschillende exponentiële functies hetzelfde grondtal geven, e of 10.

meer info

Logaritmische functies

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

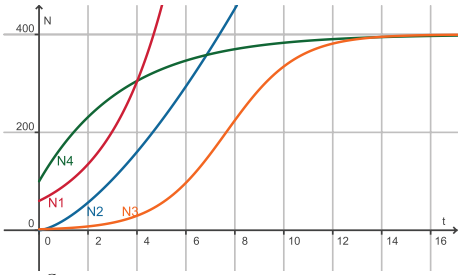
De **afgeleide van de g-logaritme** $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$.
Je vindt:

Als $f(x) = {}^{g}\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^{g}\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

meer info

Groeimodellen



Bij het **exponentiële groeimodel** hoort $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$. (Figuur: $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Op **enkellogaritmisch papier** wordt de grafiek een rechte lijn.
Bij een **machtsfunctie** als model hoort $N_2(t) = b \cdot t^p$. (Figuur $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Op **dubbellogaritmisch papier** wordt de grafiek een rechte lijn.
Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.
De groei begint exponentieel, maar remt af. $N = G$ is de horizontale asymptoot, de grootste groeisnelheid zit bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (Figuur: $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Bij het groeimodel $N_4(t) = G + b \cdot g^t$ neemt de groeisnelheid vanaf het begin af. (Figuur: $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0{,}75$.)

meer info

Spiekbriefjes bij Goniometrische functies

Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn functies waarin $\sin$, $\cos$ (en $\tan$) voorkomen. De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al.

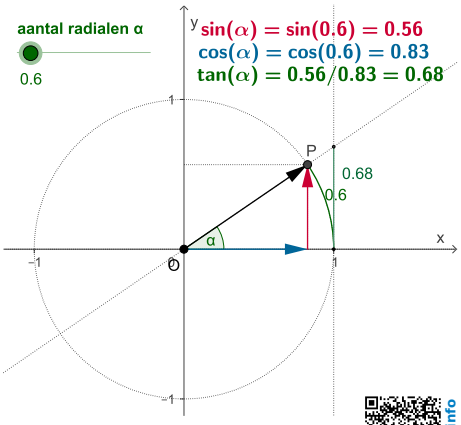
In deze eenheidscirkel geldt:
$\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

Dus de **tangensfunctie** is: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Deze functie is periodiek met periode π en heeft verticale asymptoten als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$f(x) = a\tan(b(x-c)) + d$ heeft

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c



meer info

Goniometrische formules

Goniometrische formules om te herleiden en/of vergelijkingen op te lossen:

Symmetrieformules	Verbanden tussen sin en cos
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Somformules	**Verdubbelingsformules**
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
Formule voor *a* sin(*x*) plus *b* cos(*x*)	
$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$	

meer info

Differentiëren van goniometrische formules

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel.

meer info

Harmonische trilling

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde zoals:

$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- De som van twee harmonische trillingen met dezelfde periode is weer een harmonische trilling.
- De som van twee harmonische trillingen is geen zuiver harmonische trilling, maar wel een periodiek verschijnsel.

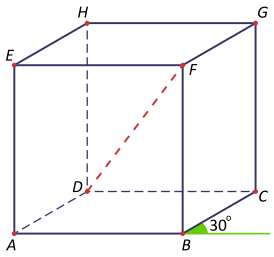
meer info

Spiekbriefjes bij Meetkunde in 3D

Parallelprojectie

Dit is een **parallelprojectie**. Dan geldt:

- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;
- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).



Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

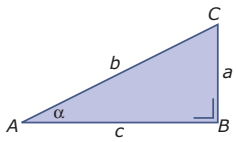
De meeste objecten zijn **samengestelde figuren**, bestaande uit de bekende basisvormen balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel.

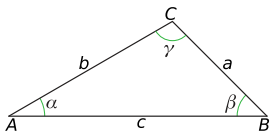
meer info

Hoeken en afstanden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken** en gebruik je:

- De **stelling van Pythagoras**: $c^2+a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$





Verder kun je **gelijkvormigheid** gebruiken. Voor het berekenen van lengtes gebruik je dan de vaste **vergrotingsfactor**.
Tenslotte zijn daar nog:

- De **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- De **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

meer info

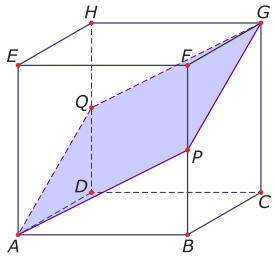
Oppervlakte en inhoud

figuur	oppervlakte A	inhoud/volume V
kubus $r \times r \times r$	$A = 6 \cdot r^2$	$V = r^3$
balk $l \times b \times h$	$A = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$V = l \cdot b \cdot h$
n-zijdig prisma $G \times h$	$A = 2 \cdot G \cdot h + n \cdot A_{\text{rechthoek}}$	$V = G \cdot h$
n-zijdige piramide $G \times h$	$A = G + n \cdot A_{\text{driehoek}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
bol met straal r	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
cilinder straal r hoogte h	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
kegel straal r hoogte h	$A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Worden de afmetingen van een lichaam k keer zo groot, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

meer info

Doorsneden construeren



Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak.

Bij het tekenen van een doorsnede gebruik je:

- Door drie punten bestaat één vlak.
- Door twee snijdende lijnen bestaat één vlak.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als lijnen elkaar kruisen liggen ze niet in één vlak.

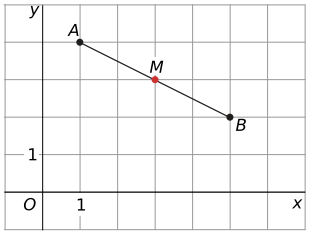
Om een doorsnede **op ware grootte** of op schaal te tekenen, moeten alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (op schaal).

meer info

Spiekbriefjes bij Plaats en beweging

Coördinaten in 2D

Een **cartesisch assenstelsel** is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde lineaire schaalverdeling hebben. In twee **dimensies**, dus in 2D, is het een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as, in 3D komt daar nog een z-as bij.



In 2D is het **midden** van lijnstuk AB met $A(x_A, y_A)$ en B aan $B(x_B, y_B)$ gelijk aan $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$ en is:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

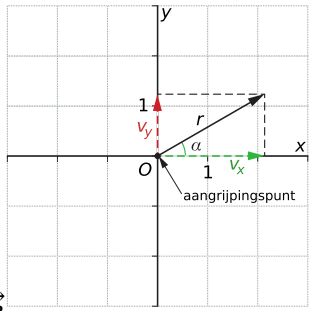
In een 3D cartesisch coördinatenstelsel gelden vergelijkbare formules.

meer info

Vectoren

Een **vector** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ heeft lengte r en **richtingshoek** α. De **kentallen** zijn:

- de x-**component** $v_x = r\cos(\alpha)$;
- de y-**component** $v_y = r\sin(\alpha)$.



En $r = |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

Deze vector heeft O als **aangrijpingspunt**.

De vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B is $\overrightarrow{AB}$.

Bij **scalaire vermenigvuldiging** wordt de vector met k vermenigvuldigd:

$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$.

Als $k = -1$ krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

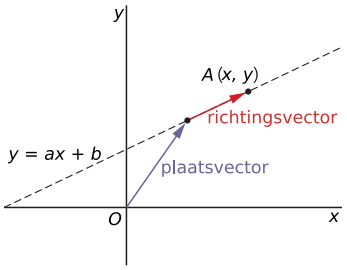
$\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** en **aftrekken** door dit met hun kentallen te doen.

meer info

Lijnen en snijpunten

De plaats een willekeurig punt A op een rechte lijn l afhankelijk van t beschrijf je met:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ van O naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$) op l



Neem lijn l door $B(-1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit is een **vectorvoorstelling** l. Voor elk punt op l is: $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Dus is de r.c. van de lijn $0{,}5$ en de vergelijking $y = 0{,}5x + 2{,}5$. Dit kun je ook vinden door t weg te werken uit $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

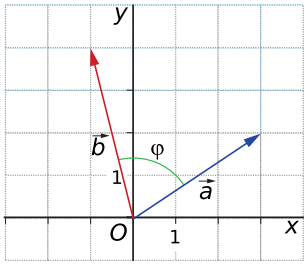
meer info

Hoeken en inproduct

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.



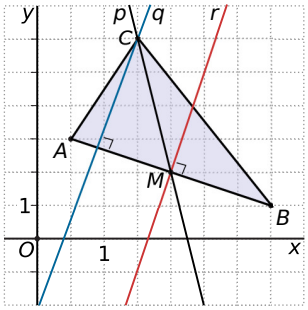
Er geldt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.
Dit gebruik je bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

meer info

Bijzondere lijnen

In ΔABC zijn drie **bijzondere lijnen** getekend:

- **zwaartelijn** p door C naar het midden M van AB;
- **hoogtelijn** q door C loodrecht op AB;
- **middelloodlijn** r door het midden M en loodrecht op AB.



De richtingsvector van een loodlijn is de **normaalvector** van de lijn waar hij loodrecht opstaat.

Van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (of een veelvoud ervan) een normaalvector. Dit gebruik je bij het berekenen van de **afstand van een punt tot een lijn**.
Elke driehoek heeft drie zwaartelijnen die door het **zwaartepunt** en drie middelloodlijnen die door het **middelpunt van de omgeschreven cirkel** gaan.

meer info