

Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel Specifiek (K1348)

Alle hoofdstukken / sectorneutraal

Maart 2023





Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog,
Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2023

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via info@math4all.nl. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConT_EXt.

Voorwoord 3

1 Algebra 5

- 1.1 Rekenen met variabelen 6
- 1.2 Breuken 13
- 1.3 Haakjes 19
- 1.4 Machten 27
- 1.5 Wortels 35
- 1.6 Formules herleiden 42
- 1.7 Totaalbeeld 49

2 Vergelijkingen 53

- 2.1 Basistechnieken 54
- 2.2 Balansmethode 61
- 2.3 Ontbinden 68
- 2.4 Breuken in vergelijkingen 75
- 2.5 Wortels in vergelijkingen 82
- 2.6 Totaalbeeld 87

3 Lineaire verbanden 91

- 3.1 Lineaire functies 92
- 3.2 Lineaire verbanden 99
- 3.3 Stelsels vergelijkingen 107
- 3.4 Lineaire modellen 114
- 3.5 Totaalbeeld 122

4 Kwadratische functies 127

- 4.1 Kwadratische functies 128
- 4.2 De abc-formule 137
- 4.3 Domein en bereik 145
- 4.4 Ongelijkheden 152
- 4.5 Totaalbeeld 158

5 Exponenten en machten 163

- 5.1 Exponentiële groei 164
- 5.2 Rekenregels voor machten 174
- 5.3 Exponentiële functies 183
- 5.4 Machtsfuncties 192
- 5.5 Totaalbeeld 201

6	Logaritmen	205
6.1	Logaritmen	206
6.2	Logaritmische functies	214
6.3	Logaritmische vergelijkingen	221
6.4	Totaalbeeld	228

7	Modelleren	233
7.1	Een model opstellen	234
7.2	Optimaliseren	242
7.3	Onderzoeksopdrachten	249

Register	252
-----------------	------------

Het lesmateriaal in dit boek kun je ook terugvinden op de website www.math4all.nl. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit boek op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.



Algebra

1.1	Rekenen met variabelen	6
1.2	Breuken	13
1.3	Haakjes	19
1.4	Machten	27
1.5	Wortels	35
1.6	Formules herleiden	42
1.7	Totaalbeeld	49

1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met variabelen (met letters), variabelen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

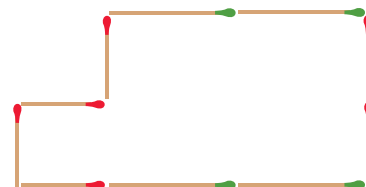
Voorkennis

- het begrip variabele (als letter) gebruiken in formules, in vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers (groen) met een lengte van a cm en korte lucifers (rood) met een lengte van b cm.



Figuur 1.1

- Kies $a = 3$ cm en $b = 2$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.
- Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 4$ cm en bereken opnieuw de omtrek en de oppervlakte van de figuur.
- Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.

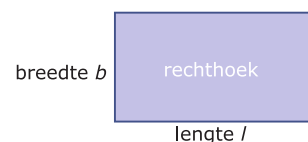
Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm.

- Teken een rechthoek met lengte l en breedte b . Schrijf de formules voor de oppervlakte en de omtrek van deze rechthoek in je figuur.
- Gebruik nu de gegeven waarden voor de oppervlakte en de omtrek en zoek waarden voor l en b die voldoen.

Uitleg

Van een rechthoek zijn lengte en breedte onbekend, je kunt er dus nog verschillende getallen voor kiezen. De lengte en de breedte zijn variabel, veranderlijk. Je noemt de lengte en de breedte daarom variabelen. Variabelen stel je in de wiskunde voor door letters, meestal kleine letters en cursief gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b . Voor deze rechthoek geldt dan:



Figuur 1.2

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de afspraak dat je het maalteken $\cdot$ weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.

Verder gebruik je bij het rekenen met variabelen dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

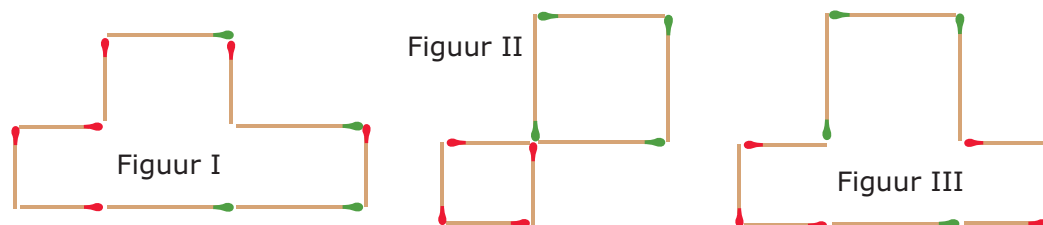
- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De gelijksoortige termen $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken.
- Maar zo kun je $2a + 5b$ niet korter schrijven. De ongelijksoortige termen $2a$ en $5b$ kun je niet optellen of aftrekken.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. (De wisseleigenschap voor optellen en vermenigvuldigen.)
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat herschrijven of herleiden van zo'n uitdrukking. Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg op pagina 6](#) hoe je met variabelen rekt. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De lange lucifers hebben lengte a , de korte hebben lengte b .



Figuur 1.3

- Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?
- Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?
- Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 3$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de [Uitleg op pagina 6](#) zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

- Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.
- Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.

Herleid nu zelf:

- $18a + 6b + 10a + 4b$
- $12p + 6q + 10p + 4p$
- $x + 3y + 5y + 8x + 7y$
- $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

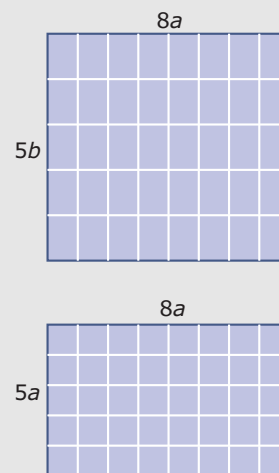
Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg.

Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je niet korter schrijven.
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Verder maak je regelmatig gebruik van de **wisseleigenschap** van optellen en vermenigvuldigen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en is $0x = 0$ en zo'n losse nul laat je weg.



Figuur 1.4

Voorbeeld 1

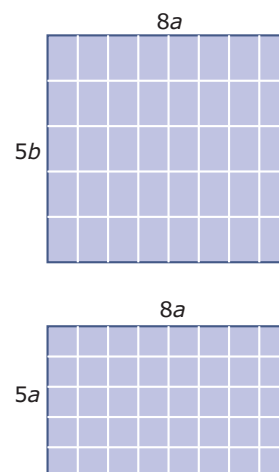
De omtrek van de bovenste rechthoek is $8a + 5b + 8a + 5b = 16a + 10b$.

De omtrek van de onderste rechthoek is $8a + 5a + 8a + 5a = 26a$.

Je ziet hoe gelijksoortige termen worden samengenomen en ongelijksoortige niet.

De oppervlakte van de bovenste rechthoek is $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte ab zijn.

De oppervlakte van de onderste rechthoek is $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte a^2 zijn.



Figuur 1.5

Opgave 3

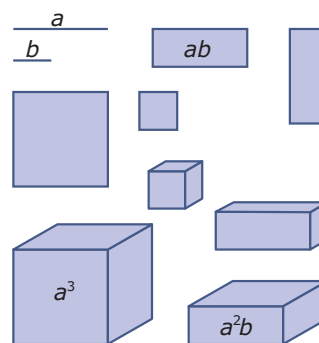
Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 8** hoe je variabelen optelt. Herleid nu zelf:

- $3a + 12b + 2a + 4b$
- $8p + q + 2p + q$
- $4a + 3b + 4a + a$
- $p + 6p + 5q$

Opgave 4

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het [werkblad](#).

- Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?



Figuur 1.6

Opgave 5

Herleid:

- $7b + b$
- $2abc + 8abc + bac$
- $12p \cdot 4q + 3qp$
- $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$
- $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$
- $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Opgave 6

Bekijk in [Voorbeeld 1 op pagina 8](#) hoe je variabelen vermenigvuldigt en soms daarna weer optelt. Herleid nu zelf:

- $4a \cdot 3b$
- $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$
- $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$
- $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

Voorbeeld 2

Bij het herleiden van uitdrukkingen met variabelen kun je ook met negatieve getallen werken en/of termen van elkaar aftrekken. Je ziet hier enkele voorbeelden.

- $9a - 7a = 9a + -7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a + -6b + -1a + 5b = 5a + -1a + -6b + 5b = 4a + -1b = 4a - b$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$

Opgave 7

Bekijk in [Voorbeeld 2 op pagina 9](#) hoe je met mintekens werkt bij het optellen en aftrekken van termen. Herleid nu zelf:

- $-7p - 5p$
- $3a - 5b + 2a + 7b$
- $3 + 2x - 5x - 7$

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 9** hoe je met mintekens werkt bij het herleiden als er ook vermenigvuldigingen voorkomen. Herleid nu zelf:

- a $-7p \cdot -5p$
- b $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$
- c $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 9

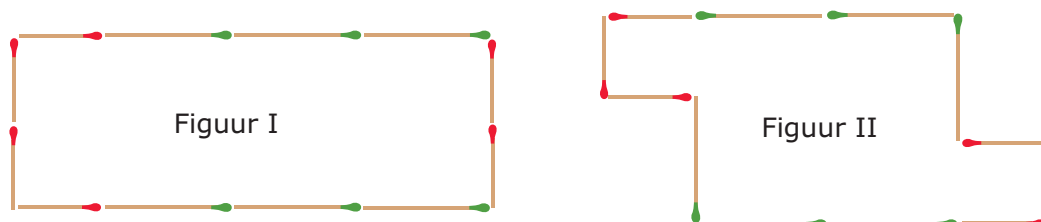
Herleid:

- a $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$
- b $-5xy - 3x \cdot -2y$
- c $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$
- d $-3 - 2p - 6 - 8p$
- e $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$
- f $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



Figuur 1.7

- a Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot ze zo kort mogelijk zijn.
- b Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 11

Herleid:

- a $7x + 20x$
- b $7x \cdot 20x$
- c $7x \cdot 20y$
- d $6x - x$
- e $6x \cdot -10xy$
- f $6x \cdot -20x - 15x \cdot -10x$

g $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$

h $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 12

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $r = -2$:

a $4p \cdot -2q + 6q \cdot p$

b $3p \cdot -5q \cdot r$

c $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$

d $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$

e $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$

f $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$

Opgave 13

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het **Practicum** vind je twee oefenvenster. In het linker venster oefen je het samennemen van gelijksoortige termen, in het rechter venster oefen je het vermenigvuldigen van variabelen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

Toepassen

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm . Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

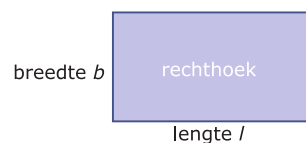
Dergelijke problemen kun je oplossen door gewoon getallen te proberen, zeker als de uitkomsten gehele getallen zijn.

Maar ook dan is het vaak handig om de gegevens eerst te ‘vertalen’ naar wiskundige uitdrukkingen. Zowel de lengte als de breedte zijn hier onbekend. Je kunt er daarom variabelen voor invoeren: noem de lengte bijvoorbeeld l en de breedte b .

De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 22$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.



Figuur 1.8

Opgave 14

Het probleem van **Uitleg op pagina 6** wordt nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

- a** De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.
- b** Maak een tabel zoals die hiernaast.
- c** Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?
- d** Welke twee getallen voldoen aan beide formules?

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2	12	24	14
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

Tabel 1.1



- e In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

Opgave 15

Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm.

Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Testen

Opgave 16

Herleid:

- a $2x - 3y + 4x + 5y$
b $2x \cdot -3y + 4x \cdot 5y$
c $2x \cdot -3y \cdot 4x \cdot 5y$

Opgave 17

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo kort mogelijk.

- a $4a + 5b - 3a - 7b$
b $p^2 - 2pq + p^2 + 3pq$
c $-2ab \cdot b + 2a^2 \cdot b - 2a \cdot -b^2$
d $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

1.2 Breuken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- breuken met variabelen vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- rekenen met breuken met variabelen.

Voorkennis

- uitdrukkingen met variabelen herleiden;
- rekenen met breuken zonder variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- Bereken de som van beide breuken.
- Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.
- Hoeveel is het product van beide breuken?
- Bereken $\frac{5}{a} / \frac{3}{b}$.
- Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je er voor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 5 en 4 gemeen hebben. Dat is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat 6 en 4 gemeen hebben. Dat is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.

- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat b en d gemeen hebben. Dat is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het kleinste veelvoud dat a en $2a$ gemeen hebben. Dat is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

En nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig, je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12).
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$).

Belangrijk is nog dat bij breuken de noemer niet 0 kan zijn, want delen door 0 heeft geen betekenis. Daar moet je voortdurend van uit gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 13** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} / \frac{3}{b}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

- Maak beide breuken gelijknamig.
- Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} / \frac{3}{5a}$.
- Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

- Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.
- Tel beide breuken op.
- Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ en } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc} \text{ (beide breuken met } b \cdot d \text{ vermenigvuldigen)}$$

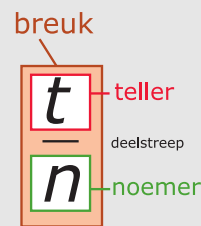
$$\text{Je ziet nu dat } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Dus is delen door een breuk hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Ook daarvan kun je gebruik maken bij delen.

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** van de noemers van de breuken.



Figuur 1.1

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de breuken $\frac{4ab^2}{3ab}$ en $\frac{5b^2}{bc}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.

Neem aan, dat $a \neq 0$, $b \neq 0$ en $c \neq 0$.

Antwoord

Eerst vereenvoudigen:

$$\frac{4ab^2}{3ab} = \frac{4b}{3} \text{ (teller en noemer delen door } ab \text{)}.$$

$$\frac{5b^2}{bc} = \frac{5b}{c} \text{ (teller en noemer delen door } b \text{)}.$$

Nu $\frac{4b}{3}$ en $\frac{5b}{c}$ gelijknamig maken.

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 3 en c is $3c$.

De eerste breuk wordt $\frac{4b}{3} = \frac{4bc}{3c}$ (teller en noemer keer c).

De tweede breuk wordt $\frac{5b}{c} = \frac{15b}{3c}$ (teller en noemer keer 3).

Opgave 4

Vereenvoudig de breuken $\frac{3pq}{5p^2}$ en $\frac{4r}{2p}$ en maak ze vervolgens gelijknamig.

Neem aan dat $p \neq 0$.

Opgave 5

Maak de volgende breuken gelijknamig.

- a $\frac{16}{4p}$ en $\frac{2}{3}$.
- b $\frac{a^2b}{3a}$ en $\frac{ab^2}{2b}$.
- c $\frac{3k^2l}{6kl}$ en $\frac{3kl}{2k^2}$.

Voorbeeld 2

Gegeven de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4p+3q}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} \div \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} \div \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 6

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- a Bereken de som en het product van beide breuken.
- b Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

- c Bereken de som en het product van beide breuken.
- d Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 7

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoeft je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.

Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

- a $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$
- b $\frac{-3b}{ab} \div \frac{2a}{a^2}$
- c $\frac{2pq}{p} - \frac{15p}{3}$
- d $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Oefenen

Opgave 8

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \div \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 9

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

a $\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}$

b $\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b}$

c $\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

e $\frac{6}{a} \div \frac{1}{2a}$

f $\frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Opgave 10

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$

b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$

c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{2p}{pq} \div \frac{6}{q}$

Opgave 11

Oefen nu het rekenen met breuken met variabelen via [Practicum](#).

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het ‘gewogen gemiddelde’ (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden.

In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.

Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...



Figuur 1.2

Opgave 12

Bekijk hierboven het probleem van het berekenen van de gemiddelde snelheid van de vlucht van Amsterdam naar Moskou over de heen en de terugreis samen gerekend.

- a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de [Wikipedia: Harmonisch gemiddelde](#): “De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.”

- b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Testen

Opgave 13

Reken met de twee breuken $\frac{p}{2q}$ en $\frac{3p}{5q}$.

Neem aan dat $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- a Bereken de som en het product van beide breuken.
- b Bereken $\frac{p}{2q} - \frac{3p}{5q}$.
- c Bereken $\frac{p}{2q} \div \frac{3p}{5q}$.
- d Neem $p = 4$ en $q = -5$ en bereken som en product van de gegeven breuken.

Opgave 14

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

- a $\frac{2kl}{5lm} - \frac{5lm}{20m^2}$.
- b $\frac{2kl}{5lm} \div \frac{5lm}{20m^2}$.

1.3 Haakjes

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de juiste rekenvolgorde gebruiken wanneer er van haakjes sprake is;
- haakjes wegwerken;
- ontbinden in factoren.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve getallen en breuken.
- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) met uitdrukkingen waarin variabelen voorkomen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.

- a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.
- b Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.
- c Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

	3	7
2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 7$

Figuur 1.1

Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.

- a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.
- b Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.
- c Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

	3	7
2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 7$
5	$5 \cdot 3$	$5 \cdot 7$

Figuur 1.2

Uitleg

De figuren hiernaast laten zien dat

- $2 \cdot (x + 7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$
Het product van de factoren 2 en $x + 7$ herleid je zo tot de tweeterm $2x + 14$.
- $(x + 5) \cdot (x + 7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$
Het product van de factoren $x + 5$ en $x + 7$ herleid je zo tot de drieterm $x^2 + 12x + 35$.

Een product bestaat uit factoren en een optelling (of aftrekking) uit termen. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x + 7$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

	x	7
2	$2 \cdot x$	$2 \cdot 7$

	x	7
x	$x \cdot x$	$x \cdot 7$
5	$5 \cdot x$	$5 \cdot 7$

Figuur 1.3

Dit is de verdeel-eigenschap of ook wel distributieve eigenschap van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel haakjes wegwerken of haakjes uitwerken. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $2x + 14 = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (x + 7)$
- $x^2 + 12x + 35 = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = (x + 7) \cdot (x + 5)$

Dit heet ontbinden in factoren omdat je nu van een tweeterm of een drieterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de grootste gemeenschappelijke deler van beide termen. Je kunt dan die deler buiten haakjes halen. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg op pagina 19](#) hoe je haakjes kunt uitwerken.

- Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.
- Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)(x + 4) = 2x^2 + 14x + 12$.
- Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.

Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes uitwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + -3)$.

- Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?
- Werk van $(x + 5)(2x - 3)$ de haakjes uit.
- Laat met behulp van de verdeel eigenschap zien, dat $-(x - 3) = -x + 3$.

Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

- $5(a + 2b)$
- $5a(a - 2b)$
- $(x + 4)(x + 5)$
- $(2x - 4)(x - 5)$
- $3(2p + 4) + 5(4 - p)$
- $3(2p + 4) - (4 - p)$

Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes uitwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

- Bekijk de uitdrukking $6x + 9$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- Bekijk de uitdrukking $8x - 6x^2$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- Bekijk de uitdrukking $2x^2 - 6x + 12$. Welke grootste gemeenschappelijke deler hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- Bekijk de uitdrukking $x^2 + 5x + 6$. Is er een grootste gemeenschappelijke deler van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De figuren hiernaast laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Het product van de factoren a en $b + c$ herleid je zo tot de **tweeterm** $ab + ac$.
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
Het product van de factoren $a + b$ en $c + d$ herleid je zo tot de **vierterm** $ac + ad + bc + cd$.

Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

	b	c
a	$a \cdot b$	$a \cdot c$

	c	d
a	$a \cdot c$	$a \cdot d$
b	$b \cdot c$	$b \cdot d$

Figuur 1.4

Dit is de **verdeeleeigenschap** of ook wel **distributieve eigenschap** van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel **haakjes wegwerken**. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren** omdat je nu van een tweeterm of een vierterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD **buiten haakjes halen**. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Voorbeeld 1

Hier zie je nog enkele voorbeelden van haakjes wegwerken.

- $3(5 + 2x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2x = 15 + 6x$
- $-2k(k - 4) = -2k(k + -4) = -2k \cdot k + -2k \cdot -4 = -2k^2 + 8k$
- $(p + 3)(p - 4) = (p + 3) \cdot (p + -4) = p \cdot p + -4 \cdot p + 3 \cdot p + 3 \cdot -4 = p^2 - p - 12$
- $2(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - x + x - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$
- $2(q + 1) - 2(2 - q) = 2q + 2 - 4 + 2q = 4q - 2$
- $q(q + 1) - (q - 1) = q^2 + q - q + 1 = q^2 + 1$

Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zo ver mogelijk.

- $2x + 3(4 - x)$
- $(2k + 3)(k + 4)$
- $4x(x - y + 5)$
- $3(2x - 1)(4 - x)$
- $2(x^2 - 3x) - x(2 - x)$
- $(6 - p) \cdot -p + 2(p - 3)$

Opgave 5

Bij het uitwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- a Laat zien, dat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- b Laat zien, dat: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller uitwerken. Pas dit bij het uitwerken en herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

- c $(k - 5)(k + 5)$
- d $(x + 10)^2$
- e $(3p + 1)(1 - 3p)$
- f $(2x - 3)^2$
- g $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$
- h $x(5x - 4) - (x - 2)(x + 2)$

Opgave 6

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

- a Wat is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van x en $x + 1$?
- b Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.
- c Schrijf de breuk zonder haakjes.

Voorbeeld 2

Een uitdrukking zonder haakjes kun je soms ontbinden in factoren door de grootste gemeenschappelijke deler van alle termen buiten haakjes te halen. Hier zie je er enkele voorbeelden van.

- $5x + 10 = 5 \cdot x + 5 \cdot 2 = 5(x + 2)$
- $-5x + 10 = -5 \cdot x - 5 \cdot 2 = -5(x - 2)$
- of
- $-5x + 10 = 5 \cdot -x + 5 \cdot 2 = 5(-x + 2)$
- $-5x^2 - 10x = -5x \cdot x - 5x \cdot 2 = -5x(x + 2)$
- $5x^2 - 10x + 15 = 5 \cdot x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 5(x^2 - 2x + 3)$
- $5x^2 - 10xy = 5x \cdot x - 5x \cdot 2y = 5x(x - 2y)$
- $5xy - 5y = 5y \cdot x - 5y \cdot 1 = 5y(x - 1)$

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 2 op pagina 22** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

- a Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?
- b Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

Opgave 8

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

- a $6x + 8y$
- b $14k^2 - 21k$
- c $-4xy - 12y^2 + 6y$
- d $p^2 - p$
- e $3a^2 + 16ab$
- f $-12x^2 - 6x + 18$

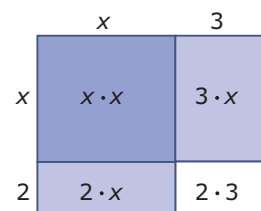
Voorbeeld 3

De uitdrukking $x^2 + 5x + 6$ kun je niet ontbinden in factoren door een grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, die is er namelijk niet (behalve 1).

In de figuur hiernaast zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Maar hoe kom je nu aan die 2 en die 3?

Je ziet in de figuur dat de term $5x$ ontstaat door de oppervlaktes $2x$ en $3x$ op te tellen en dat de term 6 de oppervlakte van het rechthoekje van 2 bij 3 is. Kortom: het getal in de term met x is de som van 2 en 3 en het getal in de term zonder x is het product van 2 en 3.



Figuur 1.5

Wil je een uitdrukking zoals $x^2 + 5x + 6$ ontbinden, dan zoek je twee gehele getallen die opgeteld 5 en vermenigvuldigd 6 opleveren. Je gaat dan systematisch alle mogelijkheden voor de vermenigvuldiging na. Dit heet de som-en-productmethode.

product	getallen	som
6	6 en 1	7
6	3 en 2	5

Tabel 1.1

Opgave 9

Neem **Voorbeeld 3 op pagina 23** eerst door.

Bekijk de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$.

Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

- a Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?
- b Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?
- c Schrijf de juiste ontbinding op.
Controleer je ontbinding door de haakjes weer weg te werken.
Bekijk de uitdrukking $x^2 - 6x + 8$.
Je wilt deze uitdrukking ontbinden. Nu moet je ook met negatieve getallen rekenen.
- d Maak een tabel van alle gehele (ook negatieve) getallen die vermenigvuldigd 8 opleveren. Maak daarmee je ontbinding af.

Opgave 10

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

- a $x^2 + 7x + 12$
- b $x^2 + 12x + 20$
- c $x^2 + 13x + 12$
- d $x^2 + 2x + 1$
- e $x^2 - 19x + 90$
- f $x^2 + 18x - 40$

Opgave 11

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

- a $x^2 - 7x + 12$
- b $x^2 + 2x - 48$
- c $x^2 - 9$
- d $x^2 - 9x$
- e $2x^2 + 16x + 24$
- f $3x^2 - 48$

Oefenen

Opgave 12

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk.

- a $2x(x + 5)$
- b $2x - (x + 5)$
- c $(2x - 1)(x + 5)$
- d $3(2x - 1) - 4(x + 5)$
- e $(x + 5)^2$
- f $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$
- g $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$
- h $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

Opgave 13

Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

- a $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$
- b $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

Opgave 14

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

- a $14x + 21y$
- b $3p^2 - 6pq$
- c $-4a^2b - 4ab$
- d $p^3 - 3p^2 - p$

Opgave 15

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

- a $x^2 + 17x + 30$
- b $x^2 - x - 12$
- c $16 - 10x + x^2$
- d $k^2 - 100$

Opgave 16

Ontbind in factoren.

- a $12a^2 - 8a$
- b $6p - 16 + p^2$
- c $\frac{1}{2}k^2 - 8$
- d $3x^2 - 6x - 9$
- e $-4pq + 8pq^2$
- f $8x - 16 - x^2$

Opgave 17

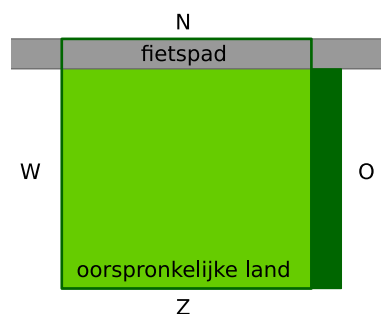
Je kunt zowel het haakjes wegwerken als het ontbinden in factoren via het [Practicum](#) oefenen.

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijt raakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?



Figuur 1.6

Opgave 18

Bekijk het probleem dat hierboven wordt beschreven.

De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend.

Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele x kiezen.

- a** Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.

- b** Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?
- c** Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.
- d** Welke conclusie trek je?

Opgave 19

De boer vraagt zich af of hij ervoor kan zorgen dat hij echt evenveel land terug krijgt als hij moet inleveren.

Er wordt afgesproken dat er van het vierkante land aan de Noordkant 3 m afgaat voor het fietspad, maar dat de boer ter compensatie 4 m extra krijgt aan de Oostkant.

Het oorspronkelijke land heeft een oppervlakte van $x^2 \text{ m}^2$.

- a** Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het land na de ruilverkaveling?
- b** Bij welke waarde van x wordt de boer nu netjes gecompenseerd?

Testen

Opgave 20

Werk de haakjes weg:

- a** $x(x - 5)$
- b** $(x + 8)(x - 5)$
- c** $15 - (10 - 3p)$
- d** $15 - (10 - p)^2$

Opgave 21

Ontbind in factoren:

- a** $x^2 - 10x$
- b** $x^2 - 10x + 9$
- c** $\frac{1}{2}x^2 - 10x$
- d** $\frac{1}{2}x^2 - 10x - 48$

1.4 Machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met het begrip macht;
- de rekenregels voor machten toepassen.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde.
- werken met de wetenschappelijke en de technische notatie.

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

- a Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2 ? En wat stelt 5^3 voor?

5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds door gaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.

- b Hoeveel is 5^4 ?
- c Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- d Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.
- e Leg uit waarom $(5^4)^2 = 5^8$.
- f Hoeveel is $(5^4)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V2

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je al snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

- a Hoeveel is 5^{10} ?
- b Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?

Voorbeeld kettingbrief

*Stuur deze brief door
naar vijf van jouw
vrienden en maak 1 euro
over naar ...*

Figuur 1.1

Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.

- c Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.
- d In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?

Uitleg

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Het getal waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.



Figuur 1.2

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $5^0 = 1$.
- Als je een macht tot een macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(5^4)^2 = 5^8$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $5^{-3} = 5^{0-3} = 5^0 / 5^3 = \frac{1}{5^3}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.

Een getal zoals 135 miljard = 135000000000 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $1,35 \cdot 10^{11}$ en in de technische notatie als $135 \cdot 10^9$.

Een getal zoals 31 miljoenste = 0,000032 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als: $3,2 \cdot 10^{-5}$ en in de technische notatie als $32 \cdot 10^{-6}$.

Zowel in de wetenschappelijke notatie als in de technische notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$. Alleen bij de wetenschappelijke notatie is $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal.

En bij de technische notatie is $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg op pagina 28** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

- a Je rekenmachine kan $5^{200} / 5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.

b Bereken $\frac{19^{121} \cdot (19^{50})^2}{19^{220}}$.

Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.

- c Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.
- d Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.
- e Bereken $(15^{14})^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk. Neem aan dat $a \neq 0$.

- a $a^5 \cdot a^2$
- b $3a^5 \cdot 4a^2$
- c $3a^5 / 4a^2$
- d $(3a^5)^4$
- e $(-2a^3)^4 \cdot a^3 / (-2a^5)^3$

Opgave 3

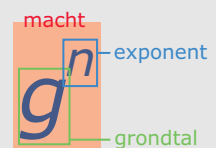
De omtrek van de Aarde is 40000 km.

- a Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie en in de technische notatie.
- b Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke en in de technische notatie.
- c Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de technische notatie rekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n . Het getal g waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren n dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.



Figuur 1.3

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $g^a / g^b = g^{a-b}$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $g^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de wetenschappelijke notatie of de technische notatie.

In de **wetenschappelijke notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

In de **technische notatie** schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud is.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het werken met machten. Denk er om dat je alleen gelijksoortige termen kunt optellen en aftrekken.

- $2a^7 \cdot 5a^4 = 2 \cdot 5 \cdot a^7 \cdot a^4 = 10a^{7+4} = 10a^{11}$
- $\frac{2a^7}{5a^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^7}{a^4} = 0,4a^{7-4} = 0,4a^3$
- $\frac{5a^4}{2a^7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^4}{a^7} = 2,5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2,5}{a^3}$
- $(-2a^3)^4 = -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 = 16a^{12}$
- $(-2a^3)^4 + (a^2)^6 = 16a^{12} + a^{12} = 17a^{12}$
- $18a^2b^3 - (2ab)^2 \cdot 3b = 18a^2b^3 - 12a^2b^3 = 6a^2b^3$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in [Voorbeeld 1 op pagina 30](#) en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- a $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$
- b $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$
- c $(4a)^2 - 4a^2$
- d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$
- e $8a^3 \cdot 2ab^2 - (2a^2b)^2$
- f $\frac{2a \cdot (-2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

- a $2p^3(1 - 6p^2)$
- b $(x^2 - 4)(x^2 + 1)$
- c $(y^3 - 2)^2$
- d $4k^2(k + 3) - 2k(k^2 - 4)$
- e $(4 + 3k^2)^2 - (k^2 - 1)(k^2 + 1)$
- f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

- a $2k^4 + 6k^3$
- b $a^2b^3 - 4a^3b^5$
- c $x^3 - 4x$
- d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Voorbeeld 2

Deze getallen zijn geschreven in de technische notatie: $a = 36 \cdot 10^{12}$, $b = 1,2 \cdot 10^{12}$, $c = 1,2 \cdot 10^{-6}$ en $d = 900 \cdot 10^{-9}$.

Bereken $a + b$, $a \cdot c$, $c - d$ en a/d . De antwoorden geef je dan natuurlijk ook in de wetenschappelijke notatie!

Antwoord

Let vooral op het werken met de machten van 10. Alleen gelijksoortige uitdrukkingen mag je optellen of aftrekken.

- $a + b = 36 \cdot 10^{12} + 1,2 \cdot 10^{12} = 37,2 \cdot 10^{12}$
- $a \cdot c = 36 \cdot 10^{12} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 43,2 \cdot 10^6$
- $c - d = 1,2 \cdot 10^{-6} - 900 \cdot 10^{-9} = 12000 \cdot 10^{-9} - 900 \cdot 10^{-9} = 300 \cdot 10^{-9}$
- $\frac{a}{d} = \frac{36 \cdot 10^{12}}{900 \cdot 10^{-9}} = 0,04 \cdot 10^{21} = 40 \cdot 10^{18}$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 31** zie je hoe je met getallen in de technische notatie rekent.

- a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.
- b Bereken $a \cdot d$.
- c Bereken $a - b$.
- d Bereken b^3 .
- e Waarom is $a - c \approx a$?

Opgave 8

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon.

$$1 \text{ AE} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km.}$$

Gebruik de wetenschappelijke notatie.

- a Hoeveel AE is 1 km?
- b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?
- c Pluto bevindt zich ongeveer $5,9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?
- d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^8$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?



Figuur 1.4

Oefenen

Opgave 9

Bereken $\frac{8^{60} \cdot 2^{200}}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.

Opgave 10

Werk eventuele haakjes uit en herleid zover mogelijk.

- a $3p^2q^3 \cdot -2pq^2$
- b $\frac{3p^2q^3}{-2pq^2}$
- c $(3k^2)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$
- d $3a^2(ab^2 - 2b) - 2ab(a^2b - a)$
- e $(x^3 + 5)^2 - x^2 \cdot x^4$
- f $\frac{2a^2b + 3ab^2}{2ab}$
- g $p^5(p^2 - 4)(p^2 + 1)$
- h $2x(3y^2)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

- a $12k^6 - 18k^3$
- b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$
- c $x^5 - x^4 - 2x^3$
- d $4x - 8x^2 + 4x^3$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1,66 \cdot 10^{-24}$ gram.

- a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?
Geef je eindantwoord in de technische notatie.

- b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.

- c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

- d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

Oefen het werken met machten van variabelen via het [Practicum](#).

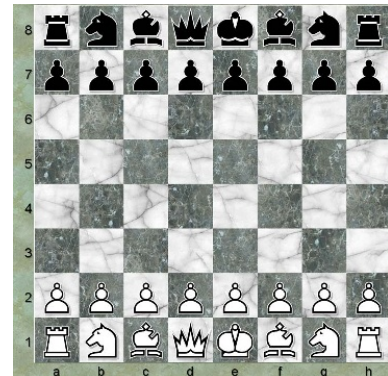
Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Sissah ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah ben Dahir zei: "Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken."

De koning lachte en antwoordde: "Is dat echt alles dat je wilt hebben?" en hij gaf opdracht het graan uit te betalen.

Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk het verhaal van Sissah ben Dahir.

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

- Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?
- Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?
- Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

- Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?
Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.
- Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in [Toepassen op pagina 33](#).

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

- Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?
- Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

- Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.



Testen

Opgave 16

Herleid zo ver mogelijk:

a $25a^3b^4 \cdot 10ab^3$

b $\frac{25a^3b^4}{10ab^3}$

c $(2a^3 - 4b)^2$

d $(x^4 - 2)(5 + x^4)$

Opgave 17

Ontbind in factoren:

a $3p^5 - 6p^4$

b $3p^5 - 6p^4 - 24p^3$

1.5 Wortels

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met het begrip wortel en rekenen met wortelvormen;
- werken met hogere machtswortels;
- werken met variabelen binnen wortelvormen.

Voorkennis

- rekenen met positieve en negatieve decimale getallen en breuken met de juiste rekenvolgorde;
- rekenen met variabelen;
- het begrip macht en rekenen met machten.

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.

Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.

Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

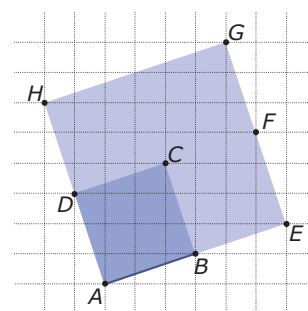
- a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

- c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.
- d Laat ook zien, dat $2 \cdot (2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$.



Figuur 1.1

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.

Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.

Derde machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

- a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

- c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Uitleg

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Zo geldt in het algemeen:

$$\sqrt{a^2} = a \text{ als } a \geq 0.$$

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen. Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Je weet al hoe dat gaat:

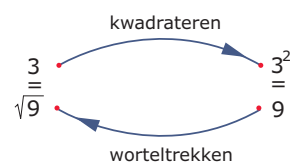
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derde machts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierde machts worteltrekken, enz.

Met dergelijke hogere machtswortels kun je op dezelfde manier rekenen als met ‘gewone’ wortels. Nu is:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0.$$

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.



Figuur 1.2

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 36** wordt behalve over ‘gewone’ wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

- $\sqrt[3]{64}$
- $\sqrt[3]{343}$
- $\sqrt[4]{16}$
- $\sqrt[4]{-16}$
- $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg op pagina 36** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

- Waarom is een wortel wel een ‘tweede machtswortel’?
- Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
- $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

- e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met ‘gewone’ wortels. Toch is er een verschil.

- a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.
b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a . Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$
d $\frac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.

- e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **nde machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een n de macht. Zo geldt in het algemeen:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0.$$

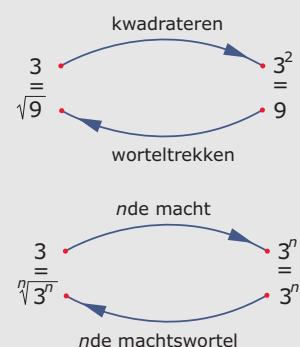
Het rekenen met n de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn.

Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b .



Figuur 1.3

Voorbeeld 1

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels enkele uitdrukkingen kunt vereenvoudigen.

- $\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = \sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
- $\sqrt{3a^2} + 2a\sqrt{12} = \sqrt{a^2 \cdot 3} + 2a\sqrt{4 \cdot 3} = a\sqrt{3} + 2a \cdot 2\sqrt{3} = 5a\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1 op pagina 37** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- a $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
- b $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$
- c $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)
- d $3\sqrt{a^2b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)
- e $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$
- f $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

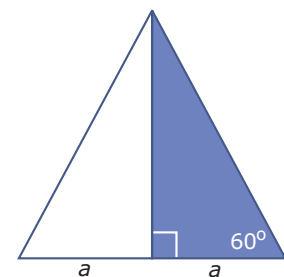
Opgave 5

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoekszijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben. Met de stelling van Pythagoras kun je dan de hypotenusa (een andere, meer internationale, naam voor de langste zijde van een rechthoekige driehoek) berekenen.

- a Neem $a = 4$. Toon aan dat de hypotenusa dan een lengte van $4\sqrt{2}$ heeft.
- b Toon aan dat de hypotenusa altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.

Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.

- c Neem $a = 4$. Laat zie dat de langste rechthoekszijde $4\sqrt{3}$.
- d Toon aan dat in het algemeen de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$ heeft.



Figuur 1.4

Opgave 6

Van een kubus zijn alle zijvlaksdagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a .

- a Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $4\sqrt{2}$ is.
- b Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $a\sqrt{2}$ is.
- c Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $4\sqrt{3}$ is.
- d Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $a\sqrt{3}$ is.

Voorbeeld 2

Bij breuken met wortels in de noemer is het vaak handig om die wortel weg te werken uit de noemer. Dat kun je doen door teller en noemer met die wortel te vermenigvuldigen. Bekijk deze voorbeelden maar.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

Bij hogere machtswortels is dit minder eenvoudig.

Opgave 7

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2 op pagina 38** en loop ze even na.

Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

c $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$

d $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$

e $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

f $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2 op pagina 38**.

a Waar wordt bij $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vermenigvuldigd met $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?

b Waarom is $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

c Laat zelf zien dat $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Vereenvoudig, neem aan dat $a \geq 0$.

a $\sqrt{a^4}$

b $\sqrt{a^5}$

c $\sqrt{a^{10}}$

Opgave 10

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $(\sqrt{6} - 1)^2$

d $(\sqrt[4]{10})^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

$$\text{f} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$$

$$\text{g} \quad \frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$\text{h} \quad \frac{2}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{2}$$

Opgave 11

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a \geq 0$ en $b \geq 0$.

$$\text{a} \quad \sqrt{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\text{b} \quad \frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$$

$$\text{c} \quad \sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$$

Opgave 12

Een balk heeft ribben met een lengte van a , $2a$ en $3a$ scm.

- a Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdagonalen.
- b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Opgave 13

Oefen het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het [Practicum](#).

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.

De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek.

De zijden van die driehoek zijn a , a en $a\sqrt{2}$.

De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek.

De zijden van die driehoek zijn a , $2a$ en $a\sqrt{3}$.



Figuur 1.5

Opgave 14

Bekijk de twee tekendriehoeken hierboven.

Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

- a Laat zien, dat de langste zijde $a\sqrt{2}$ cm is.
- b Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?
Neem nu de andere tekendriehoek.
- c Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?
- d Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 12 cm is?

**Opgave 15**

Je tekent op de langste zijde van een driehoek met hoeken van 90° , 60° en 30° een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zo krijg je een vierhoek met twee rechte hoeken en een kortste zijde van a cm.

Hoe groot is de omtrek van deze vierhoek?

Testen**Opgave 16**

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$.

a $\sqrt{a^3} + 2a\sqrt{a}$

b $\frac{a^2}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{a^3}$

Opgave 17

Herleid tot een zo kort mogelijke uitdrukking. Neem aan dat $p \geq 0$.

a $(\sqrt{48p} + 2\sqrt{3p})^2$

b $\frac{\sqrt{48p^2}}{2\sqrt{3p}} + \sqrt{9p}$

Opgave 18

Bereken de lengte van de ribben van een kubus met een lichaamsdiagonaal van 12 cm.

1.6 Formules herleiden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met formules in het algemeen;
- formules met twee variabelen herleiden naar een functienotatie met een functievoorschrift.

Voorkennis

- rekenen met getallen en variabelen met de juiste rekenvolgorde;
- bij formules met twee variabelen een tabel en een grafiek tekenen.

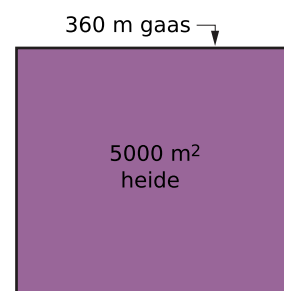
Verkennen

Opgave V1

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b .

- Stel bij dit probleem een formule op passend bij de gegeven omtrek en een formule passend bij de gegeven oppervlakte.
- Schrijf beide formules in de vorm $l = \dots$
- Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?



Figuur 1.1

Uitleg

Een herder wil een stuk heide afgrenzen met 360 m gaas om er schapen te laten grazen. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,5 ha (dus 5000 m²). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk heide.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b , beide in m.

Voor de oppervlakte geldt dan de formule $l \cdot b = 5000$.

Voor de omtrek geldt dan de formule $2l + 2b = 360$.

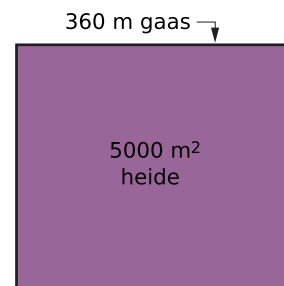
Beide formules geven een verband tussen de twee variabelen l en b .

Je kunt beide verbanden vergelijken door de formules zo te herschrijven (herleiden) dat de éne variabele is uitgedrukt in de andere. Bijvoorbeeld door l uit te drukken in b , ofwel beide formules te herleiden naar de vorm $l = \dots$

Dat doe je met de balansmethode:

$$\begin{array}{rcl} 2l + 2b & = & 360 \\ l + b & = & 180 \\ l & = & 180 - b \end{array}$$

Red arrows indicate the steps: a red arrow from the second equation to the first, labeled 'beide zijden : 2'; and a red arrow from the second equation to the third, labeled 'beide zijden $-b$ '.



Figuur 1.2

Op dezelfde manier wordt de andere formule $l = \frac{5000}{b}$.

Je zegt nu wel dat je twee keer l als functie van b hebt geschreven.

Dat noteer je als l_b of als $l(b)$.

Let er op dat deze haakjes niet dezelfde betekenis hebben als de haakjes die je gebruikt om de rekenvolgorde te beïnvloeden, deze haakjes kun je niet wegwerken!

Opgave 1

Bekijk in de uitleg hoe je de twee formules herleidt naar een vorm waarin l is uitgedrukt in b .

- Hoe gaat dat met de formule voor de oppervlakte?
- Waarom moet l dan op de verticale as?
- De functie $l(b) = 180 - b$ beperkt de waarden die je voor b kunt kiezen en daarmee ook de uitkomsten voor l . Leg uit welke waarden je voor b kunt kiezen.
- Teken beide grafieken in één assenstelsel en probeer de vraag te beantwoorden.

Opgave 2

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = \dots$

- $x^2 - 2y = 7x^2 - 4x$
- $2x - 4y = 13$
- $40 + 5xy = 0,5x - 30$
- $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem met zijden van x cm. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft met hoogte h cm.

- Welke formule kun je opschrijven voor de oppervlakte A van het doosje?
De doosjes krijgen een oppervlakte van 800 cm^2 .
- Welke formule kun je opschrijven voor $h(x)$, dus voor h als functie van x ?
- Bereken $h(8)$, dat is de waarde van h als $x = 8$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **formule** is een zin waarin variabelen voorkomen. Vaak beschrijven formules een verband tussen die variabelen, maar niet altijd. Formules hebben meestal de vorm van een vergelijking, dus een zin met een isgelijktteken zoals $l + b = 180$.

Als een formule een verband beschrijft tussen twee variabelen, kun je er een grafiek bij tekenen. Je maakt dan eerst een tabel. Vervolgens zet je de gevonden punten in een assenstelsel.

In dat geval is het meestal handig om de formule te herleiden naar een vorm waarin de éne variabele een **functie** is van de andere.

Bijvoorbeeld een formule zoals $2x + 4y = 5$ kun je schrijven als $y = -0,5x + 1,25$.

Nu is y een functie van x , notatie: $y(x) = -0,5x + 1,25$.

Je kunt zo'n functie ook een naam geven, bijvoorbeeld f .

Dan zeg je dat $y = f(x)$ met $f(x) = -0,5x + 1,25$ als **functievoorschrift**.

Denk er wel om dat de haakjes in $y(x)$ en $f(x)$ niets te maken hebben met de haakjes die je gebruikt bij het rekenen (met variabelen), je kunt ze niet wegwerken.

Met iets als $f(2)$ bedoel je nu de waarde van y bij $x = 2$.

Bij het herleiden van formules naar functies gebruik je algebraïsche technieken als de balansmethode, haakjes wegwerken, rekenen met breuken met variabelen, etc.

Voorbeeld 1

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

- $2xy - 4x = 15$
- $y(x - 2) = 10$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

Antwoord

- $2xy - 4x = 15$ geeft $2xy = 4x + 15$ en $y = \frac{4x+15}{2x} = 2 + \frac{15}{2x}$
- $y(x - 2) = 10$ geeft $y = \frac{10}{x-2}$
- $\frac{1}{y} + 2x = 10$ geeft $\frac{1}{y} = -2x + 10$ en $y = \frac{1}{-2x+10}$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ geeft $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{2x-3}{3x}$ en $y = \frac{3x}{2x-3}$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 44** zie je hoe je formules kunt herleiden.

- Laat zien hoe je bij de eerste formule komt aan $y = 2 + \frac{15}{2x}$
- Je hebt de eerste formule herleid tot $f(x) = 2 + \frac{15}{2x}$.
Bereken nu $f(3)$.
- Waarom kun je $f(0)$ niet berekenen?
- De tweede formule is herleid tot $g(x) = \frac{10}{x-2}$.
Bereken $g(7)$.
- Welke waarde van x levert in de tweede formule geen waarde van y op?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 44** het herleiden van de derde formule.

- Laat zien hoe je bij de derde formule komt aan $y = \frac{1}{-2x+10}$
- De derde formule heeft de vorm $h(x) = \frac{1}{-2x+10}$ gekregen.
Bereken $h(0)$.

- c Herleid zelf de vierde formule tot $k(x) = \frac{3x}{2x-3}$.
- d Bereken $k(2)$.

Opgave 6

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = \dots$

- a $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5$
- b $4x\sqrt{2y} = 3$

Voorbeeld 2

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v . Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).



Figuur 1.3

Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt een grafiek maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Schrijf daarom je formule in de vorm $P(v)$ en maak een geschikte tabel.

Antwoord

Vul $D = 20$ in.

De formule wordt dan $P(v) = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 20^2 = 0,052 \cdot v^3$.

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken. Het is wel verstandig om vooraf even op te zoeken welke windsnelheden geschikt zijn.

Opgave 7

Bekijk het verhaal van de windmolen in [Voorbeeld 2 op pagina 45](#).

Bij een windsnelheid van 20 m/s (dus 72 km/h) is er bijna sprake van storm, dus wordt een windmolen vastgezet.

- a Bereken $P(0)$, $P(5)$, $P(10)$, $P(15)$ en $P(20)$.
- b Teken een geschikte grafiek en lees daaruit af bij welke windsnelheid het opgewekte vermogen op 26 kW uitkomt.

Opgave 8

Bekijk in [Voorbeeld 2 op pagina 45](#) de eerste formule van het vermogen van een windmolen nog eens.

- a Je hebt een windmolen met een wieklengte van 15 m.
Hoe ziet het functievoorschrift $P(v)$ er dan uit?

Neem aan dat je een vermogen van 26 kW wilt opwekken. Je plaatst een windmolen met een wieklengte die bij een bepaalde gemiddelde windsnelheid dat vermogen oplevert.

- b Stel een formule op van de dubbele wieklengte D afhankelijk van de windsnelheid v .

- c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Oefenen

Opgave 9

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

- a $0,5x + 1,5y = 12$
- b $(x + y)^3 = 8$
- c $2x^2 + 4xy = 100$

Opgave 10

Herleid deze formules naar de vorm $y = f(x)$.

- a $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 12$
- b $\frac{3}{y} = 2x + \frac{1}{x}$
- c $x\sqrt{y-2} = 6$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y = f(x)$ met functievoorschrift $f(x) = 2x + \sqrt{8 - x^2}$.

- a Bereken $f(0)$.
- b Leg uit, waarom $f(3)$ geen uitkomst heeft. Welke getallen kun je wel invullen voor x ?
- c Teken een grafiek van deze functie f .
- d Schat met behulp van de grafiek voor welke waarde van x geldt $f(x) = 1$.

Opgave 12

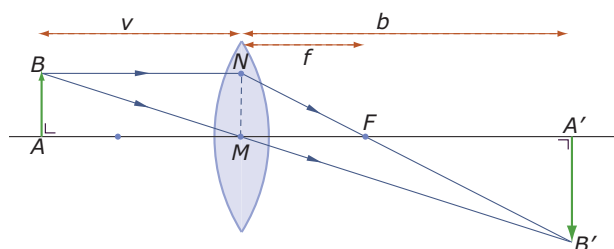
Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij er aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af. Daar maakt hij een smalle boswal van.

Verder maakt hij aan een van de korte zijden een bredere boswal van 10 meter. Zijn land wordt daarmee in totaal 2690 m^2 kleiner.

- a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (meter). Geef een formule voor de oppervlakte $A(x)$ van het oorspronkelijke land.
- b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef dit verband als formule met haakjes.
- c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 1.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpapstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13

Hierboven vind je de lenzenformule voor zuiver sferische lenzen.

- Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $b = \frac{vf}{v-f}$.
- Neem aan dat de brandpuntafstand $f = 4$ cm. Schrijf nu het functievoorschrift van $b(v)$ op.
- Hoe kun je aan deze formule zien dat hij geen betekenis heeft als de voorwerpapstand kleiner is dan de brandpuntafstand? Hoe volgt dat uit de figuur hierboven?
- Hoe groot is de beeldafstand bij een voorwerpapstand van 12 cm?

Testen

Opgave 14

Herleid de volgende formules naar de vorm $y = f(x)$.

- $3x - 0,5y = 6$
- $x\sqrt{y} = 6 - x$
- $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 12$

Opgave 15

De formule voor een éénparig versnelde beweging is:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in s
- v_0 de snelheid in m/s op $t = 0$
- a de versnelling in m/s^2 is

Je kunt bijvoorbeeld versnellen als je met een constante snelheid van 3 m/s fietst door een kracht uit te oefenen die zorgt voor een versnelling van bijvoorbeeld $a = 1,2 \text{ m/s}^2$.

- Welk functievoorschrift geldt dan voor $s(t)$?
- Bereken $s(10)$.
Welke betekenis heeft dit getal?
- Hoe ziet de grafiek van $s(t)$ er uit als je deze versnelling precies 10 seconden volhoudt?

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met variabelen en formules. In dit onderwerp zijn de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Algebra** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het begrip variabele — gelijksoortige termen — herleiden
- breuk met variabelen — gelijknamig maken
- termen en factoren — haakjes wegwerken — ontbinden in factoren
- macht met variabelen, grondtal, exponent — wetenschappelijke/technische notatie
- worteltrekken — hogere machtswortel
- functie — functievoorschrift

Activiteitenlijst

- in uitdrukkingen met variabelen termen en/of factoren samennemen;
- breuken met variabelen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen;
- in uitdrukkingen met variabelen haakjes wegwerken — uitdrukkingen met variabelen ontbinden in factoren;
- werken met machten en de rekenregels daarbij toepassen — werken met de wetenschappelijke en de technische notatie;
- (hogere machts)worteltrekken en rekenen met wortelvormen, ook met variabelen;
- formules die een verband tussen twee variabelen beschrijven herleiden naar een functie — tabellen en grafieken bij functies tekenen.

Testen

Opgave 1

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen.

- a $5x^2 + 6x - x(x + 3)$
- b $(p^2 - 4)(p^2 + 4) - p^3(p + 1)$
- c $4ab^2 - 2a^2b + 6ab \cdot 4a - 6ab \cdot 4b$
- d $4p - (8 - 4p)$
- e $(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 1)$
- f $(-2a)^3 \cdot 3b^2 - 6ab \cdot -a^2b$

Opgave 2

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één breuk.

- a $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$
- b $\frac{4}{10p} \cdot \frac{5p}{8p^2}$

c $\frac{2}{3k} + \frac{3}{k} \cdot \frac{5}{k}$

d $\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k}$

e $\frac{-p}{3q} \div \frac{2}{5q}$

f $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

Opgave 3

Bereken als $p = 4$, $q = -5$ en $r = 3$.

a $\frac{3p^2q}{-4pqr}$

b $(-2p)^4 + 6p^6 \div (-2p^2)$

c $4q(2r + p) - 2p(1 + 2q)$

Opgave 4

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm $y = f(x)$.

a $x - 2y = 6$

b $2xy = 13$

c $\frac{x}{2y} = 12$

d $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Opgave 5

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $4x^2 - 6x$

b $4x^3y - 6xy^3$

c $4x^2 - 4$

d $x^2 - 9x - 22$

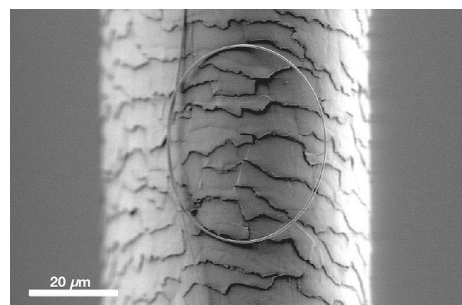
e $4x^2 + 40x + 64$

f $2x + x^2 - x^3$

Opgave 6

In de **nanotechnologie** gaat het om hele kleine afstanden: 1 nm (nanometer) is 10^{-9} m. Dit is een schaal van grootte die net boven die van atomen (0,060 nm tot 0,275 nm) en eenvoudige moleculen ligt. Hiernaast zie je een foto van een koolstofnanobuis die in een lus op een haar ligt. Gebruik in deze opgave steeds de wetenschappelijke notatie.

- a Hoeveel m is de grootte van een atoom dat 0,060 nm is?
- b Je ziet in de figuur een afstand van 20 μm aangegeven door een balkje. Hoeveel m is 20 μm ?
- c Hoeveel balkjes van 20 μm gaan er in een haar van 16 cm?



Figuur 1.1

- d Schat de diameter van de koolstofnanobuis. Hoeveel van die nanobuizen tegen elkaar hebben dezelfde diameter als één haar?

Opgave 7

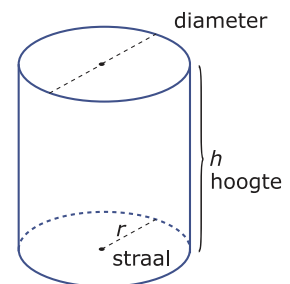
Schrijf de volgende uitdrukkingen met wortels zo eenvoudig mogelijk en in ieder geval zonder worteltekens in de noemer van een breuk. Neem aan dat $p \geq 0$.

- a $4\sqrt{2p} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{p}$
- b $\frac{18\sqrt{5p}}{3\sqrt{p}}$
- c $\sqrt{32p^2} - \sqrt{8p} \cdot \sqrt{p}$
- d $\frac{2p}{\sqrt{p}}$

Opgave 8

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter. Ze passen dus precies in een kubus.

- a Voor deze serie blikjes is V een functie van r . Geef het bijpassende functievoorschrift.
- b Bereken $V(5)$ in gehele eenheden nauwkeurig.
- c Neem aan dat $0 < r < 20$. Maak de grafiek van de functie $V(r)$.
- d Bij welke afmetingen van de cilinder geldt: $V = 1000 \text{ cm}^3$?



Figuur 1.2

Toepassen

Opgave 9: Oppositie van planeten

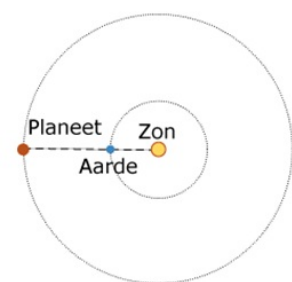
Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.

- a Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P . Betekent dit dat dan ook T groter wordt?
- b Tussen twee opposities van Jupiter zitten 398,6 dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de aarde is 365,25 dagen.
- c De omlooptijd van Mars is 1,88 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat $T_P^2 = 3,95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

- d Voor Saturnus geldt $r \approx 1,43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.



Figuur 1.3

Opgave 10: Vermenigvuldigen en delen

Ook uitdrukkingen met letters kun je gewoon vermenigvuldigen door ‘onder elkaar zetten’ en delen met behulp van een staartdeling. Hier zie je daar twee eenvoudige voorbeelden van. In de linkerfiguur wordt de vermenigvuldiging $(2x + 1) \cdot (x - 3)$ uitgevoerd, in de rechterfiguur wordt $2x^2 - 5x - 3$ gedeeld door $x - 3$.

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 \underline{x - 3} \times \\
 -6x - 3 \\
 2x^2 + x \\
 \hline
 2x^2 + 5x - 3
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 2x^2 - 5x - 3 / x - 3 = 2x + 1 \\
 \underline{2x^2 - 6x} \\
 x - 3 \\
 \underline{x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

Tenslotte alles optellen

Bereken $1(x - 3)$ en trek dat van $x - 3$ af. Je komt op 0 uit, de deling komt uit.

Figuur 1.4

- a** Voer zelf zowel de vermenigvuldiging als de deling uit. Waarom horen er in de deling eigenlijk haakjes te staan?

Eerst even een paar vermenigvuldigingen oefenen. Bereken:

- b** $(3x + 5)(2x - 1)$
c $(x^2 + 5x - 6)(2x - 4)$

En nu een paar delingen oefenen. Bereken:

- d** $(3x^2 + 15x + 18) / (x + 3)$
e $(3x^3 + 17x^2 + 42x + 16) / (3x - 1)$
f Gebruik nu je antwoord bij e om $3x^3 + 17x^2 + 42x + 16$ in factoren te ontbinden.

2

Vergelijkingen

2.1	Basistechnieken	54
2.2	Balansmethode	61
2.3	Ontbinden	68
2.4	Breuken in vergelijkingen	75
2.5	Wortels in vergelijkingen	82
2.6	Totaalbeeld	87

2.1 Basistechnieken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Voorkennis

- werken met variabelen in formules, in uitdrukkingen;
- bij formules grafieken maken.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt twee cilindervormige kaarsen. De ene kaars is blauw en 27 cm lang, de andere is geel en 17 cm lang. De blauwe kaars wordt 4,5 cm per uur korter en de gele kaars wordt elk uur 2 cm korter.

- Hoeveel verschil zit er in de tijd waarin beide kaarsen opbranden?
- Op welk tijdstip zijn beide kaarsen even lang?
- Hoeveel uur is de gele kaars langer dan de blauwe?

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die op hetzelfde moment zijn aangestoken. In de grafiek zie je dat ze steeds korter worden. De bijbehorende formules zijn:

- Rode kaars: $h = 20 - 4 \cdot t$
- Groene kaars: $h = 30 - 7,5 \cdot t$

met h de lengte van de kaars in cm en t de tijd in uren.

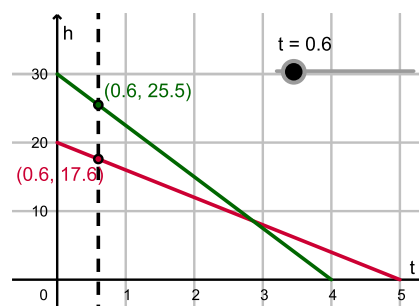
De rode kaars lijkt in de grafiek na 5 uur helemaal op. Dat is het punt waarin $h = 0$. Een dergelijk punt heet een **nulpunt**.

Om zeker te weten of dit ook echt het geval is gebruik je de formule van de rode kaars. Je lost op $h = 0$ dus $20 - 4t = 0$. Dit heet een **vergelijking**. Ga na dat voor $t = 5$ de vergelijking waar is. $t = 5$ heet de **oplossing** van de vergelijking.

Je ziet dat beide grafieken elkaar snijden.

Beide kaarsen zijn dan even lang, dus de hoogte van de groene kaars is gelijk aan de hoogte van de rode kaars. Als je het bijbehorende tijdstip wilt bepalen dan los je de vergelijking $20 - 4t = 30 - 7,5t$ op.

Je ziet dat de formule van de rode kaars gelijk is gesteld aan die van de groene.



Figuur 2.1

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg op pagina 54](#).

- Waarom zie je dat de kaarsen opbranden? Welke kaars brandt het snelst op en hoe zie je dat aan de grafiek?
- Hoe zie je aan de formules welke kaars het snelst opbrandt?
- Hoe lang zijn deze kaarsen op het moment van aansteken?
- Geef de coördinaten van het nulpunt van de groene grafiek. Welke vergelijking hoort hierbij? Laat zien hoe je met deze vergelijking het antwoord kunt controleren.
- Hoeveel tijd zit er tussen het opbranden van de groene en de rode kaars?

Opgave 2

Bekijk de [Uitleg op pagina 54](#).

- Hoe lang is de rode kaars na 1 uur? En de groene kaars?
- Hoe groot is het verschil in lengte op $t = 1$? En welke kaars is dan het langst?
- Bepaal met de grafieken op welk tijdstip het verschil tussen de lengtes van beide kaarsen 0 is. Wat betekent dit?
- Hoe zou dit tijdstip met behulp van de vergelijking in de uitleg kunnen controleren? Waarom klopt dit niet precies?
- Hoe zou je een nauwkeuriger tijdstip kunnen vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een formule waarin een isgelijktteken voorkomt heet een **vergelijking**.

Dat isgelijktteken wijst erop dat wat links ervan staat dezelfde waarde moet hebben als wat er rechts van staat. De vergelijking is in 'balans'.

Het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen is hiervan een voorbeeld. Je ziet dit in beide grafieken in beeld gebracht.

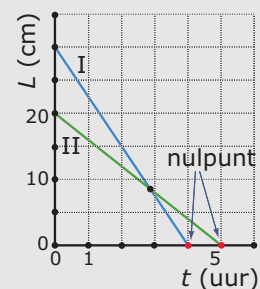
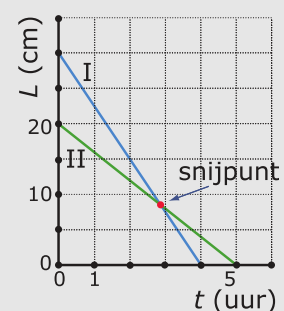
Als beide kaarsen gelijk zijn geldt

$$20 - 4t = 30 - 7,5t.$$

De waarde van t die linker- en rechterkant van deze vergelijking gelijk maakt heet de **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

Als de lengte van een kaars 0 is, heb je te maken met een **nulpunt** van de grafiek. Je ziet hiernaast twee nulpunten. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7,5t = 0$ op te lossen. Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.

Het oplossen van een vergelijking met één onbekende doe je door **inklemmen**, of door slim te rekenen, bijvoorbeeld door **terugrekenen**. Bekijk de voorbeelden.

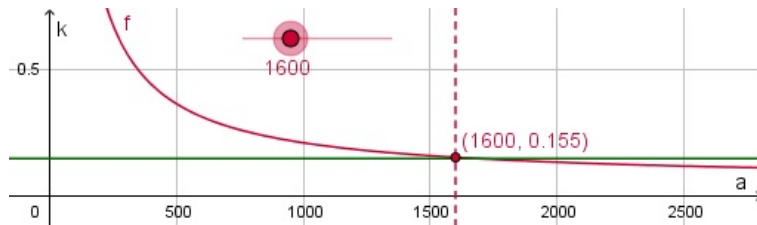


Figuur 2.2

Voorbeeld 1

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Bekijk de applet.



Figuur 2.3

Antwoord

De grafiek brengt het probleem in beeld. Je kunt de kosten per kopie van de school en die van de leerling aflezen.

Bekijk zelf wanneer beide even groot zijn. Je zult nog geen nauwkeurig antwoord kunnen geven, er zijn nog steeds meerdere getallen waar je op afgerond 15 cent per kopie uitkomt.

Om te bepalen welke daarvan het juiste getal is, moet je het aantal decimalen waarmee je het snijpunt afleest verhogen. Dan kun je tot op de kopie nauwkeurig antwoord geven. De oplossing wordt door inklemmen gevonden. Je doet dit handmatig met een tabel.

Opgave 3

Bekijk [Voorbeeld 1 op pagina 56](#) en werk met de applet.

- Waarom zijn de kosten per kopie voor de leerling constant? Welke formule hoort daar bij?
- Waarom zijn de kosten per kopie voor de school niet constant?
- Bereken de kosten per kopie voor de school als er 1000 kopieën worden gemaakt. Hoeveel zijn deze kosten bij 2000 kopieën? En bij 3000 kopieën?
- Welke formule beschrijft dus de kosten per kopie voor de school?
- Onderzoek bij welk aantal kopieën de kosten per kopie onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Welk probleem kom je tegen?

Opgave 4

Bekijk [Voorbeeld 1 op pagina 56](#) en werk met de applet.

- In hoeveel decimalen nauwkeurig kun je de kosten per kopie aflezen?
- Onderzoek opnieuw bij welk aantal kopieën de kosten onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Hoeveel antwoorden zijn er nu nog mogelijk?
- Hoe kun je nu bepalen welke van deze antwoorden het juiste is?
- Laat zien hoe dit met een tabel door inklemmen kan.

Voorbeeld 2

De school huurt maandelijks een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt als de school hierop geen verlies wil maken?

Antwoord

De kosten kun je k noemen en het aantal kopieën is a .

Voor de school geldt dan $k = 0,06 + \frac{152}{a}$ en voor de leerling geldt $a = 0,15$ want je betaalt voor elke kopie 15 cent.

Je moet dus deze vergelijking oplossen: $0,06 + \frac{152}{a} = 0,15$.

Linkerkant en rechterkant moeten gelijk blijven dus moet $\frac{152}{a} = 0,09$.

Nu maak je gebruik van een rekenopgave die er erg op lijkt zoals $\frac{6}{2} = 3$.

Dit kun je ook schrijven als $2 = \frac{6}{3}$ en voor onze vergelijking betekent dat $a = \frac{152}{0,09} \approx 1689$.

Deze manier van werken heet wel **analogierekenen**.

Hier moet je afronden op gehele getallen.

Opgave 5

Bekijk de oplossing die in **Voorbeeld 2 op pagina 57** wordt gegeven.

- a Waarom past de gegeven vergelijking bij het gestelde probleem?
- b Bij een vergelijking moeten de linkerkant en de rechterkant van het isgelijktteken dezelfde waarde hebben. Leg uit hoe hieruit volgt dat $\frac{152}{a} = 0,09$.
- c En hoe is hieruit afgeleid dat $a = \frac{152}{0,09}$?
- d Komt je antwoord overeen met het voorgaande voorbeeld? Vanaf hoeveel kopieën gaat de school verdienen?

Opgave 6

Los nu de volgende vergelijkingen op met behulp van analogierekenen:

- a $\frac{600}{x} = 0,05$
- b $20 + \frac{40}{g} = 23$
- c $\frac{200-x}{20} = 0,4$
- d $\frac{20}{200-x} = 0,4$

Voorbeeld 3

Los op: $2(x - 3)^2 - 8 = 10$

Antwoord

Hier komt de variabele x op één plaats aan de linkerzijde van het isgelijktteken voor. Hier kan terugrekenen dus helpen.

- Rekenschema: $x \xrightarrow{-3} \dots \xrightarrow{(\dots)^2} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-8} 10$
- Terugrekenschema: $x \xleftarrow{+3} \dots \xleftarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xleftarrow{/2} \dots \xleftarrow{+8} 10$

De oplossing is dus $x = \pm \sqrt{\frac{10+8}{2}} + 3$.

Het teken $\pm$ betekent dat er twee oplossingen zijn namelijk $x = 6 \vee x = 0$.

Bij terugrekenen vanuit een kwadraat moet je daar altijd rekening mee houden.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 58** hoe je een vergelijking oplost door terug te rekenen.

- Wanneer kun je het terugrekenen toepassen om een vergelijking op te lossen?
- Voer zelf de oplossing van de gegeven vergelijking uit. Controleer vervolgens beide oplossingen door ze voor x in te vullen.

Opgave 8

Los op door terugrekenen:

- $5(x - 3) = -3$
- $0,5(x - 4)^2 - 2,5 = 10$
- $4\sqrt{x + 2} = 2$

Oefenen

Opgave 9

Twee aanbieders van mobiele telefonie hebben een aanbieding:

- Tele3: € 30,00 per maand en 11 cent per minuut.
- E-Mobile: € 25,00 per maand en 13 cent per minuut.

- Stel een formule op voor de telefoonkosten bij de aanbieding van Tele3.
- Doe hetzelfde voor E-Mobile.
- Bij welk aantal belminuten is E-Mobile duurder dan Tele3? En bij welk aantal is juist Tele3 duurder?
- Jij weet je gemiddelde aantal belminuten per maand wel. Kies je voor de aanbieding van Tele3 of voor die van E-Mobile?

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen nauwkeurig:

- a $x^3 = 6 - x$
- b $\frac{750}{2x+1} = 300$
- c $2^x = 12$
- d $2 - \frac{1}{x} = 0,5$
- e $2(x + 4)^3 = 128$

Opgave 11

Bekijk hoe je de vergelijkingen in de voorgaande opgave hebt opgelost.

In welke gevallen kon je het analogierekenen toepassen? En wanneer kon je terugrekenen?

Opgave 12

Een winkel huurt een kopieerapparaat speciaal voor haar klanten. Dit kost maandelijks 180 euro en het maken van een kopie met dit apparaat kost de winkelier 6,5 cent. De klanten betalen 10 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt wil de winkelier er niet bij inschieten?

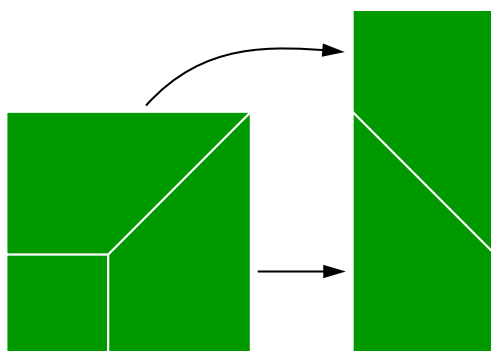
- a Welke vergelijking kun je nu opstellen om het probleem op te lossen?
- b De winkelier schat 6000 kopieën per maand voldoende is om uit de kosten te zijn. Klopt dit met de vergelijking die je hebt gevonden?
- c Kun je een nauwkeuriger oplossing vinden met behulp van de vergelijking?

Opgave 13

Van Apeldoorn naar Deventer is met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof. Je doet over deze rit 14 minuten. Hoeveel bedraagt de gemiddelde snelheid?

Opgave 14

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



Figuur 2.4

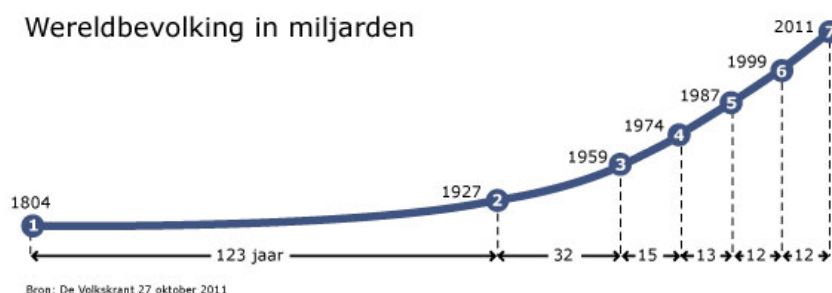
De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2 . Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

In gevallen van vergelijkingen met exponentiële groei kun je werken met het inklemmen of met logaritmen.

In ‘De Volkskrant’ van 27 oktober 2011 staan grafieken over de groei van de wereldbevolking. Hier zie je er één. Uit deze grafiek blijkt dat de wereldbevolking op dit moment toeneemt met 1,3% per jaar.

In een artikel van 29 oktober 2011 wordt verteld dat in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen. Klopt dit met deze grafiek?



Figuur 2.5

Opgave 15

Bekijk het verhaal van het verloop van de wereldbevolking hierboven.

- Controleer de toename van 1,3% per jaar met de gegevens voor 1999 en 2011.
- Ga na of in juli 2014 de wereldbevolking de 8 miljard zal halen met het gegeven percentage.
- Maak jij nog mee dat de 10 miljardste mens op aarde mag worden begroet?
- Welke onderbouwde kritiek kun je op deze redeneringen hebben?

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op door redeneren:

- $15x - 400 = 515$
- $\frac{200}{x} + 10 = 15$
- $\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 4 = 22$

Opgave 17

De vergelijking $\frac{1}{x} = x + 1$ kun je oplossen met behulp van inklemmen.

- Maak eerst de bijbehorende grafieken.
- Bepaal de snijpunten van deze grafieken in twee decimalen nauwkeurig.
- Geef de oplossing van deze vergelijking in twee decimalen nauwkeurig.
- $x^2 + 5x - 6x + 12 - 3x^2 + x$

2.2 Balansmethode

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met de balansmethode.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen en door slim redeneren.

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

- a Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?
- b Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g . Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die in evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Uitleg

Je kent de balansmethode voor het oplossen van een vergelijking met één onbekende.

Daarbij maak je de vergelijking systematisch eenvoudiger door aan beide zijden van het isgelijktteken hetzelfde op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. (Je mag alleen niet beide zijden door 0 delen of met 0 vermenigvuldigen.)

De vergelijking $2g + 21 = 6g + 5$ kun je daarmee zo oplossen:

$$\begin{array}{ll} 2g + 21 = 6g + 5 & \text{beide zijden } -5 \\ 2g + 16 = 6g & \text{beide zijden } -2g \\ 16 = 4g & \text{beide zijden } /4 \\ g = 16/4 = 4 & \end{array}$$

Als je een vergelijking oplost door redeneren (zoals met de balansmethode) dan noem je dat: algebraïsch oplossen.

Vooral bij vergelijkingen met machten erin heeft het algebraïsch oplossen voordelen. Je krijgt dan meteen alle oplossingen.

Opgave 1

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $5g + 6 = 3g + 9$
- b $5g + 6 = 8g - 18$
- c $-2,5g + 14 = 8g - 19$
- d $-2,5g - 19 = 8g - 14$

Opgave 2

Bekijk de vergelijking $2x^2 + 5 = 55$.

- a Los deze vergelijking op met de balansmethode.
Denk er aan, dat er twee oplossingen moeten zijn.
- b Waarom moesten er wel twee oplossingen zijn?
- c Hoe kun je je antwoorden controleren?

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 8$
- b $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x^2$
- c $\frac{1}{2}x^3 + 3 = 8$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Om vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele op meerdere plaatsen voorkomt op te lossen maak je vaak gebruik van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijktteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijktteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijktteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe.

Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: “Links en rechts worteltrekken.”

Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: “Links en rechts kwadrateren.”

Dit kan niet altijd zomaar...



Figuur 2.1

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = -5x + 1,5$ algebraïsch op.

Antwoord

Je gebruikt de balansmethode:

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = -5x + 1,5 & \rightarrow & \text{beide zijden } \times 6 \\ x + 2 = -30x + 9 & \rightarrow & \text{beide zijden } -2 \\ x = -30x + 7 & \rightarrow & \text{beide zijden } +30x \\ 31x = 7 & \rightarrow & \text{beide zijden } /31 \\ x = 7/31 = \frac{7}{31} \end{array}$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x = \frac{7}{31}$.

Laat een breuk in het antwoord staan en rond niet af. Je hebt dan de vergelijking **exact** opgelost. Afronden doe je alleen als daar om gevraagd wordt!

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 63** de oplossing van de gegeven vergelijking.

- Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?
- Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?
- Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?
- Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- $7x - 15 = 4x - 3$
- $0,7 - 0,2x = 1 - 0,6x$
- $\frac{1}{5}x + 2 = 0,3x - 3$
- $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $-2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b$.

Antwoord

Ook hier doe je de balansmethode, maar nu werk je eerst de haakjes uit.

$$\begin{array}{lcl} -2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b & \rightarrow & \text{beide zijden haakjes uitwerken en verder herleiden} \\ -2b - 6 = 7b + 35 & \rightarrow & \text{beide zijden } +6 \\ -2b = 7b + 41 & \rightarrow & \text{beide zijden } -7b \\ -9b = 41 & \rightarrow & \text{beide zijden } /-9 \\ b = 41/-9 = -\frac{41}{9} \end{array}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 63** de gegeven vergelijking.

- a Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.
- b Controleer je antwoord door substitutie.
- c Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- a $5(x + 2) = 2x + 15$
- b $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$
- c $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x + 5)$
- d $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2 - p)$
- e $x - \frac{1}{4}(x + 3) + \frac{3}{4} = 0$

Opgave 8

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijktteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

- a $2(x + 4) = x - (4 - x)$
- b $2(x - 2) = x - (4 - x)$

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $0,5(x - 3)^2 - 10 = 50$.

Antwoord

Deze vergelijking kun je snel oplossen door terugrekenen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen:

$$\begin{array}{ll} 0,5(x - 3)^2 - 10 = 50 & \\ 0,5(x - 3)^2 = 60 & \text{beide zijden } +10 \\ (x - 3)^2 = 120 & \text{beide zijden } /0,5 \\ x - 3 = \pm\sqrt{120} & \text{terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)} \\ x = 3 \pm \sqrt{120} & \text{beide zijden } +3 \end{array}$$

De exacte oplossing is $x = 3 + \sqrt{120} \vee x = 3 - \sqrt{120}$.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 64** de gegeven vergelijking.

- a Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.
- b Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.
- c Bij de stap ‘terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)’ is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?
- d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

- a $5(x + 10)^2 + 50 = 70$
- b $10 - x^2 = 3x^2$
- c $10 - (x - 1)^2 = 5$

Oefenen

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

- a $3x - 7 = -x + 10$
- b $5x - 4 = 3(5 - x)$
- c $0,2x + 10 = 310$
- d $4\left(5 - \frac{3}{4}x\right) + 5x = -x + 10$
- e $5x - (3 - 2x) = 11$
- f $\frac{5-x}{3} = -\frac{1}{2}(x + 6)$
- g $6 - 2(x - 5)^2 = 2$
- h $(x - 5)^2 = 5 + x^2$

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

- a $1 - (x - 3) = 2(3x - 7)$
- b $2x - 4 = 2(1 + x)$
- c $\frac{3x-5}{2} = 0,25(2x - 10) + x$
- d $6 + 2(x - 2)^2 = 4$
- e $6 - 2(x - 2)^2 = 4$

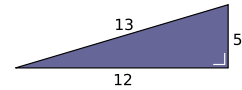
Opgave 13

Oefen nu het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via het [Practicum](#).

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.



Figuur 2.2

- Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hiernaast is getekend.
De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.
- Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x + 1$ noemen? Welke van beide is de hypotenusa (de langste zijde) van de driehoek?
- Aan welke vergelijking moet x voldoen?
- Laat zien dat deze vergelijking alleen $x = 12$ als oplossing heeft.

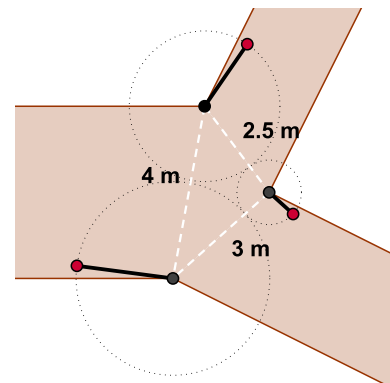
Toepassen

[Bekijk de applet.](#)

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m.

Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid.

Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...



Figuur 2.3

Opgave 15

Bekijk het hekkenprobleem hierboven.

- Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...
- Neem voor de lengte van het grootste hek x . Wat geldt dan voor het middelste hek? En het kleinste hek?
- Hoe lang moeten het middelste en het kleinste hek samen zijn? Welke vergelijking krijg je daarmee?
- Los je vergelijking en daarmee het probleem op.

Opgave 16: Leeftijdenprobleem

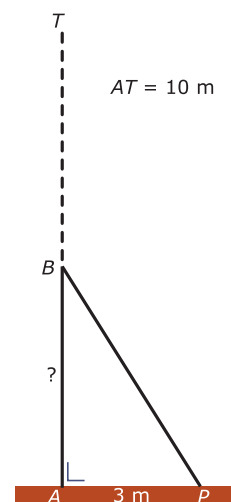
Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was zij 26 jaar.

- Stel Joop's leeftijd op x jaar. Wat geldt dan voor Myrthe's leeftijd?
- Hun leeftijdsverschil is niet veranderd. Welke vergelijking levert dit op?
- Los de vergelijking die je hebt gevonden op. Hoe oud zijn beiden nu?

Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A . Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

- Je wilt weten op welke hoogte het breekpunt B zit. Welk lijnstuk wordt je onbekende?
- Er zit een rechthoekige driehoek in je figuur. Welke vergelijking levert dit op?
- Los de gevonden vergelijking op en bereken hoe hoog punt B boven de grond zit.



Figuur 2.4

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op:

- $\frac{x-4}{6} = \frac{1}{3}x + 2$
- $0,1(x + 5)^2 = x + 15$
- $\frac{1}{2}\sqrt{x-5} + 4 = 22$

Opgave 19

De vergelijking $x^2 = 5x + 6$ kun je niet oplossen met de balansmethode.

- Waarom niet?
- Hoe kun je zo'n vergelijking toch oplossen?
- Geef de oplossing van deze vergelijking.

2.3 Ontbinden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen met behulp van ontbinden in factoren.

Voorkennis

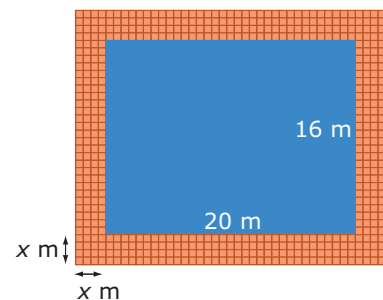
- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen en/of door de balansmethode te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.

- Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20 + 2x$ meter is.
- Hoeveel is dan de breedte?
- Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?



Figuur 2.1

Opgave V2

Het zwembadterrein uit de vorige opgave heeft een totale oppervlakte van 480 m^2 . Hoe breed is het tegelpad?

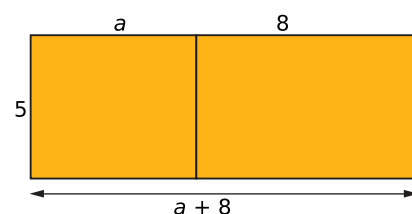
- Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?
- Hoe los je die vergelijking op?

Uitleg 1

Haakjes wegwerken en ontbinden in factoren is op hetzelfde principe gebaseerd:

- haakjes wegwerken: $5 \cdot (a + 8) = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5a + 40$
- ontbinden in factoren: $5a + 40 = 5 \cdot a + 5 \cdot 8 = 5 \cdot (a + 8)$

Bij ontbinden in factoren breng je de grootste gemeenschappelijke factor (hier 5) buiten haakjes.

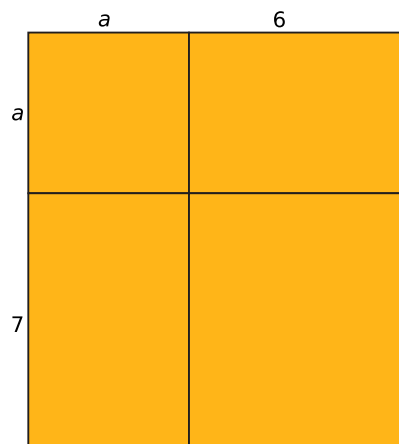


Figuur 2.2

Dit kunt je ook toepassen in ingewikkelder situaties:

- haakjes wegwerken:
 $(a + 6) \cdot (a + 7) = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
 $= a^2 + 13a + 42$
- ontbinden in factoren:
 $a^2 + 13a + 42 = a \cdot a + 6 \cdot a + 7 \cdot a + 6 \cdot 7 =$
 $= (a + 6)(a + 7)$

Bij het ontbinden gebruik je nu de som-product-methode: je zoekt twee getallen waarvan het product 42 is en de som 13.



Figuur 2.3

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1 op pagina 68](#). Je ziet eerst hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke factor buiten haakjes te halen. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

- $4x - 20$
- $4x^2 - 20x$
- $4x^2 - 4x$
- $16x - 20x^3$

Opgave 2

Bekijk [Uitleg 1 op pagina 68](#). Je ziet ook hoe je kunt ontbinden in factoren door de som-product-methode te gebruiken. Doe dit bij de volgende uitdrukkingen:

- $x^2 + 5x + 6$
- $x^2 - 5x + 6$
- $x^2 - x - 6$
- $0,5x^2 + 0,5x - 3$

Uitleg 2

Het ontbinden in factoren kun je soms toepassen om vergelijkingen op te lossen waarin naast de onbekende ook machten ervan voorkomen. Het doel van het ontbinden is het splitsen van de vergelijking in eenvoudiger vergelijkingen. Omdat je dan gebruik maakt van $a \cdot b = 0$ betekent $a = 0 \vee b = 0$ moet je beginnen met op 0 herleiden.

Je wilt bijvoorbeeld de vergelijking $5x^2 = 25x$ oplossen.

Dat kan zo:

$$\begin{array}{ll}
 5x^2 = 25x & \text{op 0 herleiden} \\
 5x^2 - 25x = 0 & \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 5x \cdot (x - 5) = 0 & \text{vergelijking splitsen} \\
 5x = 0 \vee x - 5 = 0 & \text{oplossing opschrijven} \\
 x = 0 \vee x = 5 &
 \end{array}$$

Dit kun je soms ook doen bij ingewikkelder vergelijkingen zoals $x^2 + 4x = 45$.

Dan heb je na het op 0 herleiden de som-product-methode nodig om te ontbinden.

Ontbinden in factoren is een handige en snelle manier om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Veel handiger dan de abc-formule. Maar je kunt er ook vergelijkingen met hogere machten mee aanpakken.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2 op pagina 69](#). Neem nu de vergelijking $x^2 + 4x = 45$.

- Herleid deze vergelijking op 0 en laat zien hoe je de linkerzijde kunt ontbinden in factoren.
- Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.
- Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^2 + 12x - 45 = 0$
- $x^2 - 12x = 45$
- $x(x - 1) = 90$

Theorie en voorbeelden

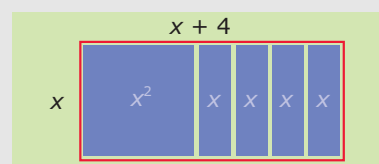
Om te onthouden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen. Hierbij kun je gebruik maken van een tabel.

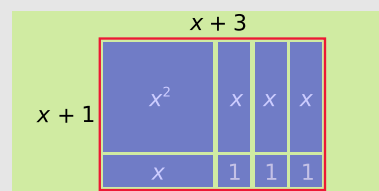
Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen. Ook hierbij is een tabel handig.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking kun je dan herleiden tot een product van factoren waar 0 uit komt. De vergelijking kun je dan schrijven in de vorm $a \cdot b = 0$. En omdat $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$ kun je de vergelijking dan **splitzen** in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Omdat dit splitsen alleen lukt bij een product waar 0 uit komt, moet je de vergelijking altijd eerst de vorm $\dots = 0$ geven. Dat heet **op 0 herleiden**.



$$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$$



$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$$

Figuur 2.4

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $2x^2 = 10x - 8$ algebraïsch op.

Antwoord

$$\begin{aligned}
 2x^2 &= 10x - 8 \\
 2x^2 - 10x + 8 &= 0 && \text{op 0 herleiden} \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{beide zijden } /2 \\
 (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 x - 1 = 0 \vee x - 4 &= 0 && \text{vergelijking splitzen} \\
 x = 1 \vee x &= 4 && \text{oplossing opschrijven}
 \end{aligned}$$

Opgave 5

Bekijk de vergelijking van [Voorbeeld 1 op pagina 70](#).

- Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.
- Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?
- Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op.

- $a^2 + 2a = 35$
- $(b - 2)(2b + 3) = 0$
- $x^2 - 15 = 2x$
- $3x^2 - 45 = -6x$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^3 = 6x$.

Antwoord

Ook hier kun je het ontbinden in factoren toepassen.

$$\begin{aligned}
 x^3 &= 6x \\
 x^3 - 6x &= 0 \\
 x(x^2 - 6) &= 0 \\
 x = 0 \vee x^2 - 6 &= 0 \\
 x = 0 \vee x^2 &= 6 \\
 x = 0 \vee x = \sqrt{6} \vee x &= -\sqrt{6}
 \end{aligned}$$



op 0 herleiden

linkerlid ontbinden in factoren

splitsen

rechter vergelijking verder oplossen

rechter vergelijking worteltrekken

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

Er zijn nu drie oplossingen. Kun je dat verklaren vanuit de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$?

Opgave 7

Bekijk [Voorbeeld 2 op pagina 71](#).

- Maak de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 6x$.
Leg uit waarom er drie oplossingen zijn.
- Controleer de drie gevonden oplossingen door substitutie in de gegeven vergelijking.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $x^3 = 9x$
- $x^3 = 9x^2$
- $x^3 = 9x^2 + 10x$

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $x^4 = 9x$
- b $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 80$
- c $(x^2 - 4)(x^2 - 20) = 0$

Oefenen

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

- a $3x^2 - 36x = 0$
- b $k^2 - 9 = 7$
- c $x^2 = x$
- d $c^2 + 2c = 35$
- e $2x^2 - 4x - 16 = 0$
- f $2x^2 - 8x - 17 = 0$

Opgave 11

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2 . De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

- a Neem voor de lengte x meter. Hoeveel bedraagt de breedte dan?
- b Je kunt nu bij de oppervlakte van het land een vergelijking opschrijven. Welke?
- c Los deze vergelijking op. Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

- a $(x - 5)(2x - 6) = 0$
- b $(x - 5)(2x - 6) = 30$
- c $2(x - 3)^2 = 8x$
- d $2(x - 3)^2 = 18$
- e $x^3 = 27x$
- f $x^3 = 27x^2 + 90x$

Opgave 13

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via [Practicum](#).

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

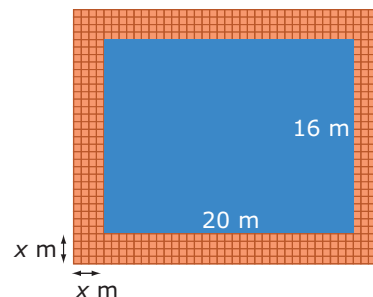
Opgave 14

Een vierkant heeft zijde x . Een rechthoek heeft zijden $12 - x$ en $x - 2$. Voor welke waarden van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?

Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen.

Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit zwembad bedraagt.



Figuur 2.5

Opgave 15

Bekijk het zwembadprobleem hierboven.

- Welke vergelijking vind je als je de oppervlakte van het totale terrein bekijkt?
- Los deze vergelijking nu op met behulp van ontbinden in factoren. Bereken de breedte van het tegelpad.

Opgave 16: Boer Harmsen

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer af gaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.

De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsens land nu geworden is. Stel zelf een geschikte vergelijking op.

Opgave 17: Kubus en cilinder

Een kubus met ribbelengte x en een cilinder met hoogte 10 en diameter x hebben een even groot volume. Alle afmetingen zijn in cm.

Welke afmetingen heeft de kubus?

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $x^2 - 13x = 0$
- $x^2 - 13x = 30$
- $\frac{1}{2}(x - 5)^2 = 18$
- $(x - 6)\left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -30$

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a** $x^4 = 16x^2$
- b** $x^4 = 16x$
- c** $x^4 + 6x^3 = 16x^2$

2.4 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin breuken met de onbekende in de noemer voorkomen.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

- a** Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t .

- b** Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- c** Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?
- d** Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?
- e** Probeer deze vergelijking op te lossen.

Opgave V2

Je hebt als het goed is eerder geleerd hoe je twee breuken kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Neem nu de breuken $\frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$.

- a** Laat zien hoe je beide breuken optelt en de tweede breuk van de eerste aftrekt.
- b** Laat zien hoe je beide breuken vermenigvuldigt.
- c** Laat zien hoe je de eerste breuk door de tweede deelt.

Uitleg

Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5.$$

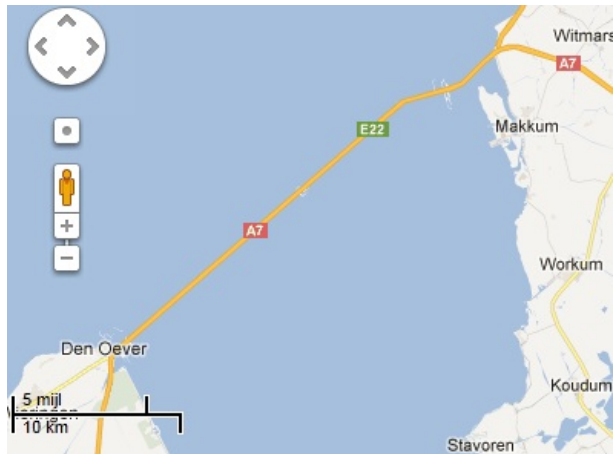
Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel analogierekenen.

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dan val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!



Figuur 2.1

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 2.2

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k . Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel **analogierekenen**.

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Figuur 2.3

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.

De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de **gebroken vergelijking**:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de **balansmethode**. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{array}{lcl} \frac{1920}{v} + 5 = 25 & & \\ \frac{1920}{v} = 20 & \leftarrow & \text{beide zijden } -5 \\ 1920 = 20v & \leftarrow & \text{beide zijden } \cdot v \\ v = \frac{1920}{20} = 96 & \leftarrow & \text{beide zijden } /20 \end{array}$$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

- a $12 - \frac{1}{x} = 8$
- b $\frac{50}{2x-3} = 10$
- c $\frac{6}{x} + x = 5$
- d $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $\frac{x^2+9x-10}{x-1} = 0$ algebraïsch oplossen.

- Waarom helpt analogierekenen nu niet?
- Dan maar de balansmethode. Waarmee ga je beide zijden vermenigvuldigen? En waar moet je dan om denken?
- Los de vergelijking verder op.
- Eén van beide waarden die je bij c hebt gevonden hoort nu niet bij de oplossing. Hoe komt dat?

Voorbeeld 2

Wielrenner A doet over een afstand van 100 km precies 1 uur korter dan wielrenner B die gemiddeld 5 km/h langzamer rijdt. Hoe snel rijden ze gemiddeld?

Antwoord

De gemiddelde snelheid van A noem je v km/h, dan is die van B gelijk aan $v - 5$ km/h. Uit de tekst volgt dan de vergelijking:

$$\frac{100}{v} + 1 = \frac{100}{v-5}$$

Deze vergelijking los je op door beide zijden zowel met v als met $v - 5$ te vermenigvuldigen. Je vermenigvuldigt dus met $v(v - 5)$.

$$\text{Dit geeft } \frac{100}{v} \cdot v(v - 5) + 1 \cdot v(v - 5) = \frac{100}{v-5} \cdot v(v - 5).$$

$$\text{En dat wordt } 100(v - 5) + v(v - 5) = 100v.$$

Dit ga je verder oplossen. Je vindt $v = 25$ km/h.

A fietst gemiddeld met 25 km/h en B met 20 km/h.

Opgave 5

Bekijk hoe in [Voorbeeld 2 op pagina 78](#) een gebroken vergelijking wordt gebruikt om de gemiddelde snelheid van twee wielrenners te berekenen.

- Ga na, dat de gegeven vergelijking bij het verhaal past.
- Laat zien hoe de vergelijking stap voor stap met de balansmethode kan worden opgelost.
- Waarom voldoet maar één van beide gevonden waarden voor v ?

Opgave 6

Twee automobilisten A en B rijden dezelfde afstand van 60 km met een constante snelheid. B rijdt 20 km/h langzamer dan A, maar A moet onderweg tanken en heeft daar 6 minuten voor nodig. Daardoor doen ze even lang over de gegeven afstand.

Hoe snel rijden ze?

Oefenen

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{200}{a} + 0,3 = 0,7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{p}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

e $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

f $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 8

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a .

- a** Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?
- b** Los deze vergelijking op.
- c** Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 9

Voor een gas in een afgesloten ruimte geldt de **algemene gaswet**. Het verband tussen de druk p in pascal, het volume V in m^3 en de temperatuur T in kelvin is:

$$\frac{pV}{T} = c \text{ waarin } c \text{ een constante is.}$$

Omdat de temperatuur toeneemt met 80 kelvin, neemt de druk toe van 1,2 naar 1,5 pascal bij een gelijkblijvend volume van 4 m^3 .

- a** Welke vergelijking kun je opstellen bij deze situatie?
- b** Los deze vergelijking op.

Opgave 10

Iemand legt de 6 km van huis naar school altijd in dezelfde tijd af. Op een bepaalde dag vertrekt hij door omstandigheden 4 minuten te laat van huis. Hij komt precies in dezelfde tijd aan omdat hij 3 km/h sneller rijdt dan normaal.

Hoe hard rijdt hij normaal? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 11

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$. Hierin is U het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

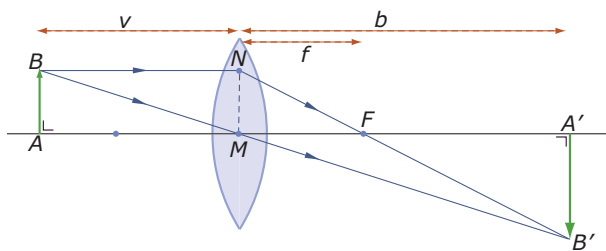
- a** Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2 \text{ mA}$ en $R = 1,5 \text{ M}\Omega$.

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

- b** Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. Het prototype van een lens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 2.4

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpaafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 12

- Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?
- Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?
- Los nu de vergelijking van a op.
- Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldafstand.
- Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \dots$. Laat zien hoe je dat kunt doen.



Opgave 13

Gebruik de lenzenformule uit de voorgaande opgave.

Van een bepaalde lens is de brandpuntafstand 3 cm. De beeldafstand is 8 cm groter dan de voorwerpafstand.

Bereken de voorwerpafstand.

Testen

Opgave 14

Willem en zijn vriendin Arina leggen een afstand van 18 km af en komen gelijktijdig aan. Willem ging op de fiets en kreeg een voorsprong van 30 minuten op Arina die op haar scooter twee keer zo snel reed als Willem. Ga er van uit dat beiden een constante snelheid aanhielden.

Hoe snel reed Willem? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{600}{x} = 24$

b $\frac{600}{x^2} = 24$

c $\frac{2}{x} - 10 = \frac{1}{2x}$

d $\frac{2}{x} - 3x = \frac{1}{2x}$

2.5 Wortels in vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking met één onbekende oplossen als daarin wortels voorkomen met de onbekende binnen het wortelteken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking met één onbekende en vergelijking oplossen;
- de oplossingen van een vergelijking zien als snijpunten of nulpunten van grafieken;
- de oplossingen van een vergelijking bepalen door inklemmen, door terugrekenen, door de balansmethode en/of ontbinden in factoren te gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Omdat het aardoppervlak bij benadering een bolvorm heeft, is je kijkaafstand (de afstand tot de horizon) beperkt. Er geldt: $a \approx 3568 \cdot \sqrt{h}$.

Hier is:

h de hoogte in meter van je oog boven de begane grond en

a de afstand in meter die je kunt kijken.

- Je staat op een toren, je oog is 25 m boven de grond.
Hoe ver kun je kijken?
- Hoe hoog moet je oog boven de grond zijn om op een rustige zee 20 km ver te kunnen kijken?

Uitleg

Voor het verband tussen de kijkaafstand a (in m) in een aards landschap zonder obstakels en je ooghoogte h (in m) geldt $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$. Deze formule kun je zelf afleiden...

Als je hiermee wilt berekenen hoe hoog je oog boven de grond moet zitten om bijvoorbeeld 20 km te kunnen kijken, dan moet je de vergelijking

$$3568 \cdot \sqrt{h} = 20000$$

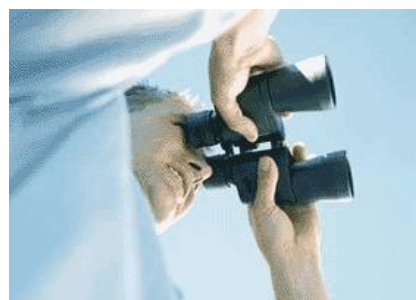
oplossen. Dat is een vergelijking waarin een wortelvorm voorkomt waar de onbekende, de variabele, in zit.

Je kunt hier beginnen met aan beide zijden van het isgelijktteken te delen door 3568.

Dit levert op: $\sqrt{h} = 20000/3568 = 5,605\dots$

Het wortelteken kun je nu wegwerken door te kwadrateren: $h = 5,605\dots^2 \approx 31,4$ m.

Een vergelijking met één onbekende die voorkomt in een wortelvorm kun je oplossen door hem te schrijven in de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan te kwadrateren. Heb je hogere machtswortels dan moet je diezelfde hogere macht gebruiken om de wortelvorm weg te werken.



Figuur 2.1

Opgave 1

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de [Uitleg op pagina 82](#).

- a Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 10 km?
- b Verdubbelt je kijkafstand als je ooghoogte verdubbelt?

Opgave 2

Gebruik de formule voor de kijkafstand uit de [Uitleg op pagina 82](#).

Bij welke ooghoogte is je kijkafstand 1000 keer zo groot als je ooghoogte?

- a Je moet nu oplossen $3568 \cdot \sqrt{h} = 1000 \cdot h$.
Hoe begin je daar mee?
- b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Af en toe heb je te maken met een vergelijking waarbij de variabele binnen een wortelvorm voor komt.

Een voorbeeld is $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Zo'n vergelijking kun je oplossen door hem eerst in de vorm $\sqrt{x} = \dots$ te schrijven.

Daarna ga je beide zijden kwadrateren.

Het is bij vergelijkingen met wortelvormen wel van belang om achteraf je oplossing(en) te controleren. Er mag immers geen negatief getal onder het wortelteken uitkomen, want dat krijg je geen reële waarde.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $2 \cdot \sqrt{36 - x^2} = 10$

Antwoord

De vergelijking kun je herleiden naar de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan kun je kwadrateren.

De oplossing gaat zo:

$$\begin{array}{ll}
 2 \cdot \sqrt{36 - x^2} = 10 & \text{beide zijden delen door 2} \\
 \sqrt{36 - x^2} = 5 & \text{kwadrateren} \\
 36 - x^2 = 25 & \text{beide zijden } -36 \text{ en vermenigvuldigen met } -1 \\
 x^2 = 11 & \text{beide zijden worteltrekken} \\
 x = \pm \sqrt{11} &
 \end{array}$$

Er zijn twee oplossingen, die allebei voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking, vul ze maar in.

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $4 + \sqrt{2x} = 18$
- b $3 \cdot \sqrt{15 + x^2} = 15$
- c $\frac{25}{\sqrt{1+x^2}} = 5$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Antwoord

Eerst werk je toe naar de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ en dan kwadrateren.

Je krijgt dan een kwadratische vergelijking.

$$\begin{array}{ll}
 4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x & \\
 2 \cdot \sqrt{x} = 2x - 4 & \text{beide zijden } -4 \\
 \sqrt{x} = x - 2 & \text{beide zijden } /2 \\
 x = (x - 2)^2 & \text{beide zijden kwadrateren} \\
 x^2 - 5x + 4 = 0 & \text{haakjes wegwerken en op 0 herleiden} \\
 (x - 4)(x - 1) = 0 & \text{ontbinden in factoren} \\
 x = 1 \vee x = 4 & \text{oplossingen opschrijven}
 \end{array}$$

Je moet bij vergelijkingen met de onbekende in een wortelvorm altijd goed nagaan of de oplossingen wel kunnen.

Ga na, dat $x = 1$ niet voldoet, maar $x = 4$ wel.

Opgave 4

Bekijk hoe in [Voorbeeld 2 op pagina 84](#) een vergelijking met een wortelvorm wordt opgelost.

- a Waarom moet je nu de vergelijking eerst in de vorm $\sqrt{\dots} = \dots$ schrijven?
- b Ga zelf na dat $x = 1$ niet voldoet en $x = 4$ wel.
- c Laat zien wat het oplossen van deze vergelijking betekent door de grafieken van $y_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{x}$ en $y_2 = 2x$ te tekenen.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $4 + \sqrt{2x} = \frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$
- b $2 - \sqrt{x} = x$

Oefenen

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

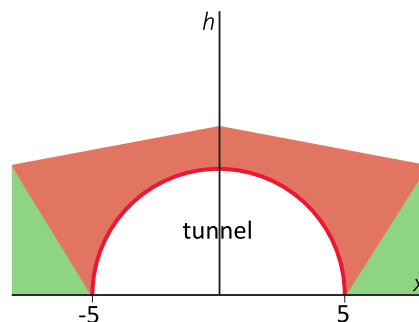
- a $3\sqrt{x} = 14$
- b $3 + \sqrt{2x} = 14$
- c $x + \sqrt{x} = 6$

Opgave 7

Een tunnel heeft boven het wegdek de vorm van een halve cirkel. Je maakt een assenstelsel met de x -as langs het wegdek. Daar loodrecht op staat de as die de hoogte h van een punt van de tunnel boven het wegdek weergeeft. Deze as gaat door het midden van het wegdek.

Er geldt nu $h = \sqrt{25 - x^2}$.

- a Laat zien, dat de getallen -5 en 5 bij de x -as kloppen.
- b Hoe hoog is deze tunnel in het midden? Licht je antwoord toe.
- c Kunnen twee vrachtauto's met een hoogte van 4 m elkaar passeren in deze tunnel? Hoe breed kunnen die vrachtauto's dan zijn?

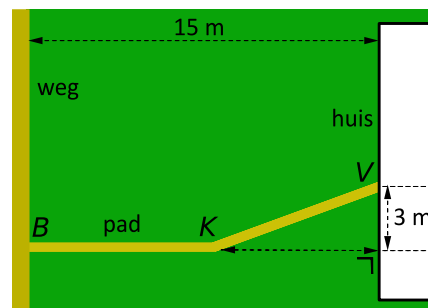


Figuur 2.2

Opgave 8

Iemand legt een pad aan vanaf de weg naar zijn voordeur. Het huis ligt 15 m van de weg af, het pad begint bij B loodrecht op de weg en maakt halverwege bij K een knik richting de voordeur bij V . De afstand BK van de weg tot de knik is dus even groot als de afstand KV van de knik tot de voordeur. Zie voor verdere afmetingen het bovenaanzicht hiernaast.

Hoe lang is dit pad?



Figuur 2.3

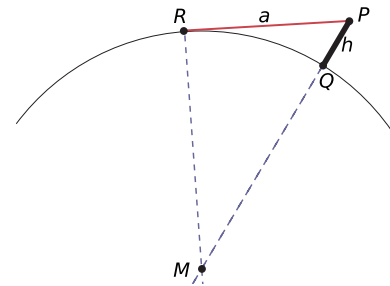
Opgave 9

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van $y_1 = x + \sqrt{8 - x^2}$ en $y_2 = 2x$.

Toepassen

De formule voor de kijkafstand $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ uit de [Uitleg op pagina 82](#) kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 2.4

Opgave 10

Bekijk de formule voor de kijkafstand.

Je ziet hierboven een figuur waarmee je die formule kunt afleiden.

- Hoe kun je a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h .
- Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h}$.
- Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.
- Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

Testen

Opgave 11

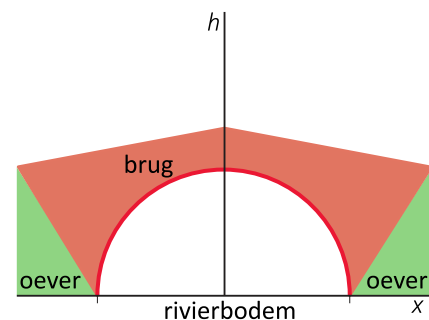
Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $\sqrt{25 - x^2} = 3$
- $x + \sqrt{2x} = 4$

Opgave 12

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h = \sqrt{36 - x^2}$ (met x en h in meter). Het lijnstuk tussen beide nulpunten van deze formule stelt de rivierbodem voor.

- Hoe breed is die rivierbodem?
- De waterhoogte van de rivier is twee meter boven de bodem. Bereken de breedte van de waterspiegel onder deze boog in centimeter nauwkeurig.



Figuur 2.5

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt natuurlijk al eerder leren werken met vergelijkingen. In dit onderwerp komen de belangrijkste algebraïsche vaardigheden (opnieuw?) voorbij.

Je hebt nu alle theorie van **Vergelijkingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vergelijking — snijpunt — nulpunt — inklemmen — terugrekenen
- balansmethode
- ontbinden in factoren — buiten haakjes brengen — som-product-methode
- gebroken vergelijking
- wortelvormen

Activiteitenlijst

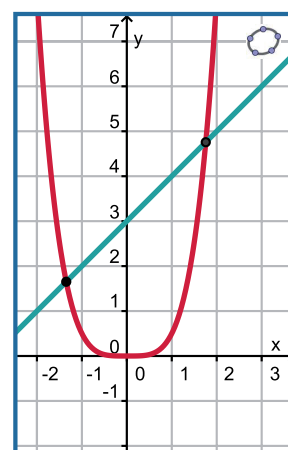
- vergelijkingen oplossen door inklemmen of slim rekenen — oplossingen van een vergelijking interpreteren in termen van grafieken;
- de balansmethode gebruiken om vergelijkingen algebraïsch op te lossen;
- vergelijkingen oplossen door op 0 herleiden, ontbinden in factoren en splitsen;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt in de noemer van een breuk;
- vergelijkingen oplossen waarin de variabele voor komt binnen een wortelvorm.

Testen

Opgave 1

Hier zie je grafieken bij de formules $y_1 = 0,5x^4$ en $y_2 = x+3$. Alle snijpunten van beide grafieken zijn in beeld.

- Welke vergelijking moet je oplossen om de snijpunten van de grafieken te berekenen?
- Bereken door inklemmen de coördinaten van de snijpunten van deze grafieken in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 2.1

Opgave 2

Los de volgende kwadratische vergelijkingen algebraïsch op.

- $x^2 + 3x - 4 = 0$
- $x^2 - 2x = 24$

- c $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$
- d $0,5(x - 6)^2 = 11$
- e $2(x - 3)(2x + 5) = 0$
- f $2(x - 3)(2x + 5) = -30$
- g $9x^2 = 16$
- h $x(x - 3) = 2 + x^2$

Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- a $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}x - 1$
- b $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = -1$
- c $\frac{3}{x} + \frac{5}{6} = \frac{1}{4x} - 1$
- d $x + \frac{18}{x+5} = 6$

Opgave 4

Bij een ruilverkaveling worden stukken land verruild voor even grote stukken land die voor beide partijen gunstiger liggen (dichter bij huis bijvoorbeeld). Onder andere wordt een vierkant stuk land verruild voor een rechthoekig stuk land dat 40 m langer, maar 30 m minder breed is.

- a Met welke vergelijking kun je de zijde van het vierkante stuk land berekenen?
- b Los deze vergelijking op en bepaal de oppervlakte van het land dat bij deze ruil betrokken was in ha.

Opgave 5

In een stroomkring kun je twee weerstanden R_1 en R_2 die parallel zijn geschakeld vervangen door één weerstand R_s . Die weerstand R_s heet dan de substitutieweerstand van de andere twee. Er geldt:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

waarin elke weerstand R in Ω wordt uitgedrukt.

- a Bereken de substitutieweerstand van $R_1 = 2 \Omega$ en $R_2 = 5 \Omega$.
- b De substitutieweerstand van de parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 is $R_s = 3 \Omega$. Nu is R_2 precies twee keer zo groot als R_1 . Bereken de grootte van R_1 .

Als je vaak substitutieweerstanden moet berekenen, dan is het handig om de formule in de vorm $R_s = \dots$ te schrijven.
- c Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 6

Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van $y_1 = x + \sqrt{x^2 - 8}$ en $y_2 = 1,5x$.

Toepassen

Opgave 7: Omgeschreven cirkel

Van een gelijkbenige driehoek is de basis 60 en zijn de twee benen elk 50 cm. Er gaat een cirkel door de drie hoekpunten van deze driehoek.

Bereken de straal van deze cirkel.

Opgave 8: Stadsmuur in het Oude China

Een vraagstuk van de oude Chinese geleerde **Liu Hui** (ongeveer 220 - ongeveer 280).

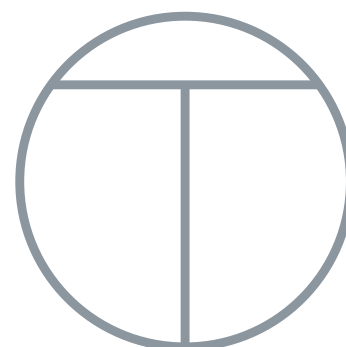
Veel steden in het Oude China waren omgeven door vier stadsmuren die een vierkant vormen. De Noordelijke muur bijvoorbeeld kijkt uit op het Noorden en loopt precies Oost-West. Er is een poort in het midden van elke zijde van dit vierkant. Twintig passen in de Noordelijke richting buiten de Noordelijke poort bevindt zich een boom. Als je de stad vanuit de Zuidelijke poort verlaat en je loopt 14 passen naar het Zuiden en 1775 passen naar het Westen, kun je die boom net zien.

Wat zijn de afmetingen van de muur van deze stad?

Opgave 9: Orhan-Teerenstra logo

Dit is het lijnsymmetrische logo van transportbedrijf Orhan-Teerenstra. De twee lijnstukken die de T vormen zijn 6 dm lang en staan loodrecht op elkaar. Het logo wordt gemaakt van dunne stalen buizen en aan de gevel van hun bedrijfspand opgehangen.

Hoe groot moet de straal van de cirkel worden die de letter O voorstelt?



Figuur 2.2

3

Lineaire verbanden

3.1	Lineaire functies	92
3.2	Lineaire verbanden	99
3.3	Stelsels vergelijkingen	107
3.4	Lineaire modellen	114
3.5	Totaalbeeld	122

3.1 Lineaire functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een (in woorden beschreven) lineaire functie een passende formule opstellen en daarbij de notatie $f(x) = \dots$ gebruiken;
- de grafiek van een lineaire functie tekenen en daarbij het begrip hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) gebruiken;
- berekeningen met lineaire functies uitvoeren.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij functies;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en een vast bedrag van € 65,00 per jaar.

- Welke formule past bij de jaarlijkse kosten K afhankelijk van het verbruikte aantal in m^3 water a per jaar?
- Maak een grafiek van K als functie van a .
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zullen er huishoudens van vier personen in deze regio zijn, die meer dan € 1000,00 per jaar aan water kwijt zijn?



Figuur 3.1

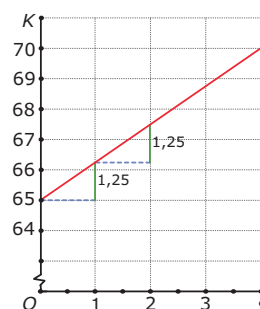
Uitleg

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Bij $a = 0$ hoort $K = 65$, het vaste jaarbedrag.

Elke extra m^3 water die je verbruikt, zorgt voor een toename van K met 1,25. Dus elke toename van a met 1 heeft een stijging van K met 1,25 tot gevolg. De grafiek wordt een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt. Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat. Het getal 1,25 heet het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

Omdat de formule de vorm $K = \dots$ heeft, hoort bij elke (positieve) waarde van a precies één waarde van K . Je zegt dan dat K een functie is van a . De formule schrijf je dan ook zo: $K(a) = 1,25 \cdot a + 65$.



Figuur 3.2

Met $K(200)$ bedoel je dan de kosten bij een jaarverbruik van 200 m^3 .

Ga na dat $K(200) = 315$ euro.

Als een huishouden de kosten wil beperken tot € 250,00 dan kun je uitrekenen hoeveel ze jaarlijks mogen verbruiken door de vergelijking $1,25 \cdot a + 65 = 250$ op te lossen. Je vindt dan $a = 148 \text{ m}^3$.

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg op pagina 92](#). In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrecht van € 70,00 per jaar.

- a Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?
- b Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?
- c Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- d Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- e In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Schat op basis hiervan hoeveel een gemiddeld huishouden van vier personen dan jaarlijks betaalt voor het waterverbruik.
- f Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 250$? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bij een kaars hoort de formule $L(t) = 25 - 3,1t$, hierbij is L de lengte in centimeter en t de brandtijd in uren.

- a Hoe lang was de kaars, voordat hij is aangestoken?
- b Met hoeveel centimeter neemt de lengte van de kaars per uur af, als hij is aangestoken?
- c Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Opgave 3

In de éne regio betaal je voor het verbruik van $a \text{ m}^3$ water per jaar een bedrag van $K_1(a) = 1,25a + 65$.
In een andere regio betaal je $K_2(a) = 1,20a + 70$.

- a Een gezin in regio 1 verbruikt 200 m^3 water per jaar. Een gezin in regio 2 verbruikt evenveel water per jaar. Welk gezin is het duurst uit?
- b Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Bij welk jaarverbruik aan water ben je in beide regio's even duur uit?”
- c Los deze vergelijking op en beantwoord de vraag.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

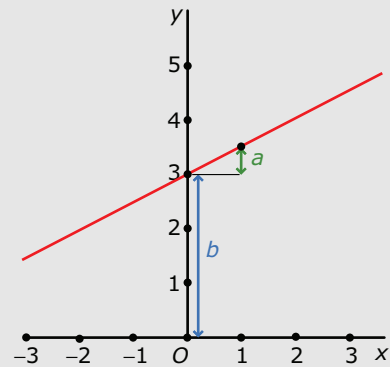
Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begintal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 ophoogt, neem de uitkomst met a toe. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Soms geef je zo'n lineaire functie de naam f en schrijf je $f(x) = a \cdot x + b$.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$. Je zegt in dat geval dat y **recht evenredig** is met x .



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Bereken ook de snijpunten met de assen.

Antwoord

Er zijn twee manieren om de grafiek te tekenen:

- Manier I: het begintal is 4 dus de grafiek 'start' in $(0, 4)$.
Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt $(0, 4)$ ga je elke keer dat de x -waarde met 1 toeneemt 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden.
Dit betekent dat de grafiek ook door bijvoorbeeld $(1; 4,5)$, $(2, 5)$ en $(3; 5,5)$ gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek.
Bij $x = 0$ hoort $y = 4$.
Bij $x = 6$ hoort $y = 0,5 \cdot 6 + 4 = 7$.
Trek de lijn door de twee bijbehorende punten $(0, 4)$ en $(6, 7)$.

Het snijpunt met de y -as vind je door $x = 0$ in te vullen. Dit geeft $(0, 4)$.

Het snijpunt met de x -as vind je door $y = 0$ te nemen. Je krijgt de vergelijking $0,5x + 4 = 0$.

En dit levert $x = -8$ op.

Het snijpunt met de x -as wordt $(-8, 0)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 94**. Gegeven is de functie $f(x) = -0,2x + 6$.

- Waaraan kun je zien dat de grafiek van f dalend is?
- Teken de grafiek van f .
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- De grafiek van lineaire functie g heeft hetzelfde hellingsgetal als de grafiek van f en gaat door het punt $(10,9)$. Bepaal het functievoorschrift van g .

Opgave 5

Gegeven zijn de functies $y_1 = 3x - 2$ en $y_2 = -0,5x + 4$.

- Teken de grafieken van deze functies in één assenstelsel.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken. Rond af op twee decimalen.

Opgave 6

Elke lineaire functie heeft een voorschrift van de vorm $y = ax + b$.

- Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van deze functie in beeld. Ga na of de grafiek door het punt $(99,200)$ gaat.
- Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van b . Voor welke waarde van b gaat deze functie door het punt $(99,200)$?
- Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van a . Voor welke waarde van a gaat deze functie door het punt $(99,200)$?

Voorbeeld 2

Gegeven is het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Waarom is y niet recht evenredig met x ?

Welke waarde van x hoort bij $y = 100$. Laat je berekening zien.

Antwoord

y is niet recht evenredig met x omdat de grafiek bij dit lineaire verband niet door $O(0,0)$ gaat. Er is namelijk sprake van een vast bedrag dat niet verandert als x toeneemt. Daarom wordt de waarde van y niet twee keer zo groot als de waarde van x twee keer zo groot wordt.

$y = 100$ betekent $0,5x + 4 = 100$ en dus $0,5x = 96$ zodat $x = \frac{96}{0,5} = 192$.

Je gebruikt voor het oplossen van zo'n vergelijking de balansmethode.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 95**.

- Laat met een getallenvoorbeeld zien, dat de y -waarde niet twee keer zo groot wordt als de waarde voor x twee keer zo groot wordt.
- In het voorbeeld wordt een vergelijking opgelost met de balansmethode. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 8

Gegeven zijn de formules $h_1(t) = 60 - 1,5 \cdot t$ en $h_2(t) = 3 \cdot t$.

- Waarom kun je de grafieken van beide formules in één assenstelsel tekenen? Doe dit.
- Welke van beide formules beschrijft een recht evenredig verband?
- Je ziet aan de grafieken dat er een snijpunt is. Welke vergelijking hoort daar bij? Laat zien hoe je deze vergelijking oplost en het snijpunt berekent.

Oefenen

Opgave 9

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 km/h van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 km. a is de afstand tot A en t is de tijd in uren.

- Teken in een a, t -assenstelsel de grafiek van beide fietstochten.
- Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t .
- Na hoeveel tijd komen beide fietsers elkaar tegen? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Bereken van de volgende lineaire functies de snijpunten van de grafieken met de assen.

- $h(t) = 3t - 5$
- $f(x) = x - 4$
- $g(x) = -0,5x + 4$
- $k(x) = -2(x + 3)$

Opgave 11

Gegeven is de functie $y_1 = -4 + 5x$.

- Teken de grafiek van deze functie en geef het begingetal en het hellingsgetal in die grafiek aan.
- De grafiek van y_1 wordt 10 eenheden langs de y -as omhoog geschoven. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_2 die daardoor ontstaat.
- De grafiek van y_1 wordt gespiegeld in de y -as. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_3 die daardoor ontstaat.

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 0,5x$ en $g(x) = 2x - 1$.

- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van deze functies met de beide assen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 13

De Elfstedentocht is een schaatstocht langs de elf Friese steden. Het laatste stuk is een vrijwel rechte tocht van Dokkum naar Leeuwarden met een lengte van 26 km. Ireen komt na zeven uur schaatsen in Dokkum aan. Zij schaatst dit laatste stuk voor de wind met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier is zij in Leeuwarden en heeft zij in totaal ongeveer 200 km afgelegd.

- Met welke snelheid heeft zij het laatste deel van de tocht gereden?
- Stel je voor dat t de tijd in uren is, $t = 0$ op het moment dat Ireen aan de Elfstedentocht begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welk functievoorschrift $a(t)$ geldt er voor het laatste deel van haar tocht?
- Ireen is tegelijk met Margot begonnen aan de schaatstocht. Margot komt echter twee uur na Ireen pas in Dokkum aan. Ook zij schaatst het laatste stuk met een constante snelheid, maar doet er een uur over. Welke formule geldt voor haar tocht van Dokkum naar Leeuwarden?

Opgave 14

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = -3x$.

- Waarom is hier sprake van een recht evenredig verband tussen x en y ?
- De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$. De nieuwe grafiek gaat door $(5,20)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?
- De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,0)$ en vervolgens 3 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(3,1)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

Toepassen

De kosten voor het verbruik van elektriciteit bedragen bij een bepaalde leverancier € 0,20 per kWh (kiloWattuur) en een vast bedrag van € 280,00 per jaar.

Hierbij past de formule $K = 0,20 \cdot a + 280$ waarin a het jaarverbruik (in kWh) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Je ziet dat de jaarkosten niet recht evenredig zijn met het verbruik a .

Met deze formule kun je de jaarkosten berekenen als je het verbruik weet. Maar omgekeerd kun je ook je verbruik berekenen als je de jaarkosten weet.



Figuur 3.4

Opgave 15

Bekijk de formule voor de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van a kWh elektriciteit.

- Waarom is K niet recht evenredig met a ?
- Bereken de jaarkosten voor elektriciteit in deze regio als je 2500 kWh verbruikt in een jaar.
- Je wilt de kosten voor elektriciteit beperken tot € 500,00. Hoeveel kWh kun je daarvoor in een jaar verbruiken?

Opgave 16

Bij een andere aanbieder van elektriciteit zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik € 0,16 per kWh met een vastrecht van € 310,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in kWh voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 kWh toeneemt?
- Hoeveel betaal je bij deze aanbieder als je geen elektra verbruikt, maar wel een aansluiting hebt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 2950 kWh elektriciteit. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 800$? Licht je antwoord toe.

Opgave 17

Je vergelijkt de twee aanbieders van elektriciteit met elkaar.

- Met welke vergelijking kun je berekenen voor welke waarde van a beide even duur zijn?
- Los deze vergelijking op.
- Bij welk verbruik heb je liever de tweede aanbieder die hogere vaste kosten per jaar heeft?

Testen

Opgave 18

Voor het plaatsen van een ketel vraagt bedrijf A € 45,00 voorrijkosten en € 60,00 per uur dat ze bezig zijn. Bedrijf B vraagt geen voorrijkosten, maar bij hen moet je € 70,00 per uur betalen.

- Waarom zijn de kosten K_B (in €) voor het plaatsen van een ketel bij bedrijf B recht evenredig met de gewerkte tijd t (in uren)?
- Stel een formule voor zowel bedrijf A als bedrijf B op voor de kosten K (in €) als functie van de tijd t (in uren).
- Als het plaatsen van een ketel drie uur duurt, welk bedrijf is dan goedkoper?
- Na hoeveel uur is bedrijf A goedkoper?
- De familie Berendsen heeft door bedrijf A een ketel laten plaatsen, maar later kwamen ze erachter dat bedrijf B € 20,00 goedkoper zou zijn geweest als zij er net zo lang over hadden gedaan. Hoelang is bedrijf A met het plaatsen van de ketel bezig geweest?

Opgave 19

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = 7x + 10$.

- Bereken exact de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.
- De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$. De nieuwe grafiek gaat door $(10,15)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?
- De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$ en vervolgens 2 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(10,0)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?

3.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- grafieken tekenen bij lineaire verbanden in het algemeen;
- lineaire formules herleiden naar lineaire functies.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- werken met lineaire functies.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De omtrek van rechthoek $OAPB$ is 30.

Noem de lengte van deze rechthoek l en de breedte b .

- Welke formule geldt voor het verband tussen l en b ?
- Waarom is de bijbehorende grafiek in een l, b -assenstelsel een rechte lijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

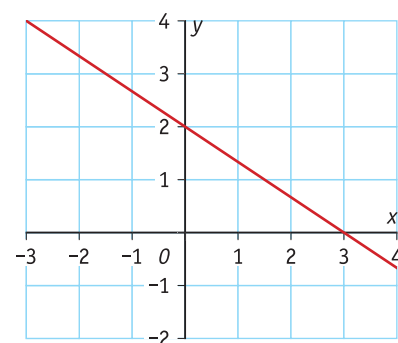
Een formule als $2x + 3y = 6$ is een lineaire vergelijking met twee variabelen. De grafiek bij zo'n lineaire vergelijking is een rechte lijn.

Je kunt de formule herleiden tot de vorm $y = ax + b$. In deze vorm is y uitgedrukt als een functie van x :

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\3y &= -2x + 6 \\y &= -\frac{2}{3}x + 2\end{aligned}$$

Nu is y een lineaire functie van x .

Je kunt ook schrijven $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



Figuur 3.1

Op de rechte lijn liggen alle punten (x,y) die voldoen aan $2x + 3y = 6$ en ook aan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Om die rechte lijn te tekenen, is het niet nodig om de formule te herschrijven. Je kunt ook enkele punten van de lijn bepalen:

- Als $x = 0$, dan is $3y = 6$ en dus $y = 2$. Het punt $(0,2)$ ligt op de lijn.
- Als $x = 1$, dan is $2 + 3y = 6$ en dus $y = 1\frac{1}{3}$. Het punt $(1, 1\frac{1}{3})$ ligt op de lijn.
- Als $y = 0$, dan is $2x = 6$ en dus $x = 3$. Het punt $(3,0)$ ligt op de lijn.

Omdat de grafiek bij een lineaire vergelijking een rechte lijn is, heb je genoeg aan twee punten om de grafiek te tekenen. Vaak neem je daarvoor de punten met $x = 0$ of $y = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de lineaire vergelijking $3x - 4y = 12$.

- Teken de lijn van deze lineaire vergelijking door eerst de snijpunten met de beide assen te berekenen.
- Herleid de vergelijking tot de vorm $y = \dots$

Opgave 2

Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $-2x + y = 2$ en $5x + 2y = 13$.

- Teken de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
- Bepaal het snijpunt van de grafieken met behulp van de grafiek.
- Schrijf de eerste formule in de vorm $f(x) = \dots$ en de tweede in de vorm $g(x) = \dots$
- Bereken nu het snijpunt door $f(x) = g(x)$ op te lossen.
- Wat is het nut van het berekenen van een snijpunt door een vergelijking op te lossen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

[Bekijk de applet.](#)

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

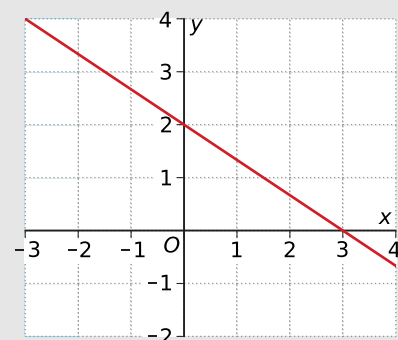
Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar een lineaire functie als $b \neq 0$.

Zo is $2x + 3y = 6$ te schrijven als $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Dit is een lineaire functie met begingetal 2 en hellingsgetal $-\frac{2}{3}$.

Je kunt hem ook schrijven als $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



Figuur 3.2

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $by = c$ en is te herleiden tot $y = \frac{c}{b}$.
Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $ax = c$ en is te herleiden tot $x = \frac{c}{a}$.
Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y-as.

Voorbeeld 1

Een museum trok op een zaterdag veel bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 1,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 2,50. In totaal is er voor € 1245,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Hoeveel kinderen en hoeveel volwassenen hebben het museum bezocht?

Antwoord

Er zijn meerdere combinaties mogelijk. Bijvoorbeeld 50 kinderen en 468 volwassenen of 150 kinderen en 408 volwassenen. Met een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos kun je gemakkelijk alle oplossingen bepalen.

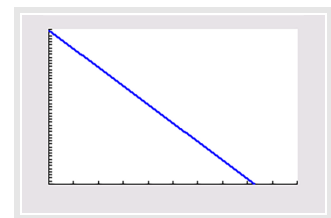
Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y , dan geldt:

$1,50x + 2,50y = 1245$. Dit is een lineair verband tussen x en y .

Je kunt de formule herleiden tot $y = 498 - 0,6x$.

Maak je nu een grafiek of een tabel, dan krijg je alle mogelijke combinaties van x en y .

Je kunt dan de volgende waarden vrij snel vinden: $x = 0$ en $y = 498$, $x = 5$ en $y = 495$, $x = 10$ en $y = 492$, ..., tot aan $x = 830$ en $y = 0$.



Figuur 3.3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 101**. Je ziet een lineair verband tussen de variabelen x en y gegeven door $1,50x + 2,50y = 1245$.

- Laat zien dat je deze formule kunt herleiden tot $y = -0,6x + 498$.
- Kunnen er 300 kinderen bij de voorstelling aanwezig zijn geweest? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Een marktkoopman verkoopt grote en kleine vazen. Grote vazen verkoopt hij voor € 12,00 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij voor € 240,00 aan vazen verkocht.

- Hoeveel kleine en grote vazen kan hij verkocht hebben? Schrijf alle combinaties op.
- Stel dat de marktkoopman 34 vazen op die dag heeft verkocht. Hoeveel kleine en hoeveel grote vazen heeft hij dan verkocht?

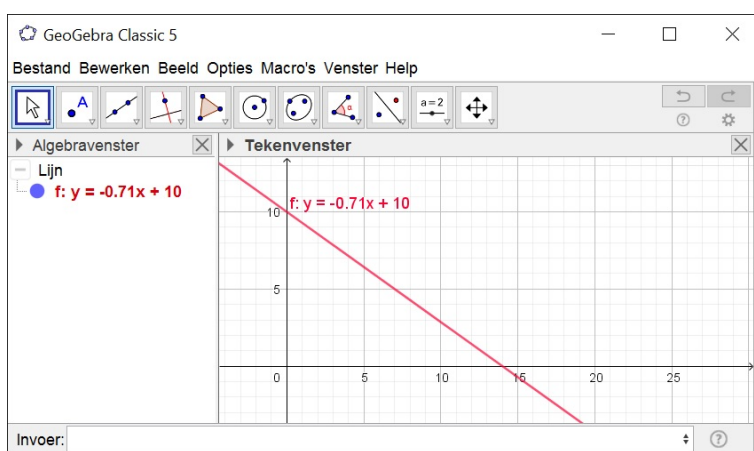
Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire formule $2,5x + 3,5y = 35$. Maak een grafiek bij het verband tussen beide variabelen.

Antwoord

De lineaire vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$ kun je ook schrijven als $5x + 7y = 70$. Er zijn meerdere manieren om hierbij een grafiek te tekenen:

- Omdat bij een lineair verband de grafiek een rechte lijn is, heb je aan twee punten (x,y) die aan de vergelijking voldoen genoeg. Je vindt die snel door eerst $x = 0$ en vervolgens $y = 0$ te kiezen: $(0,10)$ en $(14,0)$.
- Je herleidt de vergelijking tot $y = -\frac{5}{7}x + 10$. De grafiek wordt een rechte lijn die door het punt $(0,10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{7}$ heeft.



Figuur 3.4

Opgave 5

In [Voorbeeld 2 op pagina 102](#) zie je hoe je een grafiek maakt bij de vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$.

- Waarom kun je in dit geval de grafiek het beste tekenen door eerst de snijpunten met de assen te berekenen?
- Laat zien hoe je de formule herleidt tot een lineaire functie. En maak zelf daarmee de grafiek.
- Welke waarde van x hoort bij $y = -20$? Schrijf je antwoord in de vorm $x = \dots$

Opgave 6

Je ziet hieronder vier keer de vergelijking van een lijn. Om die lijn te tekenen kun je eerst de snijpunten met de assen berekenen en dan een rechte lijn door die twee snijpunten trekken.

Je kunt ook de vergelijking eerst herleiden tot een lineaire functie en dan het begingetal en de richtingscoëfficiënt gebruiken voor het tekenen van de lijn.

Gebruik bij de onderstaande lijnen elk van deze methoden in ieder geval één keer.

- $5x + 4y = 20$
- $5x - 4y = 20$
- $2x + y = 10$
- $x - 2y = 10$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

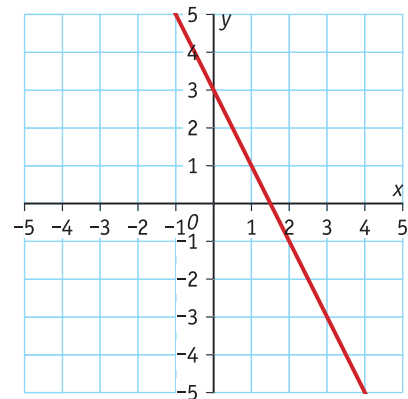
Bij een lineair verband hoort in het algemeen de vergelijking $ax + by = c$.

Stel $a = 4$, $b = 2$ en $c = 6$, dan krijg je de vergelijking $4x + 2y = 6$.
Bekijk de grafiek.

Er is een aantal bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de x -as is;
- $b = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de y -as is;
- $c = 0$: de grafiek gaat door $O(0,0)$.

Wat gebeurt er met de grafiek als $a = b$, of $a = -b$?



Figuur 3.5

Opgave 7

- Hoe ziet de vergelijking van een verticale lijn eruit?
- Waarom hoort bij een verticale lijn geen lineaire functie?

Opgave 8

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met twee variabelen is $ax + by = c$.

- Herleid deze vergelijking tot een functie van de vorm $f(x) = \dots$
- Waarom moet bij a gelden dat $b \neq 0$?
- Welk bijzonder geval krijg je als $a = 0$ terwijl $b \neq 0$ en $c \neq 0$?
- Welk bijzonder geval krijg je als $b = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $c \neq 0$?
- Welk bijzonder geval krijg je als $c = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Opgave 9

Welke van deze vergelijkingen kun je herleiden tot een lineaire functie? Bepaal in die gevallen de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn en maak de grafiek ervan.

- $2x - 3y = 12$
- $2x - 3 = 12$
- $x = -2y + 6$
- $4y - 6 = 0$

Oefenen

Opgave 10

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $-2x + 3y = 6$
- b $6x - 2y = 24$
- c $y = 2x + 1$
- d $4x + y = 10$
- e $20x = 45$
- f $y + 2 = 0$

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l : $2x - 4y = -3$ en m : $5x + 4y = 8$.

- a Bereken van beide lijnen algebraïsch de snijpunten met de coördinaatassen.
- b Maak van beide lijnen de grafieken in één assenstelsel.
- c Bereken de coördinaten van hun snijpunt in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Stel je voor dat je een groep van 180 personen van drinken wilt voorzien. Je koopt daarvoor literpakken appelsap en sinaasappelsap. Je hebt 90 pakken nodig. Appelsap kost € 0,90 per literpak en sinaasappelsap € 1,05 per literpak. Noem het aantal pakken appelsap a en het aantal pakken sinaasappelsap s . Aan de kassa moet je € 90,00 betalen.

- a Aan welke twee vergelijkingen moeten deze variabelen voldoen?
- b Teken de bijbehorende grafieken.
- c Bepaal hoeveel pakken appelsap en sinaasappelsap je hebt gekocht.

Opgave 13

Een winkelier verkoopt grote en kleine ballen. De grote ballen verkoopt hij voor € 8,50 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij 60 ballen verkocht en dat leverde hem € 387,50 op. Hoeveel grote en hoeveel kleine ballen heeft hij verkocht?

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen:

$$k: \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y = 21$$

$$l: 0,01x + 2,75 = y$$

$$m: x = 7y + 4$$

- a Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen k en l . Geef je antwoord als coördinaat en rond af op twee decimalen.
- b Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k , l en m met de x -as. Geef je antwoord als coördinaat.



Opgave 15

Gegeven zijn de lijnen l : $0,5y - 2x = c$ en m : $y - ax = -4$.

- a Voor welke a zijn de lijnen evenwijdig?
- b Voor welke c ligt het snijpunt van de lijnen op de y -as?
- c Voor welke a en c snijden de lijnen elkaar in het punt $(5,8)$?

Opgave 16

Deze puzzel wordt toegeschreven aan Euclides (ongeveer 300 voor Christus).

Een ezel en een muilnier sjokken voort, beladen met allemaal even zware zakken. De ezel zucht onder zijn last, waarop het muilnier tegen zijn lotgenoot zegt: Wat kreun en jammer je toch! Tweemaal zoveel zou ik dragen als jij, als je mij één zak van jou zou geven, terwijl we evenveel zouden dragen als je er één van mij nam. Hoeveel zakken draagt ieder dier?

Los de puzzel op.

Toepassen

Het hekwerk om een rechthoekig weiland heeft een totale lengte van 240 m.

Het weiland zit met één zijde tegen een brede rivier, dus daar is geen hekwerk nodig.

Noem je de lengte l en de breedte b , dan kun je voor de omtrek opschrijven:

$$2 \cdot l + b = 240$$

Er zijn nu verschillende waarden voor l en b mogelijk.

Opgave 17

Bekijk het inleidende verhaal hierboven.

- a Is het belangrijk wat je lengte en wat je breedte noemt? Moet de lengte altijd groter zijn dan de breedte?
- b Herleid de formule voor de lengte van het hekwerk tot de vorm $l = \dots$
- c Hoe lang is het weiland als de breedte 40 m is?
- d Hoe lang is het weiland als het vierkant is?

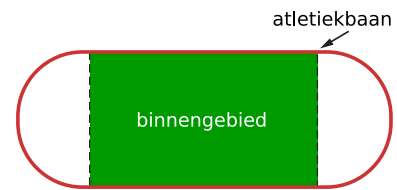
Opgave 18

Neem aan dat de oppervlakte van het weiland uit de vorige opgave 5400 m^2 is.

- a Hoe kun je dan de lengte en de breedte ervan berekenen?
- b Welke formule met l en b kun je opschrijven voor de oppervlakte van het weiland?
- c Je hebt nu twee formules voor l en b .
Maak daar een vergelijking met één onbekende van door ze te combineren.
- d Je kunt de vergelijking die je bij c hebt gevonden oplossen. Laat zien hoe.

Opgave 19: Atletiekbaan

Een atletiekbaan heeft een lengte van 400 m. Daarmee wordt de omtrek van het binnengebied bedoeld. Dat binnengebied bestaat uit een rechthoek met daartegen twee halve cirkels, zie figuur. De lengte van de rechthoek is l en de breedte b .



Figuur 3.6

- a Welke formule kun je hieruit afleiden?
- b Als de lengte van elk van beide rechte stukken van de atletiekbaan 100 m is, hoe groot moet dan de breedte van de rechthoek zijn? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Testen

Opgave 20

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $5x + 2y = 10$
- b $-2x + 5y = 7$
- c $x = 4$
- d $4 - 2y = 0$

Opgave 21

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje van € 9,00, in de overige zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes in de bak is € 3000,00.

“De vraag is: Hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 zitten er in de bak?”

- a Stel twee lineaire vergelijkingen op om dit probleem op te lossen.
- b Maak grafieken bij deze vergelijkingen.
- c Bepaal de oplossing van het probleem.

3.3 Stelsels vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van substitutie;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine;
- opstellen van een stelsel van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen.



Figuur 3.1

Bereken algebraïsch hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal zijn de inkomsten door kaartverkoop € 1110,00. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Dit probleem kun je aanpakken door bijvoorbeeld twee variabelen in te voeren:

- het aantal kinderen in de zaal is x ;
- het aantal volwassenen in de zaal is y .

Natuurlijk kun je ook letters als k en v nemen, maar het voordeel van deze keuze is dat je meteen weet wat je op de x -as en wat je op de y -as uitzet. Er zijn twee gegevens:

- het totaal aantal bezoekers is 300, dus $x + y = 300$
- de totale inkomsten zijn 1110 euro, dus $2,5x + 4,5y = 1110$

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit stelsel wil je oplossen, dat wil zeggen een combinatie van waarden voor x en y zoeken die aan beide vergelijkingen tegelijk voldoen.

Zo'n stelsel van vergelijkingen wordt vaak als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} x + y &= 300 \\ 2,5x + 4,5y &= 1110 \end{cases}$$

In de voorbeelden leer je verschillende methoden om zo'n stelsel op te lossen.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de [Uitleg op pagina 107](#).

- a Herleid beide vergelijkingen naar lineaire functies.
- b Bepaal of bereken het snijpunt van beide grafieken.
- c Hoeveel kinderen zaten er in de zaal?

Opgave 2

Stel dat een theatervoorstelling 500 bezoekers trekt. Een kinderkaartje kost € 4,00, een volwassenenkaartje kost € 6,50. De totale inkomsten door kaartverkoop zijn € 3300,00.

Welk stelsel van vergelijkingen kun je hierbij opstellen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je in veel gevallen vinden door:

- beide vergelijkingen te herleiden naar functies (als dat kan) en dan de gevraagde snijpunten te berekenen door beide functies gelijk te stellen;
- beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- **substitutie**: je drukt bij één van beide vergelijkingen de éne variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking.
- de **balansmethode**: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan een van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen).

Een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft soms geen oplossing. Het is dan een **strijdig stelsel**. De beide bijbehorende grafieken zijn evenwijdige lijnen.

Het meest bijzondere geval is de situatie dat beide vergelijkingen (ook al zien ze er verschillend uit) toch dezelfde lijn voorstellen. Er zijn dan oneindig veel oplossingen, namelijk alle punten op die lijn.

Voorbeeld 1

Los dit stelsel met behulp van substitutie op.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. In de andere vergelijking kun je nu y vervangen door $300 - x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2,5x + 4,5(300 - x) = 1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Het stelsel is dus op te lossen: $x = 120$. Er zaten dus 120 kinderen in de zaal.

Opgave 3

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

- Druk in de eerste vergelijking y uit in x .
- Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?
- Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.
- Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y . Schrijf je oplossing nu volledig op en laat zien hoe je die kunt controleren.
- Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y . Los ook op die manier het stelsel op.

Opgave 4

Los het stelsel van vergelijkingen door middel van substitutie op.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel van vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig in de bovenste vergelijking beide zijden met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2,5x + 2,5y = 750 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking de onderste vergelijking aftrekt, dan krijg je $-2y = -360$.

Dit geeft $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.



Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 109** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

- a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.
- b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.
- c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en in de onderste vergelijking beide zijden met -2. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

Opgave 6

Los de stelsels van vergelijkingen op eenzelfde manier als in het voorbeeld op.

a
$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 6x + 8y = 1 \end{cases}$$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig veld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b . Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt: $(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$.

Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 110**.

- a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?
- b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van grafieken.

Opgave 8

Los op met behulp van een stelsel van vergelijkingen.

- a Bereken welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 110 m^2 en een omtrek van 55 meter heeft.
- b Bereken algebraïsch welke afmetingen een rechthoekig veld met een oppervlakte van 100 m^2 en een omtrek van 50 meter heeft.

Opgave 9

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen:
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

- Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.
- Welk probleem doet zich voor?
- Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Oefenen

Opgave 10

Los de stelsels van vergelijkingen op.

- $$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x + 4y = -7 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$$

Opgave 11

Van een rechthoek is de oppervlakte 200 cm^2 en de omtrek 90 cm . Noem de lengte l en de breedte b , beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken algebraïsch de oplossing van dit stelsel.

Opgave 12

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

- Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.
- Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?
- Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q .
- Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verhandelaar?

Opgave 13

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kg melk 1 kg volvette kaas gemaakt. 22,5 kg melk verwerkt men daar tot 1 kg boter. Er is 1000 kg melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zoveel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kg kaas en hoeveel kg boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 14

Voor een heg koopt een tuinman jonge groenblijvende planten: twintig thuja's en twaalf jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar komen er vijf thuja's tekort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

En natuurlijk zijn er ook stelsels van meer dan twee vergelijkingen met soms ook meer dan twee onbekenden.

De technieken om een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** op te lossen zijn hetzelfde als de technieken die je in dit onderwerp hebt geleerd. Van een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden ga je naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden en daarna naar één vergelijking met één onbekende.

In de opgaven hieronder zie je hoe dat gaat.

Opgave 15

Je wilt het volgende stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden oplossen.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y - 6z = 1 \\ 7x - 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

- Neem eerst de bovenste twee vergelijkingen en elimineer de z .
- Neem nu de bovenste en de onderste vergelijking en elimineer weer de z .
- Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden gekregen. Los dat stelsel op.
- Bereken tenslotte de waarde van z door de gevonden waarden voor x en y in één van de drie gegeven vergelijkingen in te vullen.

Opgave 16

Los de volgende stelsels van drie vergelijkingen met drie onbekenden op. Soms zitten er vergelijkingen tussen die al meteen maar twee onbekenden hebben, dan kun je sneller werken dan in de vorige opgave.

$$\text{a} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + z = -3 \\ x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$\text{c} \quad \begin{cases} u = v + 0,5 \\ w = v + 2,5 \\ u + v + w = -1,5 \end{cases}$$

$$\text{d} \quad \begin{cases} p + q = 4 \\ q + r = 6 \\ p - q + r = 10 \end{cases}$$

Opgave 17

levensmiddel	eiwit (gram)	vet (gram)	koolhydr. (gram)	aantal kcal
achterham	18,2	5,5	1,7	129
komijnenkaas	20,0	21,5	0,1	271
hagelslag (melk)	6,5	16,0	70,0	458
sla	1,3	0,2	1,0	11

Tabel 3.1

Hoeveel calorieën er in eten zitten, hangt af van de hoeveelheid vet, koolhydraten en eiwitten. Dat aantal calorieën heet de voedingswaarde, meestal uitgedrukt in kcal (kilocalorie). Via voedingswaardetabel.nl kun je van heel veel levensmiddelen de voedingswaarde per 100 mg bekijken. Een paar voorbeelden vind je in de tabel. Die voedingswaarde wordt berekend door uit te gaan van vaste caloriewaarden per gram eiwit, per gram vet en per gram koolhydraten.

Bereken de hoeveelheid kcal in 1 gram eiwit, in 1 gram vet en in 1 gram koolhydraten.

Testen

Opgave 18

Los de volgende stelsels van vergelijkingen op.

$$\text{a} \quad \begin{cases} k + 3v = 200 \\ k + v = 110 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$$

$$\text{c} \quad \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

$$\text{d} \quad \begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0,5p \end{cases}$$

Opgave 19

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: ‘zaal’ en ‘balkon’. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats en hoeveel een zaalplaats?

3.4 Lineaire modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal meetpunten een passende formule opstellen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

<i>tijd</i> (in uren)	0	2	4	6	8	10
<i>lengte</i> (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 3.1

- Maak bij deze tabel een puntengrafiek.
- Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Uitleg

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens:

<i>jaartal</i>	1960	1970	1980	1990	2000	2010
<i>aantal inwoners</i> ($\times 100000$)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 3.2

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei niet precies lineair is, kun je hem goed benaderen door een lineair model. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Kies eerst een paar variabelen: N is het aantal inwoners ($\times 100000$) en t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft gaat door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$. Ga dat zelf na door de punten te tekenen. Om een formule bij deze lijn op te stellen, zoek je eerst het hellingsgetal. In $50 - 20 = 30$ jaar tijd neemt N toe met $9,8 - 5,3 = 4,5$.

Per jaar is dat een toename van $\frac{4,5}{30} = 0,15$.

Dit is het hellingsgetal van de rechte lijn. De bijbehorende formule is dus $N = 0,15 \cdot t + b$. Om b te bepalen, gebruik je het feit dat de grafiek door $(20; 5,3)$ gaat, dus: $5,3 = 0,15 \cdot 20 + b$. Dit betekent dat $b = 2,3$. Het lineaire model heeft daarom als formule $N = 0,15 \cdot t + 2,3$.

Hiermee kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 1

Bekijk het lineaire model dat in de [Uitleg op pagina 114](#) wordt opgesteld voor de bevolking van deze stad.

- Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn bestaat die door de punten $(20; 5,3)$ en $(50; 9,8)$ gaat.
- Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.
- Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Opgave 2

Een cilindervormige kaars is anderhalf uur na het aansteken 25 cm lang en vier uur na het aansteken nog 20 cm lang. Voor deze kaars kun je aannemen dat de lengte L (in centimeter) afhangt van de brandtijd t (in uren).

- Bereken het hellingsgetal van die lineaire functie. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?
- Stel het functievoorschrift $L(t)$ op.
- Bereken met behulp van dat functievoorschrift na hoeveel uur deze kaars volledig is opgebrand.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

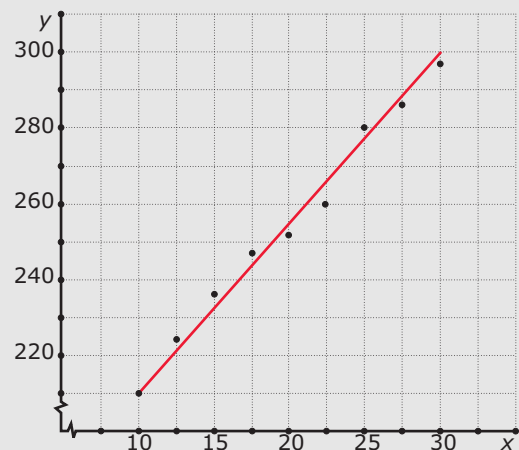
Bekijk de applet

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. En daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten $(10, 210)$ en $(30, 300)$, dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- x neemt toe met $30 - 10 = 20$;
- y neemt toe met $300 - 210 = 90$;
- als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{90}{20} = 4,5$ toe;
- het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) van de lijn is 4,5;
- de gevraagde formule is $y = 4,5x + b$;
- $(10, 210)$ moet op de lijn liggen, dus $210 = 4,5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4,5x + 165$.



Figuur 3.1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Stel een formule op voor de lijn die door de punten A en B gaat.

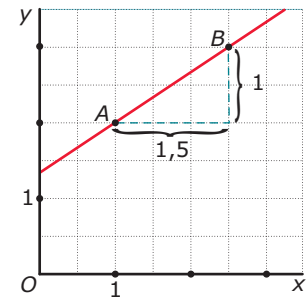
Antwoord

Lees af: $A(1,2)$ en $B(2,5; 3)$. De gevraagde formule heeft de vorm $y = ax + b$.

Zo bereken je a en b :

- $a = \frac{3-2}{2,5-1} = \frac{2}{3}$;
- de formule wordt dan $y = \frac{2}{3}x + b$;
- $A(1,2)$ invullen geeft: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.
Als je het punt $B(2,5; 3)$ invult, moet je dezelfde waarde voor b krijgen.

De gevraagde formule is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.



Figuur 3.2

Opgave 3

Bekijk eerst [Voorbeeld 1 op pagina 116](#).

- Lijn l gaat door de punten $(-3, 2)$ en $(17, 10)$. Stel de vergelijking van lijn l op.
- Lijn m gaat door de punten $(5, 20)$ en $(10, -25)$. Stel de vergelijking van lijn m op.
- Gegeven is dat f een lineaire functie is en dat $f(6) = 8$ en $f(10) = 14$. Stel het functievoorschrift op van f .

Opgave 4

Een jaar of veertig geleden was een vrouwelijke huisarts nog een uitzondering. Maar tegenwoordig zijn er steeds meer vrouwelijke huisartsen en dat aantal neemt nog steeds toe. Bekijk de figuur. Neem aan dat de stijging lineair verloopt.

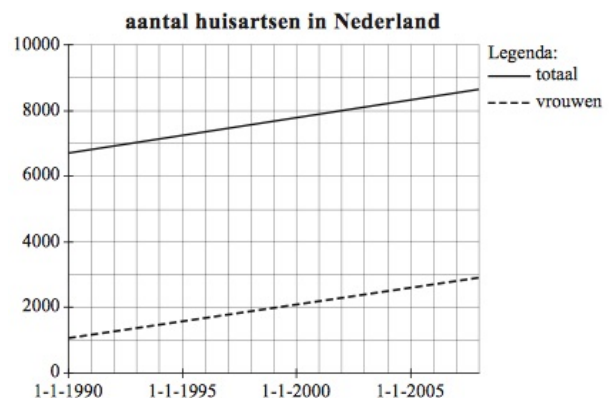
Op 1 januari 1990 waren er 1078 vrouwelijke huisartsen en op 1 januari 2008 bleek dit aantal gestegen tot 2980. Het aantal vrouwelijke huisartsen H_V na t jaar, met $t = 0$ op 1 januari 1990, is te schrijven als $H_V = a \cdot t + 1078$. De waarde van a is ongeveer 106.

- Bereken met behulp van bovenstaande gegevens de waarde van a op één decimaal nauwkeurig.

Ook het totaal aantal huisartsen H_T neemt vanaf 1 januari 1990 toe. Hiervoor geldt de formule $H_T = 107 \cdot t + 6703$, met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 1990.

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor H_T en H_V is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.

- Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.



Figuur 3.3 Bron: havo A examen 2013

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je kunt een formule voor de lijn die door de punten $A(1,2)$ en $B(2,5;3)$ gaat ook opstellen door beide punten in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen:

- $A(1,2)$ geeft: $2 = a + b$.
- $B(2,5;3)$ geeft: $3 = 2,5a + b$.

Trek je beide vergelijkingen van elkaar af, dan vind je: $1 = 1,5a$. Dus $a = \frac{2}{3}$. En (na invullen): $b = \frac{4}{3}$. De vergelijking van de lijn is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

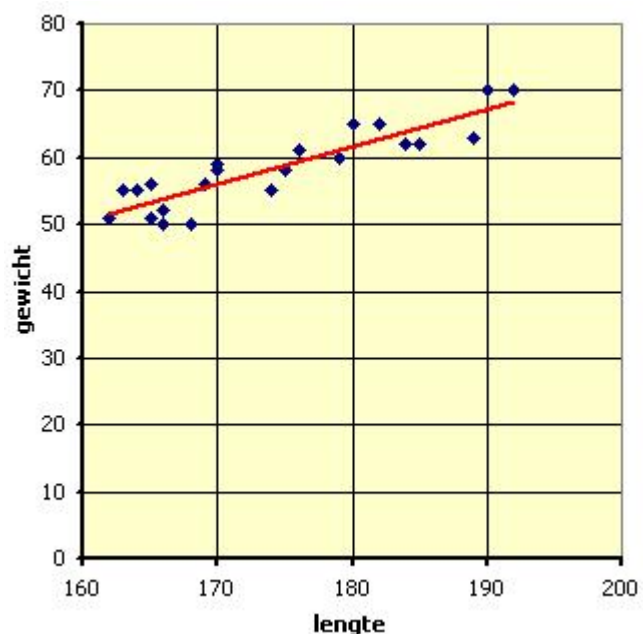
Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 117** tref je een andere manier aan om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen. Lijn l gaat door de punten $(-4,2)$ en $(20,10)$.

Stel een vergelijking van l op door deze methode toe te passen.

Voorbeeld 3

Van 22 scholieren in een 4 havo klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenaamde trendlijn doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft dan een verband tussen lengte L (in centimeter) en gewicht G (in kilogram). Er is gekozen voor een lineair verband. Stel daarbij een passende formule op.



Figuur 3.4

Antwoord

De formule krijgt de vorm: $G = a \cdot L + b$. De lijn gaat ongeveer door $(160,50)$ en $(190,67)$.

- $a = \frac{67-50}{190-160} \approx 0,57$;
- de formule wordt dan $G = 0,57L + b$;
- punt $(160,50)$ invullen geeft $50 = 0,57 \cdot 160 + b$, dus $b \approx -41,2$.

De gevraagde formule is $G = 0,57L - 41,2$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3 op pagina 117** zie je hoe bij een verzameling meetpunten een lineair model wordt opgesteld door een zo goed mogelijk passende lijn te trekken en twee punten op die lijn af te lezen uit de figuur.

- Stel dat je afleest dat de rechte lijn door de punten $(170,56)$ en $(195,70)$ gaat. Welke formule past er dan bij de lijn?
- Bepaal met de formule die je bij a hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 meter uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 7

Dit zijn twee bijzondere situaties.

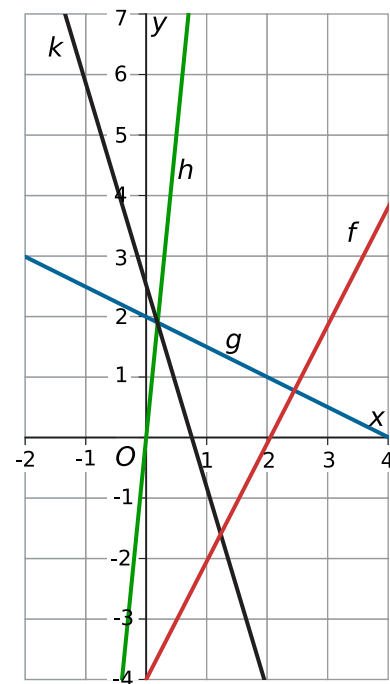
- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(12,1)$ gaat.
- Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(2,10)$ gaat.

Oefenen

Opgave 8

In dit assenstelsel staan vier grafieken van lineaire functies.

- Stel het functievoorschrift van f op.
- Stel het functievoorschrift van g op.
- Stel het functievoorschrift van k op.
Neem aan dat de grafiek door de punten $(-1,6)$ en $(1,-1)$ gaat.



Figuur 3.5

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de rechte lijn l bij de volgende situaties .

- l gaat door de punten $(30,68)$ en $(34,56)$.
- l gaat door de punten $(-2,100)$ en $(-3,100)$.
- l heeft richtingscoëfficiënt 0,5 en gaat door $(-2,4)$.
- l is de x -as.
- l is de y -as.

Opgave 10

Lijn l gaat door de punten $P(13,8)$ en $Q(43,68)$ en lijn m gaat door de punten $R(23,38)$ en $T(43,28)$. Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m .

Opgave 11

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$ waarin $s(t)$ de afgelegde weg (in meters) na t seconden is.

- Wat stelt $s(0)$ voor?
- Wat stelt v voor?
- Neem $s(0) = 0$ en $v = 20$ voor een bepaald voorwerp. Breng de bijbehorende grafiek van $s(t)$ in beeld.
- Een tweede voorwerp heeft 400 meter voorsprong en beweegt langs dezelfde baan met een snelheid van 15 m/s. Geef de formule die bij de beweging van dit voorwerp past en breng de bijbehorende grafiek in beeld.
- Bereken op welk tijdstip het eerste voorwerp het tweede heeft ingehaald.

Opgave 12

Bij een eenparig versnelde beweging beweegt een voorwerp met een constante versnelling a (in m/s^2) langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven door: $v(t) = v(0) + a \cdot t$ waarin $v(t)$ de snelheid (in m/s) na t seconden is.

- Wat stelt $v(0)$ voor?
- Albert weet op twee momenten de snelheid van een voorwerp. Hij weet namelijk dat het voorwerp vertrekt met een beginsnelheid van 40 m/s en dat het voorwerp na 3,5 seconden een snelheid van 75 m/s heeft. Stel eerst de formule $v(t)$ voor dit voorwerp op en bereken dan na hoeveel seconden het voorwerp met een snelheid van 350 m/s beweegt.
- Om een voorwerp met een massa m van 1000 kg dat met een constante snelheid van 40 m/s beweegt tot stilstand te brengen, wordt een bepaalde remkracht F (in newton) uitgeoefend. Het voorwerp moet binnen acht seconden tot stilstand komen. Er geldt $F = m \cdot a$ met F in newton, m in kg en a (de versnelling) in m/s^2 . Bereken de grootte van de remkracht F .

Toepassen

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

<i>tijd</i> (in uren)	0	2	4	6	8	10
<i>lengte</i> (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 3.3

Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars beschrijft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Opgave 13

Bekijk de gegevens in de tabel van de lengtes van de brandende kaars.

- a Licht toe waarom de grafiek bij benadering een rechte lijn is.
- b Met welke formule kun je de kaarslengte L in cm als functie van de tijd t in uren benaderen?
- c Na hoeveel uur is de kaars volgens de formule opgebrand?

Opgave 14: Hogedrukpan

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,7	1,94
temperatuur T (in °C)	100	105	110	115	120

Tabel 3.4

Als je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel tekent, dan kun je daar (bij benadering) een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat de lijn door het punt $(1,100)$. Bij de tabel past dan een lineair verband van de vorm $T = a \cdot p + b$. De rechte lijn gaat ook langs bijvoorbeeld het punt $(1,70; 115)$. Met behulp van deze punten vind je dan een geschikt lineair model: $T = 21,43p + 78,57$.

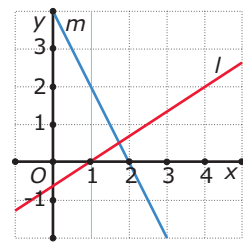
- a Stel zelf de gegeven formule voor $T(p)$ op. Welke eenheden worden er gebruikt?
- b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?
- c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150 °C bereiken?

Testen

Opgave 15

In deze figuur staan twee lijnen l en m .

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op. Bereken vervolgens algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 3.6

Opgave 16

Stel een vergelijking op van de rechte lijnen die als volgt beschreven worden.

- a De lijn gaat door de punten $(40,32)$ en $(34,56)$.
- b De lijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en gaat door het punt $(-2,4)$.
- c De lijn gaat door het punt $(3,2)$ en is evenwijdig aan de y -as.

Opgave 17

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l(T) = l(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ gebruikt, waarin $l(T)$ de lengte (in m) van de staaf na het verhitten tot T °C is. De constante α heet de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

- a Wat stelt $l(0)$ voor?
- b Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$. Ga uit van een ijzeren staaf met $l(0) = 0,5$ m. Hoe lang is deze staaf op kamertemperatuur (20 °C)? En tot hoeveel graden Celsius moet je hem verhitten om de staaf 1 mm langer dan $l(0)$ te laten worden?
- c Voor koper geldt: $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5}$. Een staaf koper van 50 cm bij 20 °C wordt verhit tot 100 °C. Bereken de lengte van deze staaf bij 100 °C.

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Lineaire verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lineaire functie — hellingsgetal = richtingscoëfficiënt — begingetal
- lineair verband — lineaire vergelijking met twee variabelen
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen — oplossen door substitutie en/of de balansmethode
- lineair model

Activiteitenlijst

- bij lineaire functie hellingsgetal en begingetal herkennen om snel de grafiek te kunnen tekenen
- algemene lineaire verbanden herkennen — herleiden naar lineaire functie
- stelsel (lineaire) vergelijkingen met twee variabelen oplossen
- lineair model opstellen, vergelijking lijn door twee gegeven punten opstellen

Testen

Opgave 1

Breng de lineaire vergelijkingen in beeld op de grafische rekenmachine. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de lijn.

- a $3x - 2y = 24$
- b $x + 3y = 6$
- c $x = 2y + 1$
- d $y = 2$

Opgave 2

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond waar nodig af op 1 decimaal.

- a
$$\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$
- b
$$\begin{cases} K = 40 + 0,16a \\ K = 36 + 0,18a \end{cases}$$
- c
$$\begin{cases} q = 200 - 0,25p \\ p \cdot q = 10000 \end{cases}$$
- d
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Opgave 3

Gegeven is lijn l die door de punten $(-40,46)$ en $(110,96)$ gaat en lijn m die een richtingscoëfficiënt heeft van -3 en door het punt $(2,14)$ gaat.

- a Stel de formule op van beide lijnen.
- b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 4

Twee hardlopers lopen 1000 meter in een vrijwel constant tempo. Ton loopt met een snelheid van 15 km/h, Henk met een snelheid van 12 km/h. Henk begint twee minuten eerder aan de 1000 meter dan Ton.

- a Hoe groot zijn hun snelheden in meter per minuut?
- b Hoeveel meter ligt Henk op Ton voor als Ton aan zijn 1000 meter begint?
- c Voor Ton geldt de formule $a = 250t$, waarin t de tijd en a de afgelegde afstand (vanaf de start van de 1000 meter) is. Welke eenheden zijn er gebruikt?
- d Waarom is voor Ton de afgelegde afstand a wel recht evenredig met de tijd t en is dit voor Henk niet het geval?
- e Welke formule met dezelfde variabelen geldt dan voor Henk?
- f Breng beide grafieken in beeld. Wie is het eerst aan het einde van de 1000 meter gekomen en hoeveel lag hij toen op de ander voor?

Opgave 5

Iemand investeert € 10000,00 die voor hem worden belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er is weinig risico dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar er is een groter risico aan verbonden. Het fonds A levert na een jaar een winst van 10% op, het fonds B levert na een jaar 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 aan winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Opgave 6

In de jaren zeventig van de vorige eeuw bestonden er verschillende tarieven voor het gebruik van aardgas. Voor het gemak zijn de bedragen omgerekend in euro.

In een zekere plaats gold:

1. bij een jaarverbruik tot 600 m^3 : vastrecht € 21,00 per jaar en daarbovenop € 0,13 per verbruikte m^3 (tarief 1);
2. bij een jaarverbruik vanaf 600 m^3 : vastrecht € 48,00 per jaar en daarbovenop € 0,08 per verbruikte m^3 (tarief 2).

- a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K voor een gasverbruik a lopend van 0 tot 1200 m^3 .
- b De grafiek van a valt in twee delen uiteen. Voor elk van die delen zijn de jaarlijkse kosten een lineaire functie van a , het aantal verbruikte m^3 . Geef van elk van die lineaire functies een formule.
- c Een tuinder die aan de meterstand zag dat hij op een jaarverbruik van ongeveer 590 m^3 uit zou komen, ging gas afbranden. Wat wordt daarmee bedoeld? Waarom deed hij dat?

- d Vanaf welk jaarverbruik leverde toen het gas afbranden een besparing op? En vanaf welk jaarverbruik was tarief 2 goedkoper?
- e Welke maatregelen kon het gasbedrijf treffen om het afbranden van gas te voorkomen?

Opgave 7

Iemand hangt verschillende gewichten aan een veer en meet de uitrekking. m is de massa van de gewichten in gram, u is de uitrekking van de veer in centimeter. Ze zet de meetwaarden in een tabel.

m	10	20	30	40	50	60	70	80
u	4,8	10,3	15,1	19,7	25,0	29,8	35,2	40,1

Tabel 3.1

- a Zet de punten in een assenstelsel. Waarom is er sprake van een lineair verband (bij benadering)?
- b Geef de formule die u uitdrukt in m .
- c Als er 50 gram aan de veer hangt is de totale lengte l van de veer 35 centimeter. Geef de formule die l uitdrukt in m .
Een tweede veer is zonder gewicht eraan 8 centimeter lang en met 10 gram eraan 15,5 centimeter lang.
- d Geef de formule die de lengte l van deze tweede veer uitdrukt in m .
- e Er is een massa die ervoor zorgt dat de totale lengte van beide veren gelijk is. Bereken deze massa.

Toepassen

Opgave 8: Afgelegde weg, snelheid en versnelling

Bij een eenparige beweging is de snelheid constant. Bij een eenparig versnelde beweging is de versnelling constant. In Nederland geldt op sommige plaatsen een maximumsnelheid van 100 km/uur. Een automobilist rijdt omdat er verder vrijwel geen verkeer op de weg is toch 140 km/uur op zo'n weggedeelte. Een verdekt opgestelde motoragent ziet hem voorbij schieten en zet de achtervolging in. Neem $t = 0$ op het moment dat de motor start. Dit is 6 seconden nadat de auto de motoragent passeert. Neem ook aan dat de auto met een constante snelheid rijdt en de motor eenparig versnelt met een versnelling van 4 m/s^2 .

- a Hoeveel seconden na $t = 0$ rijdt de motor sneller dan de auto?
- b Hoeveel m voorsprong heeft de auto op het moment dat de motor start?
- c Stel een formule op voor de afgelegde weg $s_A(t)$ van de auto. Kies geschikte eenheden.
- d De topsnelheid van de motor is 200 km/uur. Hoe lang doet de motor er over om die te bereiken?
- e Als de motor op topsnelheid rijdt, is zijn snelheid constant. Welke formule geldt dan voor de afgelegde weg $s_M(t)$ van de motor?
- f Na hoeveel seconden heeft de motor de auto ingehaald?

Opgave 9: Cijfers vaststellen

Bij het bepalen van het cijfer van een toets wordt uitgegaan van een lineair verband tussen de score s en het cijfer c . Neem aan dat de maximale score 80 punten is. Bij een score van 80 punten hoort als cijfer een 10, bij een score van 0 punten hoort als cijfer een 1. De omslagscore is de score waarbij het cijfer 5,5 (dus net voldoende) is.

- a** Met welke formule kun je de score omzetten naar een cijfer?
- b** Hoeveel bedraagt de omslagscore?

Als een toets zeer slecht wordt gemaakt, dan kun je als docent de cijfers wat ophogen door de omslagscore te veranderen. Bijvoorbeeld verlaag je de omslagscore met 5 punten. Nog steeds levert een score van 0 punten een 1 en een score van 80 punten een 10 op. De grafiek van c als functie van s bestaat dan uit twee lineaire gedeeltes.

- c** Welke twee formules heb je nu nodig om het cijfer te berekenen?
- d** Welk cijfer krijgt iemand die zonder ophogen een 6 zou krijgen?

Is een toets daarentegen erg gemakkelijk, dan kan de docent de cijfers naar beneden bijstellen door de omslagscore te verhogen. Stel dat een docent met zichzelf afsprekt dat hij achteraf de omslagscore met maximaal 5 punten zal verlagen of verhogen, afhankelijk van de resultaten van de toets.

- e** Je zou zonder bijstelling een 5,8 halen. Welk cijfer kan dit maximaal nog worden? En minimaal?

4

Kwadratische functies

- 4.1 Kwadratische functies 128
- 4.2 De abc-formule 137
- 4.3 Domein en bereik 145
- 4.4 Ongelijkheden 152
- 4.5 Totaalbeeld 158

4.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadratische functie herkennen aan de formule en aan de grafiek;
- nulpunten en top van een parabool berekenen.

Voorkennis

- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = \dots$ of $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

- Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 20$?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?
- Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?
- Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

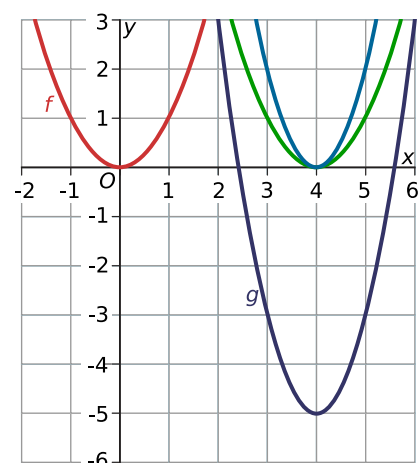
Bekijk de applet: Kwadratische functies

Kwadratische functies zijn $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door verschuiven en/of vermenigvuldigen uit die van f ontstaan. Je schrijft ze in de vorm $g(x) = a(x - p)^2 + q$

$a(x - p)^2 + q$ heet het functievoorschrift van functie g .

Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x - 4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f ontstaat door:

- een verschuiving van 4 in de x -richting;
- vermenigvuldiging met 2 in de y -richting;
- een verschuiving van -5 in de y -richting.



Figuur 4.1

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $h(x) = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek van h is een bergparabool, omdat tekenwisseling van a een spiegeling betekent.

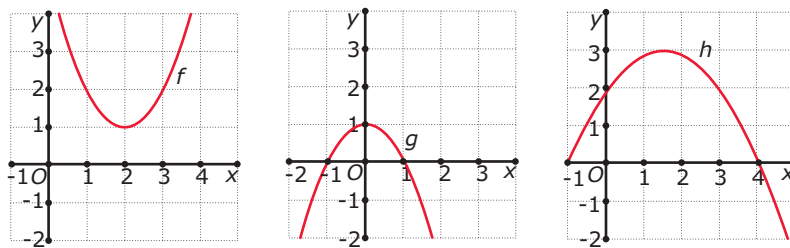
Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

- Hoe kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Lees de coördinaten van de top van de parabool uit de formule af.
- Heeft deze functie een minimum of een maximum?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de functie een minimum of een maximum heeft?

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef de bijbehorende formules.



Figuur 4.2

Opgave 3

Voor de baan van een tennisbal die op 0,8 m hoogte op 12 m voor het net wordt afgeschoten in de richting van het net, geldt de formule $h = -0,01(x - 11)^2 + 2$.

Hierin is:

- x de afstand over de grond vanaf de plek van afschieten;
- h de hoogte van de bal boven de grond.

- Laat zien, dat deze bal inderdaad op ongeveer 80 cm boven de grond is afgeschoten.
- Het net is 1 m hoog. Gaat de bal over het net?
- Na hoeveel m komt de bal op de grond als niemand hem terugslaat?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Kwadratische functies

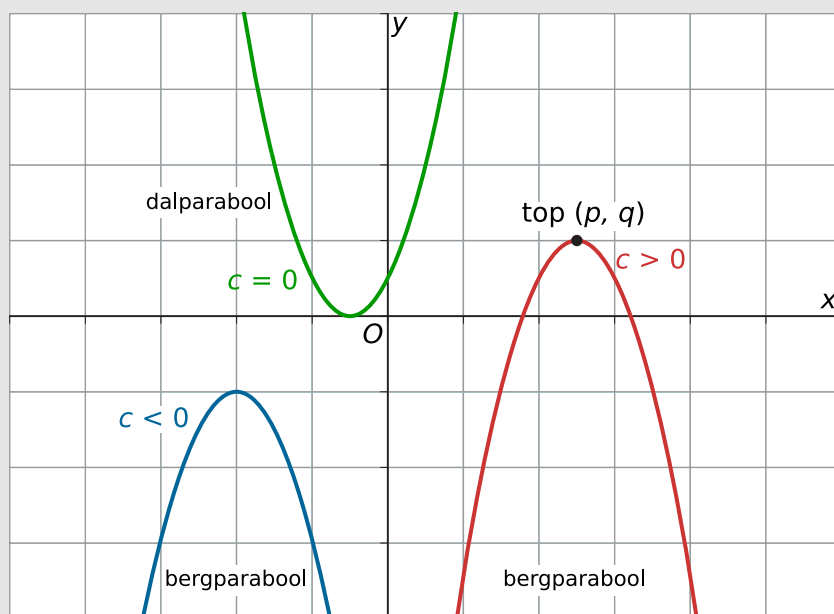
Een functie van de vorm

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De uitdrukking $a(x - p)^2 + q$ heet het **functievoorschrift** van de functie f . De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door verschuiven en/of vermenigvuldigen van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**.

Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.



Figuur 4.3

De **kwadratische vergelijking** $a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot: $(x - p)^2 = c$ met $c = \frac{u - q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld 1

[Bekijk de applet](#)

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.

Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

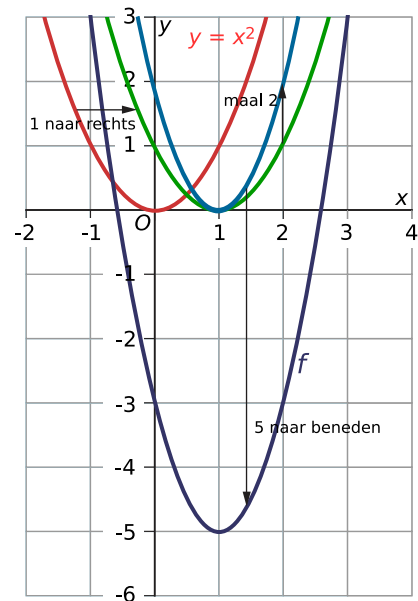
Bepaal de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

De grafiek wordt verkregen door de grafiek van $y = x^2$:

- te verschuiven met 1 in de x -richting;
- te vermenigvuldigen met 2 in de y -richting;
- te verschuiven met -5 in de y -richting.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 4.4

Opgave 4

Gegeven is de kwadratische functie $h(x) = -3(x + 1)^2 + 5$.

- Hoe kan de grafiek van h uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- De top van $y = x^2$ is $(0,0)$. Hoe kun je de top van $h(x)$ uit die van $y = x^2$ afleiden?
- Is de grafiek van h een dalparabool of een bergparabool? Geef de coördinaten van de top.
- Kun je de vergelijking $-3(x + 1)^2 + 5 = 6$ oplossen? Waarom wel/niet?

Opgave 5

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en in de y -richting vermenigvuldigt, krijg je een grafiek waarvan het functievoorschrift $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is.

- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een maximum of een minimum heeft?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ exact op.

Los ook de volgende twee vergelijkingen op:

- $2(x - 1)^2 - 5 = -8$
- $2(x - 1)^2 - 5 = -5$

Antwoord

$$2(x - 1)^2 - 5 = 3$$

$$2(x - 1)^2 = 8$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x = 1 \pm 2$$

Je vindt $x = -1 \vee x = 3$.

Voor de tweede vergelijking krijg je $2(x - 1)^2 = -3$. Dit kan niet aangezien $2(x - 1)^2 \geq 0$.

De derde vergelijking wordt $2(x - 1)^2 = 0$ en heeft precies één oplossing, namelijk $x = 1$.

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2 op pagina 95](#).

- Maak de grafiek van $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ twee oplossingen heeft?
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = -8$ geen oplossingen heeft?
- Hoe zie je aan de grafiek dat de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = -5$ één oplossing heeft?

Opgave 7

Los de vergelijkingen exact op (dus rond wortels niet af).

- $x^2 = 100$
- $(x - 4)^2 = 64$
- $-3(x + 1)^2 = -75$
- $3(x + 2)^2 - 3 = 27$
- $2x^2 - 10 = 0$

Voorbeeld 3

Bereken de snijpunten met de assen en de top van een parabool die is gegeven door de formule $y = -0,5x^2 + 2,5x - 3$.

Antwoord

De gegeven formule heeft niet de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, dus je kunt de top er niet onmiddellijk uit aflezen.

Daarom wil je eerst een beeld hebben van de grafiek: een bergparabool.

Om een goed idee te krijgen waar die bergparabool precies ligt, begin je met het berekenen van de nulpunten. Dus met het oplossen van $-0,5x^2 + 2,5x - 3 = 0$. Hierbij kun je ontbinden in factoren toepassen:

$$\begin{array}{ll} -0,5x^2 + 2,5x - 3 = 0 & \text{beide zijden delen door } -0,5 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 & \text{ontbinden in factoren, de somproductmethode} \\ (x - 2)(x - 3) = 0 & \text{antwoorden opschrijven} \\ x = 2 \vee x = 3 & \end{array}$$

De snijpunten met de x -as zijn daarom $(2,0)$ en $(3,0)$.

Het snijpunt met de y -as zit bij $x = 0$, dus dat is $(0, -3)$.

De top ligt op de symmetrieas van de parabool, dus die zit bij $x = \frac{2+3}{2} = 2,5$.

Ga na, dat de top de coördinaten $(2,5; 0,125)$ heeft.

Opgave 8

Gegeven is de functie f door het functievoorschrift $f(x) = x^2 - x - 30$.

Bereken de snijpunten met de beide assen en de top van de grafiek van f .

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $5x^2 - 10x = 40$
- b $x(x - 6) = 7$
- c $7x(x - 6) = 0$
- d $(x + 3)(x + 6) = 18$
- e $-0,5(x - 40)^2 + 3 = 2$
- f $(x - 3)^2 = (2x - 1)^2$

Oefenen

Opgave 10

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x + 8)^2 + 6$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$.

- a Hoe kun je de grafiek van f uit die van $y = x^2$ afleiden?
- b Bepaal de coördinaten van de top van de parabool die de grafiek van f voorstelt.
- c Hoe kun je aan de formule zien dat er geen nulpunten zijn?

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = -2(x + 4)^2 + 5$.

- Geef het maximum, dan wel minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze uiterste waarde krijgt.
- Los de vergelijking $-2(x + 4)^2 + 5 = -5$ op.
- Los op: $f(x) = 5$
- Los op: $f(x) = -11$

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x + 2)^2 + 10$.

- Voor welke waarden van x is deze functie dalend?
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Los de volgende kwadratische vergelijkingen op:

- $x^2 - 8x + 7 = 0$
- $(x + 2)(2x + 1) = 2$
- $(x + 2)(2x + 1) = 0$
- $x(x + 2) = 2x + 4$

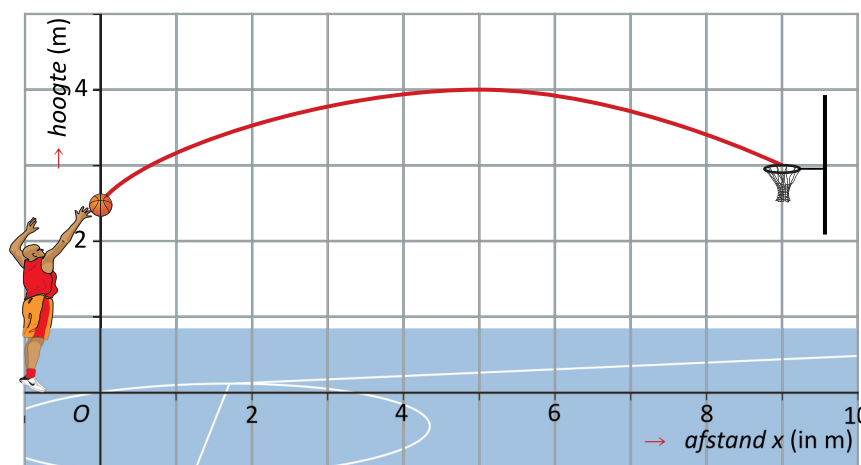
Opgave 14

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie figuur.

De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0,06(x - 5)^2 + 4$.

Hierin is:

- x de afstand vanaf de voeten van de speler tot recht onder de bal in m
- h de hoogte van de bal boven de vloer in m.



Figuur 4.5

- Bereken de hoogte waarop de speler de bal heeft losgelaten.

- b** De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond.
Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + x + 90$.

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
- b** Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
Heeft f een maximum of een minimum?

Toepassen

Een **kogelbaan** is de baan die een voorwerp doorloopt als het onder een bepaalde hoek wordt afgeschoten en daarna alleen onder invloed van de zwaartekracht beweegt.

Gelukkig weet je wel hoe de baan van een kogel er uit ziet: een mooi boogje. Neem maar even aan vanaf de grond tot hij weer op de grond komt. (Dat hoeft natuurlijk niet, de kogel wordt meestal boven de grond afgevuurd. Dit is alvast een model-aanname...). Hier zie je een schets van zo'n baan in een xy -assensysteem.

De kogel heeft op het moment van 'loslaten' een snelheid, noem die maar v_0 .

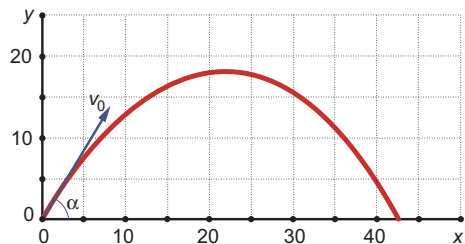
Verder wordt hij onder een hoek afgeschoten, zeg maar α .

Houd geen rekening met de luchtweerstand. (Nog een model-aanname!)

In de x -richting is de afgelegde afstand het product van de snelheid in die richting en de tijd t .

In de y -richting geldt dit ook, maar nu doet de zwaartekracht mee, die 'trekt' de kogel 'naar beneden'.

Daar heb je wat natuurkunde bij nodig: even de zwaartekrachtwetten bekijken...



Figuur 4.6

Opgave 16

Bekijk hoe de kogelbaan er uit ziet.

De snelheid in de x -richting is $v_0 \cdot \cos(\alpha)$. De snelheid in de y -richting is $v_0 \cdot \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.

Dus is: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

- a** Waarom is de snelheid in de x -richting $v_0 \cdot \cos(\alpha)$?
- b** Waarom is de snelheid in de y -richting niet $v_0 \cdot \sin(\alpha)$?

Voor elk punt van de kogelbaan geldt $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

- c** Je kunt hieruit een verband afleiden van de vorm $y = f(x)$.
Geef de juiste formule.

Opgave 17

Als het goed is heb je in de voorgaande opgave afgeleid dat $y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$ met $g \approx 9,81$ m/s².

- a** Welke formule geldt voor de baan van een kogel die wordt afgeschoten onder een hoek van 60° met een snelheid van 30 m/s?
- b** Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?
- c** Moet je om de kogel verder te laten komen de hoek waaronder de kogel vanaf de grond wordt afgeschoten groter of juist kleiner maken? Laat dit met een voorbeeld zien.

Testen

Opgave 18

Bepaal bij de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek. Heeft de functie een maximum of een minimum?

- a** $f(x) = -2x^2 - 2$
- b** $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$
- c** $h(x) = -(x + 9)^2$

Opgave 19

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a** $3(x - 5)^2 - 5 = -2$
- b** $3(x - 5)^2 - 5 = -5$
- c** $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

Opgave 20

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = 0,5x^2 - 4x + 6$.

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
- b** Heeft de functie f een maximum of een minimum?
Welke waarde heeft dit maximum/minimum?

4.2 De abc-formule

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een kwadraat afsplitsen van een kwadratische uitdrukking;
- de abc-formule gebruiken voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met de discriminant van een kwadratische vergelijking.

Voorkennis

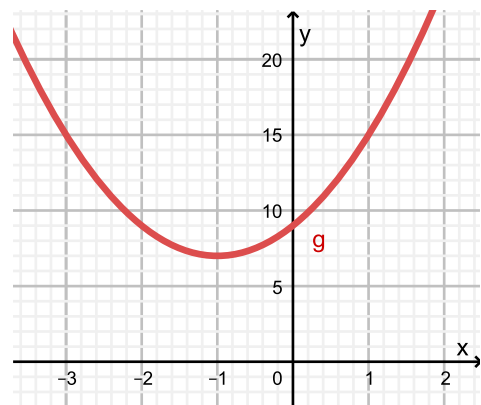
- het begrip functie als een formule van de vorm $f(x) = \dots$ of $y = \dots$;
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = 2(x + 1)^2 + 7$.

- Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- Hoe kun je nagaan of je dit goed hebt gedaan?
- Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?
- Hoe bepaal je de top van de grafiek van g ?



Figuur 4.1

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terug te rekenen. Maar bekijk de figuur eens. Zie je dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2$? Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x + 3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

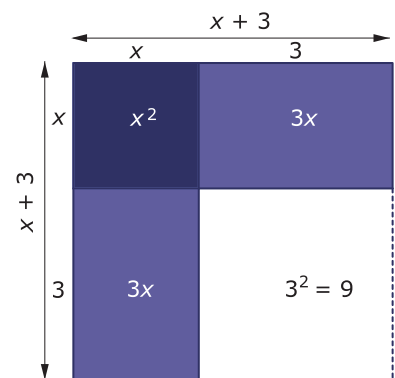
$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - 9 &= 16 \\(x + 3)^2 &= 25 \\x + 3 &= \pm 5 \\x &= -3 \pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is dus $x = 2 \vee x = -8$.

De gebruikte techniek heet kwadraat afsplitsen.

Hiermee is $x^2 + 10x = x^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2 - 5^2 = (x + 5)^2 - 25$.

En ook is $x^2 - 10x = x^2 + 2 \cdot (-5)x = (x - 5)^2 - 5^2 = (x - 5)^2 - 25$.



Figuur 4.2

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1 op pagina 137](#).

- a Laat met behulp van een figuur zoals die in de [Uitleg 1 op pagina 137](#) zien, dat $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.
- b Splits een kwadraat af bij $x^2 + 5x$.

Je ziet in de uitleg, dat $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$.
Dat kun je niet echt gemakkelijk in een tekening duidelijk maken.
- c Leg uit dat dit toch ook klopt door rechts van het isgelijktteken de haakjes weg te werken.
- d Splits een kwadraat af bij $x^2 - 5x$.

Opgave 2

Splits van de functievoorschriften een kwadraat af.

- a $f(x) = x^2 + 12x$
- b $g(x) = x^2 - 8x + 15$
- c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$
- d $k(x) = -x^2 + 4x + 3$
- e $m(x) = x^2 + 4x - 16$
- f $k(x) = 3x^2 + 18x - 6$

Opgave 3

Bekijk de kwadratische functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

- a Schrijf $f(x)$ in de vorm $(x - p)^2 + q$ door een kwadraat af te splitsen.
- b Je weet nu de coördinaten van de top van de grafiek van f . Welke coördinaten zijn dit?
- c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

De techniek van een kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen (door eerst te delen door 3). Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen een algemene formule opgesteld.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a , b en c invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Ga na dat de oplossing van $3x^2 + 17x = 45$, en dus $3x^2 + 17x - 45 = 0$ is:

$$x = \frac{-17 + \sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17 - \sqrt{829}}{6}$$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 4

Los de vergelijkingen op met de abc-formule.

- a $3x^2 + 17x = 45$
- b $x^2 - 6x + 1 = 0$
- c $x^2 + 4x = 0$
- d $4x^2 - 3x - 8 = 0$

Opgave 5

- a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.
- b Probeer op dezelfde manier de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. Kun je zelf de abc-formule vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nu zie je aan het functievoorschrift niet meteen hoe hij uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je het functievoorschrift van f omzetten naar de vorm: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ waarin (p, q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij:

$$x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

Het berekenen van de nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je ook doen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Hieruit is de **abc-formule** afgeleid.

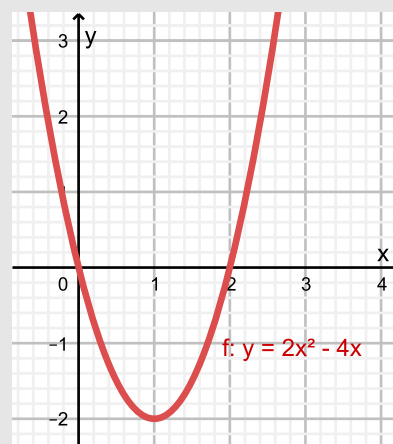
$$\text{De oplossing van } ax^2 + bx + c = 0 \text{ is: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.

$-\frac{b}{2a}$ is de x-coördinaat van de top, omdat deze waarde precies tussen de nulpunten ligt.

De bijbehorende **functiewaarde** (uitkomst) $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ is het maximum (bergparabool) of het minimum (dalparabool) van de functie f .



Figuur 4.3

Voorbeeld 1

Los op: $x^2 + 10x = 15$.

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op $x^2 + 10x$ kun je kwadraat afsplitsen toepassen: $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$(x + 5)^2 - 25 = 15$$

$$(x + 5)^2 = 40$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{40}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{40}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen. Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$. Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$. Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$. De discriminant is positief, er zijn twee oplossingen: $x = \frac{-10 \pm \sqrt{160}}{2}$ v $x = \frac{-10 \pm \sqrt{160}}{2}$. Ga na dat beide oplossingsmethoden hetzelfde opleveren.

Opgave 6

Los nu zelf de vergelijking $x^2 - 12x = 30$ op.

- a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Doe dit ook met de abc-formule.

Opgave 7

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

- a $x^2 - x - 3 = 0$
- b $-4x^2 + 5x - 12 = 0$
- c $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$
- d $x - 5x^2 = 10$
- e $x(x - 7) = 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en geef de coördinaten van de top van de grafiek van f .

Antwoord

$f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Je hebt verschillende technieken gezien om deze vergelijking op te lossen.

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$$

De nulpunten vind je door de vergelijking $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$ op te lossen. Ga na dat je door terugrekenen de nulpunten $x = -1$ en $x = 2$ vindt.

De coördinaten van de top kun je nu gemakkelijk uit het functievoorschrift aflezen: $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$.

Je kunt ook de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ met de abc-formule oplossen, maar ontbinden in factoren is een snellere manier. Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen. Als je voor het bepalen van de nulpunten gaat ontbinden in factoren of gebruikmaakt van de abc-formule, dan kun je met behulp van de nulpunten of $-\frac{b}{2a}$ de x -coördinaat van de top bepalen.

Opgave 8

Bekijk de kwadratische functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de nulpunten (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek van f bepalen.

- Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- Bepaal a , b en c . Bereken daarna de discriminant.
- Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking $f(x) = 0$ heeft?
- Los de vergelijking $f(x) = 0$ met behulp van de abc-formule op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.
- Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel je nu voor dat je een functie hebt zoals $f(x) = x^2 + kx + 3$, waarin k een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van f precies met zijn top op de x -as ligt. Welke waarde moet k dan krijgen?

Antwoord

De vergelijking $x^2 + kx + 3 = 0$ moet precies één oplossing hebben. Uit $D = 0$ volgt dan: $k^2 - 12 = 0$.

Kennelijk moet dan gelden $k^2 = 12$. Dus: $k = \pm\sqrt{12}$.



Opgave 9

Het voorschrift $f(x) = x^2 + kx + 3$ voor verschillende waarden van k levert steeds een andere functie met een andere grafiek op.

- a Bepaal de top van deze parabool als $k = 2$.
- b Bepaal de top van deze parabool als $k = 1$.
- c Schrijf functie f in de vorm $f(x) = (x + p)^2 + q$.
- d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 1$?

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = px^2 - 4x - 5$.

- a Neem $p = 1$ en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Neem $p = 0$. Waarom is de grafiek van f nu geen parabool?
- c Voor welke waarde(n) van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?

Oefenen

Opgave 11

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

- a Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.
- b Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van f berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.
- c Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.
- d Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

Opgave 12

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- a $x^2 - 3x - 13 = 0$
- b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$
- c $2x^2 - 5x = x$
- d $2x^2 - 12x = -18$
- e $x^2 - 5x + 10 = 0$

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- a $x(x - 1) = 12$
- b $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$



c $x - 5x^2 = 3$

d $60 - x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + kx + 5$, waarin k een nog onbekende constante is.

- a Voor welke waarde van k gaat de grafiek van f door het punt $(2,7)$?
- b Voor welke waarde(n) van k ligt de top van de parabool op de y -as?
- c Voor welke k ligt de top van de parabool op de x -as?
- d Voor welke waarden van k ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4$?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = -0,5x^2 + x + 90$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
- b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
Heeft f een maximum of een minimum?

Opgave 16

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = px^2 + 6x + 2p$ en $g(x) = 6 - x$.

- a Neem $p = 2$ en bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f .
- b Voor welke exacte waarden van p heeft de grafiek van f precies één punt met de x -as gemeen?
- c Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 3$?
- d Hoe vaak snijdt de grafiek van f de x -as als $p = 0,5$?
- e Voor welke exacte waarden van p hebben de grafieken van f en g precies één snijpunt? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

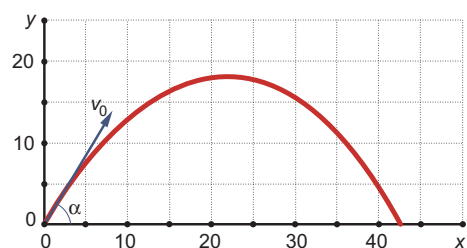
In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.

Je hebt eerder afgeleid dat hierbij deze formule past:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is

- x de horizontale afstand in m
- y de verticale afstand in m
- α de hoek waaronder de kogel is afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de kogel in m/s
- $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ de gravitatieconstante.



Figuur 4.4

Opgave 17

Bekijk de formule van de kogelbaan in [Toepassen op pagina 143](#).

Neem $\alpha = 45^\circ$ en $v_0 = 10$ m/s.

- a Welke kwadratische functie beschrijft dan de baan van de kogel?
- b Bereken na hoeveel m deze kogel weer op de grond komt.

De kogel wordt nu onder dezelfde hoek en met dezelfde beginsnelheid afgeschoten vanaf 1,8 m hoogte.

- c Welke kwadratische functie beschrijft nu de kogelbaan?
En na hoeveel m komt nu de kogel op de grond?

Opgave 18

Een kogelstoter stoot zijn kogel met een beginsnelheid van 20 m/s onder een hoek van 42° .

Hij laat de kogel los op 2,00 m hoogte.

Hoeveel m verder komt de kogel op de grond?

Testen

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $x^2 - 2x - 15 = 0$
- b $-x^2 - x - 1 = 0$
- c $20 - x^2 = 11$
- d $3x^2 = 6 + 5x$

Opgave 20

Gegeven zijn de functies $f(x) = p - x^2$ en $g(x) = x^2 - 3x$. Hierin is p een nog onbekende constante.

- a Voor welke waarde(n) van p heeft functie f precies één nulpunt?
- b Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van g .
- c Neem $p = 4$ en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- d Voor welke waarde van p hebben beide grafieken precies één snijpunt?

4.3 Domein en bereik

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de beperkingen voor x - en y -waarden noteren met intervallen, de begrippen domein en bereik;
- werken met tweedegraads en hogeregraads veeltermen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule.

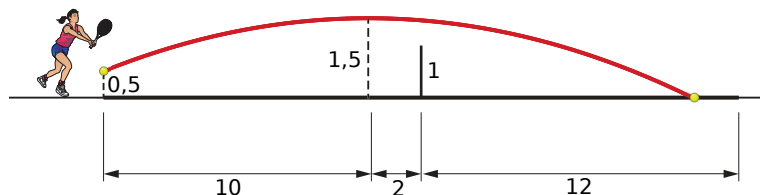
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.

Bij deze parabool hoort de formule $h = -0,01(x - 10)^2 + 1,5$.



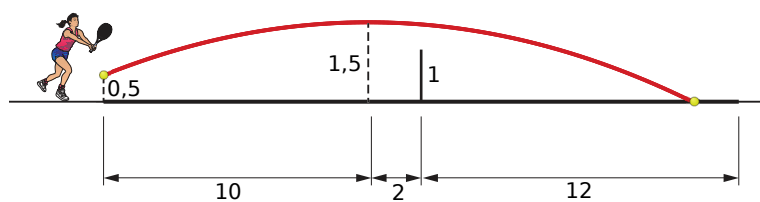
Figuur 4.1

- Ga na, dat de gegevens overeen stemmen met de formule.
- Welke waarden kan x in deze situatie aannemen?
- Welke waarden kan h in deze situatie aannemen?

Uitleg

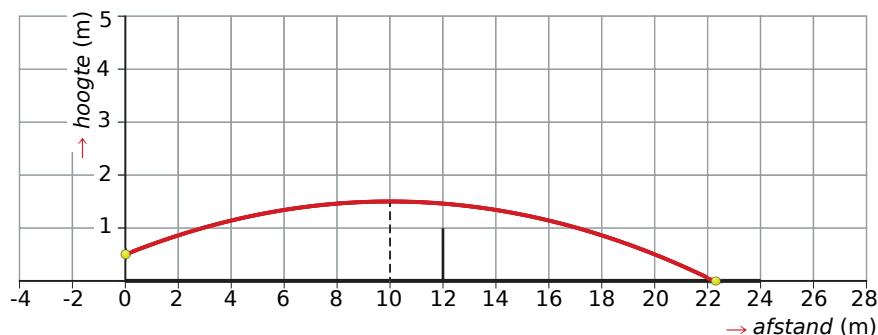
Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



Figuur 4.2

Je brengt een geschikt assenstelsel aan, zie figuur. De top van de parabool is dan $(10; 1,5)$ en de parabool moet ook door het punt $(0; 0,5)$ gaan.



Figuur 4.3

Bij deze parabool hoort de formule $h = -0,01(x - 10)^2 + 1,5$.

Door haakjes wegwerken kun je dit schrijven als $h = -0,01x^2 + 0,2x + 0,5$.

Die vorm noem je een veelterm van graad 2.

De bal komt op de grond als $h = 0$. Ga na, dat dan $x = 10 + \sqrt{150}$. Omdat dat minder dan 24 m is, is de bal in.

In dit geval is de gevonden formule niet voor elke waarde van x geldig, maar alleen voor de waarden van x vanaf 0 tot en met $x = 10 + \sqrt{150}$. Deze waarden vormen het domein van de functie.

Het domein van h schrijf je als $[0, 10 + \sqrt{150}]$.

Alle mogelijke waarden van h vormen het bereik van de functie. Dit zijn de getallen in $[0; 1,5]$.

Opgave 1

In de [Uitleg op pagina 145](#) wordt de baan van een tennisbal beschreven met een kwadratische functie.

- De baan is alleen ongeveer parabolisch.
Waarom is hij zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?
- Laat zien dat $x = 10 + \sqrt{150}$ als $h = 0$.
- Wat is het bereik van deze functie (in de beschreven situatie)? Gebruik de notatie die je in de uitleg ziet en licht toe hoe je aan de waarden van het bereik komt.
- Laat zien, hoe je het functievoorschrift als veelterm schrijft.

Opgave 2

Nu wordt een tennisbal geslagen vanaf 10 m voor het net op een hoogte van 0,5 m boven de grond.

De bijbehorende formule is $h(x) = -0,03(x - 12)^2 + 3,5$.

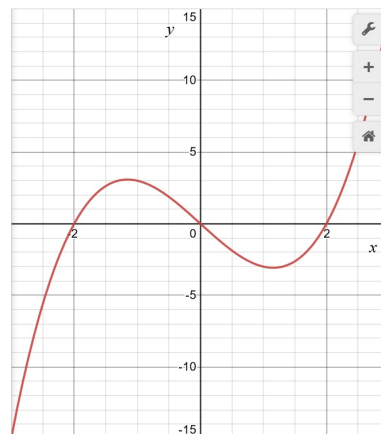
- Hoe groot is de maximale hoogte van de bal?
- Is de bal ook nu in?
- Schrijf het domein en het bereik van de functie h op.

Opgave 3

Er bestaan ook veeltermen van hogere graad dan 2.

Een voorbeeld is de functie $f(x) = x^3 - 4x$. Hier zie je de grafiek ervan met domein $[-3, 3]$, getekend in Desmos.

- Bereken de nulpunten van de grafiek van f .
- Schrijf het bereik van f bij het gegeven domein op.



Figuur 4.4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke formule van de vorm $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ heet een tweedegraads **veelterm**.

Soms kom je ook derdegraads veeltermen tegen, of veeltermen van een nog hogere graad.

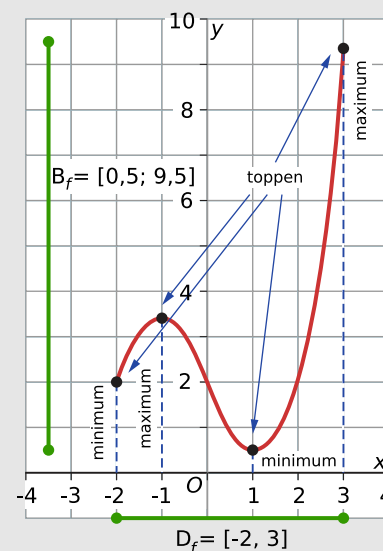
Niet altijd is de gegeven formule voor alle waarden van x geldig. De waarden van x waarop dit wel het geval is noem je het **domein** D_f van de bijbehorende functie f . Alle mogelijke functiewaarden vormen het **bereik** B_f van de functie. Het bereik hangt af van het gekozen domein en soms speelt een **maximum** of een **minimum** een belangrijke rol, zie figuur.

Je noteert zowel het domein als het bereik door de kleinste en de grootste waarde ervan tussen haken te zetten. Dat heet een **interval**. Is er geen kleinste of grootste waarde, dan gebruik je een pijltje.

Alle getallen groter dan of gelijk aan 0 schrijf je zo: $[0, \rightarrow)$.

Alle getallen groter dan 0 schrijf je zo: $(0, \rightarrow)$.

De vorm van de haakjes hangt er dus van af of het getal dat er bij staat wel bij het interval hoort (rechte haken) of niet bij het interval hoort (puntige haken).



Figuur 4.5

Voorbeeld 1

Dit is de brug over de rivier de Tyne in het noordoosten van Engeland. De boog heeft ongeveer de vorm van een parabool. Kies een assenstelsel waarin de y -as langs de verticale rechterwand van de linkertoren ligt en de x -as over de bovenkant van het horizontale wegdek ligt. Dan past bij de (bovenrand van de) boog bij benadering de formule



Figuur 4.6

$$y = -0,0084(x - 81)^2 + 33$$

Welke maximale hoogte heeft de boog ten opzichte van het wegdek? Welke waarden kunnen x en y aannemen?

Antwoord

De top van de parabool is $(81,33)$. Dus de maximale hoogte boven het wegdek is 33 m.

De waarden die x kan aannemen lopen vanaf 0 tot en met 162 m. Het domein van de functie is $[0,162]$.

De minimale y -waarde is $y(0) = -22,1124$.

De waarden die y kan aannemen lopen vanaf $-22,1124$ tot en met 33 m. Het bereik van de functie is $[-22,1124; 33]$.

Op een grafische rekenmachine of in GeoGebra of Desmos kun je een venster waarbinnen de grafiek past noteren als $[0,162] \times [-23,35]$.

Opgave 4

Bekijk het bepalen van domein en bereik bij de kwadratische veelterm in [Voorbeeld 1 op pagina 148](#).

- a** Laat zien, hoe je het domein bepaalt.
- b** Laat zien, hoe je de minimale y -waarde bepaalt.
- c** De bovenrand van de boog snijdt de bovenkant van het wegdek op twee plaatsen. Bereken de afstand tussen die twee plaatsen in dm nauwkeurig.

Opgave 5

Gegeven is de tweedegraads veelterm $f(x) = 0,1x^2 - 20x + 800$ met domein $[0,150]$.

- a** Bepaal de maximale en de minimale y -waarde op dit domein.
- b** Je gebruikt een apparaat om de grafiek te maken van de paraboolvorm. Binnen welk venster past de parabool precies?
- c** Bereken de afstand tussen de twee snijpunten met de x -as in gehelen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

De functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ is een derdegraads veelterm met domein $[0,5]$.

Bepaal de nulpunten van deze functie. Bepaal ook het bijbehorende bereik.

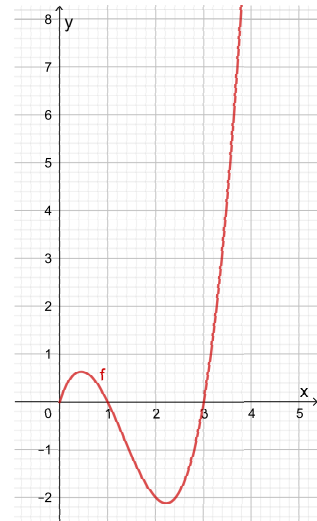
Antwoord

Nulpunten: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ geeft $x(x^2 - 4x + 3) = 0$.

Verder ontbinden geeft $x(x - 1)(x - 3) = 0$, dus de nulpunten zijn $x = 0$, $x = 1$ en $x = 3$.

Voor het bereik moet je de minimale en de maximale waarden van y weten. Daarvoor heb je (nog) geen technieken geleerd, dus je werkt met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Dan breng je eerst de grafiek in beeld met het gewenste domein ingesteld voor de x -waarden. De hele grafiek is nog niet in beeld, maar alle 'toppen' wel. Met behulp van de software kun je die toppen bepalen. Hier vind je in twee decimalen nauwkeurig $(0,0)$, $(0,45; 0,63)$ en $(2,22; -2,11)$. De waarde bij $x = 5$ is $f(5) = 40$.

Het bereik is dus $[-2,11; 40]$.



Figuur 4.7

Opgave 6

Bekijk de derdegraads functie in [Voorbeeld 2 op pagina 149](#).

Pak ook GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine erbij.

- Breng zelf de grafiek van f op het juiste domein in beeld.
- Bepaal zelf de minimale en de maximale y -waarden in drie decimalen nauwkeurig.
- Met welk venster krijg je de grafiek van f nog net helemaal in beeld. Rond af op gehele getallen.

Opgave 7

Gegeven is de derdegraads veeltermfunctie $g(x) = 0,5x^3 - 3x^2 - 4x$ met domein $[-2,8]$.

- Bereken de nulpunten van deze functie in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken alle minimale en maximale waarden van y op het domein. Schrijf het bereik op.
- Met welk venster krijg je de grafiek van g nog net helemaal in beeld. Rond af op gehele getallen.

Oefenen

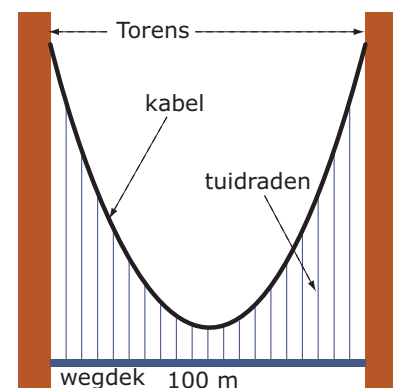
Opgave 8

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens en er zijn 19 tuidraden.

Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de x -as samenvalt met het wegdek en de y -as door het linker ophangpunt gaat. Dan geldt voor de kabel:

$$y = \frac{9}{250}(x - 50)^2 + 10.$$

- Bepaal de minimale y -waarde van de kabel.
- Bepaal domein en bereik van de functie die de paraboolvorm van de kabels beschrijft.



Figuur 4.8

- c Je gebruikt een apparaat om de grafiek te maken van de paraboolvorm. Binnen welk venster past de parabool precies?
- d Welk venster kies je als je behalve de parabool ook het wegdek wilt kunnen zien?

Opgave 9

Gegeven is de tweedegraads veeltermfunctie $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$ met domein $[0,5]$.

Opgave 10

Een derdegraads veeltermfunctie is gegeven door $g(x) = x^3 - 4x$ met domein $[-3,3]$.

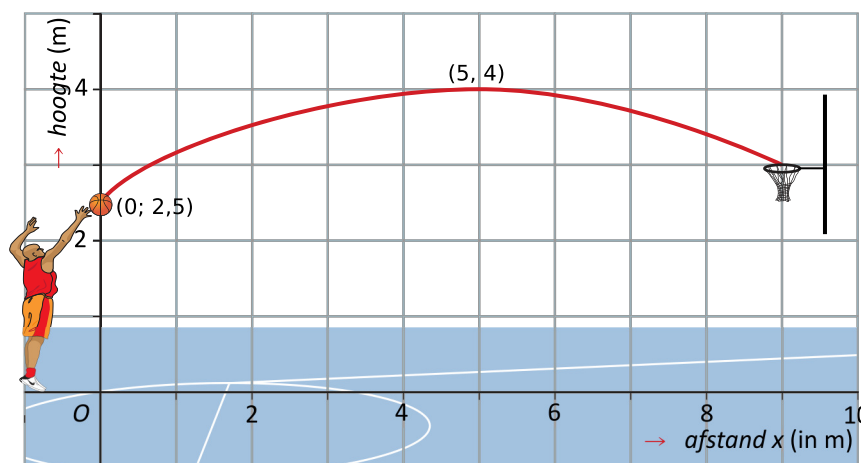
- a Bereken de nulpunten van g .
- b Welke minimale en welke maximale waarden heeft y op dit domein? Bepaal ze allemaal, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig. Schrijf het bereik op.

Opgave 11

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool. Het hoogste punt van de baan is gegeven in de figuur. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.

Hierbij past de formule: $h = -0,06x^2 + 0,6x + 2,5$.

Daarin is h de hoogte van de bal boven de grond in m afhankelijk van de x -waarde in m.



Figuur 4.9

- a Ga na, dat het hoogste punt in de grafiek inderdaad de top van de gegeven parabool is.
- b De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.
- c Schrijf het domein en het bereik op van de functie h .

Opgave 12

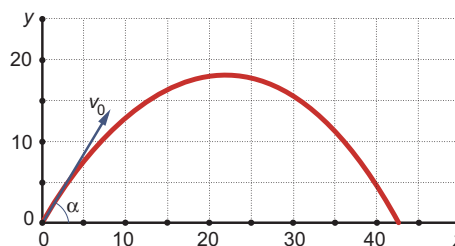
Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 21q - 40$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro.

- Wat is de winst als het bedrijf 2500 producten maakt?
- Wat is de laagste productie waarbij het bedrijf € 100875,00 winst maakt?
- Bij welke productie is de winst maximaal? En wat is die maximale winst?

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 4.10

Opgave 13: Kogelbaan

Voor de kogelbaan geldt de formule:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is:

- α de hoek waaronder de kogel wordt afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de afgeschoten kogel in m/s
- $g \approx 9,81$ de gravitatieconstante in m/s^2

- Waarom zie je dat er wordt aangenomen dat de kogel op de grond wordt afgeschoten?

Een kogel wordt afgeschoten met een snelheid van 300 m/s op een hoogte van 1,5 m en onder een hoek van $\alpha = 2^\circ$.

- Na hoeveel m komt hij op de grond terecht?
- Welke waarden kan y aannemen? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de tweedegraads veeltermfunctie $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ met domein $[0,5]$.

- Bereken de nulpunten van f .
- Bepaal het bereik van f op dit domein.
- Binnen welk venster past deze grafiek nog precies?

Opgave 15

Gegeven is de derdegraads veeltermfunctie $g(x) = 0,2x^3 + x^2 - 2x$ met domein $[-7,2]$.

- Bereken de nulpunten van g in twee decimalen nauwkeurig.
- Bepaal het bereik van g op dit domein. Rond af op twee decimalen.
- Binnen welk venster past deze grafiek nog precies?

4.4 Ongelijkheden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- vergelijkingen oplossen met terugrekenen vanuit machten, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule;
- grafieken van functies goed in beeld brengen (plotten).

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat speciaal voor gebruik door leerlingen.

- a Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).

De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- b Bij welk aantal kopieën per maand verdient de school aan het apparaat?

Uitleg

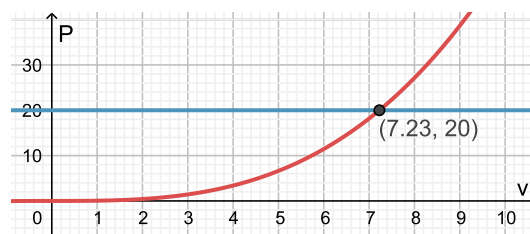
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, is afhankelijk van de wielengte en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt) en v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de **ongelijkheid**: $0,052v^3 > 20$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat prima met GeoGebra of een grafische rekenmachine:

- Je voert beide functies in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,272...; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid af uit de figuur: $v > 7,27$.

Belangrijk is het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v \geq 7,3$. Want bij 7,2 is het vermogen nog niet meer dan 20 kW.



Figuur 4.1

Opgave 1

In de zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt GeoGebra gebruikt.

- a Los zelf de ongelijkheid zo op.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

- b Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
c Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = 0,01x(x^2 - 400)$ en $g(x) = x$. In deze opgave ga je de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ oplossen.

- a Hoe moet je de assen instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?
b Los nu de ongelijkheid op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

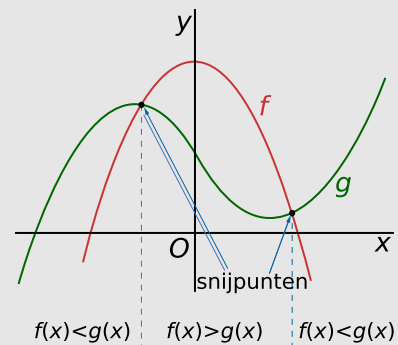
- c Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst plot je beide functies.
Breng ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.
Dat kan vaak ook door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Reken door met de maximale nauwkeurigheid van de grafische rekenmachine en rond alleen af als dat wordt gevraagd en aan het einde van je uitwerking.



Figuur 4.2

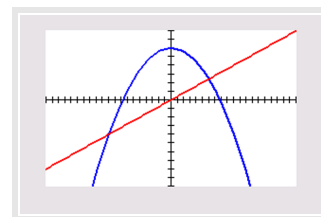
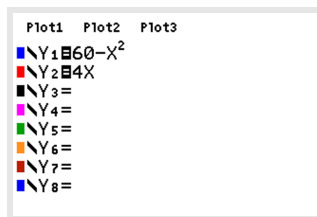
Voorbeeld 1

[Bekijk de applet](#)

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

Bekijk eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$ zoals die zijn gemaakt met een grafische rekenmachine. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.



Figuur 4.3

De snijpunten vind je door de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ op te lossen. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 3

Je gaat in deze opgave de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ exact oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. De oplossing bestaat uit twee delen!

Opgave 4

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- $(x - 4)^2 < 10$
- $-2(x + 3)^2 + 10 < 4$
- $3(x - 5)^2 - 2 \geq 10$

Voorbeeld 2

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

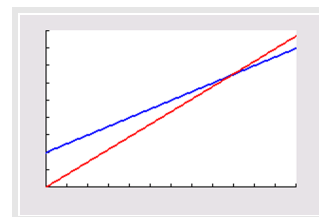
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. De variabele q is de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$ liter.

De oplossing lees je uit de grafiek af: vanaf 889 liter verf maakt de verhandelaar winst.



Figuur 4.4

Opgave 5

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op gas kunt gaan rijden. Je huidige kosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

- a** Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).

Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost € 0,80 per liter en je rijdt 10 kilometer op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen.

- b** Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G) afhankelijk van het aantal kilometers (a).
- c** Je wilt weten hoeveel kilometer je in dat jaar moet rijden om de kosten van de gastank er weer uit te halen. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- d** Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 4x$.

Los algebraïsch op: $f(x) > g(x)$.

Antwoord

Eerst los je de vergelijking $x^3 = 4x$ op:

$$x^3 = 4x$$

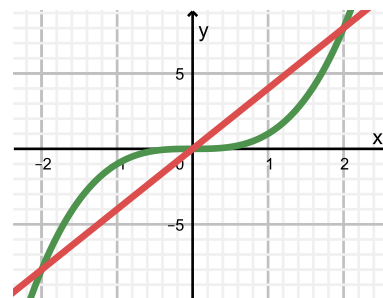
$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

Je vindt $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Vervolgens maak je de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 4x$. Zorg dat alle snijpunten in beeld komen.

Tenslotte lees je de oplossing uit de grafiek af. De groene grafiek moet boven de rode grafiek liggen, dus je vindt $-2 < x < 0 \vee x > 2$.



Figuur 4.5

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 155** hoe je algebraïsch de ongelijkheid $x^3 > 4x$ oplost.

- a** Welke oplossing heeft de ongelijkheid $x^3 \leq 4x$?

Bekijk nu de ongelijkheid $x^3 < x^2$.

- b** Los de ongelijkheid algebraïsch op.

Oefenen

Opgave 7

Los de ongelijkheden met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a $x^3 + 3x^2 - 3 > 0$
- b $2(x - 4)^2 - 5 < 5x$
- c $(x + 3)^2 < 5x$
- d $x^4 - 3x > -x^2 + 3$

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $5(x - 1)^2 - 9 > 11$
- b $x^3 > x$
- c $x^3 \leq 80x - 2x^2$
- d $-2x^2 < 8 - x$
- e $x^2 - 4x > -3$

Opgave 9

Twee auto's rijden op de A1, beide met constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door $s(t)$.

- a Stel bij beide auto's een lineaire functie voor $s(t)$ op.
- b Bereken na hoeveel minuten auto A door auto B wordt ingehaald.
- c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + px + 12$ en $g(x) = -x + 9$.

- a Voor welke exacte waarden van p snijdt de grafiek van f de x -as twee keer?
- b Neem $p = 3$ en los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ algebraïsch op.

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- a Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.
- b Los algebraïsch op: $f(x) < 36$.

Toepassen

Bij een autodealer kun je vier jaar lang in een Smart Fortwo rijden voor € 5,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 1,5 eurocent per gereden kilometer sluit je een abonnement af waarmee alle onderhoudskosten worden afgedekt. Je hebt verder alleen nog benzinekosten.

Met 1 liter benzine rijd je 16 kilometer.

1 liter benzine kost € 1,60.



Figuur 4.6

Opgave 12

Bekijk de abonnementsgegevens voor de Smart Fortwo.

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost je deze Smart per jaar als je er 16000 km/jaar mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 4000,00 wilt besteden dat jaar? Los daarna de ongelijkheid algebraïsch op.
- d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 1,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 15000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je een vast bedrag aan onderhoudskosten alsof je 15000 km/jaar rijdt. Stel het complete functievoorschrift op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Testen

Opgave 13

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op:

- a $6 - x < x^2$
- b $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 14

De afstand Utrecht - Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B.

- a Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
- b Los deze ongelijkheid algebraïsch op.
- c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

- a Bepaal de snijpunten van de grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- b Los op: $f(x) \geq g(x)$.

4.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Kwadratische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- kwadraat afsplitsen — abc-formule;
- domein en bereik — veelterm, veeltermfunctie;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen en ontbinden in factoren;
- een kwadraat afsplitsen — kwadraat afsplitsen en de abc-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met intervalnotatie om domein en bereik van een veeltermfunctie te bepalen — werken met tweedegraads en derdegraads veeltermen;
- ongelijkheden systematisch oplossen.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x - 1)^2$.

- Laat zien hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^2$.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de coördinaatassen.
- Los algebraïsch op: $f(x) = -712$.
- Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- $-0,5(x - 2)^2 + 45 \leq 4,5$
- $x(x - 2) = 3x - 6$
- $x^3 - 4x^2 = 10x$
- $6 - 0,001(x - 3)^3 = 5$
- $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$
- $(x^2 - 9)(x - 2)^3 > 0$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

- a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x -as?
- c Voor welke waarde(n) van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De maximale hoogte van de vuurpijl is 122,5 meter en die hoogte bereikt hij na 5 seconden. Er bestaat een kwadratisch verband tussen de hoogte van de vuurpijl h in meters vanaf de grond en de tijd t in seconden.

Het functievoorschrift van $h(t)$ wordt gegeven door $h(t) = -4,9t^2 + 49t$.

- a Toon aan dat dit functievoorschrift overeen komt met de maximale hoogte van de vuurpijl.
- b Als de vuurpijl niet uit elkaar spat, na hoeveel seconden is hij dan weer op de grond?
- c De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Bereken algebraïsch hoelang de vuurpijl op een hoogte van meer dan 30 meter is. Rond af op één decimaal.

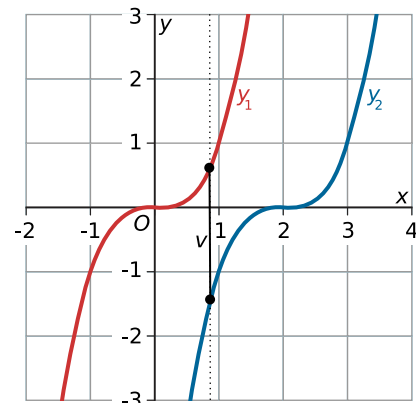
Opgave 5

Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2 . De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x -as de lengte 2 hebben.

- a Geef het functievoorschrift van y_2 .

De functie $v(x)$ stelt de lengte voor van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y -as.

- b Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.
- c Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as minder dan 8?
- d Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as.



Figuur 4.1

Opgave 6

Een parabolische baan gaat ten opzichte van een xy -assenstelsel door de punten: $A(0,10)$, $B(2,13)$ en $C(5,10)$. Een voorwerp doorloopt deze baan vanaf punt A tot het weer op de grond komt ($y = 0$).

Voor de baan geldt de formule $y = -0,5x^2 + 2,5x + 10$.

- a Ga na, dat de grafiek van deze formule inderdaad door de drie gegeven punten gaat.
- b Waar komt het voorwerp dat deze baan doorloopt op de grond?
- c Welk domein en welk bereik heeft de functie f die deze baan beschrijft?

Toepassen

Opgave 7: Boekenkast

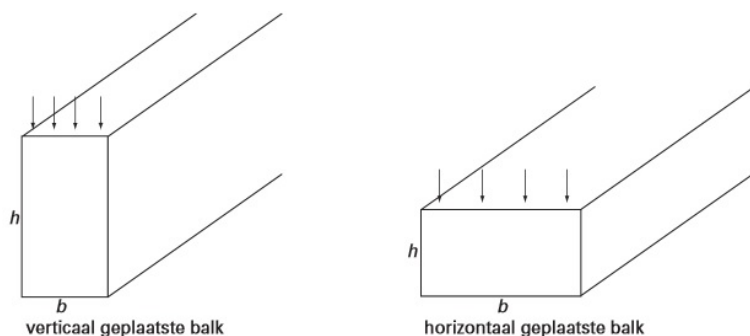
Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium. Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?

Bekijk de applet: [boekenkast op zolder](#)

- Experimenteer eerst met de applet.
- Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.
- Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K .

Opgave 8: Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort. We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.



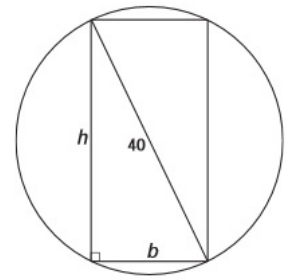
Figuur 4.2

Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm. Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

- In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.
De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2 . Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.
- Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h . Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie de figuur hiernaast.



Figuur 4.3

- c Laat zien dat in deze situatie voor de sterkte de formule $S = 192b - 0,12b^3$ kan worden gevonden.
- d Bereken de afmetingen h en b van de dwarsdoorsnede met de grootste sterkte. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af (zie bovenste foto). Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand. Het resultaat zie je op de onderste foto.



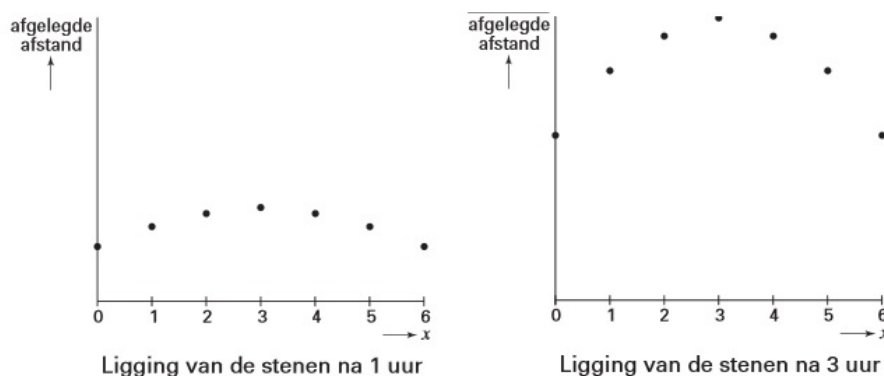
Figuur 4.4

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de onderstaande figuren zie je de ligging na één uur en na drie uur.

De afstand A (in dm) die de stenen na één uur hebben afgelegd, wordt beschreven door de formule:

$$A = -0,1x^2 + 0,6x + 19,4$$

Hierbij is x de afstand in dm van het midden van een steen tot het midden van steen 0 bij het begin van het proces.



Figuur 4.5

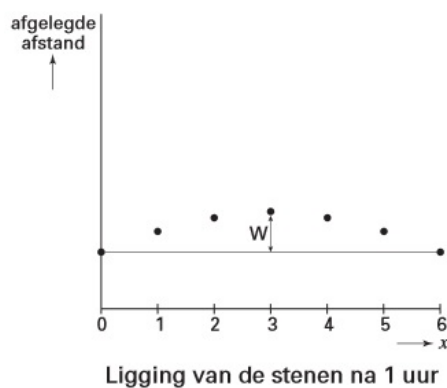
- a Bereken de afstand die steen nummer 2 het eerste uur heeft afgelegd.
De stenen gaan met de modder mee de berg af. Elke steen heeft zijn eigen constante snelheid.
- b Van welke stenen ligt die snelheid het dichtst bij 20 dm per uur? Licht je antwoord toe met een berekening.

De geoloog heeft de stenen op een rechte lijn loodrecht op de stroomrichting gelegd. Steen nummer 3 zal door de stroom sneller vooruit komen dan de andere stenen. Het weglengteverschil W dat op die manier tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur ontstaat, is afgebeeld in de figuur hier-naast.

- c Toon aan dat het weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur 9 cm is.

Op een gegeven moment meet de geoloog een weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 van 83 cm.

- d Bereken de totale afgelegde weg van de steen met nummer 3, gerekend vanaf de plek waar de geoloog de stenen in de modderstroom gelegd heeft. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.



Figuur 4.6

5

Exponenten en machten

5.1	Exponentiële groei	164
5.2	Rekenregels voor machten	174
5.3	Exponentiële functies	183
5.4	Machtsfuncties	192
5.5	Totaalbeeld	201

5.1 Exponentiële groei

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei/afname, met name formules opstellen bij exponentiële groei/afname;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een heel groot vel papier (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

- Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?
- Waarom zal dit met een A4'tje in werkelijkheid nooit lukken?
Stel dat een onbegrensd vel papier 0,15 mm dik is.
- Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?
- Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 centimeter dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg 1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

<i>tijd (uur)</i>	0	1	2	3	4	5	6
<i>hoeveelheid bacteriën (mg)</i>	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 5.1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2; dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met deze formule kun je gemakkelijk berekenen hoeveel bacteriën je na bijvoorbeeld 10 uur hebt: $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van de bacteriegroei in de.

- Wat versta je onder de 'groeifactor' per uur van de hoeveelheid bacteriën?
- Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?
- Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Opgave 2

Bekijk de tabel.

<i>tijd (h)</i>	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
<i>bacteriën</i>	50	150	450	1350	4050	12150	36450

Tabel 5.2

- Toon aan dat er sprake is van exponentiële groei.
- Hoe groot is de groeifactor per uur?
- Hoe groot is de groeifactor per twee uur?
- Hoeveel bacteriën zijn er om 17:00 uur?

Opgave 3

Een hoeveelheid halveert dagelijks.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag?
- Hoeveel is de groeifactor per week? Rond af op drie decimalen.
- Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per vier dagen af?

Uitleg 2

Door te denken aan bacteriegroei en de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt, trek je de exponenten af.
- De groeifactor per uur is 2. Per 3 uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $(2^3)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 5.1

Deze rekenregels gelden voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.

Opgave 4

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

a $2^4 \cdot 2^{14}$

b $3^3 \cdot 3^5$

c $\frac{5^9}{5^4}$

d $(6^3)^6$

Opgave 5

a Kun je $2^5 + 2^5$ als één macht schrijven?

b Kun je $7^3 + 7^5$ als één macht schrijven?

Opgave 6

a Hoeveel is 0^4 ?

b En hoe zit het met 0^0 ? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

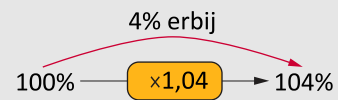
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groeifactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde.

Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit, is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groeifactor:

$$g = 1 + \frac{p}{100}.$$



Figuur 5.2

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.

Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g , dan schrijf je dat als g^n . Dit is een **macht**. De groeifactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is.

In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m een aantal **rekenregels voor machten**:

- $g^0 = 1$ als $g \neq 0$
- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$ als $g \neq 0$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



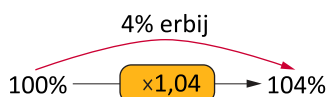
Figuur 5.3

Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet is veranderd en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

Antwoord

Bij een toename van 4% per jaar hoort een groeifactor van 1,04.



Figuur 5.4

Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1,04^t$.

Als je deze formule invoert in een spreadsheet heb je snel een tabel.

Je kunt ook een grafische rekenmachine gebruiken.

Opgave 7

Hoeveel bedraagt de groeifactor bij de genoemde groeipercentages?

- 10% toename
- 100% toename
- 0,2% toename
- 100% afname
- 0,1% afname
- 40% afname

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

- Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?
- Hoeveel geld staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?
- Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010?
- Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipcentage per vijf jaar.
- Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen.
 - $t = 20$ invullen in de formule;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 4 jaar;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 5 jaar.

Voorbeeld 2

Een krant ziet in een reeks van jaren het aantal abonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen ($\times 1000$)	970	941	913	885	859	833

Tabel 5.3

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

Controleer eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0,97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af.

Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0,97^t$.

Maak een tabel van deze functie, bijvoorbeeld met een spreadsheet of een grafische rekenmachine.

Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.

X	Y1			
16	595,83			
17	577,95			
18	560,61			
19	543,79			
20	527,48			
21	511,66			
22	496,31			
23	481,42			
24	466,97			
25	452,97			
26	439,38			

X=16

Figuur 5.5

Opgave 9

Bekijk de tabel in [Voorbeeld 2 op pagina 168](#).

- Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad ongeveer 0,97 is.
- Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?
- Laat zien dat de krant in 2032 in de problemen raakt.

Opgave 10

Neem de tabel over en vul in.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groefactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 5.4

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten berekenen.
 $256 = 2^8$, $64 = 2^6$ en $1024 = 2^{10}$.

En dus staat hier: $\frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024$.

Opgave 11

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 169**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als een macht te schrijven.

- a $3^{83} \cdot (3^{40})^2$
- b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$
- c $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$
- d $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

Oefenen

Opgave 12

In een ondiep meer van 1000 km^2 begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km^2 . Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

- a Geef het functievoorschrift van de met riet begroeide oppervlakte $R(t)$ in km^2 , waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014.
- b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.
- c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 13

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

- Stel een formule op voor de 'groei' van het aantal herten N als functie van de tijd t in jaren, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.
- Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.
- Bereken het groeipercentage per tien jaar.
- In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 14

In de herfst 'schieten' de paddenstoelen uit de grond. Dit komt omdat de paddenstoel onder de grond groeit. Hier neemt de paddenstoel vocht op. Als het heeft geregend, schiet de paddenstoel razendsnel omhoog.

Ga uit van een paddenstoel die begint met groeien tijdens een regenbui om 23:00 uur 's avonds. Noem dit tijdstip $t = 0$. De hoogte van de paddenstoel is op dat moment 1 cm en neemt per uur met 14% toe. Deze paddenstoel kan maximaal 12 cm hoog worden.

- Hoe hoog is de paddenstoel om 02:00 uur 's nachts? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.
- Wat is de groeifactor per drie uur? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- Met hoeveel procent is de hoogte van de paddenstoel toegenomen tussen 23:00 uur 's avonds en 6:00 uur in de ochtend? Geef je antwoord in hele procenten.
- Hoeveel hele uren kan de paddenstoel blijven groeien?

Opgave 15

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

<i>tijd</i> (jaar)	0	1	2	3	4	5	6
<i>kapitaal</i> (euro)	10415	10850	11295	11760	12250	12750	13280

Tabel 5.5

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

- Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.
- Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).
- Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.
- Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?
- Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar haalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal na vijf jaar en na tien jaar.
- Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Opgave 16

Schrijf als één macht.

a $\frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$

b $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 27^{24}}$

c $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$

d $\frac{(49^8)^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}}$

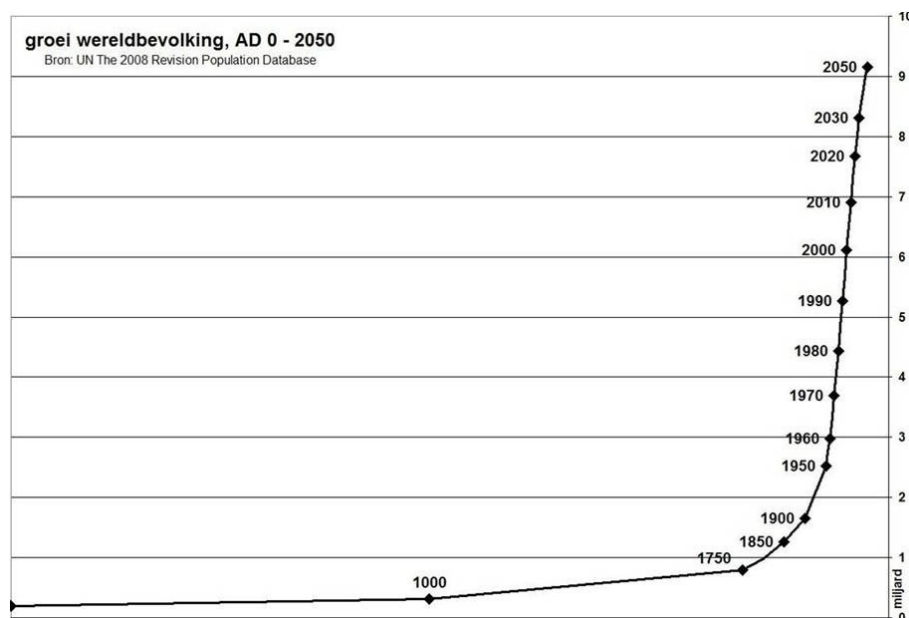
Opgave 17

Op 1 januari 2010 heeft stad A 250000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 2,5% per jaar. Op 1 januari 2008 heeft stad B 300000 inwoners. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 5000 per jaar.

- Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.
- Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.
- Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2012 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.
- In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking. Erg beklemmend, nietwaar?



Figuur 5.6

Op het eerste gezicht lijkt dit wel om exponentiële groei te gaan. Maar hoe constant de groeifactor is staat nog te bezien...

Opgave 18

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

- Hoe groot was toen de groeifactor?
- Laat zien dat deze groeifactor ongeveer klopt met het aantal mensen in 1980.
- Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?
- B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.
- Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?
- Waarom kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 19

Het is ook wel boeiend om twee werelddelen, of twee regio's te vergelijken. Daarvoor is genoeg informatie voorhanden, bijvoorbeeld via [Wikipedia, wereldbevolking](#).

- Vergelijk bijvoorbeeld de regio's Zuid-Azië en Europa met elkaar.
Een ander boeiend aspect is de hoeveelheid leefruimte.
- Stel je eens voor dat je zoveel mogelijk mensen op 1 m^2 grond zou kunnen proppen (maar niet stapelen), zou de wereldbevolking dan in de provincie Utrecht passen?

Testen

Opgave 20

Voor een bepaald type woning betaal je een huur van € 950,00 per maand. Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

- Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.
- Maak een tabel waarin je kunt zien hoe lang het duurt tot de huur hoger wordt dan € 1300,00 per maand.
- Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar? Rond af op twee decimalen.
- Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.
- Bereken het groeipercentage per twintig jaar.
- Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 21

Schrijf als één macht: $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{16}}$.

**Opgave 22**

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12 procent in waarde dalen.

- a** Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen.
- b** Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?
- c** Bereken het groeipercentage per vijf jaar.
- d** Met welk getal moet je de waarde van de aandelen na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.
- e** Bereken het groeipercentage per tien jaar.

5.2 Rekenregels voor machten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met negatieve en/of gebroken exponenten;
- alle rekenregels voor machten gebruiken.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten $t = 0$ is om 12:00 uur.

- Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 11:00 uur?
- Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 10:00 uur?
- Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd?
- Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?

Uitleg 1

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt de formule: $B = 600 \cdot 2^t$.

$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.

$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

tijd t (h)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën B	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 5.1

Elk uur verdubbelt de hoeveelheid bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zal er om 11:00 uur: $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaalte hebben gezeten. Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (dus vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t . Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$; enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af, dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op! Nu mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1 op pagina 164](#).

- Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal milligram bacteriën om 8:00 uur te berekenen?
- Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Opgave 2

Je ziet een deel van een tabel die een hoeveelheid bacteriën B beschrijft na tijd t (uur). De hoeveelheid wordt beschreven met de formule $B = 500 \cdot 2^t$. Vul de tabel verder in.

tijd (h)	-3	-2	-1	0	1	2	3
hoeveelheid bacteriën				500			

Tabel 5.2

Uitleg 2

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 600 \cdot 2^t$.

$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur, per kwartier, enzovoort.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?

De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$$

Je weet dat $(\sqrt{2})^2 = 2$. Blijkbaar geldt: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de

groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op! Nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2 op pagina 166](#).

- a Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?
- b Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 4

Gebruik de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ uit de uitleg.

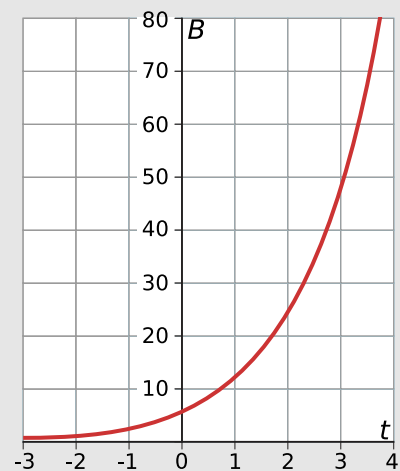
- a Hoeveel bedraagt de groefactor per drie uur?
- b Hoeveel bedraagt de groefactor per vier uur?
- c Hoeveel bedraagt de groefactor per vijf uur?
- d Hoeveel bedraagt de groefactor per half uur?
- e Hoeveel bedraagt de groefactor per kwartier?
- f Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur.
- g Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na 5 uur eerst te vermenigvuldigen met de groefactor per half uur en daarna met de groefactor per kwartier.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid de hoeveelheid steeds vermenigvuldigen met de groefactor g die bij die tijdseenheid hoort. Altijd is: $g > 0$. Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden **eigenschappen van machten**.

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$



Figuur 5.1

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g , maar hier moet je voorzichtig mee zijn.

Een macht als g^a heeft voor $g > 0$ betekenis als de exponent a een positief getal, 0, een negatief getal of een gebroken getal is. Voor a mag je zelfs elk reëel getal invullen. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw. Hij vermoedde dat de groei van de wereldbevolking exponentieel was. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 5.3

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest zouden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1,102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1,102^{\frac{1}{20}} \approx 1,005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoen mensen N , dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1,005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.

In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 5

In zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

- Bereken het aantal mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?
- Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond af op miljoenen per jaar.
- Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2008.
- Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt: $g^{5736} = 0,5$.

Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0,5} = 0,5^{\frac{1}{5736}} \approx 0,999879$.

Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0,999879^t = 0,6$.

Deze exponentiële vergelijking los je op met een tabel of met een logaritme: $t \approx 4221$ jaar.

De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2 op pagina 177** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

- Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog 38% is.

Opgave 7

Bij een kernsplijting is een hoeveelheid radioactieve stof Cesium-137 vrijgekomen. De halveringstijd van deze stof is dertig jaar.

- Na hoeveel jaar is de hoeveelheid van deze stof afgenomen tot 25%?
- Bereken na hoeveel jaar de hoeveelheid nog maar 11% is.

Voorbeeld 3

Je ziet enkele herleidingen met behulp van de eigenschappen van machten.

Er geldt $g > 0$.

- $\left(\frac{1}{g}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{g^1}\right)^{-4} = (g^{-1})^{-4} = g^4$
- $g^{\frac{2}{3}} = \left(g^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{g}\right)^2 = \sqrt[3]{g^2}$
- $g^{1,5} = g^{1+\frac{1}{2}} = g^1 \cdot g^{\frac{1}{2}} = g \cdot \sqrt{g}$
- $g^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{g^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(g^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{g^2}}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

- $2x^{2\frac{1}{3}}$
- $\frac{3x^{-1}}{2x}$
- $4x^{-\frac{3}{4}}$
- $2x^{\frac{1}{2}}$

**Opgave 9**

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

- a $(3^{-12})^{\frac{1}{4}}$
- b $(2^2)^{-3} \cdot (2^{-2})^{-4}$
- c $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$
- d $125^{\frac{1}{5}} \cdot 5^4 \cdot 5^{-10}$

Voorbeeld 4

Je kunt $3x \cdot \sqrt{x}$ schrijven in de vorm ax^b :

$$3x \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$$

Opgave 10

Schrijf in de vorm ax^b .

- a $\frac{3}{2x}$
- b $\frac{3}{4x\sqrt{x}}$
- c $(4\sqrt[3]{x})^2$
- d $2x\sqrt{x}$
- e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
- f $3x^5 \cdot (2x^3)^2$

Oefenen**Opgave 11**

Vereenvoudig met behulp van de rekenregels voor machten.

- a $3^{-2} \cdot 3^5 \cdot 3$
- b $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^3 \cdot 4^{-4}$
- c $5^{\frac{2}{3}}$
- d $1000^{\frac{1}{3}}$
- e $2^{-2} \cdot 4^{-1}$
- f $(3^2)^{-1}$

Opgave 12

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1,1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- a Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?
- b Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?
- c Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- d Hoe groot is het groeipcentage per maand?
- e Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 13

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven, voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Opgave 14

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten. Neem aan dat $x > 0$.

- a x^{-1}
- b $x^{-\frac{1}{2}}$
- c $x^{\frac{3}{4}}$
- d $x^{1\frac{3}{4}}$
- e $3x^{-1,5}$
- f $\frac{1}{2}x^{-2,75}$

Opgave 15

Herleid tot de vorm ax^b .

- a $\frac{2}{\sqrt{x}}$
- b $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$
- c $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}}$
- d $\frac{1}{2}\sqrt{x}$
- e $\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$
- f $(3x \cdot \sqrt{x})^3$

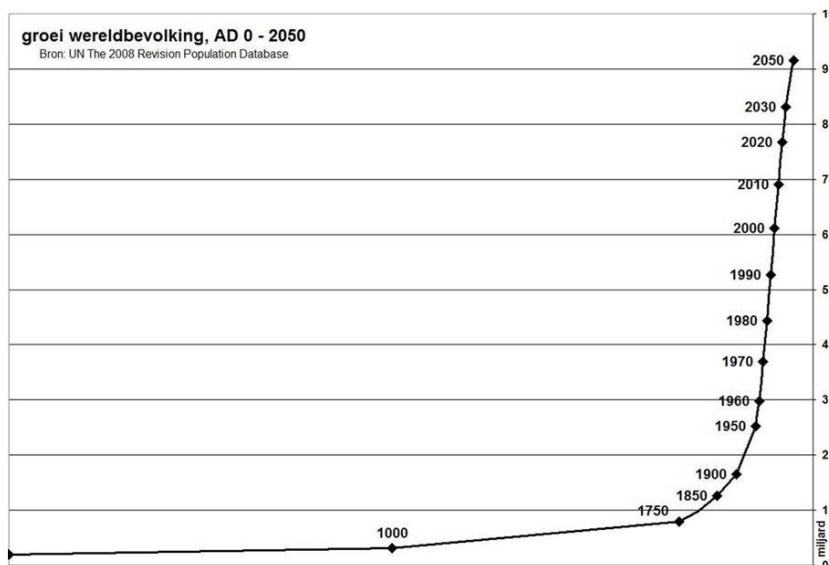
Opgave 16

Stel je een gebied voor met daarin een vulkaan en twee steden: Árborg en Eyrarbakki. Stel de stad Árborg heeft in 2020 45000 inwoners, dit aantal neemt per jaar toe met een factor 1,03. Het inwonertal van Eyrarbakki is dan 55000 en heeft een verdubbelingstijd van dertig jaar.

- Hoe groot is de groeifactor per jaar van Eyrarbakki? Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.
- Hoe groot is de verdubbelingstijd van het inwonertal van Árborg?
- Geef zowel van Árborg als van Eyrarbakki een formule waarmee je het bevolkingsaantal B kunt berekenen als functie van t (het aantal jaren).
- In het jaar 2020 barst de vulkaan uit. Helaas blijft dit voor Árborg niet zonder gevolgen: een kwart van de bevolking komt om het leven. Na de uitbarsting groeit de bevolking weer zoals voor de vulkaanuitbarsting. Wanneer heeft Árborg weer het oude aantal inwoners?
- Welk van deze twee steden heeft in het jaar 2150 de meeste inwoners?

Toepassen

Je ziet hier een grafiek van de groei van de wereldbevolking.



Figuur 5.2

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

Opgave 17

Bekijk de gegevens over de groei van de wereldbevolking.

- Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.
- Vanaf het begin van de jaartelling is de bevolking al meer dan vier keer verdubbeld in aantal. In welke tijdvakken vonden deze verdubbelingen plaats?
- Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Testen

Opgave 18

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten, zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15 procent toe te nemen.

- Geef een formule waarmee je de concentratie algen A in liter per 10 gram algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.
- Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15 procent per week. Hoe hoog was de concentratie algen drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.
- Wat was de concentratie algen twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.
- Na hoeveel dagen was de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 19

Bereken zonder rekenmachine.

- $3^{-5} \cdot 9^2$
- $2^{-10} \cdot (2^3)^5$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
- $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 20

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm ax^n .

- $3x^5 \cdot (2x^3)^2$
- $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{x^7}$
- $4x \cdot \sqrt[4]{x^2}$

5.3 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei/afname en dergelijke formules opstellen;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

- Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?
- Heeft de functie f extremen?
- Heeft de grafiek van f asymptoten?
- Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g ?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Met GeoGebra of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Deze functies komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Voor positieve waarden van b geldt:

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x -as is een horizontale asymptoot.
- Er zijn geen extremen.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden.

Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b .

Opgave 1

Met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kun je de grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

- Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Waarom heeft de grafiek van f nu geen asymptoot?
- Neem $b = 1$ en $g = 0,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = 2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = -2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?

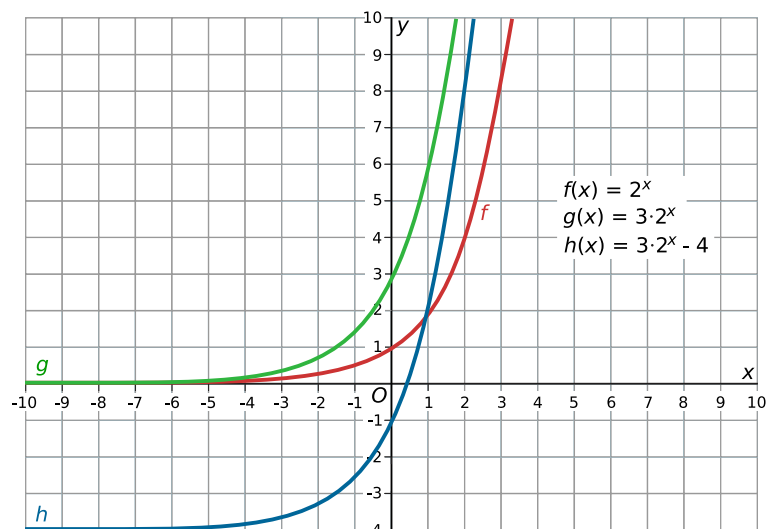
Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 5.1



Alle functies die hieruit door vermenigvuldiging ten opzichte van de assen of een translatie kunnen ontstaan, hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y -richting met 3 te vermenigvuldigen;
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door in de y -richting met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y -richting te verschuiven (een translatie van -4 in de y -richting);
- $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} + 4$ kun je herleiden tot $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1,5 \cdot 2^{2x} - 4$.
Dat wordt $f(x) = 1,5 \cdot (2^2)^x - 4$ en dus $f(x) = 1,5 \cdot 4^x - 4$.
De grafiek ontstaat door $b = 1,5$, $g = 4$ en $d = -4$ in te vullen. Dus ontstaat de grafiek uit die van $y = 4^x$ door in de y -richting met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie in de y -richting van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 3

Het gaat in [Uitleg 2 op pagina 184](#) over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

- Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?
- Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- Neem $b = -10$, $g = 1,5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 4

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{2x-1} - 12$.

- Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.
- Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- Bepaal het nulpunt van de grafiek van f .
- Dit nulpunt kun je ook algebraïsch vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

[Bekijk de applet: exponentiële functies](#)

De grafiek van de **standaard exponentiële functie** $y = g^x$ heeft een aantal karakteristieken.

- De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.
- De x -as is de horizontale asymptoot.
- Als $g > 1$, is de grafiek stijgend.
- Als $0 < g < 1$, is de grafiek dalend.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

Elke **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

Hierbij moet je soms het functievoorschrift herleiden met de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ een aantal **transformaties** toe te passen:

- vermenigvuldiging in de y -richting met factor b ;
- verschuiving in de y -richting met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door de **exponentiële vergelijking** $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Dat kan met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine.

Voorbeeld 1

In een stedelijk gebied liggen twee steden: stad A met 750000 inwoners en stad B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In stad A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in stad B was dat 3,1%.

Na hoeveel jaren heeft stad B meer inwoners dan stad A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

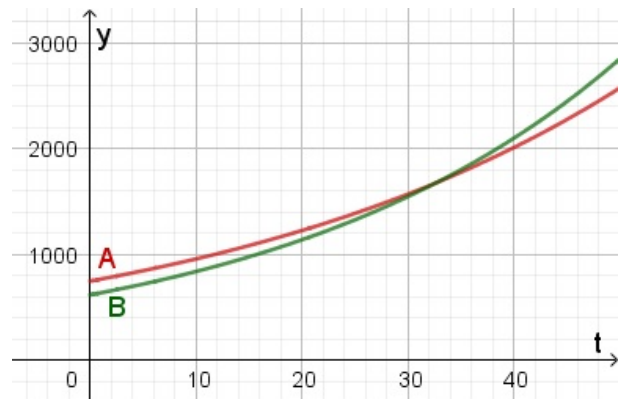
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is 1,025. Die van het aantal inwoners van B is 1,031. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van stad A voorstelt, en B dat van stad B, beide in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1,025^t$;
- $B(t) = 620 \cdot 1,031^t$.

De bijbehorende grafieken maak je met GeoGebra of een grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Neem voor het venster $[0,50] \times [0,3000]$. Ga na dat je $t \approx 32,6138$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 heeft stad B meer inwoners dan stad A als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 5.2

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 186**.

- Waaraan zie je dat B harder groeit dan A?
- Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32,6138...$ vindt.
- Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B, maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. Wanneer is C even groot als A?

Opgave 6

In een meer is op een bepaald moment een schadelijke stof aanwezig met een concentratie van 40 mg/L. De concentratie vervalt exponentieel met 20% per dag.

- Leg uit waarom de groeifactor per dag 0,80 is.
- Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.

Laat zien hoe deze functie door transformatie ontstaat uit een standaardfunctie van de vorm $y = g^x$ en los algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$

$g(x) = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16$

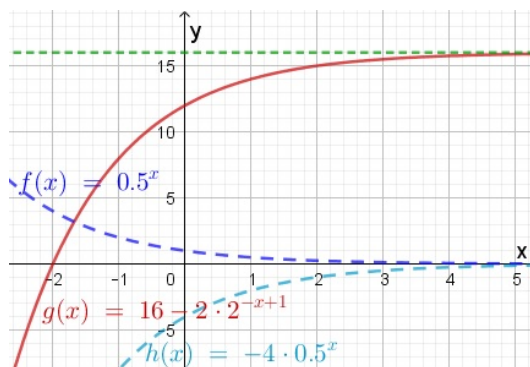
$g(x) = -4 \cdot (2^{-1})^x + 16$, dus $g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16$.

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16$ ontstaat door transformatie van $y = 0,5^x$ in twee stappen.

- vermenigvuldiging in de y -richting met -4 ;
- translatie in de y -richting met 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft: $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$. Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus: $2^4 = 2^{-x+2}$. Dit betekent dat: $4 = -x + 2$, zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$



Figuur 5.3

Opgave 7

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $y = 2^x$ laten ontstaan.

- Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.
Je kunt ook eerst het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.
- Laat zien hoe deze herleiding gaat.
- Beschrijf nu hoe je door transformatie in twee stappen de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g .
- Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f . Geef de coördinaten van dit punt.
- Los op $f(x) > 0$ op.

Opgave 8

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. Je kunt bijvoorbeeld de rekenregels voor machten gebruiken. Bekijk dit voorbeeld van een algebraïsche oplossing.

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 8\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 2\sqrt{2}$$

$$(2^{-1})^{1-x} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-1} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$x - 1 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

- a Los algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$
- b Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$

Opgave 9

Los op: $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 \geq 110$.

Vereenvoudig de bijbehorende vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik daarna GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 210 \cdot 2,5^x$.

- a Bereken $f(3)$ en $f(-5)$.
- b Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f .
- c Los op: $f(x) = 1200$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- d Los op: $f(x) < 2345$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Steeds een maand later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt met ongeveer 5% per maand af te nemen.

- a Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014.
- b Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?
- c Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?
- d Wat is het bereik van de functie bij a vanaf 6 januari 2004?
- e In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x - 60$.

- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$?
- b Bereken het nulpunt van f in één decimaal nauwkeurig.
- c Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ?
- d Los algebraïsch op $f(x) = 20$.

Opgave 13

Los algebraïsch op.

- a $2^x = 2\sqrt{2}$
- b $4^x = 8^{x+2}$
- c $9^{2x} = \sqrt{3}$
- d $2^{2x-1} = 32$
- e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een vloeibaar medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in milligram van het medicijn dat na t minuten in het bloed aanwezig is.

- a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?
- b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.
- c Maak duidelijk dat $A(t)$ niet exponentieel toeneemt.
- d Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen? Geef je antwoord in hele minuten.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$.

- a Herleid beide functies tot de vorm $y = b \cdot g^t + d$.
Hoe ontstaan de grafieken van f en g door transformatie uit de grafieken van de bijpassende standaardfuncties?
- b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$.
- c Los op: $g(x) > 1,5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.
- d Welke waarden neemt $g(x)$ aan als $x \leq 4$?
- e De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB .
- f De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D . Bereken de lengte van lijnstuk CD in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie

$$K(t) = 60 \cdot 0,998^t + 20$$

beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C.

Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.

Veel mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C.

Opgave 16

Na hoeveel seconden vinden veel mensen de koffie niet meer lekker?

Opgave 17

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

- Ga ervan uit dat de koffie niet lekker meer is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie nog te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?
- Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0,83^t$ laten ontstaan door transformatie?
- Hoelang duurt het voordat de koffie de temperatuur van 21 °C bereikt?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $T(t)$?
- De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur in de woonkamer is?

Testen

Opgave 18

Gegeven is de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van de functie $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ te krijgen uit de functie van g .
- Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f ?
- Bepaal het bereik van f .
- Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Los op: $f(x) \leq 0$.

**Opgave 19**

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

- a** Herleid de functie g naar de vorm $g(x) = b \cdot g^x + c$.
- b** Geef het bereik van de functies f en g .
- c** Los op $f(x) < g(x)$. Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

5.4 Machtsfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsfunctie is en de karakteristieken van machtsfuncties bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met machtsfuncties oplossen;
- werken met wortelfuncties en gebroken functies als voorbeelden van machtsfuncties.

Voorkennis

- de begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig met een macht;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De standaard machtsfuncties hebben de vorm $y = x^r$. Neem eerst voor r een geheel positief getal. Bekijk de bijbehorende grafieken met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.

- Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Welke waarde heeft dat minimum?
- Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn? Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.
Bekijk de grafiek van $y = x^r$ voor negatieve gehele r .
- Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $y = x^r$ overal dalend is?
- Waarom hebben de grafieken die je bekijkt allemaal twee asymptoten? Welke twee?
Neem gebroken getallen voor r .
- Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $r = \frac{1}{2}$ en die bij $r = \frac{1}{3}$?
- Bekijk de grafiek bij $r = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?
- Als r een geen geheel getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg

Bekijk de applet.

Met GeoGebra, Desmos of met een grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = a \cdot (x - p)^r + q$. Deze functies heten machtsfuncties.

Voor gehele positieve waarden van r krijg je ofwel grafieken met precies één minimum of maximum (als r even is), ofwel altijd stijgende of altijd dalende grafieken (als r oneven is).

De rekenregels voor machten maken dat wortelfuncties en gebroken functies vaak als machtsfunctie kunnen worden geschreven, bijvoorbeeld:

- $y = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$

waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{-1}$ door in de x -richting met 2 te verschuiven, dan in de y -richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y -richting met 4 te verschuiven.

- $y = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$

waarvan de grafiek ontstaat uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$ door in de x -richting met 2 te verschuiven, dan in de y -richting met 3 te vermenigvuldigen en dan nog in de y -richting met 4 te verschuiven.

Dit zijn beide machtsfuncties, maar hun grafieken zien er zeer verschillend uit.

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. Je zegt wel dat de inverse (omgekeerde) bewerking van een machtsfunctie een machtsfunctie is met de omgekeerde exponent.

Opgave 1

Het gaat in de [Uitleg op pagina 192](#) over machtsfuncties van de vorm $y = a \cdot (x-p)^r + q$. De grafieken van deze functies ontstaan door transformatie van de grafiek van de standaard machtsfunctie $y = x^r$.

- a** Bekijk de grafiek van $f(x) = 0,5(x-3)^2 + 1$.

Welke transformaties moet je op de standaard machtsfunctie toepassen om de grafiek van f te krijgen?
Welke uiterste waarde (maximum of minimum) heeft f ?

- b** Bekijk de grafiek van $g(x) = 0,5(x-3)^3 + 1$.
Heeft de grafiek van g uiterste waarden?

Bekijk de grafieken van $y = x^r$ met $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

- c** Voor welke waarden van r heeft de grafiek uiterste waarden?
d Hoe ziet de grafiek er uit als $r = 0$? En als $r = 1$?

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{3}{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{-1} + 4$.

- a** Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
b Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welke asymptoten heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{(x+1)^2}$.

- c** Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.
d Welke asymptoten heeft de grafiek van g ?

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 4 = 3 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} + 4$.

- Welk domein heeft de grafiek van f ?
En welk bereik?
- Uit welke standaard machtsfunctie kan de grafiek van f ontstaan?
Welk domein en bereik heeft die standaard machtsfunctie?

Bekijk nu de functie $g(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

- Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van g ? En welk domein en bereik?

Theorie en voorbeelden

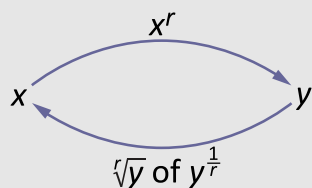
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Functies van de vorm $g(x) = a \cdot (x - p)^r + q$ heten **machtsfuncties**. Hun grafieken kunnen ontstaan uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^r$. Voor die standaard machtsfunctie geldt:

- Als r geheel, positief en even is, dan heeft de functie een minimum van 0 bij $x = 0$.
- Als r geheel, positief en oneven is, dan is de grafiek stijgend en gaat hij door $(0,0)$.
- Als r geheel, negatief is, dan heeft de functie beide assen als asymptoten.
- Als r niet geheel is, dan zijn alleen positieve waarden van x toegestaan tenzij r een breuk met een oneven noemer is.

Veel wortelfuncties en veel gebroken functies zijn voorbeelden van machtsfuncties.



Figuur 5.1

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Moet je een vergelijking met een machtsfunctie oplossen, dan kun je vanuit de macht x^r terugrekenen door de omgekeerde macht te gebruiken, want $(x^r)^{\frac{1}{r}} = x^1 = x$. De **inverse bewerking** van een machtsfunctie is een machtsfunctie met de omgekeerde exponent.

Voorbeeld 1

In een slingeruurwerk zit een gewicht dat heen en weer slinger.

De slingertijd kun je berekenen met de formule:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is:

- T de slingertijd in s
- l de lengte van de slinger in m
- $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ de gravitatieconstante

Laat zien dat $T(l)$ een machtsfunctie is.

Bereken bij welke lengte van de slinger de slingertijd 1 s is.

Antwoord

$$\text{Herleid de formule: } T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9,8}} = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{9,8}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2,01 \cdot l^{\frac{1}{2}}.$$

Je ziet nu dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit de standaardmachtsfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Om te berekenen bij welke lengte de slingertijd 1 s is, moet je oplossen: $T(l) = 1$.

$$2,01 \cdot l^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ geeft } l^{\frac{1}{2}} \approx 0,50 \text{ en dus } l \approx 0,50^2 \approx 0,25 \text{ m.}$$

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1 op pagina 195** dat de grafiek van $T(l)$ kan ontstaan uit die van een standaard machtsfunctie.

- Welke transformatie moet je dan toepassen?
- Welk domein en bereik heeft de functie $T(l)$?
- In het voorbeeld wordt ook een vergelijking met een macht opgelost.
Laat zien dat hier een macht wordt weggewerkt door de omgekeerde macht te gebruiken.
- Bij $T = 1$ s hoort een lengte van ongeveer 0,25 m.
Wordt de slingertijd ook twee keer zo groot als de lengte twee keer zo groot wordt?

Opgave 5

De zwaartekracht is de aantrekkingskracht tussen twee massa's en is gegeven door de formule

$$F = g \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Hierin is:

- F de zwaartekracht in N
- m de massa in kg
- r de afstand tussen beide massa's in m
- $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ de gravitatieconstante

Neem aan dat $m_1 = 10 \text{ kg}$ en $m_2 = 15 \text{ kg}$.

- Laat zien dat $F(r)$ een machtsfunctie is.



Figuur 5.2

- b** Welk domein en bereik heeft de functie $F(r)$?
- c** Los op in één decimaal nauwkeurig: $F(r) \geq 294$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x - 4)^3 - 10$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 20$.

Beschrijf welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^3$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y_1 = x^3$. Eerst 4 verschuiven in de positieve x -richting (dus t.o.v. de y -as), dan vermenigvuldigen met 2 in de y -richting en tenslotte 10 verschuiven in de negatieve y -richting.

Om $f(x) = 20$ op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$2(x - 4)^3 - 10 = 20$$

$$2(x - 4)^3 = 30$$

$$(x - 4)^3 = 15$$

$$x - 4 = 15^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 15^{\frac{1}{3}} + 4$$

Je vindt dus $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6,47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x + 1)^4 - 5$.

- a** Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^4$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.
- b** Los op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 3

Los op in twee decimalen nauwkeurig: $\frac{2}{(x+1)^4} > 4$.

Antwoord

Omdat $f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} = 2 \cdot (x + 1)^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie.

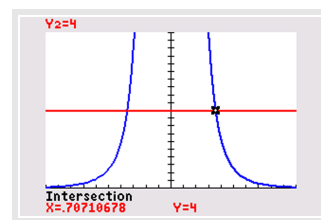
Maak eerst de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$.

Los nu op: $2 \cdot (x + 1)^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = -1 + 2^{-\frac{1}{4}} \approx -1,159$ v $x = -1 - 2^{-\frac{1}{4}} \approx -1,841$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-1,84 < x < -1$ v $-1 < x \leq -1,16$.

Merk op dat je $x = -1$ uitzondert omdat voor deze waarde de functie f niet bestaat.



Figuur 5.3

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd ook rekening met het domein van de verschillende functies.

- a $x^2 < \sqrt{x}$
- b $\frac{1}{x^4} = 81$
- c $\frac{1}{x^3} < 27$
- d $\frac{1}{x^3} < 30$
- e $x^5 < x^4$
- f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^{-2} - 4$.

- a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?
- b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.
- c Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- d Schrijf domein en bereik van f op.
- e Los op: $f(x) < 10$.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is: $y = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

- a Wat is het domein en wat is het bereik van deze machtsfunctie?
- b Heeft deze functie een maximum of een minimum?
- c Heeft de grafiek van deze functie een asymptoot?
- d Los op: $2x^{\frac{1}{4}} \leq 10$

Opgave 10

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de marketingafdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro. De verkoop per dag varieert van 100 tot 1000 kg.

- a Schrijf de formule zo, dat blijkt dat de verkoop per dag recht evenredig is met de macht van de prijs.
- b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft? Hoe kun je dat aan de grafiek direct zien?

- c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.
- d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

- a Leg uit dat de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformatie van de grafiek $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
- b Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek van f te krijgen?
- c Schrijf domein en bereik van f op.
- d Los op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

- a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.
- b Geef het domein en bereik van zowel f als g .
- c Los op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

- a Laat zien, dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf bijbehorende transformaties op.
- b Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- c Schrijf domein en bereik van f op.
- d Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Het huidoppervlak is het buitenoppervlak van het met huid beklede lichaam. Er bestaan diverse formules voor. Eén daarvan is de formule van Dubois:

$$H = 0,007184 \cdot M^{0,425} \cdot L^{0,725}$$

Hierin is:

- H de huidoppervlakte in m^2
- M het lichaamsgewicht in kg
- L de lichaamslengte in cm

- a Bereken met deze formule de huidoppervlakte van een persoon van 1,80 m met een gewicht van 75 kg.
- b Welke formule geldt voor de huidoppervlakte van iemand die 1,80 m lang is?
- c Iemand van 1,80 heeft na een vreetzame winter zijn lichaamsgewicht zien toenemen van 75 kg naar 80 kg. Met hoeveel procent is zijn huidoppervlakte toegenomen?

Het lijkt logisch dat M recht evenredig is met L^3 omdat M afhankelijk is van het lichaamsvolume.

- d Laat zien dat uit dit gegeven en de gegeven formule volgt dat H recht evenredig is met L^2 .

Toepassen

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kW) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:

$$P = c \cdot m \cdot v^2$$

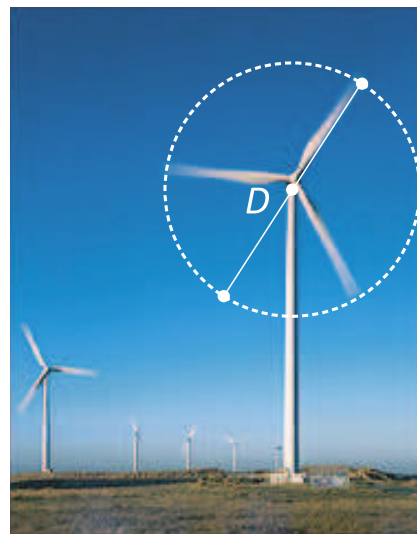
Hierin is P het vermogen in kilowatt (kW), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v .

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is in kg per m³.

Zo vind je: $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.



Figuur 5.4

Opgave 15

Bestudeer de gegevens van de windmolen. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

- Welke aannames zijn er gedaan?
- Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.
- Kun je een manier bedenken om dit rekenmodel voor het vermogen van een windmolen te testen?

Opgave 16

Van een bepaalde windmolen is door metingen bepaald dat $C \approx 0,0013$.

Deze windmolen heeft wieken met een lengte van 10 m.

- Welke formule geldt voor het vermogen dat deze windmolen genereert afhankelijk van de windsnelheid?
- Hoeveel vermogen wekt deze molen op bij een windsnelheid van 10 m/s?
- Bij welke windsnelheid bedraagt het opgewekte vermogen 300 kW?
- De windmolen is alleen in gebruik bij windsnelheden vanaf 3 tot 20 m/s. Welke vermogens kan hij opleveren?
- Als de windsnelheid verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?
- Als de wieklengte verdubbelt, wat gebeurt er dan met het vermogen?



Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties

- het domein en het bereik;
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is;
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing);
- de asymptoten (voor zover van toepassing).

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $2(x + 3)^4 - 10 = 500$

b $10 - 2\sqrt{x - 4} > 6$

c $\sqrt[4]{x} < 20$

d $2(x + 1)^3 > 20$

e $5 + 2\sqrt{x - 3} < 20$

5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en machten** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor
- rekenregels voor machten
- exponentiële functie — transformatie
- machtsfunctie — gebroken functie — wortelfunctie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei een groeifactor bepalen en daarmee een bijpassende formule maken
- de rekenregels voor machten toepassen
- de karakteristieken van exponentiële functies uit het functievoorschrift afleiden — vergelijkingen met exponentiële functies oplossen
- de karakteristieken van machtsfuncties uit het functievoorschrift afleiden — gebroken functies en wortelfuncties herleiden naar machtsfuncties — vergelijkingen met machtsfuncties oplossen.

Testen

Opgave 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2010 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

- Hoeveel bedraagt de groeifactor g per jaar?
- Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2010.
- Hoelang duurt het voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is als de groei zo doorgaat?
- Hoeveel passagiers waren er in 2007?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar? Rond af op drie decimalen.
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartaal? Rond af op drie decimalen.

Opgave 2

Geef het domein, bereik en de asymptoot van elk van deze functies.

- $f(x) = 400 + 50 \cdot 2^{x-10}$
- $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 40$

Opgave 3

Los algebraïsch op.

- a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$
- b $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 25$
- c $300 \cdot 1,5^{2x-4} > 675$

Opgave 4

Een doorzichtig kunststof absorbeert een deel van het licht dat erdoorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

- a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per centimeter kunststof?
- b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte? Rond af op een decimaal.
- c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen? Rond af op één decimaal.
- d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof? Rond af op drie decimalen.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12$.

- a Schrijf de functie in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
- b Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je toepassen?
- c De grafiek van de exponentiële functie $h(x) = b \cdot g^x$ snijdt de grafiek van f in $A(-1, y)$ en gaat door het punt $(2, 5)$. Stel de formule op van h . Rond g af op drie decimalen en b op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6

De functies f en g zijn machtsfuncties: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6-x}}$.

- a Welk domein en welk bereik heeft functie f ?
- b Laat zien, dat g een machtsfunctie is.
Welk domein en welk bereik heeft functie g ?
- c Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 7

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$. Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

- a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

- b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

Toepassen

Opgave 8: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α -deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4,468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t . Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0,8563^t$ gram.

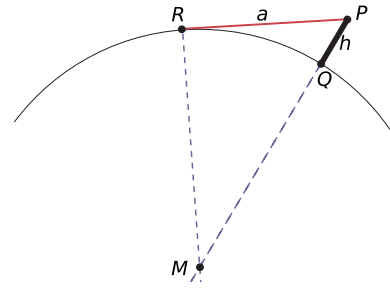
Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2010 1000 mg radium-228.

- a Geef een formule van R , de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.
- b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.
- c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.
- d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot er 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 9: Kijkafstand

De kijkafstand op aarde is de grootste afstand waarop je nog een punt op aarde kunt zien als je zelf op een totaal kale aarde staat.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40.000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).



Figuur 5.1

- a** Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h .

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.

- b** Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.
- c** Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.
- d** Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op de aarde?

6

Logaritmen

- 6.1 Logaritmen 206
- 6.2 Logaritmische functies 214
- 6.3 Logaritmische vergelijkingen 221
- 6.4 Totaalbeeld 228

6.1 Logaritmen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

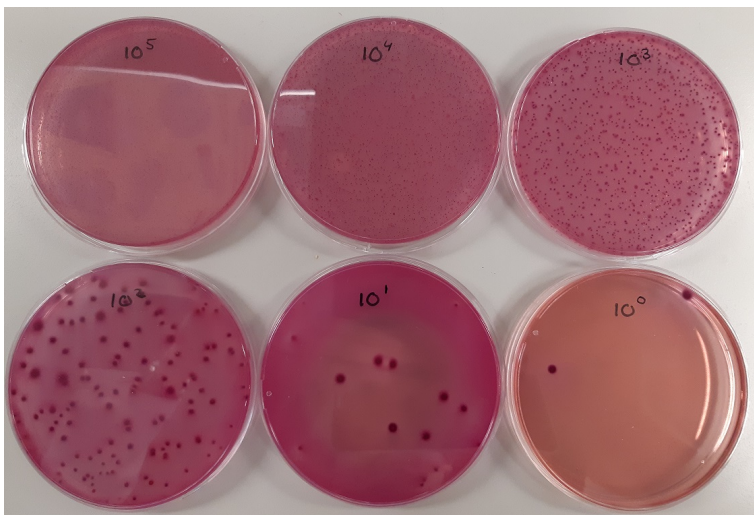
Verkennen

Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.

Bekijk de voedingsbodem waarbij het monster 10^2 keer is verdund, omdat het aantal kolonies daarop goed is te tellen. Bij het ontstaan van de kolonies groeit het aantal bacteriën in een kolonie exponentieel. Voor de exponentiële groei van aantal bacteriën geldt daarin $B = 8^t$ waarin B het aantal bacteriën is en t de tijd in uren.



Figuur 6.1

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) is het aantal bacteriën in een kolonie uitgegroeid tot 6000?

Uitleg 1

Bekijk de applet: [logaritme](#)

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 120 bacteriën?

$6 \cdot 2^t = 120$ geeft: $2^t = 20$

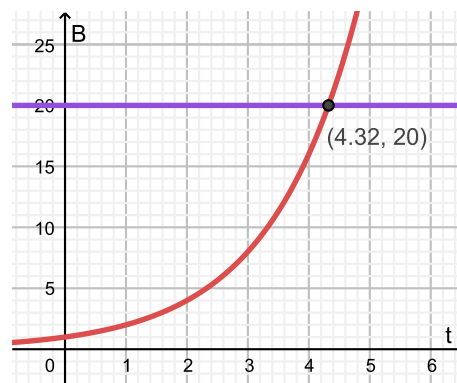
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 4,32$.

Dit antwoord is afgerond.

De exacte oplossing schrijf je als: $t = {}^2\log(20)$.

Dit is de logaritme van 20 met grondtal 2.

Het is ook de tijd waarin de hoeveelheid bacteriën 20 keer zo groot is geworden.



Figuur 6.2

Wil je bijvoorbeeld weten hoeveel de verachtvoudigingstijd van deze hoeveelheid bacteriën is, dan moet je oplossen: $2^t = 8$. De oplossing is $t = {}^2\log(8)$. Met de grafiek vind je dan precies $t = 3$.

Dat komt omdat $8 = 2^3$.

Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in [Uitleg 1 op pagina 207](#).

- Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 60 is. Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.
- Waarom is het getal dat je bij a hebt gevonden de vertienvoudigingstijd van deze exponentiële groei?
- Schrijf de verdrievoudigingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd in twee decimalen nauwkeurig.
- Schrijf de verdubbelingstijd van dit groeiproces op als logaritme en bereken deze tijd.
- Bereken $t = {}^2\log(16)$. Leg uit welke betekenis het antwoord heeft.

Opgave 2

Een andere kolonie bacteriën groeit volgens de functie $B(t) = 4 \cdot 1,5^t$.

- Bereken de verdubbelingstijd bij deze exponentiële groei. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken op dezelfde manier de verdrievoudigingstijd en de verzesvoudigingstijd.
- Vergelijk de antwoorden bij a en b. Valt je iets op?
- Waarom is ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log(2^2)$?
- Waarom is $3 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log(2^3)$?

Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B(t) = 4 \cdot 1,5^t$.

Hierin is B de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren.

De tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt volgt uit $1,5^t = 2$ en is dus $t = {}^{1,5}\log(2) \approx 1,71$.

De verdrievoudigingstijd is ${}^{1,5}\log(3) \approx 2,71$ jaar.

De verzesvoudigingstijd is ${}^{1,5}\log(6) \approx 4,42$ jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je ook door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen:

$${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log(6)$$

$$\text{Ofwel: } {}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log(2 \cdot 3)$$

Als je twee logaritmen optelt, moet je de getallen waarop ze werken vermenigvuldigen.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is ${}^{1,5}\log(8)$. Die verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.

$${}^{1,5}\log(8) \approx 5,13 \text{ en } 3 \cdot {}^{1,5}\log(2) \approx 5,13$$

$$\text{Er geldt: } {}^{1,5}\log(2^3) = 3 \cdot {}^{1,5}\log(2).$$

Dit geldt ook voor andere grondtallen en andere getallen.

Deze laatste eigenschap kun je gebruiken om op een rekenmachine een logaritme uit te rekenen met de log-knop. Deze knop werkt namelijk met grondtal 10, een soort van standaardgrondtal van een logaritme dat je zelfs niet opschrijft: $\log(2) = {}^{10}\log(2)$.

Als je $1,5^t = 2$ moet oplossen, kun je ook met grondtal 10 werken:

$$1,5^t = 2 \text{ geeft } \log(1,5^t) = \log(2)$$

Nu kun je $\log(1,5^t)$ schrijven als $t \cdot \log(1,5)$.

$$\text{De vergelijking wordt dan } t \cdot \log(1,5) = \log(2) \text{ en dus is } t = \frac{\log(2)}{\log(1,5)}.$$

$$\text{En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: } t = {}^{1,5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,5)} \approx 1,71.$$

Dit werkt met elk toegestaan grondtal.

Opgave 3

In [Uitleg 2 op pagina 208](#) zie je voorbeelden van enkele eigenschappen van logaritmen.

- Laat zelf zien dat de verdubbelingstijd plus de verviervoudigingstijd hetzelfde is als de verachtvoudigingstijd.
Schrijf dit ook met logaritmen op.
- Schrijf als één logaritme: ${}^{1,5}\log(5) + {}^{1,5}\log(10)$.
- Schrijf als één logaritme: ${}^{1,5}\log(6) - {}^{1,5}\log(2)$.
- Leg uit waarom $5 \cdot {}^{1,5}\log(3) = {}^{1,5}\log(3^5)$.

Opgave 4

In [Uitleg 2 op pagina 208](#) wordt de vergelijking $1,5^t = 2$ opgelost met behulp van de 10-logaritme.

- Ga na dat inderdaad ${}^{1,5}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,5)} \approx 1,71$.
- Los de vergelijking $4 \cdot 1,5^t = 100$ op met behulp van de 10-logaritme. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:

$x = {}^g \log (y)$ is de oplossing van $g^x = y$.

Uit de definitie van logaritme volgt dat g^x en ${}^g \log (x)$ elkaars terugrekenfunctie zijn. Er geldt dan ook:

$${}^g \log (g^x) = x \text{ en } g^{{}^g \log (y)} = y$$

De logaritme ${}^g \log (y)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^g \log (a) + {}^g \log (b) = {}^g \log (a \cdot b)$
- ${}^g \log (a) - {}^g \log (b) = {}^g \log \left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g \log (a) = {}^g \log (a^p)$
- ${}^g \log (a) = \frac{p \log (a)}{p \log (g)}$

Het grondtal 10 laat je weg: ${}^{10} \log (a) = \log (a)$.

${}^g \log (a)$ kun je met de rekenmachine berekenen: ${}^g \log (a) = \frac{\log (a)}{\log (g)}$.

Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan rechts onder de log: $\log_g (a)$

Voorbeeld 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

Over hoeveel jaar is dat aantal gestegen tot meer dan 60000 passagiers per jaar?

Antwoord

Het aantal passagiers is $P(t) = 43000 \cdot 1,02^t$ met P het aantal passagiers en t de tijd in jaren.

Je moet oplossen: $43000 \cdot 1,02^t = 60000$.

$$43000 \cdot 1,02^t = 60000$$

$$1,02^t = 1,395...$$

$$t = {}^{1,02} \log (1,395...) = \frac{\log (1,395...)}{\log (1,02)} \approx 16,8$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

17 jaar na 2018 zijn er voor het eerst meer dan 60000 passagiers op dit vliegveld.

Dat is in 2035.

Opgave 5

Bekijk [Voorbeeld 1 op pagina 209](#).

- Bereken na hoeveel jaar het aantal passagiers per jaar de 100.000 gaat overstijgen als de groei zo door gaat.
- Bereken de verdubbelingstijd van de groei van het jaarlijkse aantal passagiers in maanden nauwkeurig.

Opgave 6

Een hoeveelheid neemt per dag met 20% af.

- a Bepaal de bijbehorende groeifactor.
- b Na hoeveel dagen is deze hoeveelheid gehalveerd?
Stel een vergelijking voor dit probleem op en los deze vergelijking op met behulp van logaritmen.

Voorbeeld 2

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^3\log(10) + {}^3\log(20) = {}^3\log(200)$
- $5 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(32)$

Antwoord

Bij deze exponentiële groei hoort een groeifactor van 3.

${}^3\log(10)$ is de vertienvoudigingstijd en ${}^3\log(20)$ is de vertwintigvoudigingstijd.

Als je eerst de hoeveelheid met 10 en vervolgens met 20 vermenigvuldigt, heb je de hoeveelheid met $10 \cdot 20 = 200$ vermenigvuldigd.

${}^3\log(2)$ is de verdubbelingstijd.

Als je de verdubbelingstijd vijf keer neemt, heb je vijf keer met 2 vermenigvuldigd.

De hoeveelheid wordt dan met $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ vermenigvuldigd.

Opgave 7

Bestudeer [Voorbeeld 2 op pagina 210](#).

Verklaar vanuit exponentiële groei dat:

- ${}^{1,5}\log(2) + {}^{1,5}\log(6) = {}^{1,5}\log(12)$
- $4 \cdot {}^{1,5}\log(2) = {}^{1,5}\log(16)$

Opgave 8

Bereken de logaritmen en controleer of de uitdrukkingen waar zijn.

- a ${}^2\log(16) + {}^2\log(8) = {}^2\log(128)$
- b ${}^2\log(16) - 3 \cdot {}^2\log(2) = {}^2\log(2)$
- c ${}^3\log(3) + {}^3\log(9) = {}^3\log(81)$

Opgave 9

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

- a ${}^2\log(72) - 2 \cdot {}^2\log(3)$
- b $\log(125) + 3\log(2)$
Schrijf als één logaritme.
- c ${}^2\log(7) + {}^3\log(81)$
- d $0,5 \cdot {}^2\log(36) - 1$

Voorbeeld 3

Met behulp van de eigenschap $g^{g \log(y)} = y$ kun je bij elke exponentiële functie schrijven met het standaard grondtal 10.

Schrijf de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ met het grondtal 10.

Antwoord

Je hebt een grondtal van 2.

Met de genoemde eigenschap geldt: $10^{10 \log(2)} = 2$, of korter $10^{\log(2)} = 2$.

Hiermee wordt de gegeven formule: $B(t) = 6 \cdot (10^{\log(2)})^t = 6 \cdot 10^{\log(2) \cdot t} \approx 6 \cdot 10^{0,301t}$.

Opgave 10

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 211** hoe je een exponentiële functie kunt schrijven met het standaard grondtal 10.

- a Schrijf de functie $H_A(t) = 160 \cdot 1,3^t$ met het grondtal 10.
- b Schrijf de functie $H_B(t) = 120 \cdot 1,4^t$ met het grondtal 10.
- c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $H_A(t) = H_B(t)$.

Oefenen

Opgave 11

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

- a $500 \cdot 1,5^x = 6000$
- b $0,5 \cdot 10^x = 2000$
- c $1500 \cdot 0,95^t = 100$

Opgave 12

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 3 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdubbeld. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 13

Bereken met behulp van de rekenregels voor logaritmen.

- a $\log(5) + \log(20)$
- b $^5\log(100) - ^5\log(4)$
- c $2 \cdot ^6\log(3) + ^6\log(4)$
- d $^{\frac{1}{3}}\log(45) - ^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 14

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties?

Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 15

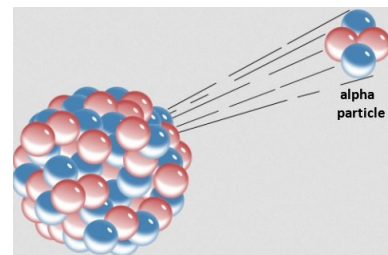
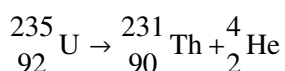
Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

- Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?
- Stel een formule op voor het verval van de hoeveelheid natrium-24. Schrijf deze formule ook in de vorm met standaard grondtal 10.
- Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

Toepassen

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.

Een voorbeeld is U-235, een isotoop van uranium die door het uitschieten van α -deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-231:



Figuur 6.3 bron: Wikipedia

De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-235 is ongeveer $7,038 \cdot 10^8$ jaar. Het verval van U-235 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t . Begin je met 1 kg U-235, dan heb je na 704 miljoen jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-231). Je kunt dus het beste de tijd in miljoenen jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,9990. En $H = 1000 \cdot 0,9990^t$ gram.

Opgave 16: Alfastraling

Bekijk hoe uranium-235 vervalst tot thorium-231 door alfastraling.

- Laat zien dat de halveringstijd bij een groeifactor van 0,9990 per miljoen jaar ongeveer $7 \cdot 10^8$ jaar is.
- Bereken hoe lang het duurt totdat de 1000 g U-235 gerekend in grammen volledig is omgezet in Th-231.

Opgave 17: Radium

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

- a Geef een formule van R , de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.
- b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.
- c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.
- d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg van de beschikbare 1000 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

- a $6 \cdot 2^x = 180$
- b $1050 \cdot 0,98^t = 800$

Opgave 19

Vereenvoudig deze uitdrukkingen tot één logaritme.

- a ${}^2\log(7) + {}^2\log(5)$
- b ${}^3\log(51) - {}^3\log(17)$
- c $\frac{1}{3}\log(3) + 3 \cdot \frac{1}{3}\log(9)$

6.2 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats op aarde:

$$p = 1013 \cdot 0,886^h$$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Deze formule betekent dat je bijvoorbeeld in een luchtballon de hoogte kunt bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. Daarvoor bestaan apps op je telefoon. Die maken gebruik van deze formule, maar in de vorm waarin h is uitgedrukt in p .



Figuur 6.1

- a Schrijf de gegeven formule zo, dat h is uitgedrukt in p .
- b In de figuur zie je dat h is uitgedrukt in 'foot', een oude engelse lengtemaat.
1 foot = 0,3048 m.
Komt de figuur overeen met de formule die je bij a hebt gevonden?

Uitleg

De luchtdruk p (in hectopascal) hangt af van de hoogte h (in km) boven zeeniveau. Er geldt op zeker moment op een bepaalde plaats op aarde:

$$p = 1013 \cdot 0,886^h$$

In een luchtballon kun je hiermee de hoogte berekenen door de luchtdruk te meten.

Je schrijft dan de formule liever zo: $h = 0,866 \log \left(\frac{p}{1013} \right)$.

Bij beide formules kun je een grafiek maken, maar niet in één figuur.

Bij de eerste formule komt p op de verticale as.

Dit is een exponentiële functie met een horizontale asymptoot.

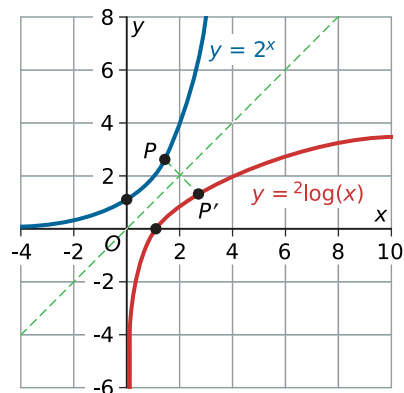
Bij de tweede formule komt h op de verticale as.
Dit is een logaritmische functie met een verticale asymptoot.

Bekijk de applet: logaritme

Uit $y = 2^x$ volgt $x = {}^2\log(y)$.

Als je in de tweede formule x en y verwisselt kun je beide grafieken in één figuur tekenen. Ze zijn dan elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. Nu zie je dat $y = {}^2\log(x)$ een logaritmische functie is waarvan de eigenschappen het spiegelbeeld zijn van die van $y = 2^x$.

Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: een exponentiële functie kun je wegwerken met een logaritme met hetzelfde grondtal, en omgekeerd kun je een logaritmische functie wegwerken met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal.



Figuur 6.2

Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

- Maak beide grafieken.
- Het punt $(4,2)$ ligt op de grafiek van y_2 . Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?
- Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1 .
- Laat met een voorbeeld zien dat y_1 en y_2 elkaars terugrekenfunctie zijn.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1 .

- Welke asymptoot heeft de grafiek van y_2 ?
- Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?
- Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $H(t) = 12 \cdot 3^t$.

- Schrijf t als functie van H .
- Voor welke waarden van t is $H > 100$?
- Voor welke waarden van H is $t > 100$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: logaritme

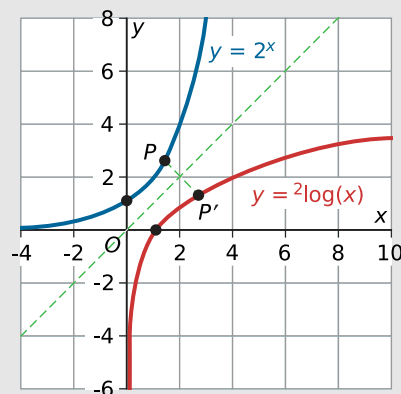
Een functie van de vorm $f(x) = {}^g \log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g \log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De karakteristieken van $y = {}^g \log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- alleen x -waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y -as is de verticale asymptoot van de grafiek



Figuur 6.3

Alle functies die door transformatie uit $f(x) = {}^g \log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

Voorbeeld 1

Bepaal domein en bereik van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5} \log(x)$.

Bepaal de verticale asymptoot en bereken het nulpunt van f .

Antwoord

Maak de grafiek van f .

Deze grafiek kan ontstaan uit die van $y = {}^{0,5} \log(x)$ door deze 1 eenheid ten opzichte van de x -as te verschuiven.

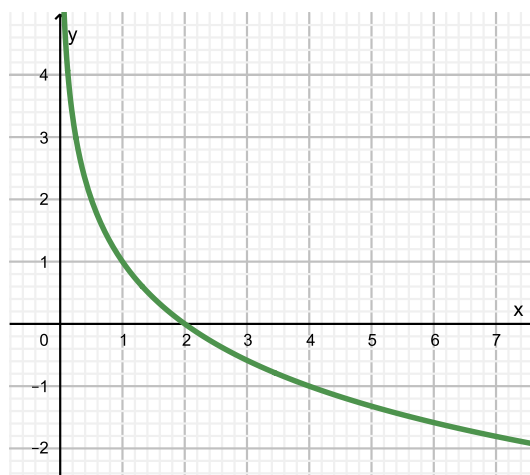
Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

- Uit $x > 0$ volgt $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.

Het nulpunt vind je zo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ {}^{0,5} \log(x) &= -1 \\ x &= (0,5)^{-1} = 2 \end{aligned}$$

Het nulpunt is $x = 2$.



Figuur 6.4

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = {}^3 \log(x)$.

- Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f .
- Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?



- c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?
- d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot 0,3 \log(x - 1)$

- a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.
- b Bepaal het domein en bereik van f .
- c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = 0,3 \log(x)$?
- d Bereken algebraïsch het nulpunt van f . Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$$h = 0,886 \log\left(\frac{p}{1013}\right)$$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $h = a \cdot \log(p) + b$ waarin het standaard grondtal 10 wordt gebruikt. Laat zien hoe.

Antwoord

Gebruik de eigenschap $^g \log(c) = \frac{\log(c)}{\log(g)}$.

$$\text{Dit betekent: } h = 0,886 \log\left(\frac{p}{1013}\right) = \frac{\log\left(\frac{p}{1013}\right)}{\log(0,886)}.$$

$$\text{Omdat } \log(0,886) = -0,5256... \text{ wordt dit } h = \frac{1}{-0,5256...} \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right).$$

$$\text{Vervolgens is } \log\left(\frac{p}{1013}\right) = \log(p) - \log(1013).$$

$$\text{Dus is } h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right) = -19(\log(p) - \log(1013)) \approx -19 \log(p) + 57.$$

Opgave 6

Ga in **Voorbeeld 2 op pagina 217** na hoe je een logaritmische functie kunt herleiden naar een logaritmische functie met het standaardgrondtal 10.

De formule met grondtal 0,886 is afgeleid van $p = 1013 \cdot 0,886^h$.

Je kunt ook eerst deze formule herleiden naar de vorm $p = 1013 \cdot 10^{k \cdot h}$ en dan h als functie van p schrijven.

- a Laat zien hoe de herleiding dan verloopt.
- b Maak de grafiek van $h \approx -19 \cdot \log(p) + 57$ en zorg dat zowel het nulpunt als de verticale asymptoot goed in beeld komen.
- c Bij welke luchtdruk is $h > 10$ km?

Opgave 7

Gegeven is een groeiproses met formule $H = 20 \cdot 1,2^t$.

- Herleid dit tot een formule met het standaardgrondtal 10.
- Schrijf de formule in de vorm $t = a \log(H) + b$.
- Na hoeveel tijd is $H > 240$?

Oefenen

Opgave 8

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 10 \cdot 2^t$.

- Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $t = {}^2\log\left(\frac{B}{10}\right)$.
- Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.
- Los op: $t > 3$.

Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32,8 \cdot {}^{0,9}\log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule van de vorm $h = a \log(p) + b$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

- Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
- Geef het domein en bereik van f .
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?
- Bereken algebraïsch het nulpunt van f . Rond af op één decimaal.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$$m = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

- Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?
- Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $m \approx 0,67 \cdot \log(E) - 3,20$.
- Wat gebeurt er met de hoeveelheid vrijkomende energie als m met 1 toeneemt?

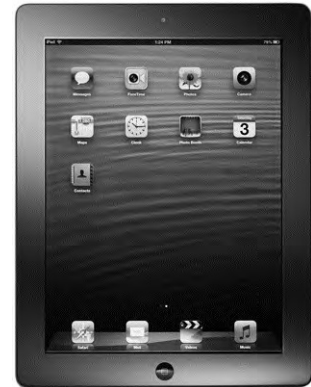
Opgave 12

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit achttien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu.

Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule:

$$T = b \cdot \log(n + 1)$$

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.



Figuur 6.5

- a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b -waarde (b_p) kleiner is dan de b -waarde van zijn vader (b_v).

- b Onderzoek of dit betekent dat de b -waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

- methode I: één menu van achttien knoppen te maken
- methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0,9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconden langer dan bij methode I.

- c Toon met behulp van de formule voor T aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

- d Neem $b = 1$ en toon aan dat deze bewering klopt.

Toepassen

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nm}^{-2}$ dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde **Alexander Graham Bell** een praktischere grootheid in, het geluidsdrumniveau L uitgedrukt in decibel, dB. Het verband tussen L en p wordt gegeven door

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Hierin is $p_0 = 0,00002 \text{ Pa}$, de gehoorgrens.

Je kunt je afvragen hoe groot de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB) is. En hoeveel dB het geluidsdrumniveau van twee van die brommers bedraagt.

Opgave 13

Bekijk de formule van Bell voor het geluidsdrukkniveau.

- a Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB)?
- b Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukkniveau van twee van die brommers?

Opgave 14

Bekijk weer de formule van de effectieve geluidsdruk. Neem ook nu $p_0 = 0,00002$ Pa.

- a In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukkniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?
- b Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukkniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drillboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukkniveau op dat moment?
- c Als het geluidsdrukkniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Testen

Opgave 15

Een hoeveelheid bacteriën groeit met de tijd t (in uren) volgens $B = 150 \cdot 1,4^t$.

- a Herleid deze formule zo, dat t is uitgedrukt in B .
- b Maak de grafiek die bij de formule uit a hoort.
- c Los op: $t > 5$.

Opgave 16

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constante G_0 hangt af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2,4$ (in één decimaal nauwkeurig).

- a Hoe zwaar is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?
- b Herleid de gegeven formule naar de vorm $L = a \log(G) + b$.

6.3 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmen oplossen onder andere met behulp van de rekenregels;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies en logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Verkennen

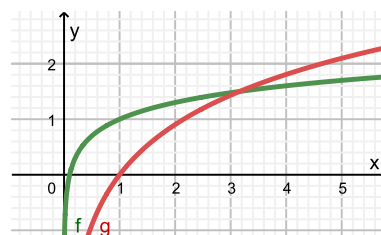
Opgave V1

Los op: $\log(x) + 1 < 3 \cdot \log(x)$.

Uitleg

Los op: $\log(x) + 1 \geq 3 \cdot \log(x)$.

- Los de bijbehorende vergelijking op:
 $\log(x) + 1 = 3 \cdot \log(x)$ geeft $2 \cdot \log(x) = 1$ en $\log(x) = 0,5$ zodat $x = 10^{0,5} \approx 3,16$.
- Maak de grafieken van $f(x) = \log(x) + 1$ en $g(x) = 3 \cdot \log(x)$.
Lees de oplossing uit de figuur af.
Houd rekening met de domeinen van beide functies.
- De oplossing is $0 < x \leq 3,16$.



Figuur 6.1

Opgave 1

In de [Uitleg op pagina 221](#) zie je hoe een vergelijking met meerdere logaritmen kan worden opgelost.
Los op dezelfde manier op:

- a $4 \cdot \log(x) \geq 1 - \log(x)$
- b $2 \log(x) - 1 > 2 \cdot 2 \log(x)$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2 \log(x - 1) + 16$.

- a Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f .
- b Los de ongelijkheid $f(x) \leq 38$ op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** $^g \log(x) = a$ moet gelden:

$g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De oplossing vind je door aan beide zijden de inverse bewerking van de logaritme toe te passen:

$^g \log(x) = a$ geeft $g^{^g \log(x)} = g^a$ en hieruit volgt $x = g^a$

Een **logaritmische ongelijkheid** van de vorm $^g \log(x) < a$ kun je zo oplossen:

- Los de bijbehorende vergelijking $^g \log(x) = a$ op.
- Maak de grafieken van $y_1 = ^g \log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot ^3 \log(x+1) \leq 45$.

Antwoord

Los bijbehorende vergelijking op:

$$10 + 7 \cdot ^3 \log(x+1) = 45$$

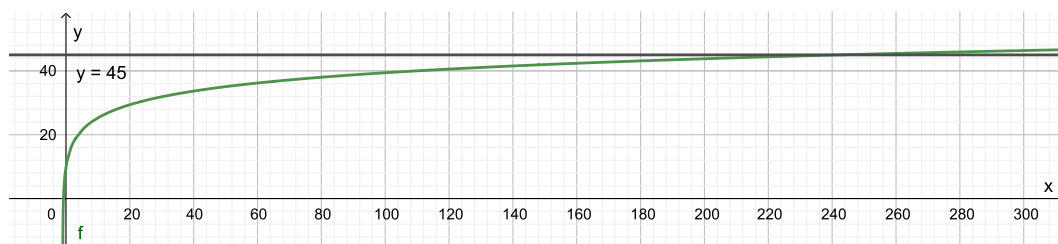
$$^3 \log(x+1) = 5$$

$$x+1 = 3^5$$

$$x = 242$$

Maak de grafieken van: $y_1 = 10 + 7 \cdot ^3 \log(x+1)$ en $y_2 = 45$.

Gebruik het domein $\langle -1, \rightarrow \rangle$, de uitkomst $x = 242$ en $y_2 = 45$ om de vensterinstellingen te bepalen.



Figuur 6.2

Lees af: $-1 < x \leq 242$.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot ^{0,5} \log(x+5)$

- Los algebraïsch op: $f(x) = -3$
- Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en bepaal het domein en bereik van f .
- Los op: $f(x) \geq -3$

Opgave 4

Maak de grafieken van de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(2-x)$.

- Bepaal van beide functies de vergelijking van de asymptoot.
- Bepaal van beide functies het domein.
- Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$
- Los op: $f(x) > g(x)$

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: ${}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned}
 {}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) &= 3 \\
 {}^2\log(x(x+2)) &= 3 \\
 {}^2\log(x^2 + 2x) &= 3 \\
 x^2 + 2x &= 2^3 \\
 x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
 x &= -4 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

Vanwege het domein van de eerste logaritme geldt $x > 0$. Alleen de oplossing $x = 2$ voldoet hieraan en dit is de enige oplossing.

Opgave 5

Los algebraïsch op: ${}^6\log(x) + {}^6\log(x-1) = 1$

Opgave 6

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- $\log(2x) - \log(x-1) = 2$
- ${}^3\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^3\log(2)$

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrukkniveau L (in dB) en de effectieve geluidsdruk p (in Pa) is

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

met $p_0 = 0,00002$ Pa, de gehoorgrens.

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0,00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = \dots$

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$$

$$\frac{L}{20} = \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$$

$$10^{\frac{1}{20}L} = \frac{p}{0,00002}$$

$$p = 0,00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1,12^L$ kun je dit schrijven als: $p \approx 0,00002 \cdot 1,12^L$.
 p is een exponentiële functie van L .

Opgave 7

In **Voorbeeld 3 op pagina 223** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

- a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.
- b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?
- c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 8

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$$h = -19 \log(p) + 57$$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau is

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

- a Laat zien, hoe dat gaat.
- b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

- a Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f .
- b Geef het domein en bereik van f .
- c Los algebraïsch op: $f(x) > 0$.
Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Los algebraïsch op $^5 \log(x) = 3 + 4 \cdot ^5 \log(x)$.

Opgave 11

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$$m = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

- a** Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.
- b** Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter.
Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4 - x)$.

- a** Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.
- b** Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$
- c** Los op: $f(x) \leq g(x)$
- d** Los op: $f(x) > g(x)$

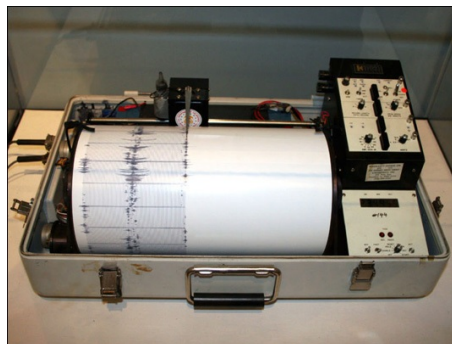
Opgave 13

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herleiden dat D een exponentiële functie is van k .

Toon dat aan.

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 6.3

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter.

- a** Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.

De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.

- b** Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 15

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm ($1 \mu\text{m} = 0,001 \text{ mm}$)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW , waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

- a** Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van $1500 \mu\text{m}$; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8,8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

- b** Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

- c** Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A , T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los algebraïsch op en geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig:

- a** $4 + {}^2\log(x - 5) = 0$
- b** $5 - \log(x) = 3 \log(x)$
- c** $\frac{1}{2} \log(x) + \frac{1}{2} \log(2x) = 0$

**Opgave 17**

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^3\log(2x)$ en $g(x) = {}^3\log(6 - x)$.

- a** Bepaal het domein, bereik en de asymptoot van beide functies.
- b** Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.
- c** Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.
- d** Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.
- e** Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.
- f** Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 18

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2,4$ (in één decimaal nauwkeurig).

- a** Herleid de gegeven formule naar de vorm $G = a \cdot 10^{k \cdot L}$.
- b** Hoe lang is een gemiddelde westerse twaalfjarige als ze 1,30 m lang is?

6.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen — eigenschappen van logaritmen gebruiken
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen — vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten — logaritmen herleiden naar standaard grondtal 10
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen — logaritmische functies omschrijven naar exponentiële functies

Testen

Opgave 1

Een bedrijf verwacht dat de komende jaren zijn aandelen 11% per jaar in waarde gaan stijgen.

- Hoelang duurt het totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.
- Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Ga uit van een jaarlijkse stijging van 11%. Bereken na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe je hiermee de eigenschap ${}^s \log(a) + {}^s \log(b) = {}^s \log(ab)$ kunt toelichten.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per centimeter 27% van het licht dat erdoorheen valt.

Bereken in millimeter nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

- $\frac{1}{3} \log(x + 2) = -2$
- ${}^2 \log(x) = 5 - {}^2 \log(10)$
- ${}^5 \log(4x^2) = 2 + {}^5 \log(x)$
- $10 + 5 \cdot {}^2 \log(x - 5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x + 10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

- a Bepaal van beide functies het domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.
- b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.
- c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

- d Toon aan dat $h(x) = \log(-100000x - 10000x^2)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt: $h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

- a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Plot de grafiek van h als functie van p .

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar.

- b Hoe hoog vliegt het vliegtuig?
- c Laat zien dat p een exponentiële functie is van h .
- d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat het toestel op 3 km hoogte vliegt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar.

- e Hoe hoog vliegt het toestel in werkelijkheid? Rond af op meter.

Opgave 6

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelpenlengte L (mm) en het gewicht van het vlees W (gram) van mosselen. Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees gemeten.

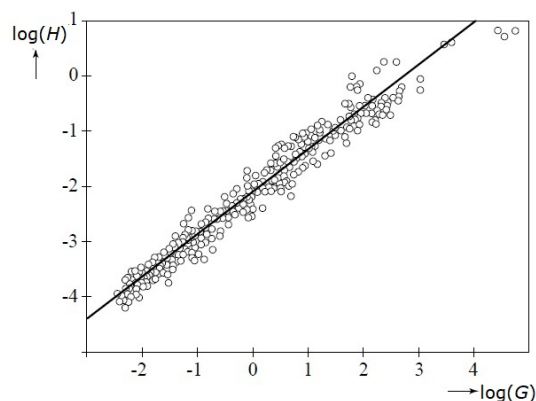
In één van de jaren leiden de resultaten tot de volgende formule: $\log(W) = -5,5 + 3,1 \cdot \log(L)$

Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

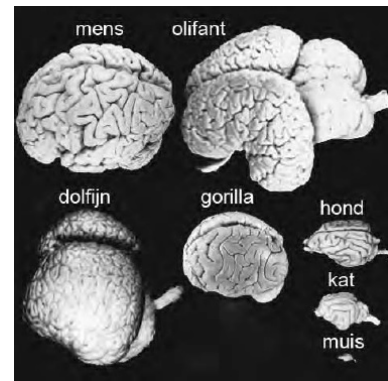
Opgave 7

Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen.

Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, is G . Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, is H . De grafiek hieronder geeft het verband weer tussen de logaritme van G en de logaritme van H . In deze grafiek zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in de grafiek getekend.



Figuur 6.2



Figuur 6.1 Bron: havo B examen 2010

Het gemiddeld lichaamsgewicht van katten is 5 kg.

- a Bepaal met behulp van de rechte lijn in de figuur het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(H) = 0,767 \cdot \log(G) - 2,097$. Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

- b Bereken met behulp van de gegeven formule algebraïsch dit gemiddelde lichaamsgewicht.
- c De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$. Bereken de waarden van a en b . Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 8: Windsnelheid

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 6.1

- a Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5,76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid in m/s
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.

In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

- b** Boven open bouwland met $r = 0,12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0,45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

- c** Bereken de waarde van r van dit terrein.

Opgave 9: Tornado's

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt intensiteit genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal. Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6,3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.

In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/h bereikt.

- a** Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.
- b** Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T . Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2,39(T + 4)^{\frac{3}{2}}$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.

Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F - en T -waarden.

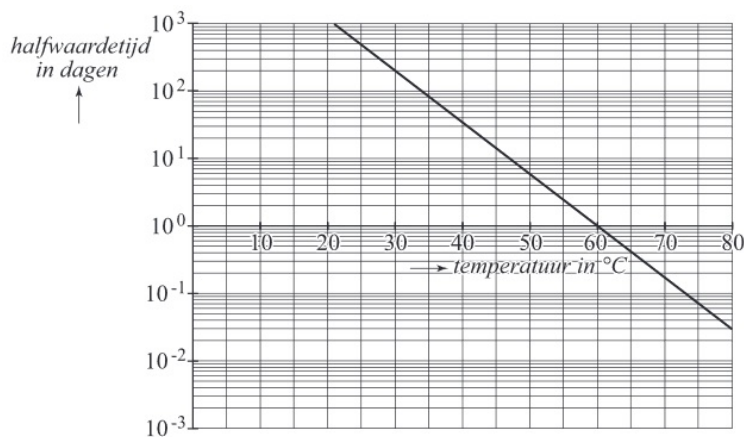
Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = at + b$.

- c** Bereken de waarden van a en b . Rond af op twee decimalen.

Opgave 10: Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 6.3

- a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht. Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28. Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

- b Laat met behulp van de grafiek in zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten. Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden. Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

- c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.



Modelleren

- 7.1 Een model opstellen 234
- 7.2 Optimaliseren 242
- 7.3 Onderzoeksopdrachten 249

7.1 Een model opstellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Voorkennis

- werken met allerlei functies;
- meetkundige technieken zoals de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, met sinus, cosinus, tangens.

Verkennen

Opgave V1

Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Je wilt berekenen hoe ver deze persoon theoretisch over het aardoppervlak kan kijken. Welke eigenschappen (van de situatie) komen hierbij kijken?

Uitleg

Probleem:

“Iemand staat op een toren en heeft een vrij uitzicht. Hoe ver kan hij (theoretisch) over het aardoppervlak kijken?”

Om zo'n probleem op te kunnen lossen, maak je een bijbehorend model.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid. Hierin zijn nog alle eigenschappen terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van een bepaald verschijnsel dat je wilt verklaren, of het probleem dat je wilt oplossen. Het bewust opstellen van zo'n model noem je modelleren. Bij het modelleren volg je een aantal vaste stappen. Probeer eerst zelf een oplossing voor het probleem te vinden.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de [Uitleg op pagina 234](#). De volgende vragen kunnen je helpen om de oplossing van dit probleem te vinden. Dergelijke vragen moet je jezelf ook altijd stellen als je de oplossing van een probleem niet meteen ziet. Als eerste ontwerp je een rekenmodel.

- Waarom kan hij niet oneindig ver kijken, ook als er geen obstakels in de weg staan? Maak een schets om je antwoord toe te lichten.
- Hoe heb je in je figuur de afstand die hij kan kijken aangegeven? Welke vereenvoudigingen heb je nu al toegepast?

Waarschijnlijk bestaat je figuur uit een (deel van een) cirkel die een doorsnede van het aardoppervlak voorstelt. En daarop een lijnstukje dat de hoogte van de ogen van de persoon voorstelt die vanaf de toren boven het aardoppervlak kijkt. Als dat niet zo is, maak dan alsnog een dergelijke figuur. Noem het middelpunt van de cirkel M en het lijnstuk (dat degene die kijkt voorstelt) PQ , met Q op het aardoppervlak. Punt R is een punt op het aardoppervlak dat de persoon die kijkt nog net kan zien. Geef zo'n punt in je figuur aan.



- c Waarom moet PQ op het verlengde van MQ liggen?
- d Welke eigenschap heeft driehoek MPR ? Probeer daar een verklaring voor te vinden.
- e De omtrek van de aarde is 40000 km. Van welke lijnstukken kun je nu de lengte berekenen? Bereken deze lengtes.
- f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 2

Iemand doet het volgende voorstel om het probleem in de [Uitleg op pagina 234](#) op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) een bepaalde waarde, bijvoorbeeld 50 m. Verder is de kijkafstand PR en die afstand geef je de letter a . Vervolgens pas je de stelling van Pythagoras toe in $\triangle MPR$.

- a Je kunt daarmee a uitrekenen. Doe dat.
De ooghoogte van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak hoeft niet 50 m te zijn.
- b Hoe kun je daarmee rekening houden?
- c Probeer nu een volledige oplossing van het probleem te beschrijven. Je kunt daarbij werken met variabelen en een formule. Maar je kunt ook werken op de computer met bijvoorbeeld Excel.

Vaak wordt de formule $a = 3568 \cdot \sqrt{h}$ gebruikt voor de kijkafstand, met a en h in m.

- d Probeer die formule af te leiden uit jouw eigen formule.

Opgave 3

Iemand anders vindt dat de kijkafstand de afstand over het aardoppervlak is. Hij doet het volgende voorstel om het probleem in de [Uitleg op pagina 234](#) op te lossen:

Kies voor de lengte van PQ (de hoogte van de ogen van de persoon die kijkt boven het aardoppervlak) de letter h (m). Verder is de kijkafstand de lengte van de boog QR en die geef je de letter a . De lengte van die boog wordt bepaald door de grootte van hoek QMR . En die kun je uitrekenen in driehoek MPR .

- a Beschrijf nu hoe je a kunt berekenen.
- b Waarom is nu het probleem opgelost?
- c Welke methode vind je het beste om het vraagstuk op te lossen?

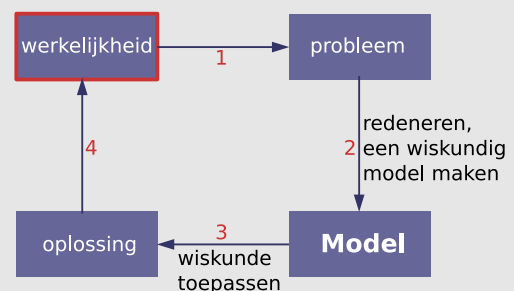
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model noem je **modelleren**.

Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.



Figuur 7.1

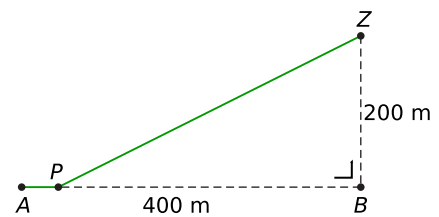
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.

Je doorloopt deze stappen aan de hand van vragen die je jezelf stelt. Bijvoorbeeld of je een schema of tekening kunt maken, of je de verbanden kunt uitdrukken in wiskundige formules, of dat je de uitkomst misschien van tevoren kunt schatten. De [lijst met mogelijke vragen](#) kan je daarbij helpen. Deze vragenlijst is niet uitputtend, er zijn meer vragen die je jezelf kunt stellen. Het is slechts een eerste aanzet.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Zwemmer in nood

Iemand staat aan de (vrijwel rechte) waterlijn van een heel grote waterpartij (punt A). Schuin voor zich ziet hij in het water een zwemmer (bij Z) die in nood is. Hoe kan hij zo snel mogelijk bij de zwemmer komen om hulp te bieden? Springt hij meteen in het water of loopt hij eerst een stuk langs het strand?



Figuur 7.2

Antwoord

Je ziet een figuur waarbij punt A de persoon aan de waterlijn voorstelt, punt Z de zwemmer in nood is en ABZ een rechthoekige driehoek is waarvan AB de waterlijn voorstelt. Aangenomen is dat $AB = 400$ m en dat $BZ = 200$ m. Bij punt P gaat de redder het water in. De loopsnelheid is (bij hard lopen) 18 km/h en de zwemsnelheid 5,4 km/h.

Dit is het begin van een rekenmodel. Probeer dit eerst zelf te ontwerpen. Bekijk daarna de opgaven.

Opgave 4

In [Voorbeeld 1 op pagina 236](#) zie je het probleem van het bepalen van de kortste weg naar een zwemmer. Probeer eerst zelf een oplossing te verzinnen. De volgende vragen leiden je naar een oplossing. Gebruik de aannames in het voorbeeld.

- a Hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als er alleen wordt gezwommen?
- b Waarom is het waarschijnlijk verstandig om eerst een stuk langs de waterlijn te lopen?
- c En hoeveel tijd kost het om de zwemmer te bereiken als het hele stuk AB eerst wordt gelopen en dan BZ wordt gezwommen?

Er wordt een nog kortere tijd bereikt als de persoon bij A niet helemaal van A naar B loopt, maar slechts een deel AP van die afstand.

- d Kies $AP = 300$ en bereken dan de tijd die nodig is om de zwemmer te bereiken.

Je kunt ook werken met een variabele voor de lengte van AP . Noem die lengte bijvoorbeeld x .

- e Stel een formule op voor de totale tijd T die nodig is om Z te bereiken vanuit A .
- f Hoe kun je het probleem verder oplossen?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 236** en de opgave over het ‘zwemmer in nood’ probleem nog eens. Bekijk ook de modelleercyclus in de theorie.

- a Welke aannames heb je gedaan? Hoe heb je die in de schets van de situatie verwerkt?
- b Welke extreme gevallen heb je eerst doorgerekend?
- c Welke variabelen heb je ingevoerd? Kon je ook andere variabelen kiezen?
- d Welke verbanden tussen de variabelen heb je gevonden?
- e Kun je het antwoord controleren? Beschrijf een mogelijke test (zonder dat je een zwemmer in nood moet inschakelen).

Voorbeeld 2

Op diverse plaatsen in Nederland zijn windmolens geplaatst om energie op te wekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van de wieken en de windsnelheid. Je kunt er een wiskundig model voor opstellen. Het opgewekte vermogen (kWh) is recht evenredig met de massa van de hoeveelheid lucht per seconde maal de windsnelheid (m/s) in het kwadraat:

$$P = c \cdot m \cdot v^2$$

Hierin is P het vermogen in kilowattuur (kWh), m de massa van de hoeveelheid lucht per seconde en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

De hoeveelheid lucht die per seconde voorbijkomt, is een cilinder met een grondvlak van $\frac{1}{4}\pi D^2$ en een lengte van v .

De massa daarvan is $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot v \cdot \rho$ waarin ρ de dichtheid van de lucht is, het aantal kg per m³.

$$\text{Zo vind je: } P = C \cdot v^3 \cdot D^2$$

De constante C hangt af van de dichtheid van de lucht en onder andere van de eigenschappen van de windmolen. De constante is alleen experimenteel te bepalen, dus door metingen te verrichten.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 237**. Hierin gaat het om een formule voor het vermogen van een windmolen.

- a Welke aannames zijn er gedaan?
- b Laat zien hoe je aan de formules $\frac{1}{4}\pi D^2$ en $P = C \cdot v^3 \cdot D^2$ komt.
- c Hoe wordt de modelcyclus doorlopen? Beschrijf bij elke stap wat er gebeurt.
- d Kun je een manier bedenken om het model te testen?

Oefenen

Opgave 7

De beheerder van een groot communicatienetwerk wil een kabel leggen tussen twee eilanden in de Stille Oceaan die 300 km van elkaar verwijderd liggen (hemelsbreed gerekend over zee). Hoeveel kabel moet er minder worden getrokken als daarvoor een rechte tunnel tussen beide eilanden wordt geboord? Dit in vergelijking met het leggen van de kabel op de nagenoeg vlakke zeebodem tussen beide eilanden.

- a Maak een schets van de situatie en schrijf de aannames op die je moet doen om hier iets zinnigs over te kunnen zeggen.
- b Ontwerp een geschikt rekenmodel. Neem hierbij mee dat de aarde een omtrek van 40000 km heeft.
- c Probeer de gestelde vraag zo goed mogelijk te beantwoorden. Schrijf ook enkele beperkingen van de kwaliteit van je antwoord op.

Opgave 8

Bij de aanschaf van een nieuwe auto heeft iemand de keuze uit twee uitvoeringen: een dieserversie en een benzineversie. Tussen deze versies bestaat een groot prijsverschil. Bovendien is de wegenbelasting verschillend en verschillen de brandstofprijzen.

Ga ervan uit dat de benzineversie een verbruik heeft van 8 L per 100 km en dat de dieserversie een verbruik heeft van 6 L per 100 km.

De dieserversie is jaarlijks € 1200,00 duurder dan de benzineversie.

Neem verder aan dat één liter benzine € 1,60 kost en dat de dieselprijs € 1,24 per liter is.

Welke auto moet hij kiezen? Los dit probleem op volgens de modelcyclus en waar nodig met behulp van de lijst met hulpvragen.

- a Beschrijf eerst je rekenmodel met de bijbehorende aannames.
- b Welke oplossing vind je?
- c Hoe zou je kunnen controleren of dit enigszins realistisch is?

Opgave 9

Je staat stil in het centrum van Amsterdam. Hoe snel beweeg je als gevolg van het draaien van de aarde?

Stel hiervoor zelf een model op. Maak daarbij gebruik van de modelcyclus. Probeer een manier te verzinnen om het model te testen.

Voor dit model heb je de breedtegraad van het centrum van Amsterdam nodig, en de omtrek van de aarde. Deze zijn respectievelijk (ongeveer) $52,37^\circ$ en 40000 km.

Opgave 10

Je ziet hier een locomotief van Märklin of Fleischmann, die staat op de drijfstang van hetzelfde origineel. Neem aan dat een echte loc met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.



Figuur 7.3

Opgave 11

Om te bepalen welk gewicht een vliegtuig kan dragen geldt bij benadering de formule $W = 0,03 \cdot d \cdot V^2 \cdot S$. Hierin is W het gewicht in kg, S het vleugeloppervlak in m^2 , V de kruissnelheid in m/s en d de luchtdichtheid in kg/m^3 .

- a Ga uit van een luchtdichtheid van $0,421 \text{ kg/m}^3$. Welk gewicht kan een vliegtuig dragen waarvan het vleugeloppervlak 350 m^2 en de kruissnelheid 700 km/h is? Geef je antwoord in kg nauwkeurig.
- b Een vliegtuig met een kruissnelheid van 250 m/s en een vleugeloppervlak van 100 m^2 moet 12000 kg kunnen dragen. Wat is de minimale luchtdichtheid waarbij het vliegtuig kan vliegen?
- c In de luchtvaart wordt vaak gewerkt met de vleugelbelasting, dat is het gewicht in kg per m^2 vleugeloppervlak.

Ga uit van een luchtdichtheid van $0,369 \text{ kg/m}^3$. De vleugelbelasting is recht evenredig met een macht van V . Wat is de evenredigheidsconstante?

- d Wat gebeurt er met de vleugelbelasting als de kruissnelheid van een vliegtuig 1,4 keer zo groot wordt?

Toepassen

In een straat komen lantaarnpalen, waarbij de kosten zo laag mogelijk moeten zijn. Ontwerp een model voor de straatverlichting. Ga daarbij van de volgende gegevens uit:

- De lichtsterkte S (watt per m^2) is recht evenredig met het vermogen P (watt) van de lichtbron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (m) tot de lichtbron. Kun je verklaren waarom dit zo is?
- Je verlicht de weg met straatlantaarns met een bepaald vermogen, een bepaalde hoogte en een bepaalde onderlinge afstand. Neem aan dat die niet variëren.
- Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 watt/m^2 .

Daarnaast moet je rekening houden met afschrijving en onderhoud van de palen. Die kosten hangen onder andere af van de hoogte h en de onderlinge afstand a . Hogere palen zijn namelijk duurder en een kleinere onderlinge afstand betekent meer palen. Verder zijn er kosten voor de elektriciteit: bijvoorbeeld € 0,15 per kWh. Dit betekent dat een lamp van 1 kW die een uur brandt € 0,15 kost. Neem nu per jaar:

- € 200,00 per lantaarnpaal voor schoonhouden, reparaties, schilderwerk en dergelijke;
- € 50,00 per meter lantaarnpaal voor vervanging, afschrijving, onderhoud;
- elektriciteit kost € 0,15 per kWh.

Opgave 12

Om je op weg te helpen even een paar ideeën. De volgende variabelen kunnen een rol spelen:

- P is de lichtsterkte in watt van de lamp in elke straatlantaarn.
- h is de hoogte in meter van de straatlantaarn (en dus van de lamp, neem je aan).
- a is de (vaste) onderlinge afstand in meter van een rij straatlantaarns aan één kant van de weg.
- Aan beide zijden van de weg staan straatlantaarns en wel recht tegenover elkaar.
- b is de breedte in meter van de weg (en dus van de twee rijen straatlantaarns, neem je aan).
- B is de brandtijd (uur per jaar) dat de lampen branden.

De lichtsterkte L (watt per m^2) van elke afzonderlijke lamp is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lamp. Dit kun je nagaan door te bedenken dat een oppervlak dat twee keer zo ver van de lamp is verwijderd de lichtsterkte moet verdelen over een vier keer zo groot geworden oppervlakte. Het punt met de grootste lichtsterkte zit steeds recht onder de lamp en is:

$$L = \frac{P}{h^2}$$

Het punt met de kleinste lichtsterkte zit op het midden van de weg, midden tussen vier lantaarns in.

- a Welke formule geldt voor de lichtsterkte in dit punt?
Neem aan dat andere lantaarns dan de omliggende geen bijdrage leveren aan de lichtsterkte in dit punt.
- b Welke twee voorwaarden leveren de formules bij a op?

Opgave 13

Bekijk de vorige opgave. Bijvoorbeeld $P = 1000$, $h = 5$, $b = 8$ en $a = 30$ voldoet aan de twee voorwaarden. De jaarlijkse kosten per meter weg kun je berekenen met de formule:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(200 + 50h + B \cdot \frac{P}{1000} \cdot 0,15 \right)$$

- a Laat zien hoe je aan deze formule komt.
- b Probeer nu een oplossing voor het probleem te vinden. Pas eerst de aannames aan op grond van gegevens die je zelf hebt gevonden, bijvoorbeeld via internet.

Testen

Opgave 14

De Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields heeft in 1935 een rekenmodel ontwikkeld voor de verkeersdichtheid op auto(snel)wegen. Het probleem was het berekenen van de snelheid die alle automobilisten zouden moeten aanhouden om met een veilige onderlinge tussenruimte een zo goed mogelijke doorstroming te bewerkstelligen.

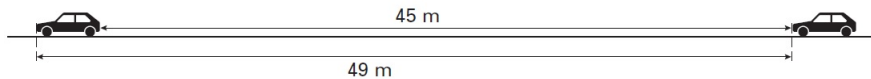
Hij bedacht voor de verkeersdichtheid k de formule

$$k = k_{\max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{\max}} \right)$$

Hierbij is v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur, $v_{\max}$ de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt, k de verkeersdichtheid en $k_{\max}$ het maximale aantal auto's per kilometer weg. Hieruit blijkt dat als het drukker wordt op de weg, de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar. De verkeersdichtheid, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.

Eerst maar even wat rekenen. Ga uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur).

Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig. Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: 'Houd 2 seconden afstand'.



Figuur 7.4

- a** Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert. Voor q geldt: $q = v \cdot k$.

Ga uit van de volgende situatie.

Op een weg is $v_{\max} = 88$. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is $k_{\max}$ gelijk aan 250.

- b** Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is $k_{\max} = 250$ en $v_{\max} = 160$.

- c** Leid hieruit een formule af voor de doorstroming q afhankelijk van de rijsnelheid v . Bereken daarmee de rijsnelheid waarbij de doorstroming maximaal is

7.2 Optimaliseren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Verkennen

Opgave V1

Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van wel 2400 m^2 . Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en parkeerruimte, aan beide zijden en aan de achterkant stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?

Probeer zelf een oplossing te verzinnen.

Uitleg

Probleem:

“Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2 . Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?”

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.

Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2 . Met deze gegevens maak je een figuur.

Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000 \text{ m}^2$. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de [Uitleg op pagina 242](#).

- Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000 \text{ m}^2$ is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.
- Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

- c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?
- d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de [Uitleg op pagina 242](#).

Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

- a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?
- b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootte in een welomschreven situatie.

Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.

Meestal schakel je daarna GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine in om de optimale oplossing te vinden.

Maar dat kan eigenlijk alleen als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft.

In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Eerst een rekenmodel opstellen:

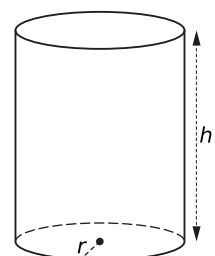
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h , neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik ($1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.

Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$

Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Omdat gegeven is dat $I = 1000 \text{ cm}^3$ kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r .

De formule die je krijgt, kun je op de grafische rekenmachine invoeren. Je vindt dat voor $r \approx 5,4 \text{ cm}$ en $h \approx 10,8 \text{ cm}$ de totale oppervlakte minimaal is.



Figuur 7.1

Opgave 3

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 1 op pagina 243](#).

- a Welke aannames worden er gedaan?
- b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?
- c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.
- d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3 .

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x .

Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$. Deze variabelen hangen allemaal af van x .

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in [Voorbeeld 2 op pagina 244](#). Kies voor x het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

- a Leid een formule af voor W afhankelijk van x .
- b Is het verstandig om de prijs te verlagen?
Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.
- c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

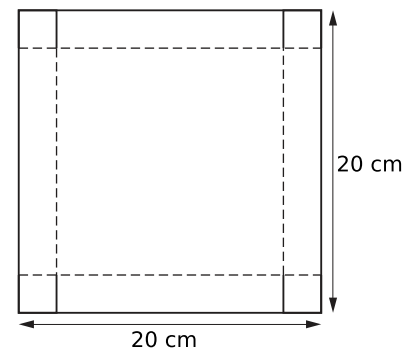
- Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.
- Noem het indrogingspercentage p . Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p .
- Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

Oefenen

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

- Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm³) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?
- Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm³ nauwkeurig.



Figuur 7.2

Opgave 8

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.



Figuur 7.3

Opgave 9

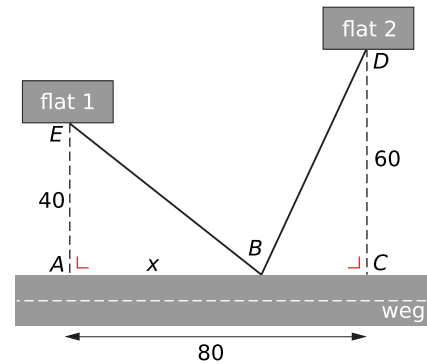
Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfs-hallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q ($\times 1000$) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0,1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1,5q^3 - 22,5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

- Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?
- Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q .
- Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q .
- Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.
- Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q . Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.



Figuur 7.4

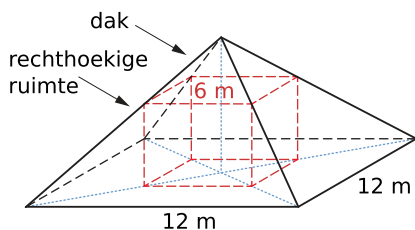
- a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

- b Bereken de totale lengte L in meter.

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 7.5

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Opgave 12

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.

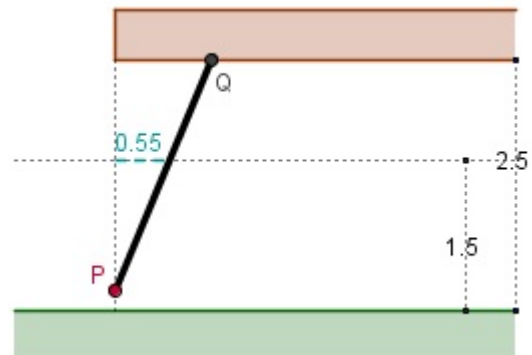
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Toepassen

Bekijk de applet: Garagedeur

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur PQ). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 7.6

Opgave 13

Bekijk het probleem in [Toepassen op pagina 247](#).

- a Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

Noem de afstand van P tot het plafond x en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt A , beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

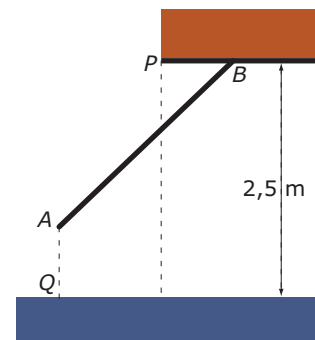
$$A = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2,5^2 - x^2}$$

- b Probeer zelf de formule voor A als functie van x af te leiden.
c Bereken voor welke x de waarde van A maximaal is.

Opgave 14

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt A (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van PB .

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.



Figuur 7.7

Testen

Opgave 15

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.

Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

- a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.
b Los het geschetste probleem op.

**Opgave 16**

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

7.3 Onderzoeksopdrachten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- modelleren toepassen bij onderzoeksopdrachten.

Voorkennis

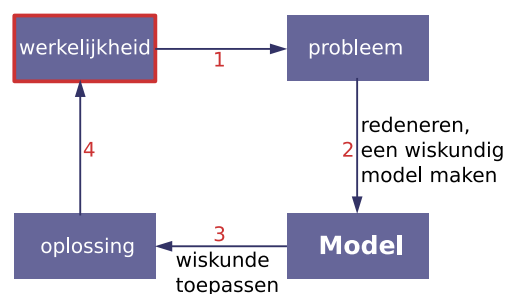
- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties;
- de stappen herkennen die bij het construeren van een wiskundig model horen;
- het stellen van goede vragen gebruiken om een model te construeren.

Uitleg

Het is nu de bedoeling dat je zelf wat complexere opdrachten aanpakt.

Dit worden **onderzoeksopdrachten** genoemd.

In dergelijke opdrachten wordt een situatie beschreven waarin de wiskunde je kan helpen bij het vinden van een geschikte oplossing. Welke wiskunde dat is en hoe die oplossing tot stand kan komen, moet je zelf onderzoeken. Denk daarbij aan de modelleercyclus en de [lijst met mogelijke vragen](#) om je te helpen.



Figuur 7.1

Omdat het de bedoeling is dat je hier zelf onderzoek doet, vind je geen uitgebreide antwoorden bij deze opgaven!

Toepassen

De volgende opdrachten zijn bedoeld als **onderzoeksopdrachten**. De bedoeling is dat je zelf een onderzoekje doet, mogelijk zelfs met een eigen experiment. Daarvan maak je een uitgebreid onderzoeksverslag. Je vindt dan ook geen uitgebreide uitwerkingen bij deze opgaven.

Opgave 1: Elektrisch rijden?

Het rijden in een auto kost geld. Je maakt kosten vanwege de brandstof of de elektriciteit, maar ook betaal je wegenbelasting, verzekering, en dergelijke. En tenslotte moet je de auto kopen en ook dat kost geld. Ga na wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Hier heb je enkele gegevens om mee te werken:

- Smart fortwo op benzine:
 - benzine kost € 1,60 per liter;
 - je rijdt gemiddeld 20 km per liter benzine;
 - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 2000,=;
 - de aanschafprijs is € 15000,=.
- Smart fortwo op elektriciteit:
 - elektriciteit kost € 0,20 per kWh;
 - de maximale accucapaciteit is 17,6 kWh;
 - met de maximale accucapaciteit rijd je gemiddeld 140 km;
 - de jaarlijkse kosten (wegenbelasting, garage, verzekering, etc.) zijn ongeveer € 1200,=;
 - de aanschafprijs is € 22000,=.



Figuur 7.2

Maar het is natuurlijk leuker om met actuele gegevens te werken en je ‘eigen’ type auto te kiezen!

Bereken van een bepaald merk auto wat voordeliger is: rijden op fossiele brandstoffen of rijden op elektriciteit.

Opgave 2: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.

Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α .

De snelheid in de x -richting is $v_0 \cos(\alpha)$.

De snelheid in de y -richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.

Dus is:

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \text{ en } y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

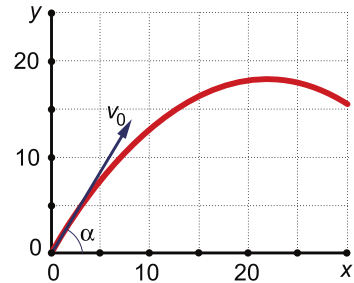
Hiermee maak je een model in Excel: [Model kogelbaan](#).

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0(\cos(\alpha))^2} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze [simulatie van de kogelbaan](#).

- Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.
- Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0 , α en g .
- Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g .



Figuur 7.3

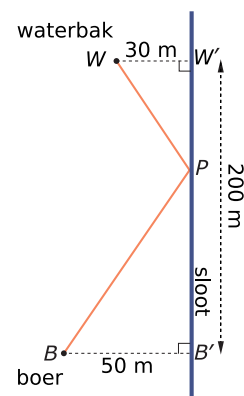
Opgave 3: Kortste weg of snelste weg?

Een boer wil water naar de waterbak brengen die voor zijn paarden is bestemd. Hij haalt dat uit de sloot met behulp van een emmer. Daarbij neemt hij ofwel de kortste weg, ofwel de snelste weg. In de figuur hiernaast is een bovenaanzicht van de situatie getekend met de afstanden erin aangegeven.

- Bepaal de kortste weg van B naar W via de sloot.

Met een lege emmer loopt de boer met een snelheid van 3 m/s, met een volle emmer met een snelheid van 1 m/s.

- Bepaal de snelste weg van B naar W via de sloot.



Figuur 7.4

Opgave 4: Geremde exponentiële groei

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
N	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 7.1



Figuur 7.5

- a Ga na dat deze groep fruitvliegjes in het begin exponentieel groeit. Met welk percentage par dag?

Er blijkt uiteindelijk toch geen sprake te zijn van exponentiële groei. N nadert de 350 fruitvliegjes.

De bijpassende formule heeft daardoor de vorm: $N = \frac{350}{1+b \cdot g^t}$.

- b Stel de formule op die bij deze tabel past. Bereken bij welke waarde van t de groeisnelheid maximaal is.
- c Probeer bij de groei van de mensheid zo'n geremd exponentieel groeimodel op te stellen.

Opgave 5: Filevorming

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan. Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemaneuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren.



Figuur 7.6

Onder bepaalde aannames kun je een formule afleiden voor het aantal auto's dat op een bepaald punt kan passeren afhankelijk van de snelheid. Bijvoorbeeld:

- Alle auto's passeren het punt met dezelfde constante snelheid van v km/uur.
- Alle auto's hebben dezelfde lengte van ongeveer 4 m.
- Alle auto's houden een onderlinge afstand die gelijk is aan hun remweg.
- Alle auto's hebben dezelfde remweg die is te berekenen door de snelheid v in km/uur te delen door 10, daarvan het kwadraat te nemen en dat getal met 0,75 te vermenigvuldigen.

Stel op grond van deze aannames een formule op voor het aantal auto's f dat per minuut het punt passeert waar de file ontstaat als functie van v . Bepaal van de gevonden functie $f(v)$ een maximum en vooral de waarde van v waarvoor dat maximum optreedt. Dat is dan de optimale doorstroomsnelheid.

a

algebra 8
abc-formule 139
analogierekenen 57, 77

b

balansmethode 62, 77, 108
begingetal 94
bereik 147
bergparabool 130
buiten haakjes 70
buiten haakjes halen 21

c

combineren 108

d

dalparabool 130
discriminant 139
distributieve eigenschap 21
domein 147
nde machts worteltrekken 37

e

eigenschappen van machten 176
exact 63
exponent 28, 29, 167
exponentiële functie 186
exponentiële groei 166
exponentiële vergelijking 186

f

factoren 21
formule 43
functie 43
functievoorschrift 44
functiewaarden 139

g

gebroken vergelijking 77
gelijknamig 15
gelijksoortige termen 8
groefactor 166
grondtal 28, 29, 167
grootste gemeenschappelijke deler 21

h

haakjes uitwerken 21
hellingsgetal 94
herleiden 8
horizontale asymptoot 186

i

inklemmethode 55
intervalnotatie 147
inverse functie 216

k

kleinste gemeenschappelijke veelvoud 15
kwadraat afsplitsen 139
kwadratische functie 130, 139
kwadratische vergelijking 130

l

lineair model 115
lineair verband 100
lineaire functie 94, 115
logaritme 209
logaritmen, eigenschappen 209
logaritmen, rekenregels 209
logaritmische functie 216
logaritmische ongelijkheid 222
logaritmische vergelijking 222

m

macht 28, 29, 167
machtsfunctie 194
maximum 147
minimum 147
modelleren 235

n

nulpunt 54, 55

o

onderzoeksopdrachten 249
ongelijkheid 152, 153
ongelijksoortige termen 8
ontbinden in factoren 21, 70
op 0 herleiden 70
oplossing 54
oplossing van een vergelijking 55
optimaliseren 243

p

parabool 130

r

rekenen 8
recht evenredig 94
rekenen met breuken 15
rekenregels voor machten 167
richtingscoëfficiënt 94

s

snijpunt [55](#)
som product methode [70](#)
splitsen [70](#)
standaard exponentiële functie [185](#)
stelsel van twee vergelijkingen [108](#)
strijdig stelsel [108](#)
substitutie [108](#)
symmetrieas [130](#)

t

technische notatie [29](#)
termen [21](#)
terugrekenmethode [55](#)
top [130](#)

transformatie [186](#)

tweeterm [21](#)

v

variabelen [8](#)
veelterm [147](#)
verdeeleigenschap [21](#)
vergelijking [54, 55](#)
vierterm [21](#)
voorschrift [130](#)

w

worteltrekken [36, 37](#)
wetenschappelijke notatie [29](#)
wisseleigenschap [8](#)

Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website www.math4all.nl.

De volgorde van de onderwerpen in dit boek is gekozen door de auteurs van Math4All. Indien u in uw klas een andere volgorde wilt hanteren, maar een boek nog steeds op prijsstelt nodigen we u uit om gebruik te maken van de Math4All maatwerkdienst waarmee u zelf boeken kunt genereren.

Stichting Math4All

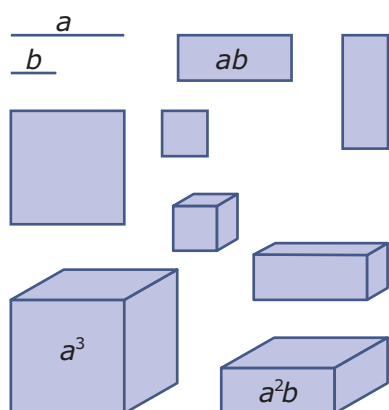


www.math4all.nl



www.math4mbo.nl

Werkblad bij opgave 4 op pagina 9.



- a** Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- b** Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- c** Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?

Spiekbriefjes bij Algebra

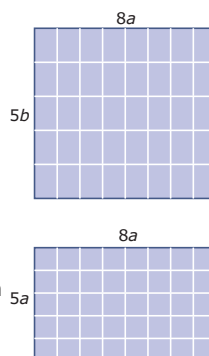
Rekenen met variabelen

Rekenen is het werken met getallen en **algebra** is het rekenen met **variabelen** met dezelfde rekenregels:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken:
 $8a + 5a = 13a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Ook gebruik je de **wisseleigenschap**: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

Schrijf uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk door **herleiden**. De variabelen zet je in alfabetische volgorde. En $1x$ wordt x en $0x = 0$ en een losse nul laat je weg.



meer info

Breuken

Het **rekenen met breuken** met variabelen gaat zo:

- Bij optellen en aftrekken maak je breuken eerst **gelijknamig**:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

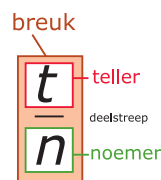
- Bij vermenigvuldigen vermenigvuldig je tellers en noemers afzonderlijk: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$

- Bij delen maak je breuken eerst gelijknamig:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{beide breuken met } b \cdot d \text{ vermenigvuldigen})$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.}$$

Delen door 0 heeft geen betekenis. Hierboven moet steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling ook $c \neq 0$. Kijk of je breuken kunt **vereenvoudigen** door teller en noemer door hetzelfde te delen.



meer info

Haakjes

De figuren laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

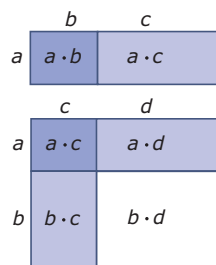
Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. In de bovenste figuur wordt de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Je gebruikt deze **verdeelteigenschap (distributieve eigenschap)** voor **haakjes wegwerken**.

Omgekeerd:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren**.



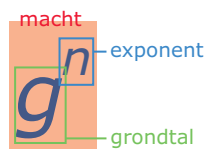
meer info

Machten

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n . g heet het **grondtal** en n de **exponent**.

Het werken met machten ken je al:

- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- $g^a / g^b = g^{a-b}$.
- $g^0 = 1$.
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.



Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

In de **wetenschappelijke notatie** krijgt een getal de vorm $a \cdot 10^n$, met $1 \leq a < 10$ en n geheel. In de **technische notatie** krijgt een getal de vorm $a \cdot 10^n$, met $1 \leq a < 1000$ en n een drievoud.



meer info

Wortels

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **n de machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een n de macht.

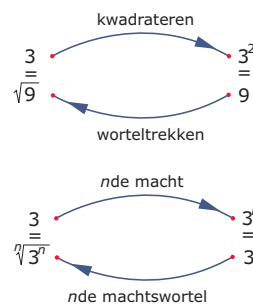
In het algemeen: $\sqrt[n]{a^n} = a$ als $a \geq 0$.

Het rekenen met n de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{16}$ geen reëel getal is.

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b .



meer info

Formules herleiden

Een **formule** beschrijft vaak een verband tussen variabelen, meestal een vergelijking zoals $l + b = 180$.

Je kunt er dan er een grafiek bij tekenen. Maakt eerst een tabel en zet de gevonden punten in een assenstelsel.

Je kunt soms formules herleiden tot de éne variabele een **functie** is van de andere.

Een formule zoals $2x + 4y = 5$ wordt $y = -0,5x + 1,25$.

Nu is y een functie van x , notatie: $y(x) = -0,5x + 1,25$.

Noem je de functie f dan is $y = f(x)$ met $f(x) = -0,5x + 1,25$ het **functievoorschrift**. Let op: de haakjes in $y(x)$ en $f(x)$ zijn geen haakjes die je gebruikt bij het rekenen (met variabelen), je kunt ze niet wegwerken.

Met iets als $f(2)$ bedoel je de waarde van y bij $x = 2$.

Bij het herleiden van formules naar functies gebruik je de balansmethode, haakjes wegwerken, rekenen met breuken met variabelen, etc.



meer info

Spiekbriefjes bij Vergelijkingen

Basistechnieken

Een formule waarin een isgelijktteken voorkomt heet een **vergelijking**.

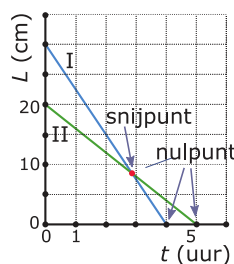
Hier wordt het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen met grafieken in beeld gebracht. Als beide kaarsen gelijk zijn geldt $20 - 4t = 30 - 7,5t$.

De t -waarde die links en rechts gelijk maakt is de **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

In een **nulpunt** is de lengte van een kaars 0. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7,5t = 0$ op te lossen.

Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.

Een vergelijking met één onbekende los je op door **inklemmen**, of door slim rekenen, bijvoorbeeld **terugrekenen**.



meer info

Balansmethode

Om vergelijkingen op te lossen gebruik je vaak **balansmethode**. Je kunt links en rechts van het isgelijktteken:

- hetzelfde optellen of aftrekken;
- met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen;
- door hetzelfde (behalve 0) delen.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe.

Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: "Links en rechts worteltrekken."

Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: "Links en rechts kwadrateren."

Dit kan niet altijd zomaar...



meer info

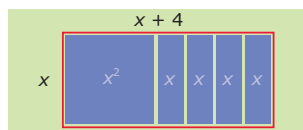
Ontbinden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen.

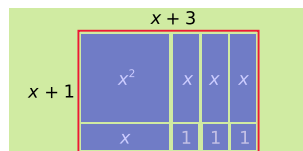
Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen.

De vergelijking herleid je tot $a \cdot b = 0$. Dat heet **op 0 herleiden**. En daaruit volgt $a = 0 \vee b = 0$, twee eenvoudiger vergelijkingen.



$$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$$



$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$$



meer info

Breuken in vergelijkingen

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Dit noem je wel **analogierekenen**.

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je met de balansmethode oplossen: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.

Veel gebroken vergelijkingen kun je oplossen door meteen links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.



meer info

Wortels in vergelijkingen

Af en toe heb je te maken met een vergelijking waarbij de variabele binnen een wortelvorm voor komt.

Een voorbeeld is $4 + 2 \cdot \sqrt{x} = 2x$.

Zo'n vergelijking kun je oplossen door hem eerst in de vorm $\sqrt{x} = \dots$ te schrijven.

Daarna ga je beide zijden kwadrateren.

Het is bij vergelijkingen met wortelvormen wel van belang om achteraf je oplossing(en) te controleren. Er mag immers geen negatief getal onder het wortelteken uitkomen, want dan krijg je geen reële waarde.



meer info

Spiekbriefjes bij Lineaire verbanden

Lineaire functies

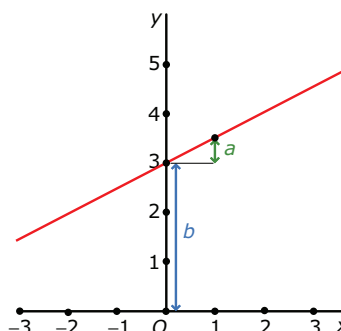
Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Soms schrijf je $f(x) = a \cdot x + b$.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong en is de formule $y = a \cdot x$. Dan is y **recht evenredig** met x .



meer info

Lineaire verbanden

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar de lineaire functie $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ als $b \neq 0$.

Dit is een lineaire functie met begingetal $\frac{c}{b}$ en hellingsgetal $-\frac{a}{b}$.

Je kunt hem ook schrijven als $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking is $by = c$ of $y = \frac{c}{b}$.

Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.

- $b = 0$: de vergelijking is $ax = c$ of $x = \frac{c}{a}$.

Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y -as.



meer info

Stelsels vergelijkingen

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je de snijpunten van de grafieken. Die snijpunten vind je vaak door:

- de vergelijkingen herleiden naar functies (als dat kan) en die gelijk stellen;
- de vergelijkingen **combineren** tot één vergelijking met één onbekende.

Bij het combineren gebruik je:

- **substitutie**: je drukt bij één van beide vergelijkingen de ene variabele in de andere uit en je vervangt in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking.
- de **balansmethode**: je neemt dan de linker- en de rechterkant van beide vergelijkingen bij elkaar na eerst handig vermenigvuldigen om één variabele kwijt te raken.

Soms is er geen oplossing. Het is dan een **strijdig stelsel**.



meer info



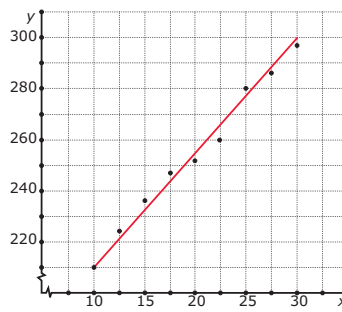
Lineaire modellen

Als het verband tussen y en x gegeven is door meetpunten die (ongeveer) op een rechte lijn liggen, kun je hierbij een **lineair model** opstellen. Daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten $(10, 210)$ en $(30, 300)$, dan bepaal je zo de formule:

- x neemt toe met $30 - 10 = 20$;
- y neemt toe met $300 - 210 = 90$;
- het hellingsgetal is $\frac{90}{20} = 4,5$;
- de gevraagde formule is $y = 4,5x + b$;
- $(10, 210)$ op de lijn, dus $210 = 4,5 \cdot 10 + b$ en $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4,5x + 165$.



meer info

Spiekbriefjes bij Kwadratische functies

Kwadratische functies

De functie $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van deze functie ontstaat door verschuiven en/of vermenigvuldigen van $y = x^2$. De grafiek is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

$a > 0$ geeft een **dalparabool**.

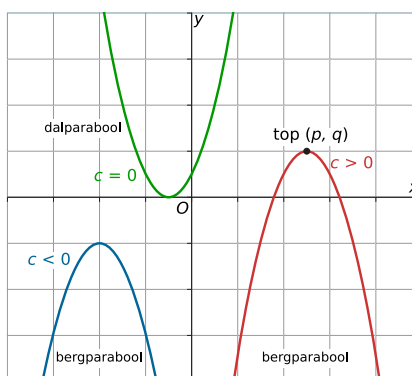
$a < 0$ geeft een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking**

$a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot:

$$(x - p)^2 = c \text{ met } c = \frac{u - q}{a}.$$

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.



meer info

De abc-formule

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Je ziet niet meteen wat de top en de nulpunten van de parabool zijn.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je de formule omzetten naar: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ waarin (p, q) de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij: $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$.

De nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ kun je bepalen met de **abc-formule**.

De oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$ is: $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\vee$ $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant**. Die bepaalt het aantal oplossingen:

- bij $D > 0$ zijn er twee oplossingen;
- bij $D = 0$ is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij $D < 0$ zijn er geen reële oplossingen.

$-\frac{b}{2a}$ is de x-coördinaat van de top, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ is het maximum (bergparabool) of het minimum (dalparabool).



meer info

Kwadratische modellen

Bij een **tweedegraads veeltermfunctie** hoort

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Bij een **derdegraads veeltermfunctie** hoort

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

De waarden van x waarop de functie f geldig is heet het **domein** D_f . Alle mogelijke functiewaarden vormen

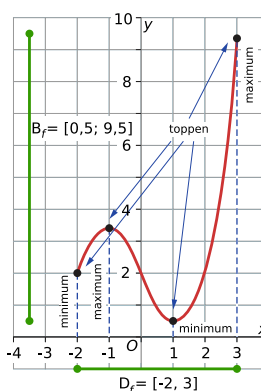
het **bereik** B_f .

Je noteert domein en bereik als een **interval**.

De getallen groter dan of gelijk aan 0 schrijf je zo: $[0, \rightarrow)$.

De getallen groter dan 0 schrijf je zo: $\langle 0, \rightarrow)$.

De vorm van de haakjes bepaalt of het getal dat er bij staat wel bij het interval hoort (rechte haken) of niet (puntige haken).



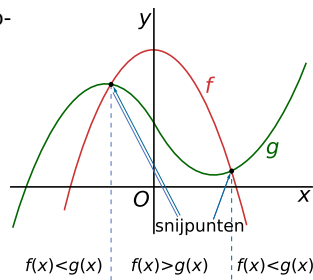
meer info



Ongelijkheden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst plot je beide functies.
Breng ze goed in beeld met de snijpunten zichtbaar.
- Bepaal de snijpunten. Dat kan met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.
Dat kan vaak ook door $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen.
Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.



meer info

Spiekbriefjes bij Exponenten en machten

Exponentiële groei

Bij **exponentiële groei** vermenigvuldig je per tijdseenheid met hetzelfde getal, de **groeifactor** g . Altijd is $g > 0$. Dus het delen van opvolgende waarden (bij vaste tijdstappen) geeft steeds hetzelfde. De hoeveelheid op $t = 0$ is de beginwaarde.

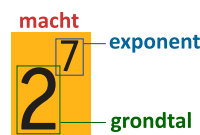
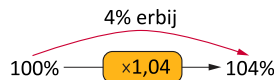
Bij groei met p procent hoort groeifactor: $g = 1 + \frac{p}{100}$.

Voor $p > 0$ is $g > 1$: exponentiële toename.

Voor $p < 0$ is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Een **macht** zoals g^n heeft **grondtal** g en **exponent** n . Bij positieve gehele n en m zijn de **rekenregels voor machten**:

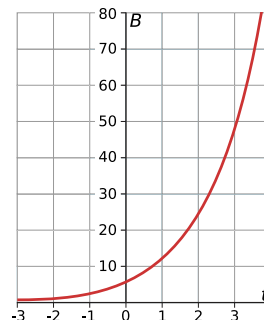
- $g^0 = 1$ als $g \neq 0$
- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$ en $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$ en $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Rekenregels voor machten

De **eigenschappen van machten** voor $g > 0$ en willekeurige a en b zijn:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a geheel
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = (\sqrt[a]{g})^b$ mits $a > 0$ en a geheel
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$



Soms geldt dit ook als $g < 0$.

Een macht als g^a heeft voor $g > 0$ betekenis voor alle waarden van a .

Daarom zijn de grafieken bij exponentiële functies vloeiende kromme lijnen. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Exponentiële functies

Voor de grafiek van de **standaard exponentiële functie** $y = g^x$ geldt:

- De grafiek snijdt de y -as in $(0, b)$.
- De x -as is de horizontale asymptoot.
- Als $g > 1$, is de grafiek stijgend.
- Als $0 < g < 1$, is de grafiek dalend.

Elke **exponentiële functie** kun je schrijven als $f(x) = b \cdot g^x + d$.

De grafiek van f ontstaat uit die van $y = g^x$ door **transformaties**:

- vermenigvuldiging in de y -richting met factor b ;
- verschuiving in de y -richting met d eenheden.

De grafiek van f heeft dus **horizontale asymptoot** $y = d$.

Het eventuele nulpunt vind je door de **exponentiële vergelijking**

$b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen met behulp van GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine.





Machtsfuncties

Functies als $g(x) = a \cdot (x - p)^r + q$ heten **machtsfuncties**.

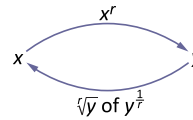
Hun grafieken ontstaan uit die van de standaard machtsfunctie $y = x^r$, met:

- r geheel, positief en even, dan heeft de functie een minimum van 0 bij $x = 0$.
- r geheel, positief en oneven, dan is de grafiek stijgend en gaat hij door $(0,0)$.
- r geheel en negatief, dan heeft de functie beide assen als asymptoten.
- r niet geheel, dan zijn alleen positieve x -waarden toegestaan tenzij r een breuk met een oneven noemer is.

Veel wortelfuncties en gebroken functies zijn machtsfuncties.

De exponent r kan elke waarde aannemen.

Een vergelijking met een machtsfunctie los je op door de omgekeerde exponent te gebruiken.



meer info

Spiekbriefjes bij Logaritmen

Logaritmen

De **logaritme** $x = {}^g \log(y)$ is de oplossing van $g^x = y$.

Dus g^x en ${}^g \log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie, zodat:

$${}^g \log(g^x) = x \text{ en } g^{{}^g \log(y)} = y$$

${}^g \log(y)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^g \log(a) + {}^g \log(b) = {}^g \log(a \cdot b)$
- ${}^g \log(a) - {}^g \log(b) = {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g \log(a) = {}^g \log(a^p)$
- ${}^g \log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$

Het grondtal 10 laat je weg: ${}^{10} \log(a) = \log(a)$.

${}^g \log(a)$ kun je met de rekenmachine berekenen: ${}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$.

Soms kun je dit invoeren als: $\log_g(a)$



meer info

Logaritmische functies

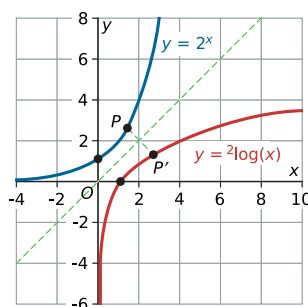
$f(x) = {}^g \log(x)$ is een **logaritmische functie** met grondtal g en $g > 0$ en $g \neq 1$.

De grafieken van $y = g^x$ en $y = {}^g \log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De karakteristieken van $y = {}^g \log(x)$ volgen uit die van $y = g^x$:

- alleen x -waarden boven 0 zijn toegestaan
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y -as is de verticale asymptoot van de grafiek

Alle functies die door transformatie uit $f(x) = {}^g \log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



meer info

Logaritmische vergelijkingen

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^g \log(x) = a$ geldt:

$g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

De oplossing vind je zo: ${}^g \log(x) = a$ geeft $g^{{}^g \log(x)} = g^a$ en $x = g^a$.

Een **logaritmische ongelijkheid** zoals ${}^g \log(x) < a$ los je zo op:

- Los de vergelijking ${}^g \log(x) = a$ op.
- Maak de grafieken van $y_1 = {}^g \log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot).

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.



meer info