Wiskunde voor het technisch MBO

Keuzedeel Specifiek (K1349)

Alle hoofdstukken / sectorneutraal

Maart 2023

4Math MBO

Het Math4MBO lesmateriaal is ontwikkeld met medewerking van:

Saskia Baars, Paul Bekkers, Edwin Brands, Nazli Evlek, Pim Harthoorn, Aris den Hertog, Hans van der Lijcke, Sander Maissan, Ron Rutter en Leo Wouter

ISBN 978 94 906 8807 3 (van het complete sectorneutrale werk)

© Stichting Math4All, 2023

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaart geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden en/of voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal.

Voor het materiaal geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in de technische richtingen van het middelbaar beroepsonderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op de programma's voor het basisdeel en het keuzedeel wiskunde voor het technisch MBO, niveau 4 zoals die zijn ontwikkeld door de werkgroep MBO/HBO van de NVVW.

Voor informatie en vragen kan contact worden opgenomen via `info@math4all.nl`. Math4MBO houdt zich aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Dit boek is automatisch opgemaakt met ConTEXt.

Inhoud

Voorwoord 3

1 Functies en grafieken 5
1.1 Het begrip functie 6
1.2 Domein en bereik 15
1.3 Karakteristieken 23
1.4 Samengestelde functies 31
1.5 Transformaties 38
1.6 Totaalbeeld 49

2 Formules opstellen 53
2.1 Lineaire modellen 54
2.2 Kwadratische modellen 62
2.3 Groeimodellen 69
2.4 Logaritmische modellen 76
2.5 Totaalbeeld 84

3 Periodieke functies 89
3.1 Sinus- en cosinusfuncties 90
3.2 Vergelijkingen met sin en cos 100
3.3 Sinusoïden 109
3.4 Periodieke modellen 117
3.5 Totaalbeeld 125

4 Differentiëren 131
4.1 Verandering 132
4.2 Het begrip afgeleide 141
4.3 Differentiëren 150
4.4 De kettingregel 160
4.5 De product- en de quotiëntregel 167
4.6 Totaalbeeld 174

5 Werken met e 177
5.1 Het getal e 178
5.2 Exponentiële functies 186
5.3 Logaritmische functies 193
5.4 Groeimodellen 199
5.5 Totaalbeeld 210

6 Goniometrische functies 217
6.1 Goniometrische functies 218
6.2 Goniometrische formules 227
6.3 Differentiëren van goniometrische functies 235
6.4 Harmonische trilling 242
6.5 Totaalbeeld 249

7 Meetkunde in 3D 253
7.1 Parallelprojectie 254
7.2 Hoeken en afstanden 263
7.3 Oppervlakte en inhoud 274
7.4 Doorsneden construeren 284
7.5 Totaalbeeld 294

8 Plaats en beweging 299
8.1 Coördinaten in 2D 300
8.2 Vectoren 308
8.3 Lijnen en snijpunten 319
8.4 Hoeken en inproduct 327
8.5 Bijzondere lijnen 336
8.6 Totaalbeeld 343

Register 345

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit boek kun je ook terugvinden op de website `www.math4all.nl`. Soms staan er in de tekst verwijzingen naar die website of naar het web. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Als je een PDF versie van dit boek op je computer hebt staan kun je op diverse (lichtblauw gekleurde) plaatsen in de tekst klikken om bijvoorbeeld naar de website te gaan of applets te bestuderen.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf Totaalbeeld waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Oefenen
- Toepassen
- Testen

De rubrieken Verkennen en Toepassen bevatten wiskundige problemen die je later ook in je werk kunt tegenkomen.

De opgaven in de rubriek Verkennen zijn bedoeld als kennismaking en hoef je gelukkig pas te kunnen maken als je het hele hoofdstuk hebt bestudeerd.

Als je denkt dat je de wiskunde van een paragraaf wel beheerst, kun je naar de rubriek Testen gaan. Kun je die opgaven zonder problemen maken, dan zit het met jouw wiskundige kennis van het betreffende onderdeel of onderwerp wel goed.

1

Functies en grafieken

1.1 Het begrip functie 6
1.2 Domein en bereik 15
1.3 Karakteristieken 23
1.4 Samengestelde functies 31
1.5 Transformaties 38
1.6 Totaalbeeld 49

1.1 Het begrip functie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

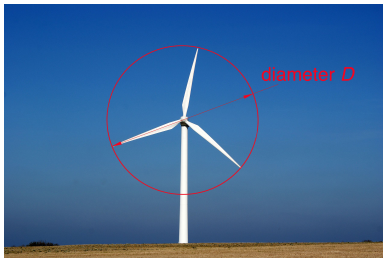
- wat een functie en een functievoorschrift is;
- hoe je de grafiek van een functie maakt;
- grafieken van functies met de grafische rekenmachine maken;
- nulpunten berekenen van functies.

Voorkennis

- met formules werken: erin invullen en ze herschrijven;
- eenvoudige vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1



Figuur 1.1

Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v. Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule
$P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.
In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m).

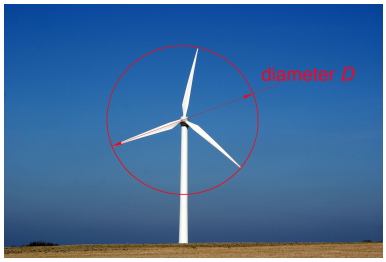
Als de wieken een lengte hebben van 10 m, dan is $P = 0{,}052 \cdot v^3$.

a Laat zien, hoe je aan $P = 0{,}052 \cdot v^3$ komt.

b Bij het tekenen van grafieken kun je gebruik maken van een grafische rekenmachine, van GeoGebra, of van Desmos.
Maak de grafiek van P. Hoe ziet de grafiek van deze formule eruit?

c Voor welke waarde van v vind je $P = 100$ kW?

Uitleg



Figuur 1.2

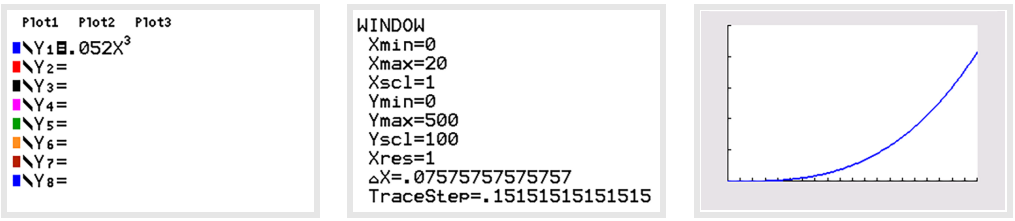
Je ziet op veel plaatsen windmolens die elektriciteit opwekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de dubbele wieklengte D en van de windsnelheid v. Het vermogen van een bepaald type windmolen kun je weergeven met de formule $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$.

In deze formule is P het (gemiddelde) vermogen in kiloWatt (kW), v de (gemiddelde) windsnelheid in meter per seconde (m/s) en D de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien in meter (m). Bij een diameter van 20 meter en een windsnelheid van 10 meter per seconde is het vermogen $P = 0{,}00013 \cdot 10^3 \cdot 40^2 \approx 52$ kiloWatt.

Je bekijkt een windmolen met wieken van 10 meter. Je wilt snel een tabel maken van het vermogen bij verschillende windsnelheden. Vul dan $D = 20$ in en schrijf de formule als $P = 0{,}052 \cdot v^3$. Om duidelijk te

maken dat P afhangt van v schrijf je $P(v) = 0{,}052 \cdot v^3$. Dit heet een functievoorschrift en P is een functie van v. Bij elke waarde van v hoort precies één uitkomst: bij $v = 10$ hoort $P = 52$. Dit schrijf je korter als $P(10) = 52$. En in plaats van uitkomst noem je 52 een functiewaarde.

Met een grafische rekenmachine, met GeoGebra, of met Desmos kun je bij de functie met voorschrift $P(v) = 0{,}052 \cdot v^3$ een tabel en een grafiek maken. Je voert de formule dan op de grafische rekenmachine in als Y1=0.052*X^3. Daarna stel je de afmetingen van het venster in en maak je de grafiek.



Figuur 1.3

Bestaan er ook verbanden die geen functie zijn?

Neem het verband $x^2 + y^2 = 100$. Kies je als invoerwaarde $x = 0$, dan krijg je de vergelijking $y^2 = 100$ en deze heeft als oplossing $y = 10 \vee y = -10$. Bij $x = 0$ horen dus twee y-waarden, wat bij een functie niet mag. En daarom is y nu geen functie van x.

Opgave 1

Voor de windmolen met wieken van 10 meter geldt $P(v) = 0{,}052v^3$. Daarin is P het vermogen in kiloWatt (kW) en v de windsnelheid in meter per seconde (m/s).

a Bereken $P(6)$ betekent hetzelfde als:

A. Bereken de functiewaarde bij invoerwaarde $v = 6$.
B. Bereken de invoerwaarde bij functiewaarde $v = 6$.
C. Bereken de functiewaarde als $P = 6$.
D. Bereken de invoerwaarde als $P = 6$.

b Bereken $P(6)$.

c Windsnelheden van 0 tot 15 m/s komen in de kustgebieden regelmatig voor. Breng het deel van de grafiek van P dat daarbij hoort in beeld op de grafische rekenmachine. Welke waarden voor P horen daarbij?

d Voor welke waarde van v geldt: $P(v) = 300$?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg op pagina 6**. Neem nu een windmolen met een wieklengte van 20 meter.

a Welk voorschrift geldt nu voor P als functie van v?

b Bereken $P(10)$.

c Breng de grafiek in beeld voor windsnelheden vanaf 0 tot 20 meter per seconde. Welke vensterinstellingen heb je nodig om de complete grafiek in beeld te krijgen?

d Bij welke windsnelheid in kilometer per uur (km/h) is het vermogen 40 kiloWatt (kW)?

Opgave 3

In de **Uitleg op pagina 6** zie je dat het verband $x^2 + y^2 = 100$ geen functie is. Een getallenvoorbeeld maakt dit duidelijk.

a Geef nog een voorbeeld waaruit blijkt dat de formule $x^2 + y^2 = 100$ geen functievoorschrift is.

b Schrijf deze formule in de vorm $y = ...$

c Door welke twee functievoorschriften y_1 en y_2 kun je de formule vervangen?

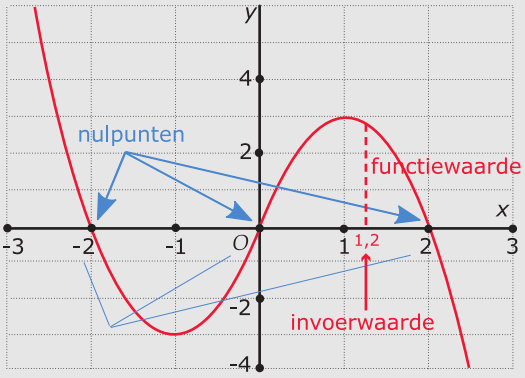
d Breng de grafieken van deze twee functies in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?

e Bereken exact $y_1(5)$ en $y_2(5)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een formule zoals $y = -x^3+4x$ vind je bij elke mogelijke waarde van x precies één waarde van y. In dat geval is y een **functie** van x met **functievoorschrift** $y(x) = -x^3+4x$.



Figuur 1.4

Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de horizontale as, de x-as. De uitkomsten heten **functiewaarden**. De functiewaarde bij $x = 1$ is bijvoorbeeld $y(1) = -1^3+4\cdot 1 = 3$. Functiewaarden komen op de y-as.

Voor $y(x)$ wordt ook wel $f(x)$ gebruikt. y is dan een functie van x die f heet. f is dus geen variabele, maar de 'naam' van een functie. In praktijksituaties gebruik je vaak letters die verwijzen naar de betekenis van de variabelen. Bijvoorbeeld t voor tijd, l voor lengte, I voor inhoud, v voor snelheid, P voor vermogen, enzovoort.

Als je grafiek wilt maken met behulp van een computerprogramma of een grafische rekenmachine, dan noem je dat het **plotten** van de grafiek. Voor de invoerwaarden wordt dan meestal een x en voor de functiewaarden een y gebruikt, bekijk het **Practicum**.

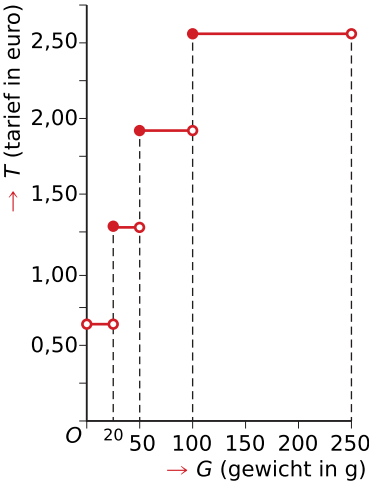
De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde (de uitkomst dus) 0 is. Een nulpunt is dus een getal. Een nulpunt wordt ook wel **nulwaarde** genoemd. Bij de gegeven functie kun je de nulpunten vinden door $y(x) = -x^3 + 4x = 0$ uit te rekenen. De nulpunten van deze functie zijn $x = 0$,$x = -2$ en $x = 2$.

Voorbeeld 1

De Post NL-tarieven voor de brievenbuspost binnenland zijn in 2014:

- tot 20 gram: € 0,64
- van 20 tot 50 gram: € 1,28
- van 50 tot 100 gram: € 1,92
- van 100 tot 250 gram: € 2,56

Is het tarief T een functie van het gewicht G? Is het gewicht een functie van het tarief?



Figuur 1.5

Antwoord

Bij elke (toegestane) waarde voor het gewicht G vind je precies één tarief T. Dus T is een functie van G. Let op dat als je een brief van 20 gram hebt je € 1,28 moet betalen en niet € 0,64. In de grafiek zie je ook een open rondje aan het einde van de lijnstukken. Dit betekent dat het einde van zo'n lijnstuk niet meedoet.
Omgekeerd is G geen functie van T. Als je het bedrag weet, kun je namelijk nog niet precies zeggen hoe zwaar het poststuk is, daar zijn meerdere mogelijkheden voor.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 9** vind je de posttarieven van 2014.

a Bepaal $T(15)$.

b Als je weet hoe zwaar een brief is, weet je voor hoeveel euro aan postzegels je erop moet plakken. Klopt dat? Licht je antwoord toe.

c Als je ziet voor hoeveel euro er aan postzegels op een brief zit, weet je hoe zwaar hij is. Klopt dat? Licht je antwoord toe.

d Welke oplossingen heeft de vergelijking: $T(G) = 1{,}92$?

e Is G een functie van T? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

Welke beweringen zijn waar?

A. $f(4)$ is een invoerwaarde.
B. $f(10) = 60$ betekent dat het punt $(60; 10)$ op de grafiek ligt.
C. $f(x) = 5$ heeft twee oplossingen.
D. Bij elke waarde van x hoort precies één waarde van y.

Opgave 6

Bekijk de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

a Bereken de nulpunten van f.

b Los op: $f(x) = 5$.

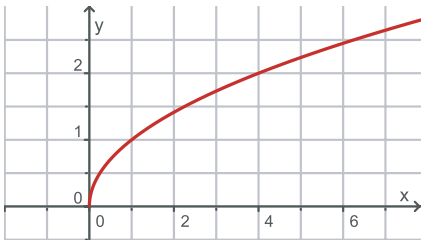
Voorbeeld 2

Je ziet twee formules bij verbanden tussen x en y.

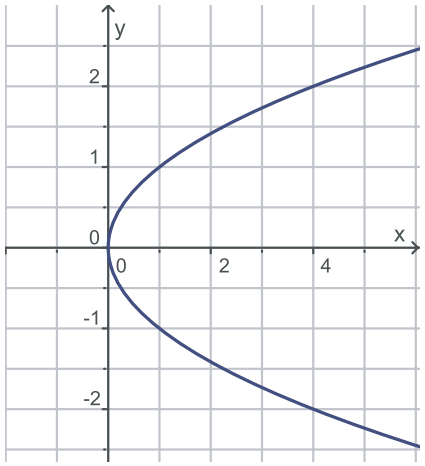
- $y = \sqrt{x}$
- $y^2 = x$

Verder zie je de grafieken bij deze verbanden gemaakt met GeoGebra.

Is y een functie van x in de formule $y = \sqrt{x}$?
Is y een functie van x in de formule $y^2 = x$?



$y = \sqrt{x}$



$y^2 = x$

Figuur 1.6

Antwoord

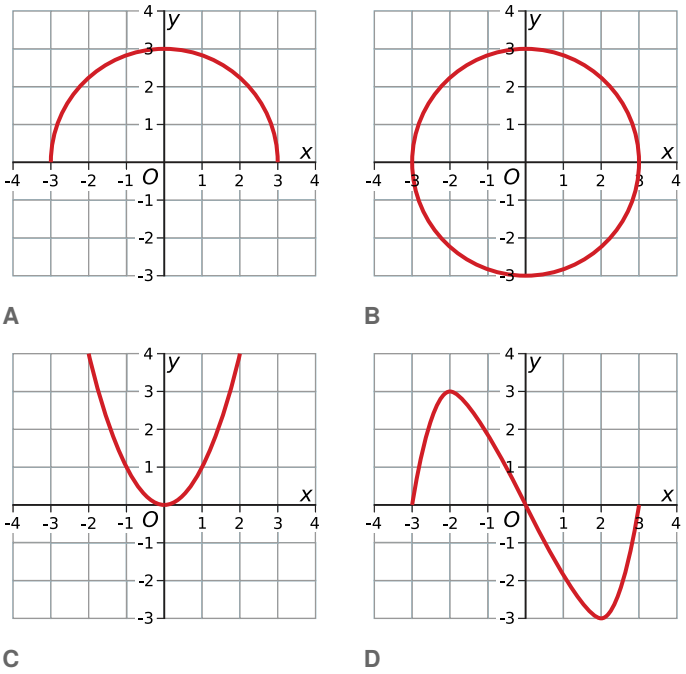
Kies bijvoorbeeld: $x = 4$.
Bij formule $y = \sqrt{x}$ vind je: $y = 2$.
Bij formule $y^2 = x$ vind je: $y = 2 \vee y = -2$.

Bij de formule $y = \sqrt{x}$ vind je bij elke waarde voor x precies één waarde van y. Als x negatief is vind je geen waarden van y. Dus bij de formule $y = \sqrt{x}$ is y een functie van x.

Bij de formule $y^2 = x$ vind je bij vrijwel alle x-waarden twee waarden van y. Alleen bij $x = 0$ vind je er maar één. Bij negatieve x-waarden vind je geen uitkomsten. Dus bij de formule $y^2 = x$ is y geen functie van x.

Opgave 7

Je ziet vier grafieken. Bij welke van deze grafieken is y een functie van x?



Figuur 1.7

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = 10x - 0{,}1x^3$ en $g(x) = x + 10$.
Bepaal de snijpunten van de grafieken.

Antwoord

Om de snijpunten te achterhalen moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Om deze vergelijking met de grafische rekenmachine, GeoGebra, of Desmos op te lossen, moet je eerst de grafieken van beide functies in beeld brengen. Daarvoor heb je goede vensterinstellingen nodig. Je kunt gewoonweg wat proberen, maar je kunt dit ook systematisch doen.

De grafiek van g is een rechte lijn die door de punten $(-10{,}0)$ en $(0{,}10)$ gaat. Als je de nulpunten van f algebraïsch uitrekent, dan vind je:

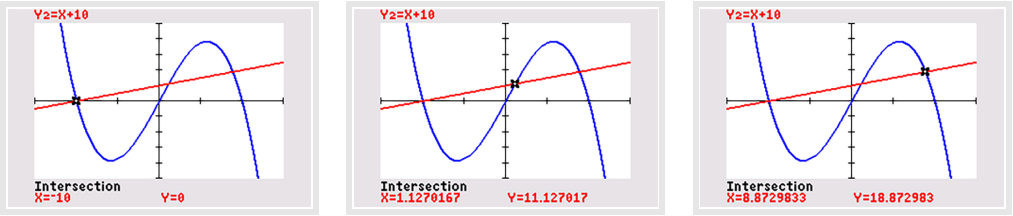
$$\begin{aligned} 10x - 0{,}1x^3 &= 0 \\ 100x - x^3 &= 0 \\ x\left(100 - x^2\right) &= 0 \\ x(10 - x)(10 + x) &= 0 \end{aligned}$$

De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Stel nu in dat x loopt van $x = -15$ tot en met $x = 15$ en bekijk de grafiek. Pas de instellingen voor y zo aan dat je alle toppen en dalen van de grafiek in beeld krijgt. Kies je als vensterinstellingen $-15 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 50$, dan krijg je beide grafieken goed in beeld (het aantal schaalstreepjes op de as kun je ook nog instellen). De drie snijpunten zijn dan ook goed in beeld. De nulpunten zijn $x = -10$, $x = 0$ en $x = 10$.

Je kunt nu de snijpunten laten uitrekenen. Hoe dat gaat, zie je in het practicum.

Met GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine vind je voor de x-coördinaten van de snijpunten $x = -10 \vee x \approx 1{,}13 \vee x \approx 8{,}87$.



Figuur 1.8

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 130$ en $g(x) = 3x$.

a Breng de grafieken van f en g in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Krijg je de grafieken in beeld?

b Bereken exact de nulpunten van functie f.

c De grafiek van f is een parabool. Welke top heeft deze parabool?

d Pas je vensterinstellingen zo aan, dat deze punten nog in beeld komen. Schrijf de bijbehorende instellingen op.

e Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van f en g?

f Bepaal de snijpunten van beide grafieken. Bereken deze snijpunten ook algebraïsch.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $y_1 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $y_2 = -x^2 - x + 6$.

a Bereken van beide functies de nulpunten.

b Breng beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle snijpunten met de assen en toppen in beeld te krijgen.

c Bepaal alle snijpunten van de grafieken van de functies. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4x + x^3$.

a Bereken $f(3)$.

b Bereken de x-waarden waarvoor $f(x) = 8$.

c Bij welke vensterinstellingen krijg je de nulpunten en de toppen van de grafiek van f in beeld?

d Hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y? Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

e Hoort bij elke waarde van y precies één waarde van x?
Of kun je tegenvoorbeelden vinden?

Opgave 11

Voor het gebruik van water betaalde je in 2013 (zonder belasting) jaarlijks € 35,00 en nog € 0,77 per verbruikte m^3 water. De jaarlijkse kosten K (in euro's) hangen af van het aantal m^3 (a) dat je verbruikt.

a Waarom is K een functie van a?

b Bereken $K(100)$.

c Stel het functievoorschrift $K(a)$ op.

d De meeste gezinnen betalen minder dan € 500,00 per jaar voor hun waterverbruik. Hoeveel kubieke meter water gebruiken die gezinnen maximaal?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

a Bereken de nulpunten en de top van de grafiek van f.

b Breng de grafieken van f en g in beeld. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de nulpunten en toppen van beide functies goed zichtbaar zijn.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 13

Je ziet vier functievoorschriften. Bepaal telkens eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Schrijf vervolgens de vensterinstellingen op waarmee de grafiek goed in beeld komt.

a $f(x) = 100x - x^2$

b $g(x) = 10x(x - 50)$

c $h(x) = (x - 10)^2 - 1600$

d $k(x) = 200 + 1{,}6x$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $y_1 = x^4 - 2x^2$ en $y_2 = -x^2 + 4x$.

a Bereken algebraïsch van beide functies de nulpunten.

b Breng beide grafieken in beeld. Schrijf op welke vensterinstellingen je gebruikt om alle nulpunten en toppen in beeld te krijgen.

c Bepaal alle snijpunten van de grafieken in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: De baan van een afgeschoten kogel

De baan van een afgeschoten kogel wordt gegeven door $h(x) = -0{,}01x^2 + 40x$, waarin h de hoogte in meter van de kogel boven de begane grond en x de horizontale afstand in meter tot de plaats waar de kogel is afgeschoten.

a Bereken na hoeveel meter de kogel weer op de grond komt.

b Breng de baan van de kogel in beeld. Schrijf de daarbij behorende vensterinstellingen op.

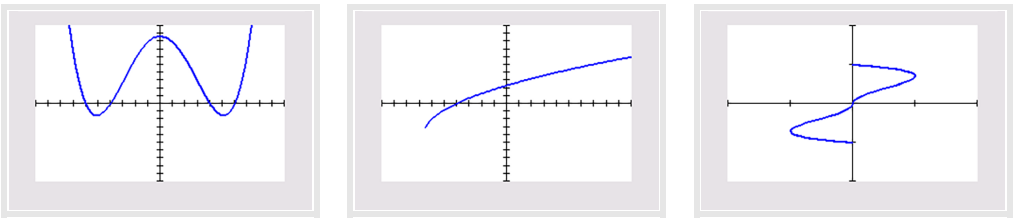
c Hoe hoog komt de kogel maximaal?

d Voor welke x-waarden is de hoogte van de kogel hoger dan 10000 meter? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Bekijk de drie grafieken.



Figuur 1.9

a Bij welke van deze grafieken is y een functie van x?

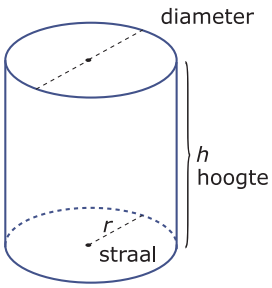
A. A
B. B
C. C

b Bij welke van deze grafieken is x een functie van y?

A. A
B. B
C. C

Opgave 17

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Van een bepaalde serie blikjes is bekend dat de hoogte even groot is als de diameter. Ze passen dus precies in een kubus.



Figuur 1.10

a Voor deze serie blikjes is V een functie van r. Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.

b Neem aan dat $0 < r < 20$. Breng nu de grafiek van de functie $V(r)$ in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.

c Bij welke afmetingen van de cilinder geldt: $V = 1000$ cm^3?

Opgave 18

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x(x - 10)^2$ en $g(x) = 8x$.

a Bereken $f(5)$ en $f(-5)$.

b Bereken de nulpunten van f.

c Bepaal de snijpunten van beide grafieken.

1.2 Domein en bereik

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip domein gebruiken voor de mogelijk invoerwaarden;
- het begrip bereik gebruiken voor de mogelijke uitkomsten.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

Verkennen

Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo'n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de ronddraaiende wieken 200 m is, dan kan het vermogen P in kW (kiloWatt) per uur berekend worden met de formule:

$P = 0{,}52 \cdot v^3 \cdot$

Hierin is v de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

a Welke waarden denk je dat v kan aannemen?

b Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.

Opgave V2

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.

a Welke waarden kan x aannemen?

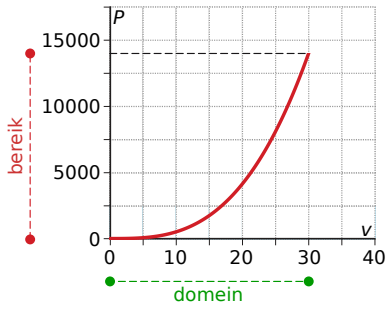
b Maak een tabel en een grafiek bij deze functie.

c Welke functiewaarden heeft deze functie?

Uitleg 1

Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kilowatt van molens met wieken van 10 meter kan worden berekend met een functievoorschrift zoals: $P(v) = 0{,}52v^3$.
Hierin is v de windsnelheid in m/s.

Zo'n windmolen gaat draaien vanaf windkracht 2 tot 3 en wordt stilgezet boven windkracht 10 tot 12 (afhankelijk van het type) om overbelasting te voorkomen. Dus dergelijke windmolens functioneren alleen bij windsnelheden vanaf zo'n 3 m/s tot een snelheid van maximaal zo'n 30 m/s. Dat betekent dat v alleen waarden vanaf 0 tot waarden



Figuur 1.1

kleiner of gelijk aan 30 kan aannemen. Deze waarden vormen het domein van de functie en je noteert het als interval $D_P = [0,30]$.

Vanwege het beperkte domein van de functie $P(v)$ zullen ook de uitkomsten beperkt zijn. Het interval waarbinnen alle uitkomsten liggen heet het bereik van de functie. Ga na dat $B_P = [0,14040]$.

Het domein heeft te maken met beperkingen van de invoervariabele en die kunnen worden ingegeven door de situatie, maar ook wel door de aard van de functie: bijvoorbeeld de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde en delen door 0 kan niet.

Opgave 1

In **Uitleg 1 op pagina 15** vind je de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 10 meter weergeeft. Nu bekijk je een windmolen met wieken van 15 meter. Daarvoor geldt $P(v) = 1{,}17v^3$. Neem aan dat dit soort windmolens alle windsnelheden kleiner of gelijk aan 25 m/s aankunnen.

Geef van deze functie het domein en het bijbehorende bereik in de intervalnotatie.

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = 3 + \sqrt{x}$.

a Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? Licht je antwoord toe.

Het domein van deze functie wordt wel geschreven als $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

b Wat betekent de pijl?

c Waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen dan het linkerhaakje?

d Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?

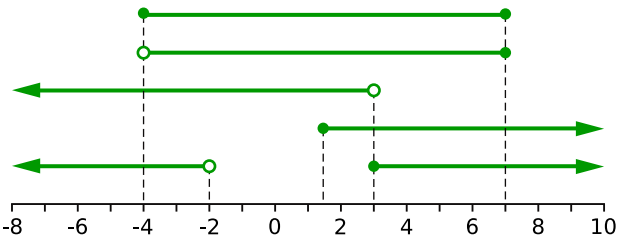
e Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

Uitleg 2

Een interval is eigenlijk niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. De notatie ervan is op zich eenvoudig: je schrijft de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Er zijn alleen twee afspraken die je erbij moet onthouden.

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer - de haken [en] geven aan dat de grenswaarden nog bij het interval horen, de haken ⟨ en ⟩ geven aan dat de grenswaarden niet bij het interval horen;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorend deel van de getallenlijn.



intervalnotatie	gewone notatie
[-4, 7]	$-4 \leqq x \leqq 7$
⟨-4, 7]	$-4 < x \leqq 7$
⟨←, 3⟩	$x < 3$
[1,5; →⟩	$x \geqq 1{,}5$
⟨←, -2⟩∪[3, →⟩	$x < -2$ V $x \geqq 3$

Figuur 1.2

Je ziet in de figuur het teken ∪. Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt.

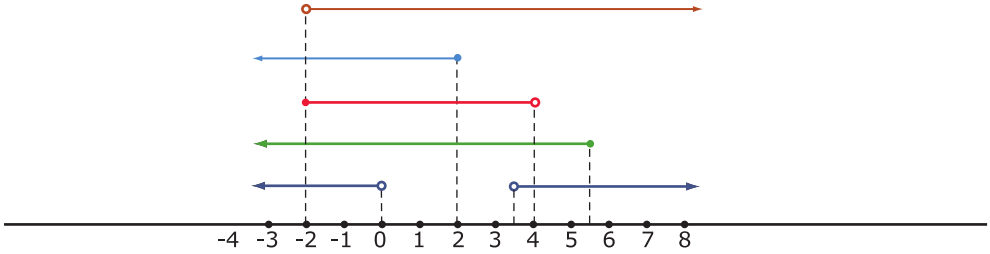
Opgave 3

Bekijk de intervallen in de **Uitleg 2 op pagina 16**. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2{,}4]$, $[2, \rightarrow\rangle$, $[1; 3{,}5]$, $\langle \leftarrow, 0]$ en $\langle \leftarrow, 4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow\rangle$.

Opgave 4

Bekijk de getekende intervallen.

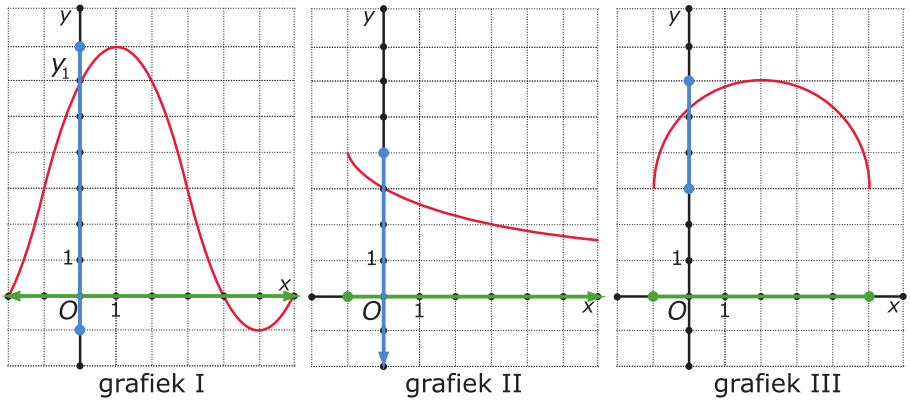


Figuur 1.3

Schrijf ze in intervalnotatie.

Opgave 5

Je ziet een aantal grafieken van functies. Het domein en het bereik van de functie is bij de grafiek aangegeven.



Figuur 1.4

Geef het domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Theorie en voorbeelden

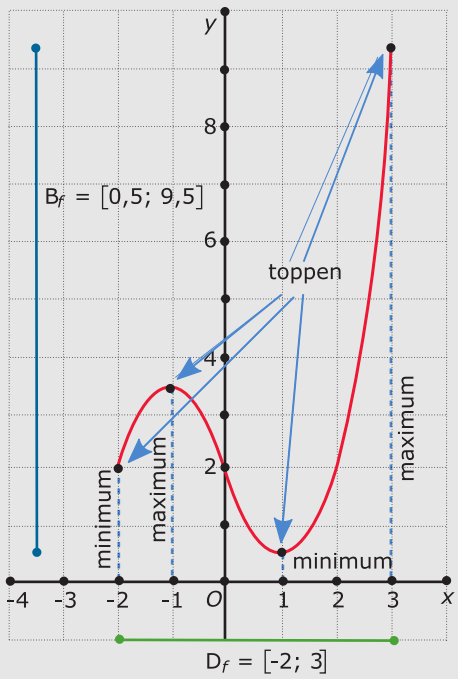
Om te onthouden

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein wordt bepaald door:

- beperkingen vanwege het functievoorschrift;
- beperkingen vanuit de situatie.

Het domein van functie f wordt aangegeven door D_f.

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie f te kunnen bepalen heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je deze toppen in beeld brengt, lees je in het **Practicum**. Het bereik van functie f wordt aangegeven door B_f.



Figuur 1.5

Voor domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus.

Als je een interval opschrijft geef je vaak de beginwaarde en de eindwaarde weer tussen haken. De vorm van de haken bepaalt of de beginwaarde en de eindwaarde nog bij het interval horen. Zo wordt met het interval $[2,8\rangle$ bedoeld: alle getallen van 2 tot 8, dus 2 behoort wel tot het interval en 8 niet. Voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje. Alle reële getallen noteer je als $\mathbb{R}$.

Bij het geven van de vensterinstelling wordt vanaf nu vaak de notatie $[-10,10] \times [-20,20]$ gebruikt als de vensterinstellingen $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$ zijn.

Voorbeeld 1

Met de grafische rekenmachine, GeoGebra, of Desmos kun je (een deel van) de grafiek van $f(x) = \sqrt{x+2}$ goed in beeld brengen. Geef het domein en bereik van f.

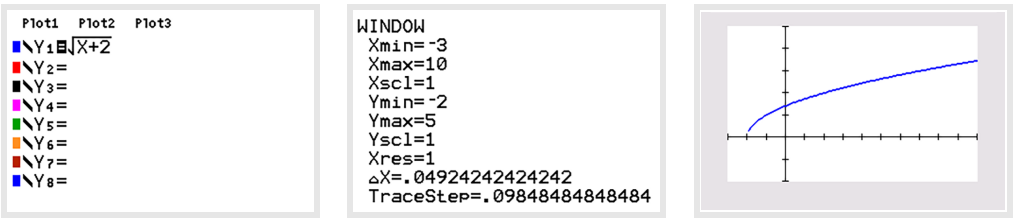
Antwoord

Je weet dat de functiewaarden groter worden naarmate je een groter getal voor x kiest. Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat $x+2 \geq 0$ en hieruit volgt dat $x \geq -2$. Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is $x = -2$. Je krijgt dan als functiewaarde: $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$.

Hier bepaalt het functievoorschrift wat domein en bereik zijn:

- de wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus: $D_f = [-2, \rightarrow\rangle$
- de functiewaarden zijn 0 of groter, dus: $B_f = [0, \rightarrow\rangle$

De gebruikte vensterinstellingen zijn $[-3,10] \times [-2,5]$. Hierbij geef je eerst de instellingen voor x en als tweede die voor y.



Figuur 1.6

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 18**. Gegeven is nu de functie f met $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

a Welke waarden kan x aannemen? Schrijf het domein van f op.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

c Bekijk de grafiek van f. Schrijf het bereik van f op.

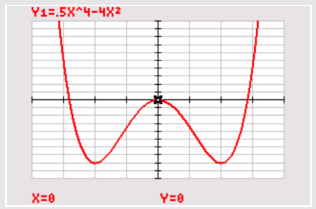
Opgave 7

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

Geef het domein en bereik van f.

Voorbeeld 2

Je ziet (een deel van) de grafiek van $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2$. Bepaal het domein en bereik van deze functie.



Figuur 1.7

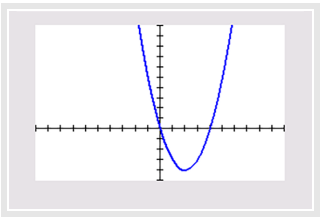
Antwoord

Bij elke waarde van x kun je x^4 en x^2 berekenen en dus ook een functiewaarde. Het domein van f is dus $D_f = \mathbb{R}$.

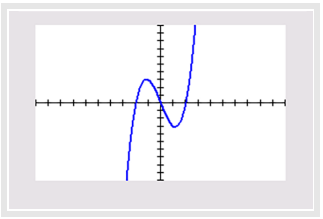
Voor het bereik moet je de grafiek goed bekijken. Er zijn drie toppen, die je gemakkelijk kunt vinden. Ga na hoe dat met de grafische rekenmachine, met GeoGebra, of Desmos gaat. Je vindt een minimum $f(-2) = -8$ en een minimum $f(2) = -8$. Verder is er een maximum $f(0) = 0$, maar dat is voor het bereik onbelangrijk. Ga na: $B_f = [-8, \rightarrow\rangle$.

Opgave 8

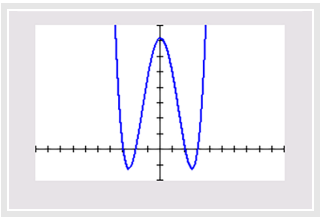
Je ziet vier grafieken van een functie. Alle toppen en nulpunten zijn in beeld.



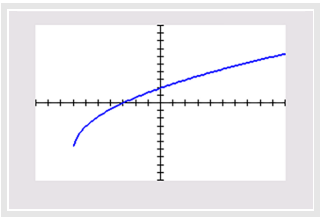
$f(x) = x^2 - 4x$



$g(x) = x^3 - 4x$



$h(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$



$k(x) = 3\sqrt{x + 7} - 6$

Figuur 1.8

Schrijf het domein en bereik van deze functies op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt weggestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0{,}0625(x - 6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

Figuur 1.9

a Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.

b Schrijf het domein van functie $h(x)$ op als interval.

c Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.

d Schrijf het bereik van deze functie op als interval.

Oefenen

Opgave 10

Bepaal van de volgende functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval. Geef eventuele benaderingen in twee decimalen. Gebruik waar nodig GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^2 - x - 6$

b $g(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$

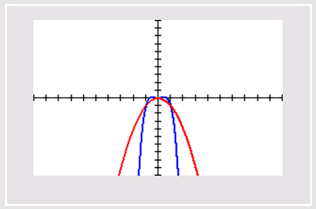
c $h(x) = x^3 - 6x$

d $k(x) = 1 + 2\sqrt{x}$

e $l(x) = -3 + 3\sqrt{2 + 6x}$

Opgave 11

Je ziet de grafieken van de functies f en g met $f(x) = x^2 - 2x^4$ en $g(x) = -x^2$ met de standaardinstellingen van het venster.



Figuur 1.10

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

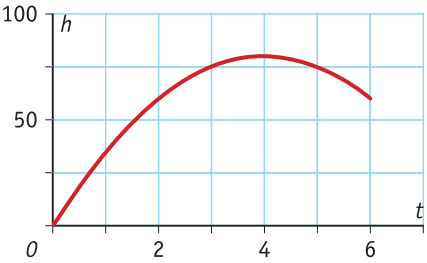
b De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig als je de toppen en de nulpunten van beide functies wilt zien. Kies betere instellingen en bepaal de toppen van de grafiek van f.

c Bepaal van beide functies het bereik.

d Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van f en g.

Opgave 12

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt af van de tijd. Er geldt: $h(t) = 40t - 5t^2$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meter en t de tijd in seconden.



Figuur 1.11

a De vuurpijl spat na zes seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?

b Geef het domein en bereik van deze functie, rekening houdend met de beschreven situatie.

c Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?

d Hoeveel seconden is de vuurpijl boven 40 meter hoogte?

e Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?

Opgave 13

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid q die hij verkoopt hangt alleen af van de prijs p die hij per exemplaar vraagt.
Er geldt: $q = 400 - 0{,}5p$.

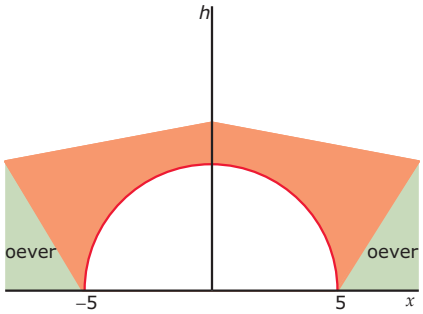
a Geef een formule voor de opbrengst R als functie van de prijs p.

b Welke waarden kan p aannemen?

c Welke waarden kan R aannemen?

Opgave 14

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (met x en h in meter). Het lijnstuk tussen beide nulpunten van deze functie stelt de rivierbodem voor.



Figuur 1.12

a In de grafiek kun je de lengte van het lijnstuk dat de rivierbodem voorstelt aflezen. Laat zien hoe je deze lengte kunt berekenen met behulp van een vergelijking.

b Wat is het domein van deze functie?

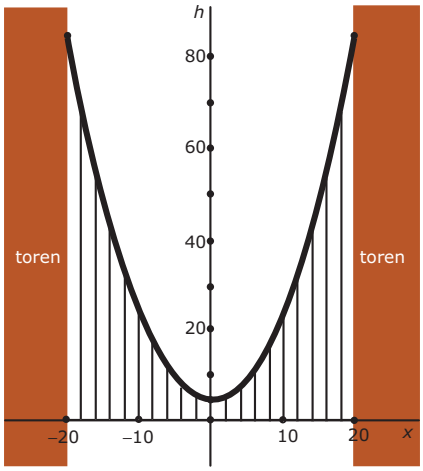
c Wat is het bereik van deze functie?

d De waterhoogte van de rivier is twee meter boven de bodem. Bereken de breedte van de waterspiegel onder deze boog in centimeter nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Hangbruggen

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens van 90 meter hoog. Er geldt: $h(x) = \frac{9}{50}x^2 + 5$.



Figuur 1.13

a Laat zien dat de tuidraad bij $x = 10$ een lengte heeft van 23 meter.

b Welk domein heeft de functie h in de beschreven situatie?

c Welk bereik heeft de functie h?

d Er zijn twee tuidraden met een lengte van 45,5 meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?

Opgave 16: Lengte en gewicht bij vissen

Voor volwassen vissen bestaat een direct verband tussen diens gewicht G in gram en de lichaamslengte l in millimeter:
$G = c \cdot l^3$

Figuur 1.14

Hierbij is c een constante. De waarde van deze constante hangt af van de vissoort.
Voor bijvoorbeeld de baars geldt: $G = 0{,}00002 \cdot l^3$

Een baars is bij de geboorte verwaarloosbaar klein en hij wordt hooguit 600 mm lang.

a Plot de grafiek die het verband tussen de lengte en het gewicht van een baars weergeeft.

b Hoe groot is lengte van een baars die 3 kg weegt?

c Welke bereik heeft deze functie?

Testen

Opgave 17

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Geef het domein en bereik van deze functies.

a $f(x) = 4 - (x - 2)^2$

b $g(x) = 4$

c $h(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

Opgave 18

Gegeven is het functievoorschrift $y(x) = x^4 - 8x^2$.

a Bereken $y(3)$.

b Bereken $y(-3)$.

c Bereken algebraïsch de nulpunten van y.

d Bepaal de toppen van de grafiek van y.

e Geef het bereik van deze functie.

1.3 Karakteristieken

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- op welke manier je de karakteristieken van een functie kunt bepalen;
- extremen berekenen met behulp van GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

a Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?

c En als a dicht bij 0 komt?

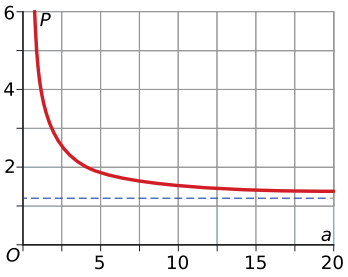
Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden km a.

Er geldt: $P = 1{,}20 + \frac{3{,}20}{a}$.



Figuur 1.1

De grafiek van deze functie snijdt de horizontale as niet en heeft geen extremen. Er geldt:

- Als a (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $P = 1{,}20$ komt te liggen, maar deze niet raakt. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P.
- Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter: $P(0{,}1) = 33{,}20$; $P(0{,}01) = 321{,}20$; $P(0{,}001) = 3201{,}20$; $P(0{,}0001) = 32001{,}20$; enzovoort. Het getal 0 zelf mag je echter niet voor a invullen: delen door 0 kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen, maar niet raakt. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P.

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristieke gedrag zichtbaar wordt, net als snijpunten met de assen en toppen (als ze er zijn).

Opgave 1

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de maandelijkse kosten per kopie gegeven door: $K(a) = \frac{200}{a} + 0{,}075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

a Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.

b Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K?

d Als er een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan is 1. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

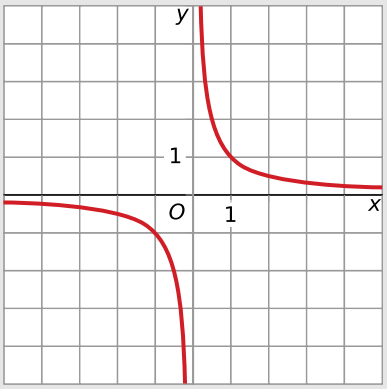
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij grafieken komen regelmatig asymptoten voor. Dat zijn lijnen waar de grafiek steeds dichter naast loopt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt. Vooral een **verticale asymptoot** kun je vaak goed in het functievoorschrift herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen veroorzaakt vaak zo'n asymptoot. Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ is de standaardfunctie van een functie met asymptoten. Deze grafiek heeft:

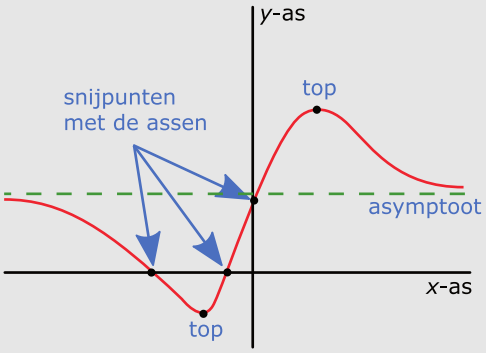
- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden naar 0;
- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).



Figuur 1.2

Het domein van f schrijf je als $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Het bereik van f schrijf je als $B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.



Figuur 1.3

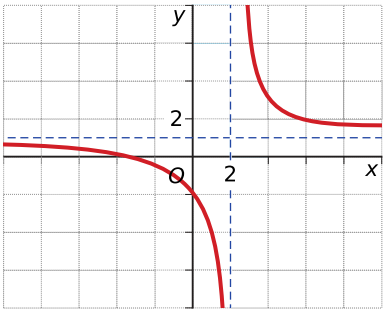
Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en bereik van f op.



Figuur 1.4

Antwoord

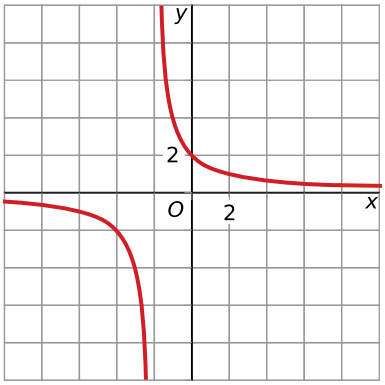
Aangezien je niet door 0 kunt delen is er iets bijzonders als $x - 2 = 0$ en dus als $x = 2$. $f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen: $f(2{,}001) = 6001$ en $f(2{,}0001) = 60001$, enzovoort. Verder is $f(1{,}999) = 5999$ en $f(1{,}9999) = 59999$.
De grafiek van f komt steeds dichter langs de lijn $x = 2$ te lopen. $x = 2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk. Kies x-waarden als 1000, 10000, 100000, enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met - 1000, - 10000, - 100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden steeds dichter in de buurt van $y = 1$ liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y = 1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Het domein van f is: $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$. Het bereik van f is: $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

Opgave 2

Je ziet de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{4}{x+2}$.



Figuur 1.5

a Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?

b Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?

d Geef de vergelijking van de horizontale asymptoot.

e Geef het domein en bereik van f.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

a Maak de grafiek van f. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

d Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt in de negatieve richting?

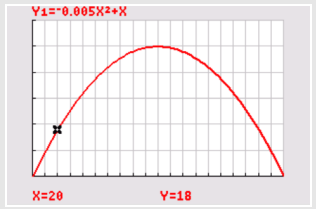
e Geef de vergelijking van de horizontale asymptoot.

f Geef het domein en bereik van f.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Speelt de luchtweerstand geen rol, dan is de baan van een afgeschoten voorwerp P een zuivere parabool. Bijvoorbeeld $h(x) = -0{,}005x^2 + x$. Hierin is x de horizontale afstand die het voorwerp heeft afgelegd (in meter) en h de bijbehorende hoogte boven de grond (in meter). In de grafiek kun je zien hoe hoog het voorwerp maximaal komt. Bereken bij welke afstand de hoogte maximaal is en bereken hoe hoog het voorwerp maximaal komt.



Figuur 1.6

Antwoord

Bepaal eerst de nulpunten door $h(x) = 0$ op te lossen. Door ontbinding in factoren vind je $x(-0{,}005x + 1) = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 200$.
Omdat een parabool symmetrisch is, zit het maximum bij $x = 100$. De hoogte is dus maximaal bij 100 meter. En omdat $h(100) = 50$ komt het voorwerp maximaal 50 meter hoog.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2 op pagina 26** gaat het over een parabolische baan met functievoorschrift $h(x) = -0{,}005x^2 + x$.

Je wilt zelf met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de grafiek maken.

a Je moet dan eerst goede vensterinstellingen kiezen. Waarom?

b Om het hoogste punt te kunnen bepalen, moet je de grafiek goed in beeld hebben. Waarom bereken je nu eerst de nulpunten?

c Maak vervolgens een geschikte tabel om te bekijken welke functiewaarden er allemaal voorkomen.

d Bij welke vensterinstellingen komt de hele baan in beeld?

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 100x(x - 10)(x - 20)^2$.

a Welke nulpunten heeft f?

b Waarom heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot?

Je kunt de x-waarden van het venster instellen, de nulpunten moeten zichtbaar worden en asymptoten zijn er niet. Met de tabel bekijk je de grootte van de functiewaarden.

c Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien?

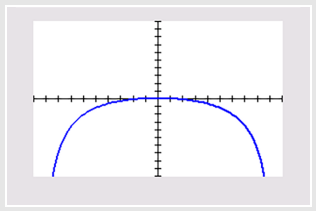
d Bepaal de extremen van deze functie in gehele getallen nauwkeurig.

e Welk bereik heeft deze functie?

Voorbeeld 3

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{4x^2-16}{x^2-100}$.
Hij is gemaakt met de grafische rekenmachine met het standaardvenster.

Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f.



Figuur 1.7

Antwoord

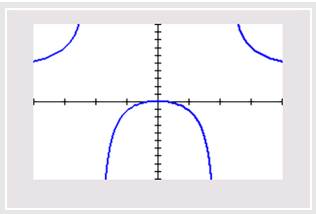
Op grond van dit plaatje zou je heel verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is. En dat de grafiek een soort van afgeplatte bergparabool is. En dat is niet goed.

Eerst kijk je of er nulpunten en asymptoten zijn:

- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$.
  Er zijn daarom precies twee nulpunten $x = -2$ en $x = 2$.
- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$.
  Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ wellicht verticale asymptoten zijn. Door getallen in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee vericale asymptoten zijn.
- Als de grote getallen (of grote, negatieve getallen) invult naderen de functiewaarden naar 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 10$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0{,}16$. (Laat je rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0{,}16\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$.



Figuur 1.8

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{2x^2+4}{x^2-16}$.

a Plot de grafiek en geef de juiste vensterinstellingen.

b Geef de karakteristieken van f.

c Geef D_f en B_f.

Opgave 7

Gegeven is de functie g met $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a Waarom heeft deze functie geen verticale asymptoot?

b Welk nulpunt heeft functie g?

c Onderzoek of g een horizontale asymptoot heeft.

d Geef het domein en bereik van g.

Oefenen

Opgave 8

Geef het domein, het bereik en de asymptoten van de volgende functies.

a $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$

b $g(x) = \frac{4-x}{x}$

c $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 9

Een voorwerp wordt vanaf de grond weggeschoten. De hoogte h van het voorwerp wordt beschreven door $h(x) = -0{,}1x^2 + 8x$, waarbij x de horizontale afgelegde afstand in meter van het voorwerp is.
Bereken algebraïsch de maximale hoogte van het voorwerp.

Opgave 10

De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte wordt. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f dan kun je de golflengte W (in meter) berekenen: $W = \frac{330}{f}$. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

a Als je [15,30000] als domein kiest, welk bereik heeft W dan?

b Vleermuizen kunnen hoogfrequente geluiden horen, soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?

c Welke golflengte heeft dat geluid?

d Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?

e Welke golflengte heeft zo'n geluid?

f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Opgave 11

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{10x}{(x-20)^2}$.

a Bereken de nulpunt(en) van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f.

Opgave 12

Voor de totale kosten (TK) bij de productie van een bepaald artikel geldt:
$TK = 100 + 0{,}1q^2$ waarin q het aantal exemplaren voorstelt.

a Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks in twee decimalen nauwkeurig.

b Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal zijn van de lijn door de punten $(0{,}0)$ en $(q{,}TK)$.

c Stel een voorschrift op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GTK) als functie van q.

d Welke asymptoot heeft de functie GTK? Schrijf het domein en het bereik van GTK op.

Toepassen

Opgave 13: Overlevingstijd

Als iemand in koud water terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C wordt de overlevingstijd genoemd.

Bij de vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. In deze situatie geldt de volgende formule:

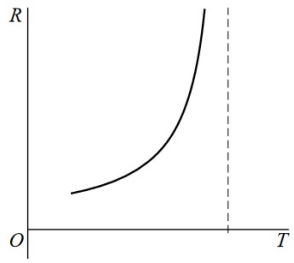
$R = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 5{,}0$

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in °C.

a Bij een watertemperatuur van 20 °C is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 °C . Bereken hoeveel keer zo groot.

b Bereken de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

c Hier zie je de grafiek van T als functie van R.
Bepaal de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.



Figuur 1.9

Opgave 14: Zuurstofgehalte

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule:

$Z(t) = 200\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{t+10^2}\right)$

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t. Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

a Bereken $Z(0)$.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van $Z(t)$? Welke betekenis hebben ze?

c Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?

d De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

a Bereken $f(100)$ en $f(-100)$ in vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken het nulpunt van f.

c Breng de grafiek van f in beeld.

d Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.

e Geef het domein en bereik van f.

Opgave 16

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

a Bereken het nulpunt van deze functie.

b Welke asymptoten heeft deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f. (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)

Opgave 17

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?

b Wat is een zinvol domein voor K als functie van T?

c Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

d Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

1.4 Samengestelde functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- herkennen uit welke schakels (rekenstappen) het functievoorschrift van een samengestelde functie bestaat;
- het bij een functie behorende rekenschema en terugrekenschema opstellen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt luidt: Neem de snelheid in km/uur en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met $\frac{3}{4}$. Daarmee krijg je de lengte van de remweg in meter.

a Bereken de lengte van de remweg bij een snelheid van 60 km/h. Volg de rekenstappen van de vuistregel.

b Stel een formule op voor de remweg R (in m) als functie van de snelheid v in km/h.

Bij een ongeval waarbij een auto voluit moest remmen en zonder botsen tot stilstand is gekomen, meet de politie een remspoor van 90 m. Daaruit wil men kunnen berekenen hoe hoog de snelheid was waarmee de auto heeft gereden.

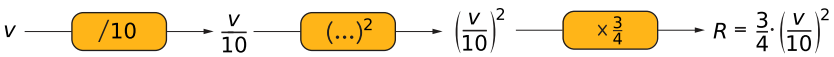
c Hoe doet je dit vanuit de gegeven vuistregel? Bereken die snelheid in km/h.

d Stel een formule op voor de snelheid v (in km/h) als functie van de remweg R in m.

Uitleg

Een vuistregel voor het berekenen van de remweg van een auto die met een gegeven snelheid rijdt, luidt: Neem de snelheid in kilometer per uur (km/h) en deel dit getal door 10. Kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig daarna wat je hebt gevonden met $\frac{3}{4}$. Je krijgt dan de lengte van de remweg in meter.

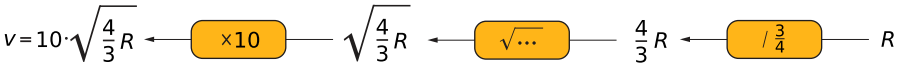
Om die remweg te berekenen werk je bij deze vuistregel met meerdere rekenstappen. Neem voor de remweg R (in meter) en voor de snelheid v (in km/h). Bekijk het rekenschema.



Figuur 1.1

De functie met voorschrift $R = f(v)$ is een samengestelde functie die bestaat uit drie rekenstappen, drie schakels.

Wil je omgekeerd de snelheid berekenen als je de remweg weet, dan kun je beter een functie maken van de vorm $v = ...$
Door elke afzonderlijke schakel terug te rekenen, maak je een terugrekenschema.



Figuur 1.2

Met zo'n terugrekenschema kun je de functie van de vorm $R = f(v)$ herleiden naar de vorm $v = ...$

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 31** wordt gesproken over een samengestelde functie $R = f(v) = \frac{3}{4}\left(\frac{v}{10}\right)^2$. Het gaat om het berekenen van de remweg van een auto die met een bepaalde snelheid rijdt.

a Neem voor v de waarden 0, 20, 40, ..., 140 en bereken de bijbehorende waarden van R.

b Teken de grafiek van $R = f(v)$.

c Als v alleen de waarden vanaf 0 tot kleiner of gelijk aan 140 aanneemt, welk domein en welk bereik heeft deze functie dan?

Als je vanuit een gemeten remweg de snelheid wilt berekenen, dan is een functie van de vorm $v = ...$ handiger. Die vind je met behulp van een terugrekenschema.

d Hoe maak je zo'n terugrekenschema?

e Maak ook een grafiek van de functie $v = 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}R}$.

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $y = f(x) = \sqrt{x} + 5$.

a Uit welke twee schakels bestaat f? Geef dit weer in een rekenschema en bereken $f(4)$.

b Maak een terugrekenschema bij f en laat zien dat daar de functie $x = (y - 5)^2$ bij hoort.

Als je de grafiek van de terugrekenfunctie $x = (y - 5)^2$ wilt tekenen, komen de waarden van y, de invoerwaarden, op de horizontale x-as. Je voert hem immers in als Y2 = (X - 5)^2.

c Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 3

Bij delen is het terugrekenen soms lastiger.

a Laat zien, dat de functie $y = \frac{3}{x}$ als terugrekenstap $x = \frac{3}{y}$ heeft.
(De terugrekenstap is eigenlijk gelijk aan de rekenstap zelf.)

Bekijk nu de functie $P = 1{,}20 + \frac{3{,}20}{a}$ waarin a het aantal gereden km en P de prijs per km is.

b Schrijf het bijpassende rekenschema op.

c Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de bijbehorende functie van de vorm $a = ...$ op.

d Maak de grafieken van zowel $P = \frac{3{,}20}{a} + 1{,}20$ als de bijbehorende terugrekenfunctie. Bedenk, dat zowel a als P alleen positieve getallen kunnen zijn. Zijn beide grafieken elkaars spiegelbeeld?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een functie die uit meerdere rekenstappen vanuit dezelfde variabele bestaat, is een **samengestelde functie**. Zo bestaat de functie $y = \sqrt{x} + 5$ uit twee rekenstappen:

Figuur 1.3

Bij veel samengestelde functies kun je zo'n **rekenschema** gebruiken om terug te rekenen. Je gebruikt steeds bij elke schakel de terugrekenstap.

Figuur 1.4

Zo heb je door terugrekenen $y = \sqrt{x} + 5$ herleid tot $x = (y - 5)^2$. Omdat het in de wiskunde gebruikelijk is om de invoervariabele op de horizontale as te zetten, zijn de grafieken van deze functie elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Bij het terugrekenen moet je er wel voor zorgen dat bij elke y-waarde precies één x-waarde hoort. Is dit niet het geval, dan verklein je het domein van f tot dit wel het geval is.
Bijvoorbeeld: bij de functie $f(x) = x^2$ is het terugrekenen niet eenduidig als het domein $\mathbb{R}$ is, immers als $y = 4$ dan is $x = 2 \vee x = -2$. Als je je beperkt tot het domein $[0, \rightarrow\rangle$, dan is het terugrekenen wel eenduidig.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$. Bepaal de rekenstappen van deze samengestelde functie op en herleid hem naar de vorm $x = ...$

Antwoord

Deze functie ontstaat zo:

Figuur 1.5

Het voorschrift ervan is dus $y = \sqrt{x^2 + 9}$.

De inverse functie vind je zo:

Figuur 1.6

Het voorschrift van de inverse functie is $x = \sqrt{y^2 - 9}$.

Bij de laatste terugrekenstap moet je terugrekenen vanuit een kwadraat. En dat levert meestal twee uitkomsten op. Omdat het domein van f beperkt is tot $[0, \rightarrow\rangle$, neem je alleen de positieve uitkomsten.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 33** zie je dat functie f uit drie schakels bestaat. De volgorde waarin je de schakels zet is daarbij van belang. Bekijk de functie $g(x) = \left(\sqrt{x} + 9\right)^2$.

a Laat zien, dat g uit dezelfde schakels bestaat als f, maar in een andere volgorde.

b Herleid g naar de vorm $x = ...$ Laat duidelijk met een terugrekenschema zien hoe je dit doet.

c Maak vervolgens beide grafieken en ga na dat ze elkaars spiegelbeeld lijken te zijn bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Opgave 5

Om functies van de vorm $y = f(x)$ te herleiden naar de vorm $x = ...$, moet je terugrekenen. En daarvoor moet je de terugrekenstappen van allerlei basisbewerkingen kennen.

a Bij $y = \frac{1}{2}x$ wordt één basisbewerking uitgevoerd, namelijk vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Wat is dan de terugrekenbewerking?

b Hoe ziet de functie bij a er in de vorm $x = ...$ uit?

c Welke bewerking hoort bij $y = \frac{1}{x}$?

d Welke terugrekenstap past daar bij?

e De terugrekenstap van kwadrateren is worteltrekken (en omgekeerd). Waar moet je in dit geval voor oppassen?

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = x^3 + 4x$.

a Waarom is f geen samengestelde functie?

b Kun je deze functie herleiden naar de vorm $x = ...$?

Voorbeeld 2

Voor een toets kun je maximaal 30 punten krijgen. Het cijfer c wordt berekend met de formule: $c = \frac{p}{30} \cdot 9 + 1$. Hierin is p het behaalde aantal punten. Je ziet dat c een lineaire functie is van p.
Uit welke basisbewerkingen bestaat $c(p)$? Stel een formule op voor p als functie van c.

Antwoord

De basisbewerkingen zijn van boven naar beneden:

- delen door 30;
- vermenigvuldigen met 9;
- 1 optellen.

Om p als functie van c te kunnen schrijven, ga je terugrekenen (denk om de omgekeerde volgorde):

- 1 aftrekken;
- delen door 9;
- vermenigvuldigen met 30.

Je krijgt $p = \frac{c-1}{9} \cdot 30$.

Opgave 7

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 34**. Een andere docent hanteert voor dezelfde toets de formule $c = 1 + \frac{3p}{10}$.

a Geef bij deze formule de rekenstappen.

b Stel een bijpassende formule op voor p als functie van c.

c Laat zien dat deze formule voor c hetzelfde resultaat oplevert als die in het voorbeeld.

Als je van de functie $c(p)$ een grafiek maakt, dan moet je p vervangen door X en c vervangen door Y.

d Hoe zit dat als je in dezelfde figuur de grafiek van $p(c)$ maakt?

Oefenen

Opgave 8

Gegeven is de functies f met $f(x) = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}x}$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$.

a Maak de grafiek van f.

b Laat zien, dat f een samengestelde functie is door een bijpassend rekenschema te geven.

c Maak een terugrekenschema en herleid daarmee de functie naar de vorm $x = ...$

Opgave 9

Maak bij elk van de volgende functies een rekenschema (als dat mogelijk is) en een terugrekenschema. Schrijf de functies in de vorm $x = ...$

a $f_1(x) = \sqrt{x - 4}$

b $f_2(x) = \sqrt{x} - 4$

c $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ met $x \geq 0$

d $f_4(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2$ met $x \geq -5$

Opgave 10

Voor een eenparig versnelde beweging gelden de formules

- $v(t) = v_0 + at$
- $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Hierin is:

- t de tijd in s
- s de afgelegde weg in m
- v de snelheid in m/s
- v_0 de snelheid op $t = 0$ in m/s
- a de constante versnelling in m/s^2

a Laat zien, dat $v(t)$ een samengestelde functie is door een rekenschema te maken.

b Herleid $v(t)$ naar de vorm $t = ...$

c Waarom is $s(t)$ geen samengestelde functie (in deze vorm)?

Je kunt $s(t)$ schrijven in de vorm $s(t) = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2a}$.

d Laat zien dat deze formule overeen komt met de formule $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

e Herleid nu met behulp van rekenschema's $s(t)$ naar de vorm $t = ...$

Opgave 11

Een winkelier rekent over al zijn producten 21% BTW (Belasting Toegevoegde Waarde) die hij zelf weer afdraagt aan de overheid. Dat betekent dat van elk artikel de winkelprijs w wordt berekend door de kostprijs k met 1,21 te vermenigvuldigen.

a Stel een formule op voor w als functie van k.

b Een klant ziet alleen de winkelprijs. De kostprijs kan hij dan berekenen met een formule van de vorm $k = c \cdot w$. Bereken de waarde van de constante c in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel procent van de winkelprijs is de kostprijs van elk artikel?

Toepassen

Opgave 12: Omhoog werpen

Een voorwerp wordt met een beginsnelheid van 20 meter per seconde (m/s) omhoog geworpen. Met verwaarlozing van de luchtweerstand is de snelheid v (in m/s) een functie van de tijd t (in seconde):
$v(t) = 20 - 9{,}81t$

a Bereken op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

b Schrijf t als functie van v.

c Bereken met de formule uit b op twee decimalen nauwkeurig op welk tijdstip het voorwerp voor het eerst zal vallen.

Opgave 13: Slingertijd

Als je een massa aan een dunne kabel ophangt en je brengt die massa in beweging, gaat die massa heen en weer slingeren met een slingertijd van

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81}}$$

Hierin is t de slingertijd in seconden en l de lengte van het touw in meter (9,81 is de zwaartekrachtsconstante).

a Welke slingertijd hoort er bij een massa van 1 kilogram die slingert aan een kabel met een lengte van 2 meter? Geef je antwoord in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Iemand wil de lengte van de kabel berekenen door de slingertijd te meten. (De lengte van de kabel is de afstand van het ophangpunt tot het massamiddelpunt van het slingerende voorwerp.) Hij schrijft de formule in de vorm $l = ...$

b Schrijf l als functie van t.

c Bereken nu met de formule uit b in twee decimalen nauwkeurig de lengte van de kabel als de slingertijd 3,2 seconden is.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x + 4)^2 + 3$.

a Maak de grafiek van f en bepaal het domein en het bereik.

b Maak een bij deze functie passend rekenschema.

c Maak een terugrekenschema en herleid daarmee de functie naar de vorm $x = ...$

d Waarom kun je alleen terugrekenen als je het domein van f beperkt tot $[-4, \rightarrow\rangle$?

Opgave 15

Wanneer op aarde een voorwerp vanaf een hoogte van 100 meter valt in het luchtledige, dan geldt voor de hoogte ervan boven de grond:

$h(t) = 100 - 4{,}9t^2$

Hierin is h de hoogte in meter en t de tijd in seconde.

a Is hier sprake van een samengestelde functie? Zo ja, geef dan een bijpassend rekenschema.

b Op welk tijdstip wordt het voorwerp losgelaten?

Als je snel de tijdstippen wilt berekenen waarop het voorwerp op een hoogte van 90, 80, 70, ..., 0 m zit, kun je de formule beter herleiden tot een vorm waarin t een functie is van h.

c Laat zien hoe de formule er dan uit komt te zien.

d Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel seconden het voorwerp over deze val doet.

1.5 Transformaties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van grafieken;
- grafieken van functies die door transformatie ontstaan uit een standaardfunctie afleiden uit de grafiek van die standaardfunctie.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met de belangrijkste standaardfuncties.

Verkennen

Opgave V1

In de applet kun je de grafiek van g met de schuifbalkjes vervormen en/of verschuiven.

Bekijk de applet

a Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

b Maak de grafiek van $g_1(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

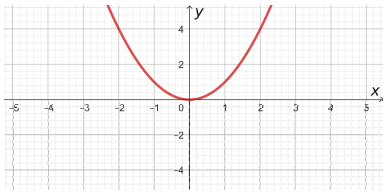
c Maak de grafiek van $g_1(x) = 1{,}5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

d Maak de grafiek van $g_1(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

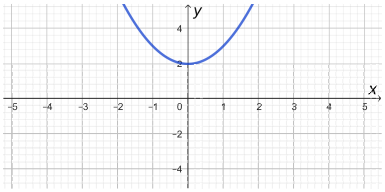
e Maak de grafiek van $g_1(x) = 1{,}5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

Uitleg

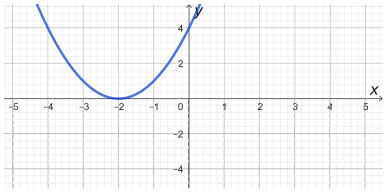
Bekijk hier de grafiek van de kwadratische functie $f(x) = x^2$ gemaakt met GeoGebra met de vensterinstellingen $[-5,5] \times [-5,5]$.
Door in het functievoorschrift met een getal een vermenigvuldiging uit te voeren of een optelling te doen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Dat heet wel: de grafiek transformeren (vervormen).



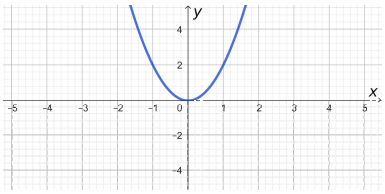
Figuur 1.1



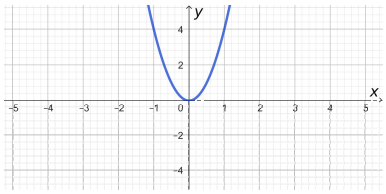
$y = x^2 + 2$



$y = (x + 2)^2$



$y = 2 \cdot x^2$



$y = (2 \cdot x)^2$

Figuur 1.2

Je moet deze vier transformaties kennen.

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door alle y-waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder omhoog van de x-as af te liggen. Dit heet 2 eenheden verschuiven ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als -2 eenheden verschuiven ten opzichte van de y-as.
- De grafiek van $y = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y-waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zo ver van de x-as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x-waarden met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zo ver van de y-as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

b $y_3 = (x - 4)^2 + 2$

c $y_4 = 2 - x^2$

d $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

a $y_2 = 3 \cdot x^3$

b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$

c $y_4 = 5 - 2x^3$

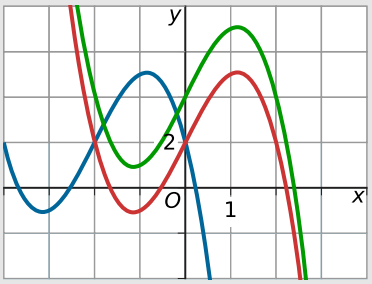
d $y_5 = (0{,}5x)^3 + 1$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as 2 eenheden te verschuiven.
- De blauwe grafiek van $y = f(x + 2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as - 2 eenheden te verschuiven.

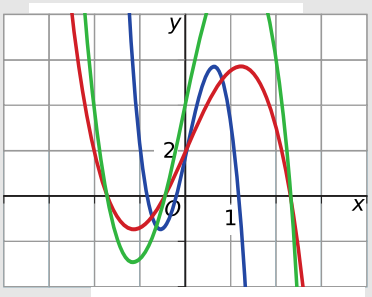


Figuur 1.3

Dit zijn twee **transformaties van een grafiek**. Door het optellen van een getal in het functievoorschrift verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de gegeven functie.

Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

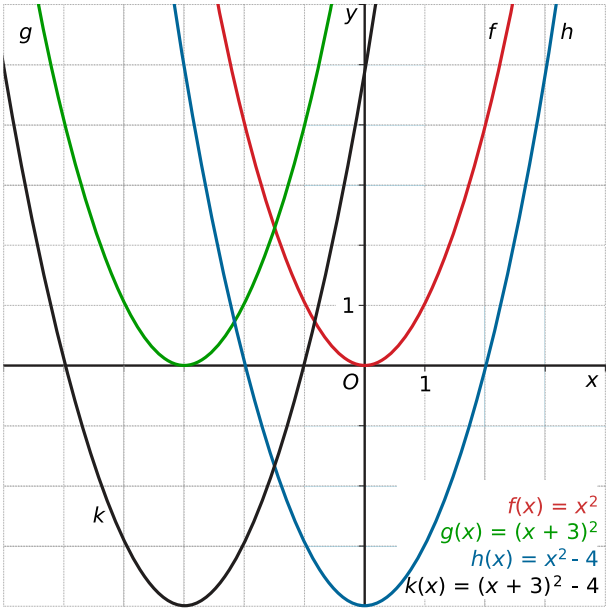


Figuur 1.4

Ook dit zijn twee transformaties van een grafiek. Door het vermenigvuldigen van een getal in het functievoorschrift wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging ten opzichte van een as**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven



Figuur 1.5

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = f(x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van 2 ten opzichte van de y-as en een translatie van 3 ten opzichte van de x-as. (Je zegt ook wel 2 naar rechts en 3 omhoog verschuiven.)

De grafiek van f heeft als top $(0,0)$, de top van de grafiek van g is $(2,3)$.

In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = f(x-c) + d$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van c ten opzichte van de y-as en een translatie van d ten opzichte van de x-as.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(x-2) = (x-2)^2 - 2(x-2) = (x-2)^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 8$. Je vervangt dus elke x in de formule door $x - 2$. Denk daarbij om de haakjes.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 41** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(x+2)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = f(x) + 2$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Schrijf het voorschrift van g_2 op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(x+2)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = f(x) - 2$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

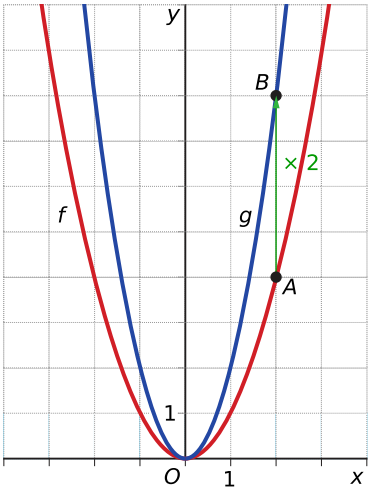
Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2.

Je ziet in de grafiek dat de y-coördinaat van punt B gelijk is aan 8 en dat is twee keer zo groot als de y-coördinaat van punt A.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2\left(x^2 - 2x\right) = 2x^2 - 4x$. Je vermenigvuldigt dus de hele formule met 2.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = d \cdot f(x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met d.



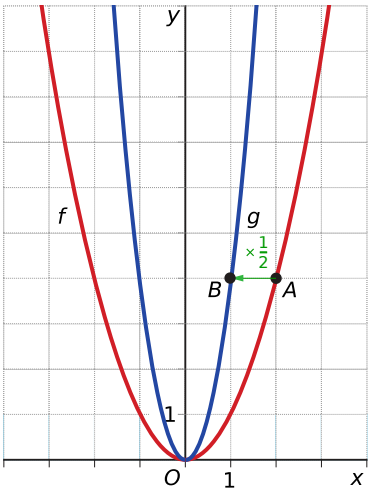
Figuur 1.6

De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x-coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x-coördinaat van punt A.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x = 4x^2 - 4x$. Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{c}$.



Figuur 1.7

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 42** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

a Maak de grafiek van $g_1(x) = f(2 \cdot x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

b Maak de grafiek van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.

c Schrijf het voorschrift van g_1 op.

d Geef het functievoorschrift van g_2.

e Oefen dit met andere functies g_1 en g_2.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(2x)$ op. Plot de grafiek van g_1. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van g_2. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Transformaties

De grafiek van $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$ ontstaat uit die van f door de vier transformaties toe te passen. Bekijk nog eens goed (met behulp van de schuifbalkjes) welke transformaties je in welke volgorde toepast.

Opgave 7

In de applet in het voorbeeld kun je alle vier de transformaties toepassen op functie f.
Geef bij elk van de functies aan welke transformaties je moet toepassen om de grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$

b $h(x) = f(x - 4) + 2$

c $k(x) = 2 - f(x)$

d $l(x) = f(3x) + 2$

e $m(x) = 2 \cdot f(3(x - 1)) + 4$

Opgave 8

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door de genoemde transformaties.

a Ten opzichte van de x-as met -2 vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x-as toepassen.

b Ten opzichte van de y-as met 2 vermenigvuldigen en dan een translatie van - 3 ten opzichte van de x-as toepassen.

c Ten opzichte van de y-as met 0,5 vermenigvuldigen, gevolgd door een translatie van 4 ten opzichte van de y-as.

d Ten opzichte van de y-as een translatie van 4, dan ten opzichte van de y-as een vermenigvuldiging met 0,5 en ten slotte een translatie ten opzichte van de x-as van - 2 toepassen.

Voorbeeld 4

Als je digitaal een grafiek wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen opgeven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door transformatie kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

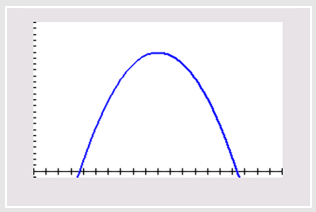
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die standaardfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y-as;
- een vermenigvuldiging van - 5 ten opzichte van de x-as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x-as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30,200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met standaardvenster $[-10,10] \times [-10,10]$. Op dit venster kun je ook de beschreven transformaties toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld op $[20,40] \times [-10,250]$.



Figuur 1.8

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25(x - 5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door transformaties ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

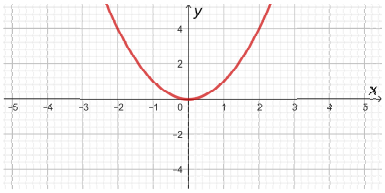
a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke transformaties moeten er dan achtereenvolgens worden toegepast?

c Bepaal nu het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

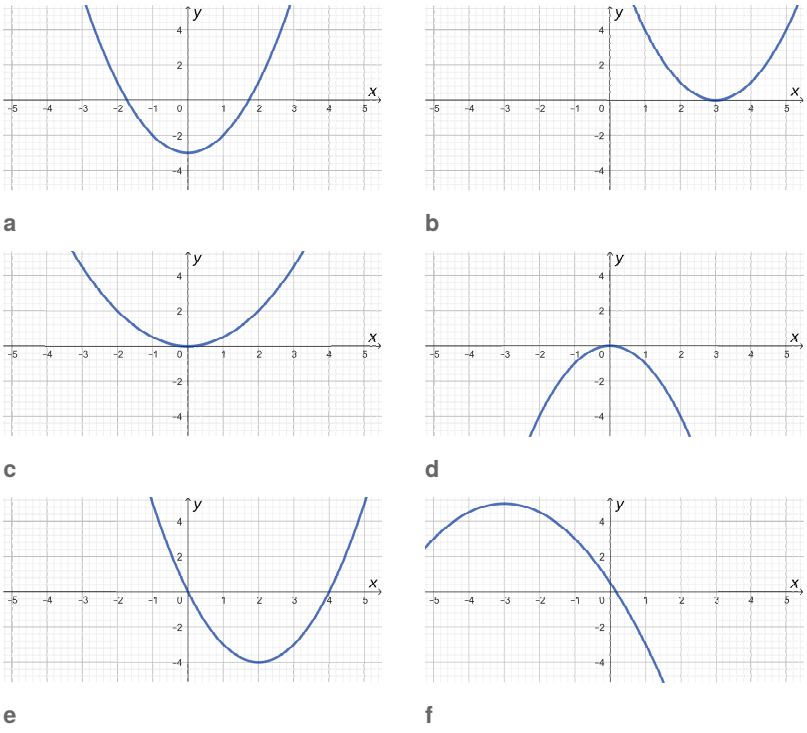
Opgave 10

Je ziet de grafiek van $y_1 = x^2$ met venster $[-5,5] \times [-5,5]$.



Figuur 1.9

Bekijk de zes grafieken met dezelfde vensterinstellingen. Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek van y_1. Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast. Schrijf ook het juiste functievoorschrift op.



a b c d e f

Figuur 1.10

Opgave 11

De grafiek van de functie f met $f(x) = (x - 20)^2 + 200$ komt met de standaardinstellingen van het venster niet in beeld.

Leg uit hoe je door het toepassen van transformaties de vensterinstellingen in één keer zo kunt maken, dat die grafiek wel goed in beeld komt.

Oefenen

Opgave 12

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. De grafieken van de functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn en geef de bijbehorende formules.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot f(x)$

b $y_3 = f(x - 4) + 2$

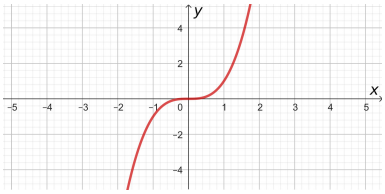
c $y_4 = 2 - f(x)$

d $y_5 = f(3x) - 4$

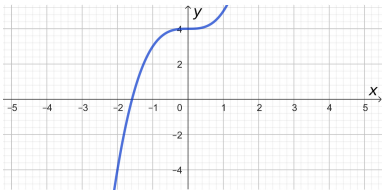
Opgave 13

Je ziet vijf keer een grafiek met de vensterinstellingen $[-5,5] \times [-5,5]$. De standaardfunctie is $y_1 = x^3$.

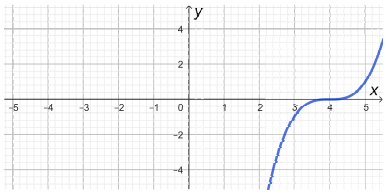
De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan. Geef bij elke functie het juiste voorschrift.



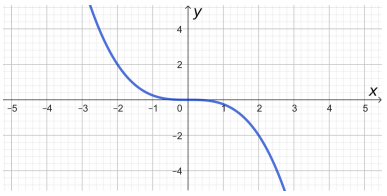
Figuur 1.11



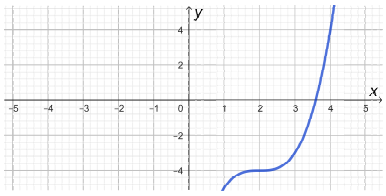
a



b



c

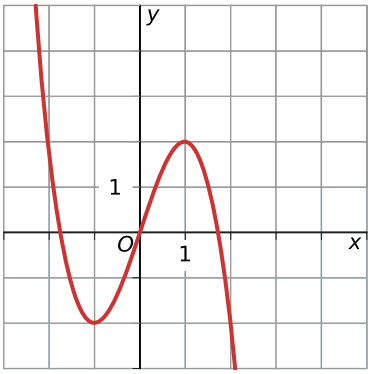


d

Figuur 1.12

Opgave 14

Je ziet de grafiek van $y_1 = f(x)$. Neem de grafiek over op een roosterblad. Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke transformaties je toepast.



Figuur 1.13

a $y_2 = f(x - 2)$

b $y_3 = -2 \cdot f(x)$

c $y_4 = f(x) - 2$

d $y_5 = f(2x) - 1$

Opgave 15

De grafiek van $g(x) = x^2 + bx + c$ heeft als top de coördinaten $(-1,6)$. Geef aan door welke translaties de grafiek van g uit een standaardgrafiek ontstaat en bereken b en c.

Opgave 16

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.

a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een translatie van -2 ten opzichte van de y-as en een translatie van 5 ten opzichte van de x-as toe te passen. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_1.

b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as, vervolgens de translatie van 3 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog de translatie van -4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_2 en het domein en bereik daarvan.

c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as, vervolgens de translatie van 2 ten opzichte van de y-as toe te passen en tot slot nog de translatie van 4 ten opzichte van de x-as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_3 en het domein en bereik daarvan.

Opgave 17

a De grafiek van functie $g(x) = x^2+2x-3$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties zijn dat?

b De functie $h(x) = 2x^2 - 4x + 7$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties?

Toepassen

Opgave 18: Weggeslingerde kogel

Een weggeslingerde kogel beschrijft ten opzichte van een Oxy-assenstelsel de volgende baan: $y = -0{,}02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$.
y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.

b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 19: Grafiek verschuiven

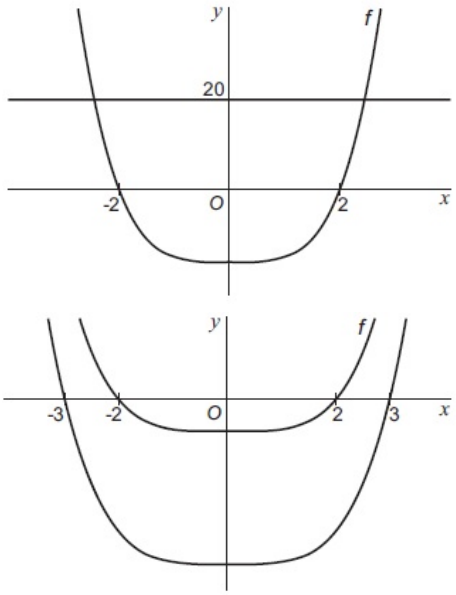
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$. De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2{,}0)$ en $(2{,}0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

a Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x-as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven, veranderen de snijpunten met de x-as in de punten $(-3{,}0)$ en $(3{,}0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

b Bereken hoeveel de grafiek van f omlaag is geschoven.

(bron: examen havo wiskunde B in 2006, tweede tijdvak)



Figuur 1.14

Testen

Opgave 20

Gegeven is een functie $y_1 = f(x)$. Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

a $y_2 = f(x - 3)$

b $y_3 = 0{,}5 \cdot f(x) + 1$

c $y_4 = f(3x)$

Opgave 21

Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen, moet je weten hoe deze ontstaat door transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

c Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek van f goed in beeld komt.

Opgave 22

Je ziet de grafiek van een functie g die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = x^3$. De grafiek van g gaat door het punt $(7{,}6)$.

Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.

Figuur 1.15

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- asymptoten — karakteristieken (nulpunten, toppen, asymptoten)
- samengestelde functie — rekenschema — inverse functie
- transformaties — verschuiven (translatie) — lijnvermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- asymptoten bepalen — karakteristieken van een functie bepalen
- bij een functie de inverse functie bepalen
- transformaties herkennen en uitvoeren

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x + 20)$ en $g(x) = 50x^2$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

b Plot de grafieken van f en g, zodat alle karakteristieken goed te zien zijn.

Schrijf op welke vensterinstellingen je hebt gebruikt.

c Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g.

Opgave 2

Bereken algebraïsch bij de functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en bereik van de functies.

a $f(x) = x^2\left(x^2 - 400\right)$

b $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

Opgave 3

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

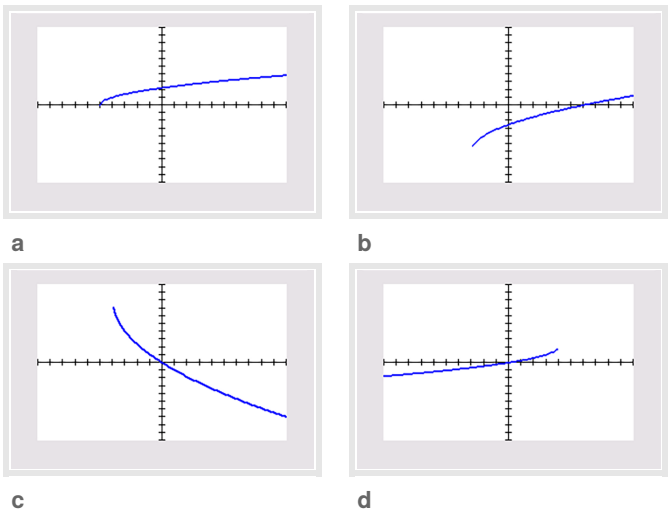
a Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

b Geef het domein en bereik van f.

c Los algebraïsch op: $y = 2$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Je ziet vier grafieken die zijn ontstaan door op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ één of meer transformaties toe te passen. Steeds zijn de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine gebruikt.



Figuur 1.1

Schrijf bij elke grafiek het juiste functievoorschrift op.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}25(x - 10)^2 - 16$.

a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

b Bepaal de top en de nulpunten van de grafiek van f.

Opgave 6

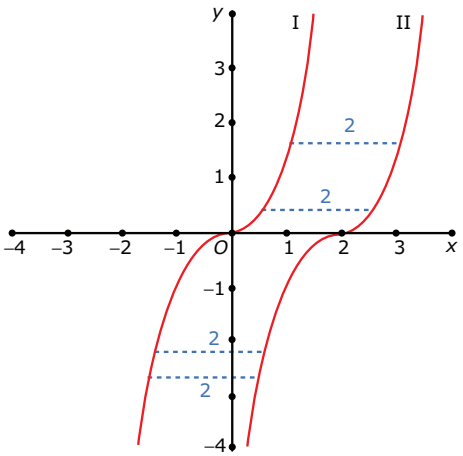
Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x + 4$ en $g(x) = -2x - 2$.

a Geef het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

b Geef het voorschrift van f^{inv}.

Opgave 7

In de figuur zie je de grafieken I en II. I is de grafiek van $y = x^3$. Grafiek II ligt rechts van I, zodanig dat alle horizontale verbindingslijnstukken van I en II de lengte 2 hebben.



Figuur 1.2

a Geef een bij grafiek II passend functievoorschrift.

b De verticale verbindingslijnstukken van I en II variëren in lengte. Bereken de waarden van x waarvoor die lengte 26 is.

c Bereken de kortste lengte van zo'n verticaal verbindingslijnstuk.

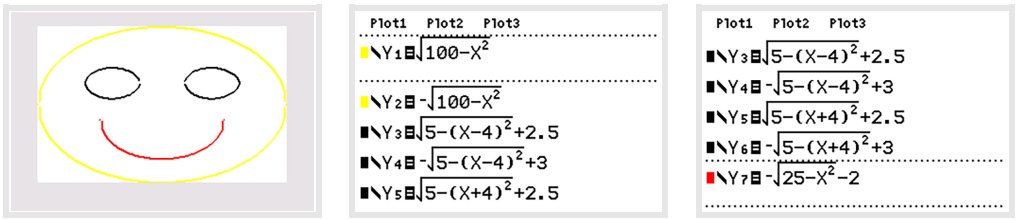
Toepassen

Opgave 8: Smiley

Door gebruik te maken van de juiste functies (en transformaties) kun je smiley's maken met grafieken. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook...

De smiley hiernaast bestaat uit een groot aantal halve cirkels. Omdat voor elk punt (x,y)) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om dit te kunnen invoeren zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$. Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door de straal kleiner te maken en transformaties toe te passen. Tenslotte zet je het assenstelsel even uit.

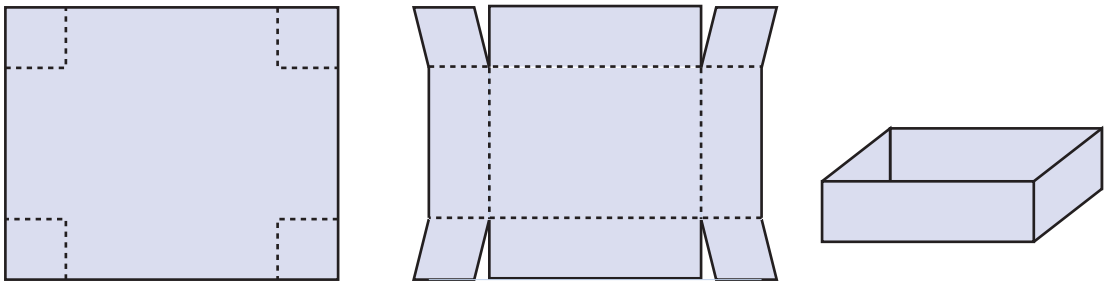
Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt. Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 1.3

Opgave 9: Kartonnen bakje

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Je knipt dan de vier hoeken even ver in, zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 1.4

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het bakje.

a Noem de lengte en de breedte van het ingeknipte stukje x. Stel een formule op voor $I(x)$.

b Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$.

c Hoe ver moet je het karton inknippen om een maximale inhoud te krijgen?

2

Formules opstellen

2.1 Lineaire modellen 54
2.2 Kwadratische modellen 62
2.3 Groeimodellen 69
2.4 Logaritmische modellen 76
2.5 Totaalbeeld 84

2.1 Lineaire modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- het begrip regressielijn en een formule opstellen van een regressielijn.

Voorkennis

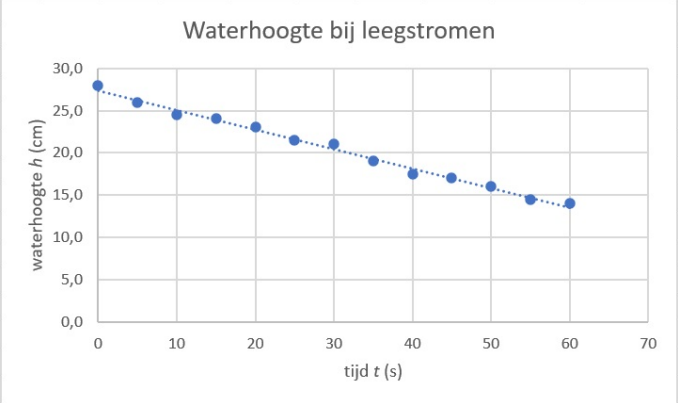
- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- vergelijkingen oplossen met de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

Bij het leegstromen van een bak water is de waterhoogte gemeten.

Hierin is t de tijd in seconden na het openen van de kraan onderin de bak en h de hoogte van de waterspiegel, gemeten in halve cm nauwkeurig.



Figuur 2.1

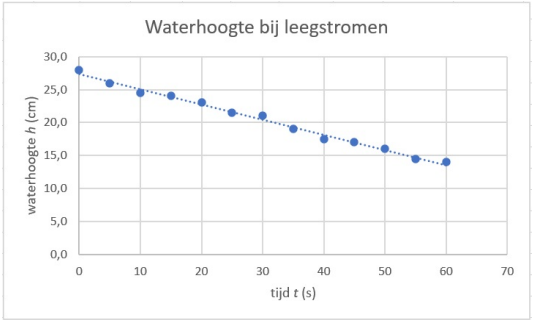
a De punten lijken op een rechte lijn te liggen. Hoe komt het dat ze er niet precies op liggen?

De rechte lijn die in de figuur is getekend, gaat door $(45; 17{,}0)$ en $(0; 27{,}5)$.

b Stel een bij deze lijn passende formule op.

Uitleg

Bij het leegstromen van een bak water is de waterhoogte gemeten.



Figuur 2.2

Hierin is t de tijd in seconden na het openen van de kraan onderin de bak en h de hoogte van de waterspiegel, gemeten in halve cm nauwkeurig.

Het leegstromen lijkt regelmatig te verlopen, steeds per seconde neemt de waterhoogte ongeveer met een vast bedrag af. Vanwege meetonnauwkeurigheden liggen de meetpunten niet precies op de getekende

rechte lijn. Die lijn heet de ‘trendlijn’ of ‘regressielijn’ en wordt door bepaalde computerprogramma's automatisch berekend. Je kunt die lijn goed gebruiken als ‘lineair model’ voor het leegstromen van de bak water.

Om zelf een formule op te stellen lees je twee punten af waar de lijn doorheen gaat: $(45; 17{,}0)$ en $(0; 27{,}5)$.

De lineaire functie die hierbij hoort heeft de vorm $h = a \cdot t + b$.

Daarin is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{17{,}0-27{,}5}{45-0} = -0{,}2333...$

Het invullen van $(0; 27{,}5)$ geeft $b = 27{,}5$.

Bij het lineaire model hoort de lineaire functie $h \approx -0{,}23t + 27{,}5$.

Hiermee kun je uitrekenen wanneer de bak leeg zal zijn.

Opgave 1

Bekijk het leegstromen van een bak water in de **Uitleg op pagina 54**.

a Reken het functievoorschrift van h zelf na.

b Bereken het tijdstip waarop de bak leeg is in seconden nauwkeurig.

Opgave 2

Bekijk weer het leegstromen van een bak water in de **Uitleg op pagina 54**.
Iemand anders vindt dat de rechte lijn moet gaan door $(0; 28{,}0)$ en $(50; 16{,}0)$.

a Reken het functievoorschrift van h dat zij dan krijgt.

b Bereken het tijdstip waarop de bak leeg is in seconden nauwkeurig.

c Is dit lineaire model beter dan dat in de uitleg? Of juist niet?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

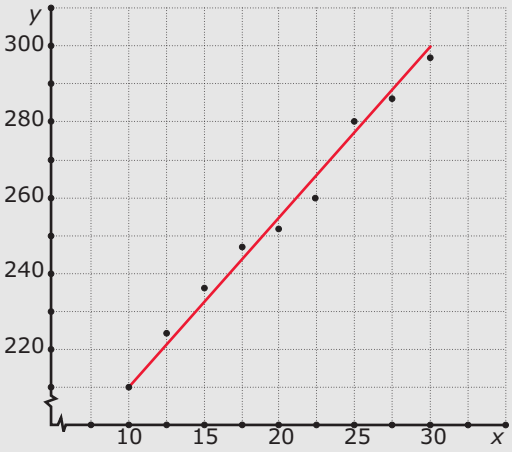
Bekijk de applet

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. Die lijn heet de **trendlijn**, of ook wel **regressielijn**. Daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten $(10,210)$ en $(30,300)$, dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- de richtingscoëfficiënt van de lijn is $a = \frac{300-210}{30-10} = 4{,}5$;
- de gevraagde formule is $y = 4{,}5x + b$;
- $(10,210)$ moet op de lijn liggen, dus $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4{,}5x + 165$.



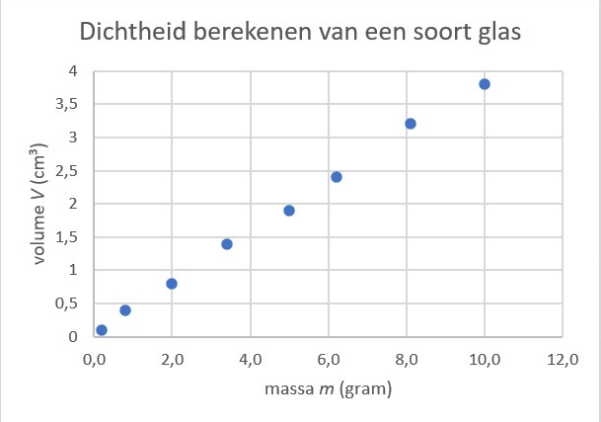
Figuur 2.3

Voorbeeld 1

Om de dichtheid van het glas van een bepaalde soort te meten, zijn er van 8 stukken van die glassoort zowel de massa m (in gram) als het volume V in cm^3 gemeten. Je ziet hier de meetgegevens.

Bereken de dichtheid ρ in gram/cm^3.

m (gram)	0,2	0,8	2,0	3,4	5,0	6,2	8,1	10,0
V (cm^3)	0,1	0,4	0,8	1,4	1,9	2,4	3,2	3,8



Figuur 2.4

Antwoord

Teken een zo goed mogelijk passende regressielijn en stel daarbij een lineair model op in de vorm van een lineaire functie. De richtingscoëfficiënt van die rechte lijn bepaalt de gevraagde dichtheid.

De lijn zou natuurlijk door $(0{,}0)$ moeten gaan. Verder lijkt $(10{,}0;\, 3{,}8)$ een geschikt tweede punt.

De formule krijgt de vorm $V = a \cdot m + b$, met:

- de richtingscoëfficiënt van de lijn is $a = \frac{3{,}8-0}{10-0} = 0{,}38$;
- de gevraagde formule is $V = 0{,}38m + b$;
- $(0{,}0)$ moet op de lijn liggen, dus $b = 0$.

De formule is $V = 0{,}38m$.

De gevraagde dichtheid is $\rho = \frac{1}{0{,}38} \approx 2{,}63$ gram/cm^3.

Opgave 3

Bekijk het berekenen van de dichtheid van een soort glas in **Voorbeeld 1 op pagina 57**.

a Licht toe, dat de dichtheid van dit glas niet 0,38, maar juist $\frac{1}{0{,}38}$ gram/cm^3 is.

b Hoe kun je de gegevens weergeven zo, dat de richtingscoëfficiënt wel meteen ρ is?

c Laat door een berekening zien, hoe je dan ρ berekent.

Opgave 4

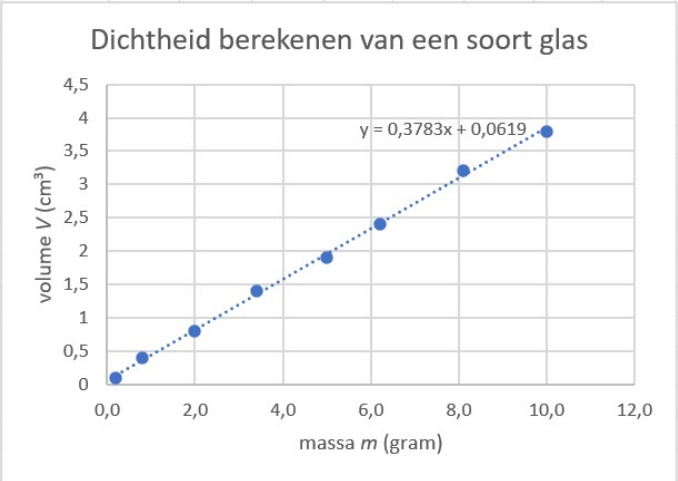
Bij het berekenen van de dichtheid van een soort glas in **Voorbeeld 1 op pagina 57**, kun je ook de computer de regressielijn laten opstellen, zie figuur. Die lijn past beter bij de meetpunten.

a Leg uit, waarom deze trendlijn toch niet correct is.

Wel zou de trendlijn door (0,0) en (6,2; 2,4) kunnen gaan.

b Maakt dit veel verschil voor de waarde van ρ?

c Op hoeveel decimalen nauwkeurig kun je zo de waarde van ρ vaststellen



Figuur 2.5

Oefenen

Opgave 5

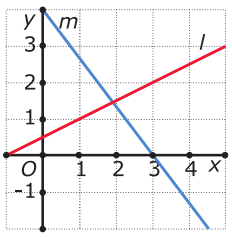
Bij een verzameling meetgegevens (x,y) past een regressielijn die door de punten $(120,31)$ en $(200,23)$ gaat.

a Stel een formule op die past bij deze regressielijn.

b Bereken het nulpunt van de bijbehorende functie.

Opgave 6

Bereken het exacte snijpunt van deze twee lijnen.



Figuur 2.6

Opgave 7

Je kunt met een elektrische auto vanuit stilstand snel optrekken. Neem aan dat je de versnelling ongeveer constant kunt houden en elke seconde de snelheid v in km/h op de km-teller kunt aflezen. Je krijgt deze gegevens:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
v (km/h)	0	10	24	38	50	63	75

Tabel 2.1

a Stel een formule op die past bij deze tabel.

b Bereken voor welke waarde van t geldt $v = 100$ km/h.

Opgave 8

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8	4,3

Tabel 2.2

Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel.
Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Opgave 9

Voor gassen geldt de wet van Gay-Lussac. Het volume V (in m^3) van een bepaalde hoeveelheid gas bij een bepaalde druk hangt af van de temperatuur T (in °C). Er geldt: $\frac{V(T)}{T+273} = \frac{V(0)}{273}$ waarin -273 °C het absolute nulpunt is en $V(0)$ het volume bij 0 °C is.

a Herleid deze formule tot $V(T) = V(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{273}T\right)$.

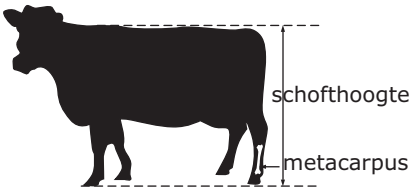
b Leg uit dat er sprake is van een lineair model. Welke aanname moet je doen, wil dat model geldig zijn? Welk domein moet je kiezen?

c Neem $V(0) = 1$ m^3 en breng de bijbehorende grafiek in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.

d Welk volume heeft dit gas bij kamertemperatuur (20 °C)?

e Bij welke temperatuur is het volume 1,5 keer zo groot geworden ten opzichte van $V(0) = 1$?

Toepassen



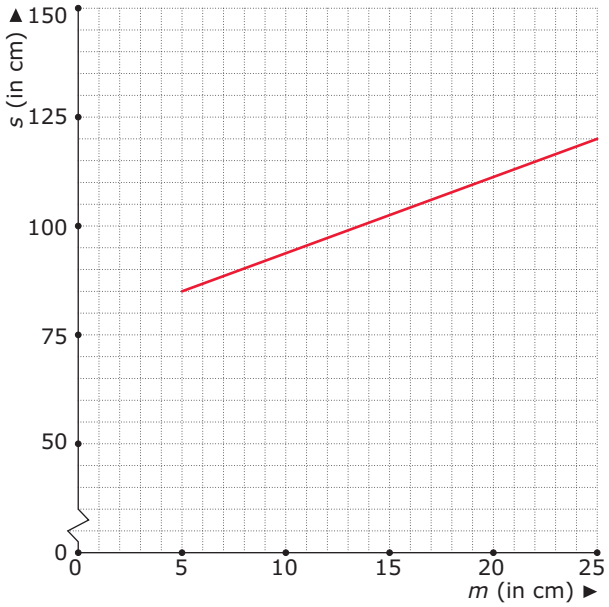
Figuur 2.7

Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting. Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel. Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven. Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte. Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan. Men heeft voor twee runderrassen, A en B, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras.

Opgave 10

Lees het verhaal over de schofthoogte van runderen in **Toepassen op pagina 59**.

Onderstaande grafiek (zie **werkblad**) geeft het verband tussen de schofthoogte (s) en de lengte van de metacarpus (m) voor ras A.



Figuur 2.8

a Stel een formule op, die bij deze grafiek past.

Voor ras B geldt de formule: $s = 5m + 16$ $(5 \leq m \leq 25)$.

b Teken in de figuur de grafiek bij deze formule.

c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

In theorie zou bij opgegeven waarden van m en s van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras A of van ras B betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in c. In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven. We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.

d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Opgave 11

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in onderstaande tabel.

schofthoogte (cm)	levend gewicht ras A (kg)	levend gewicht ras B (kg)
110	400	380
120	470	435

Tabel 2.3

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras A of van ras B zijn.

Bereken voor beide mogelijkheden het levend gewicht.

Testen

Opgave 12

Er bestaat een verband tussen het aantal ademhalingen A dat een mens per minuut maakt, en de polsslag P in slagen per minuut. Een arts onderzoekt een groepje van vijftien mensen en krijgt de volgende meetwaarden:

A	16	16	19	20	20	23	24	26	27	28	30	34	36	41	44
P	57	59	66	68	71	70	72	84	82	80	91	94	105	116	120

Tabel 2.4

a Zet de gegevens uit de tabel in een grafiek. Zet A op de horizontale as.

b Bestaat er een lineair verband tussen A en P? Licht je antwoord toe.

c Trek een rechte lijn door de punten $(16{,}57)$ en $(44{,}120)$. Geeft deze lijn een zo goed mogelijke weergave van het verband? Licht je antwoord toe.

d Stel een formule op bij de getekende lijn.

e Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen bij 20, 24 en 28 ademhalingen per minuut. Wijken deze waarden veel af van de gemeten waarden?

f Bereken met behulp van de formule het aantal polsslagen van iemand met 32 ademhalingen per minuut.

2.2 Kwadratische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij een parabool door twee gegeven punten waarvan er één de top is;
- een formule opstellen bij een parabool door drie gegeven punten;
- de begrippen domein en bereik.

Voorkennis

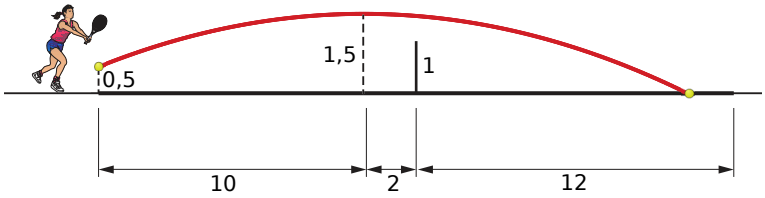
- grafieken tekenen bij kwadratische functies;
- vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en de abc-formule.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



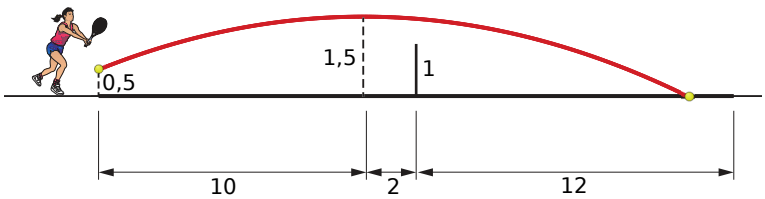
Figuur 2.1

Toon door berekening aan dat de bal in is.

Uitleg

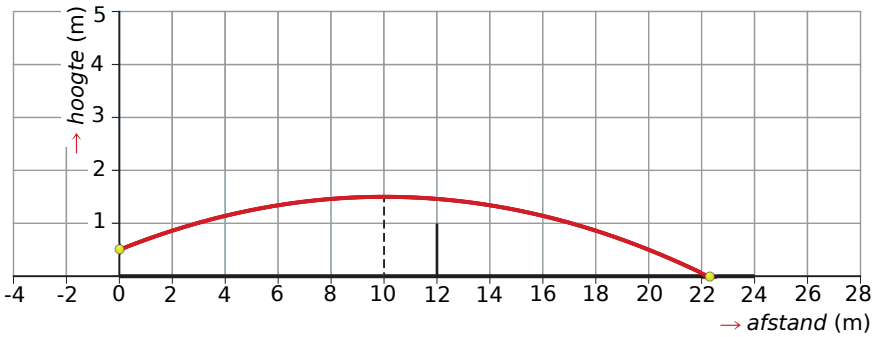
Bekijk de applet: Baan van een tennisbal

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) parabolische baan ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, die ongeveer 24 meter bedraagt.



Figuur 2.2

Je brengt een geschikt assenstelsel aan, zie figuur. De top van de parabool is dan $(10; 1{,}5)$ en de parabool moet ook door het punt $(0; 0{,}5)$ gaan.



Figuur 2.3

Bij deze parabool hoort een formule van de vorm $h = a(x - 10)^2 + 1{,}5$.
Het punt $(0; 0{,}5)$ invullen geeft $a = -0{,}01$. De baan van de bal wordt (ongeveer) beschreven door de formule $h = -0{,}01(x - 10)^2 + 1{,}5$.

De bal komt op de grond als $h = 0$. Ga na, dat dan $x = 10 + \sqrt{150}$. Omdat dat minder dan 24 m is, is de bal in.

In dit geval is de gevonden formule niet voor elke waarde van x geldig, maar alleen voor de waarden van x vanaf 0 tot en met $x = 10 + \sqrt{150}$. Deze waarden vormen het domein van de functie.

Het domein van f schrijf je als $\left[0{,}10 + \sqrt{150}\right]$.

Alle mogelijke waarden van h vormen het bereik van de functie. Dit zijn de getallen in $[0; 1{,}5]$.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 62** wordt de baan van een tennisbal beschreven met een kwadratische functie.

a De baan is alleen ongeveer parabolisch.
Waarom is hij zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

b Laat zien dat $a = -0{,}01$.

c Bereken de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad ‘in’ is.

Opgave 2

Nu wordt de tennisbal geslagen vanaf 10 m voor het net op een hoogte van 0,5 m boven de grond.
De bal wordt met een hoge boog gespeeld en weer in de lengterichting.
Het hoogste punt van de baan zit boven het net op 3,50 m hoogte.
Je brengt weer een geschikt assenstelsel aan met de verticale as bij 0 m en de zwarte lijn als horizontale as.

a Stel een formule op voor de parabolische baan van de bal.

b Is de bal ook nu in?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij elke **parabool** hoort een formule van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ of $y = ax^2 + bx + c$.
Dit stelt je in staat om bij voldoende gegevens de formule van de parabool op te stellen:

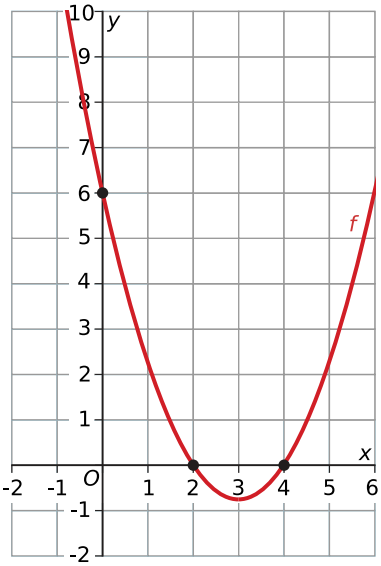
- Als de top (p,q) bekend is of kan worden afgelezen gebruik je de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.
- Als er drie willekeurige punten van de parabool bekend zijn, gebruik je meestal de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- Als de twee nulpunten $(m,0)$ en $(n,0)$ van de parabool en één ander punt bekend zijn, kun je ook de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ gebruiken.

Je vult de gegevens in de formule in en er ontstaan één of meer vergelijkingen met tot soms wel drie variabelen.
Deze vergelijking of dit stelsel vergelijkingen los je dan op om de **parameters** a, b en c, of a, p en q, te vinden.

Voorbeeld 1

De snijpunten met de x-as van de grafiek van de kwadratische functie f zijn $(2,0)$ en $(4,0)$. Het snijpunt met de y-as is $(0,6)$.

Welk functievoorschrift heeft deze functie?



Figuur 2.4

Antwoord

De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn midden tussen de nulpunten is, dus door het punt $(3,0)$. Dus is $f(x) = a(x - 3)^2 + q$.

De grafiek gaat door $(0,6)$, dus $f(0) = 6$, dit geeft $9a + q = 6$.

De grafiek gaat ook door $(2,0)$, dus $f(2) = 0$, dit geeft $a + q = 0$.

Uit de onderste vergelijking volgt: $q = -a$.
Vul dit in de bovenste vergelijking in. Je vindt dan: $9a - a = 6$.
En dus: $a = 0{,}75$. Omdat $q = -a$ is, geldt $q = -0{,}75$.

Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 0{,}75(x - 3)^2 - 0{,}75$.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1 op pagina 64** het functievoorschrift van een parabool door drie gegeven punten is opgesteld.

a Deze berekening kun je ook uitvoeren door uit te gaan van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en de drie punten in te vullen. Laat dat zien.

b Deze berekening kun je ook uitvoeren door uit te gaan van de vorm $f(x) = a(x - m)(x - n)$ en de drie punten in te vullen. Laat dat zien.

Opgave 4

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Opgave 5

Stel een formule op bij de parabool door de punten $(4,3)$, $(0,2)$ en $(6,3)$.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Een parabool gaat door de punten $(1,2)$, $(4,6)$ en $(7,0)$.

Welk functievoorschrift hoort er bij deze parabool? Bepaal het bereik van de bijbehorende functie als het domein $[0,7]$ is.

Antwoord

In het algemeen heeft een parabool een bijpassend functievoorschrift van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, of van de vorm $y = ax^2 + bx + c$. Als de top bekend is, is de eerste vorm het handigst. Nu kun je ook de tweede vorm gebruiken.

Je vult elk van de drie gegeven punt in $y = ax^2 + bx + c$ in:

- punt $(1,2)$ geeft: $2 = a + b + c$
- punt $(4,6)$ geeft: $6 = 16a + 4b + c$
- punt $(7,0)$ geeft: $0 = 49a + 7b + c$

Je krijgt drie vergelijkingen met drie onbekenden. Maar door eerst de bovenste twee van elkaar af te trekken en vervolgens de onderste twee, kun je de c elimineren:

- $15a + 3b = 4$
- $33a + 3b = -6$

En dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je oplossen.

Je vindt: $a = -\frac{5}{9}$ en $b = \frac{37}{9}$.

En hiermee kun je dan ook weer c berekenen: $c = -\frac{14}{9}$.

In twee decimalen nauwkeurig krijg je het functievoorschrift $f(x) \approx -0{,}56x^2 + 4{,}11x - 1{,}56$.

Om het bereik te bepalen bij een domein van $[0,7]$ moet je de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ berekenen, maar ook de (in dit geval) maximale functiewaarde. Je vindt als bereik $\left[-1\frac{5}{9}; 6{,}05\right]$.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 65**.

a Stel zelf de drie vergelijkingen met drie onbekenden op die uit de gegevens volgen.

b Los dit stelsel vergelijkingen op.

c Welk probleem ontstaat er door het geven van een antwoord in twee decimalen nauwkeurig? Hoe zou je dit kunnen oplossen?

d Welk probleem ontstaat als je de algemene vorm $y = a(x - p)^2 + q$ gebruikt om de formule bij de parabool te vinden?

e Bereken de functiewaarden $f(0)$ en $f(7)$ en bereken het maximum van f. Bepaal het bereik bij het domein $[0,7]$.

Opgave 7

Je kunt in de applet de punten verplaatsen en zo oefenen met het opstellen van een formule bij een parabool door drie gegeven punten.

Doe dit, bijvoorbeeld samen met een medestudent.

Opgave 8

Neem nu de punten $(0,1)$, $(10,3)$ en $(25,0)$.

a Stel een formule op bij de parabool door die drie punten.

b Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

Oefenen

Opgave 9

Van een kwadratische functie f is de grafiek een parabool met top $(2, -5)$ en snijpunt met de y-as $(0, -3)$.

a Schrijf het functievoorschrift van f op.

b Bereken de nulpunten van f in twee decimalen nauwkeurig.

c Bepaal het bereik van f als het domein $[0, \rightarrow\rangle$ is.

Opgave 10

De grafiek van de kwadratische functie f gaat door de punten $A(-2,5)$, $B(6,5)$ en $C(0, -1)$.
Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 11

De grafiek van een kwadratische functie f gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(-1,0)$ en $R(4,0)$.

a Stel een functievoorschrift van f op.

b Bepaal het maximum van f.

Opgave 12

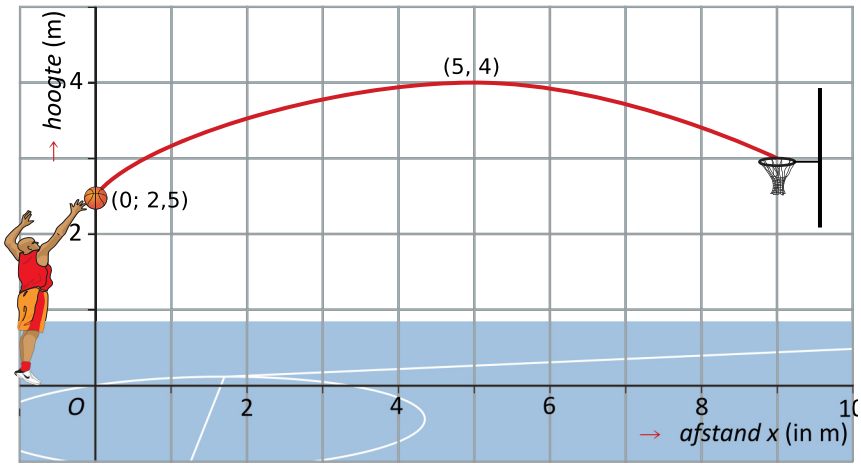
De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten $(1,9)$ en $(5,5)$ en heeft als symmetrieas de lijn $x = 2$.

a Is de grafiek van deze kwadratische functie een berg- of een dalparabool?

b Stel het functievoorschrift op bij de grafiek.

Opgave 13

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool. Het hoogste punt van de baan is gegeven in de figuur. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.



Figuur 2.5

a Stel een formule op voor de functie h die de baan van de bal beschrijft.

b De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond.
Bereken algebraïsch hoe ver de speler van (het midden van) de ring van de basket staat. Rond af op twee decimalen.

c Schrijf het domein en het bereik op van de functie h.

Opgave 14

De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten $P(0,3)$, $Q(2,7)$ en $R(4,12)$.

a Ga uit van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Van welke parameter (a, b, of c) weet je nu direct de waarde?

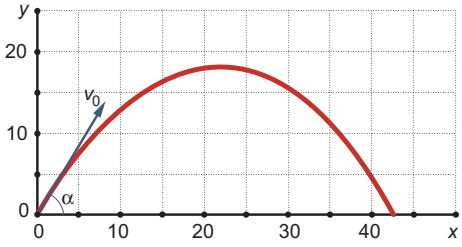
b Gebruik de andere twee punten om het functievoorschrift op te stellen.

c De lijn $y = p$ snijdt de kwadratische functie in één punt. Bereken de waarde van p.

Toepassen

Je hebt eerder gezien dat bij een kogelbaan een kwadratisch model hoort (als je de luchtweerstand niet meerekent).

In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n parabolische kogelbaan.



Figuur 2.6

Opgave 15

Bekijk de kogelbaan in de figuur en neem aan dat hij door $(0,0)$, $(30,15)$ en $(40,5)$ gaat.

a Welk functievoorschrift kun je er dan bij opstellen?

b In welk punt komt deze kogel weer op de grond?

c Welk domein en welk bereik heeft deze functie?

Opgave 16

Voor de kogelbaan geldt de formule:

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

Hierin is:

- α de hoek waaronder de kogel wordt afgeschoten in graden
- v_0 de beginsnelheid van de afgeschoten kogel in m/s
- $g \approx 9{,}81$ de gravitatieconstante in m/s^2

a Waaraan zie je dat er wordt aangenomen dat de kogel op de grond wordt afgeschoten?

b Een kogel wordt afgeschoten met een snelheid van 300 m/s op een hoogte van 1,5 m en onder een hoek van $\alpha = 2°$.
Na hoeveel m komt hij op de grond terecht?

Testen

Opgave 17

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $x = 10$ en $x = 20$. De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0{,}30)$. Stel het functievoorschrift van f op.

Opgave 18

Een parabool gaat in een xy-assenstelsel door de punten $A(0{,}4)$, $B(4{,}6)$ en $C(8{,}0)$.

a Welke formule past bij deze parabool?

b Bepaal het maximum van de bijbehorende functie g.

c Bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as.

d Het domein van g is $D_g = [0{,}8]$.
Bepaal het bijbehorende bereik.

2.3 Groeimodellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- een formule opstellen bij exponentiële groei bij twee gegeven punten;
- een formule opstellen bij groei volgens een machtsfunctie bij twee gegeven punten.

Voorkennis

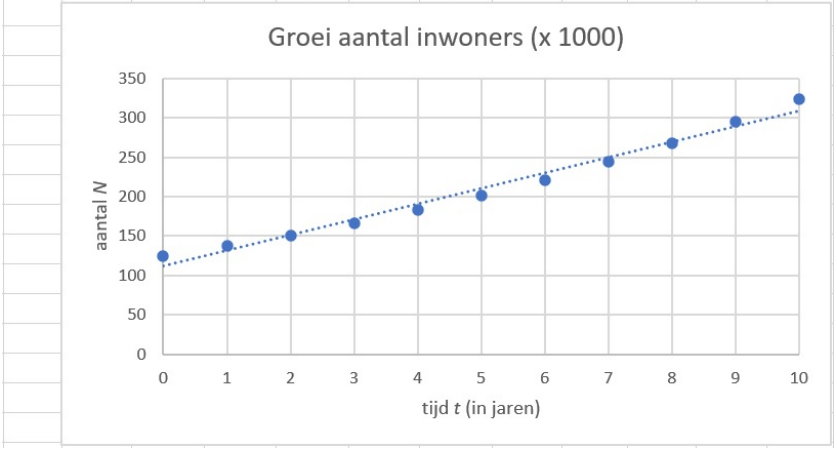
- werken met exponentiële functies en hun eigenschappen;
- werken met machtsfuncties en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafiek zie je de groei van het aantal inwoners van een middelgrote stad.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	125	138	151	166	183	201	221	244	268	295	324



Figuur 2.1

Hierin is t de tijd in jaren na 2010 en N het aantal inwoners in duizendtallen.

a De punten lijken ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoe komt het dat ze er niet precies op liggen? Geef twee redenen.

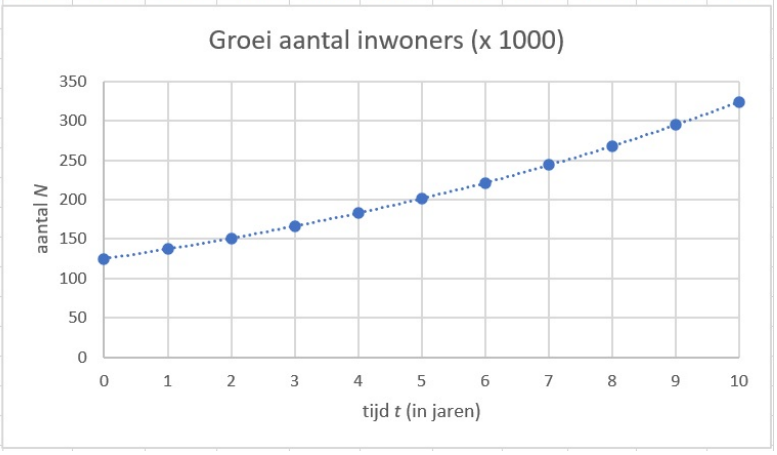
In de figuur is er door Excel een rechte lijn getrokken die de groei zo goed mogelijk beschrijft. Maar in Excel kun je ook andere trendlijnen kiezen. Bijvoorbeeld kun je kiezen voor exponentiële groei, of groei volgens een machtsfunctie.

b Hoe zou je het aantal inwoners voor de komende jaren kunnen voorspellen?

Uitleg

In deze grafiek zie je de groei van het aantal inwoners van een middelgrote stad.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	125	138	151	166	183	201	221	244	268	295	324



Figuur 2.2

Hierin is t de tijd in jaren na 2010 en N het aantal inwoners in duizendtallen.

Om te kunnen voorspellen hoe dit aantal de komende jaren waarschijnlijk zal verlopen, is er naar een zo goed mogelijk passen groeimodel gezocht. Een groeimodel waarbij het aantal inwoners steeds sneller lijkt toe te nemen, lijkt het best te passen bij de resultaten van de afgelopen 10 jaar.

Er is gekozen voor een exponentieel groeimodel.
Daarbij hoort een formule van de vorm $N(t) = a \cdot g^t$.
Daarin is g de groeifactor per jaar en a de waarde bij $t = 0$.

Dit betekent dat $a = 125$.
Om g te berekenen, vul je één van de meetpunten in.
Kies daarvoor een punt niet te dicht bij $t = 0$, dus bijvoorbeeld $(10{,}324)$.

Dan is $324 = 125 \cdot g^{10}$, zodat $g = \left(\frac{324}{125}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}10$.

En zo krijg je als exponentieel groeimodel: $N(t) \approx 125 \cdot 1{,}10^t$.

Maar wellicht is er nog een ander groeimodel denkbaar...

Opgave 1

Bekijk het groeien van het aantal inwoners van een middelgrote stad in de **Uitleg op pagina 70**.
Er wordt een exponentieel groeimodel gebruikt.

a Laat zien, dat in dat geval inderdaad $a = N(0)$.

b Stel zelf de formule op voor $N(t)$.

c Op hoeveel inwoners moet deze stad rekenen in 2025?

Opgave 2

Bekijk het groeien van het aantal inwoners van een middelgrote stad in de **Uitleg op pagina 70** nog eens. Stel je wilt een groeimodel van de vorm van de machtsfunctie $N(t) = a \cdot t^b$ proberen.

a Laat zien, dat dit nooit kan kloppen.

Je bedenkt dat een groeimodel als $N(t) = a + b \cdot t^c$ wellicht zou kunnen.

b Welke waarde moet a dan hebben?

c Gebruik twee andere meetpunten om de waarden voor b en c te berekenen.

d Laat zien, dat dit groeimodel toch minder goed past bij de gegevens.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten niet op een rechte lijn, maar is er duidelijk sprake van een toenemende of afnemende stijging, dan kun je hierbij verschillende **groeimodellen** opstellen.
Bekende groeimodellen zijn:

- het **exponentiële groeimodel** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot g^t$, waarin t de tijd is.
- het **groeimodel met een machtsfunctie** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot t^b$ of $y(t) = y(0) + a \cdot t^b$, waarin t de tijd is.

De waarden voor $y(0)$, g, a en b bepaal je door meetpunten in te vullen die redelijk lijken te liggen op de grafiek die past bij de soort groei waarvan je aanneemt dat die de situatie het best beschrijft.

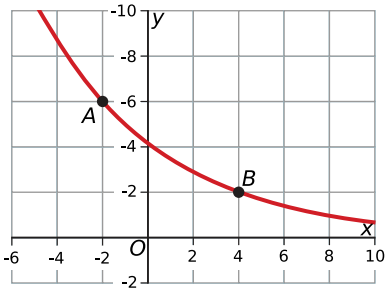
Uiteraard bestaan er ook nog andere groeimodellen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2{,}6)$ en $B(4{,}2)$.

Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 2.3

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methodes om dit te doen:

Methode 1:
Eerst de groeifactor g bepalen.

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}83$.

Nu kun je b berekenen.

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \\ b \cdot 0{,}83^4 &= 2 \\ b \cdot 0{,}4746 &= 2 \\ b &= \frac{2}{0{,}4746} \approx 4{,}21 \end{aligned}$$

Conclusie: $f(x) \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$

Methode 2:
Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$

De laatste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$
Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 71**.
Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $(10{,}200)$ en $(14{,}350)$.
Stel het functievoorschrift van f op. Rond g af op twee decimalen en b op een geheel getal.

Voorbeeld 2

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Stel een formule op voor Z afhankelijk van m.

soort	m(kg)	Z(L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2.1

Antwoord

Deze machtsfunctie heeft de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin c en p nog te berekenen zijn.

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- Paard: $Z = 85{,}4$ en $m = 605{,}0$ geeft: $85{,}4 = c \cdot 605{,}0^p$.
- Muis: $Z = 0{,}19$ en $m = 0{,}20$ geeft: $0{,}19 = c \cdot 0{,}20^p$.

Uit de eerste formule volgt: $c = \frac{85{,}4}{605{,}0^p}$.

Vul dit in de tweede formule in: $0{,}19 = \frac{85{,}4}{605{,}0^p} \cdot 0{,}20^p$ en dus $\frac{0{,}19}{85{,}4} = \frac{605{,}0^p}{0{,}20^p} = \left(\frac{605{,}0}{0{,}20}\right)^p$.
Daaruit volgt $449{,}47 = 3025^p$.

Zo'n exponentiële vergelijking los je met de GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine, of met logaritmen op. Je vindt: $p \approx 0{,}76$.

En nu vind je door invullen ook $c \approx 0{,}66$. Het resultaat komt dicht bij de door Kleiber gevonden formule $Z = 0{,}7 \cdot m^{0{,}75}$.

Opmerking:
Je kunt dit sneller doen door bij de twee vergelijkingen meteen beide zijden op elkaar te delen:
$\frac{85{,}4}{0{,}19} = \frac{c \cdot 605{,}0^p}{c \cdot 0{,}20^p}$ geeft $449{,}47 = \left(\frac{605{,}0}{0{,}20}\right)^p = 3025^p$.

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 72** over de formule van Kleiber. Er wordt een formule opgesteld voor het verband tussen het zuurstofverbruik Z in L en de massa m in kg bij zoogdieren. Het verband is recht evenredig. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de gegevens van de muis en het paard.

a Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

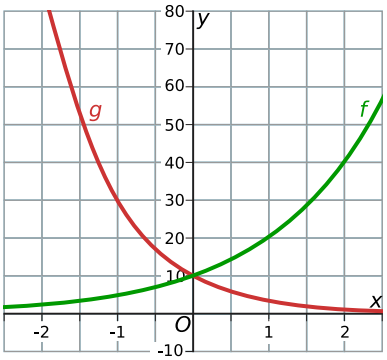
b Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Oefenen

Opgave 5

Bekijk de grafieken van deze twee exponentiële functies. Beide grafieken gaan door $(0,10)$.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 2.4

Opgave 6

Van een exponentieel groeimodel gaat de grafiek door de punten $(5,68)$ en $(10,136)$.
De bijbehorende functie is $H(t)$, waarin H de hoeveelheid en t de tijd in minuten is.

Geef van deze functie het functievoorschrift.

Opgave 7

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. In de tabel zie je metingen steeds op hetzelfde moment 1 dag later.

Concentratie vervuiling water							
dag	0	1	2	3	4	5	6
C (mg/L)	40	32	26	21	16	13	10

Figuur 2.5

Omdat de concentratie steeds iets minder snel afneemt, wordt een exponentieel model veronderstelt. Hierbij is C de concentratie verontreinigende stof in mg/L en t de tijd in dagen.

a Stel een bijpassend exponentieel vervalmodel op.

b Hoe groot was de concentratie 10 dagen na de eerste meting?

c Als de concentratie onder de 1 mg/L komt, mag je zeggen dat de stof verdwenen is. Wanneer is dat het geval?

Opgave 8

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud, zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Hij gebruikte H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier en ging uit van een machtsverband van de vorm $H = c \cdot G^p$. In de biologie wordt de evenredigheidsconstante c de Meeh-coëfficiënt genoemd.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 2.2

a Bepaal de Meeh-coëfficiënt van de Schotse hooglander en stel de bij deze dieren passende formule op.

b Bereken met de formule de huidoppervlakte van een Schotse hooglander van 1000 kg.

Opgave 9

De politie wil vanuit een opgemeten remweg (in m) kunnen berekenen hoe hard er is gereden. Op een proeflocatie wordt er getest. Als een auto een bepaalde snelheid heeft wordt er zo hard mogelijk geremd. De remweg R wordt dan gemeten, afgerond op gehele meters. De snelheid v is in km/h. In de tabel vind je enkele gegevens. Daaruit is een formule af te leiden van de vorm $v(R) = a \cdot R^b$.

v (km/h)	R (m)
20	3
40	12
60	27
80	48
100	75
120	108

Tabel 2.3

a Laat zien hoe je deze formule kunt vinden.

Vaak wordt voor het verband tussen remweg R in m en snelheid v in km/h de formule $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

b Laat zien, dat dit verband overeen komt met de formule die je bij a hebt gevonden.

c Na een ongeluk binnen de bebouwde kom waarbij een fietser door een auto werd aangereden, is de snelheid van de auto bepaald door de lengte van de remweg op te meten. Die remweg bleek 32 m te zijn. Bereken de snelheid waarmee deze auto reed.

Toepassen

Opgave 10: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?

b Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?

c Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014. Rond de groeifactor af op drie decimalen.

d Wat is het bereik van de functie bij c vanaf 6 januari 2014?

e In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 11: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden.
Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P.

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2.4

a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G.

b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.

c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 12

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.
De grafiek van $H(t)$ gaat door de punten $(5{,}12)$ en $(9{,}34)$.
Stel een formule $H(t) = \ldots$ op als

a Er sprake is van een exponentieel groeimodel.

b Er sprake is van een groeimodel met een machtsfunctie.

2.4 Logaritmische modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij het modelleren logaritmen gebruiken;
- bij twee gegeven (meet)punten een logaritmische functie als model opstellen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies en hun eigenschappen;
- werken met machtsfuncties en hun eigenschappen;
- werken met logaritmische functies en hun eigenschappen;

Verkennen

Opgave V1

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven zeeniveau. Er geldt onder bepaalde omstandigheden:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Deze formule betekent dat je bijvoorbeeld in een luchtballon de hoogte kunt bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. Daarvoor bestaan apps op je telefoon. Die maken gebruik van deze formule, maar in de vorm waarin h is uitgedrukt in p.

a Schrijf de gegeven formule zo, dat h is uitgedrukt in p.

b Laat zien, dat je de formule kunt schrijven in de vorm $h = a \log(p) + b$.
Benader a en b in één decimaal nauwkeurig.

Je hebt nu een logaritmisch model gevonden waarmee je de hoogte kunt berekenen door het meten van de luchtdruk.
Onder andere omstandigheden is gemeten dat op $h = 0$ geldt $p = 1030$ hPa en op $h = 0{,}1$ geldt $p = 980$ hPa.

c Hoe kun je in dit geval een formule opstellen van de vorm $h = a \log(p) + b$?

Uitleg

De luchtdruk p (in hectopascal) hangt af van de hoogte h (in km) boven zeeniveau. Er geldt onder bepaalde omstandigheden:

$p = 1013 \cdot 0{,}886^h$

In een luchtballon kun je hiermee de hoogte berekenen door de luchtdruk te meten.

Je schrijft dan de formule liever zo: $h = {}^{0{,}886}\log\left(\frac{p}{1013}\right)$.

En dit kun je herleiden tot: $h \approx -19{,}0\log(p) + 57{,}2$.

Dit is een 'logaritmisch model' voor de hoogte h afhankelijk van de luchtdruk p.

Figuur 2.1

Een model van de vorm $h = a\log(p) + b$ kun je ook opstellen vanuit twee metingen, zoals:

- op $h = 0$ km geldt $p = 1013$ hPa;
- op $h = 0{,}5$ km geldt $p = 953{,}5$ hPa.

Door deze twee gegevens in de vullen, kun je de waarden van a en b berekenen.

Opgave 1

Bekijk het logaritmisch model voor de hoogte afhankelijk van de luchtdruk in de **Uitleg op pagina 77**.

a Laat zien, dat hoe je de gegeven formule kunt herleiden tot $h \approx -19{,}0\log(p) + 57{,}2$ als je dat bij **Verkennen V1 op pagina 76** nog niet hebt gedaan.

b Bereken de hoogte in een luchtballon als je een luchtdruk van 800 hPa meet.

c In de uitleg zie je een plaatje van een app die de hoogte geeft afhankelijk van de luchtdruk. Leg uit dat de positie van de wijzer overeen komt met dit groeimodel.

d In die figuur is de hoogte gegeven in 'foot' en $1\,ft = 30{,}48$ cm. Pas de formule daarop aan.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 77** wordt ook beschreven hoe je een logaritmisch model van de vorm $h = a\log(p) + b$ kunt opstellen bij gegeven metingen. Laat zien, hoe dat doet.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In sommige rekenmodellen komen logaritmen voor. Dat is het geval als:

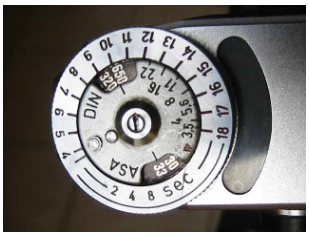
- de bijbehorende functie de vorm $y = a \cdot {}^g\log(bx + c) + d$ heeft.
  Vaak is dan het grondtal $g = 10$ en meestal zijn er minder parameters dan a,b,c,d.
- op de verticale as $\log(y)$ in plaats van y wordt uitgezet, of
  op de horizontale as $\log(x)$ in plaats van x wordt uitgezet, of
  beide tegelijk het geval is.

Je hebt daarbij de **rekenregels voor logaritmen** nodig. Die rekenregels zijn:

Rekenregels voor logaritmen	
$x = {}^{g}\log(y)$ is gelijkwaardig met $g^x = y$ met $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$	${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$	${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ (overgaan naar grondtal 10)	$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

Tabel 2.1

Voorbeeld 1



Figuur 2.2

De filmgevoeligheid van een filmrol, fotorolletje of digitale camera wordt uitgedrukt in een getal, waarvoor een aantal normen worden gebruikt. De gevoeligheidsnormen ISO/ASA (International Organization for Standardization / American Standard Association) en DIN (Deutsches Institut für Normung) berusten op de hoeveelheid licht die nodig is om de zwakste impressie van licht op de fotografische film te doen ontstaan. Een verdubbeling van de ISO/ASA waarde betekent dat de film half zoveel licht nodig heeft om een vergelijkbaar bruikbaar beeld te geven. Tegenwoordig (2011) in de handel verkrijgbare filmsoorten hebben meestal een gevoeligheid van 200 ASA (24 DIN) of 400 ASA (27 DIN).

Voor het omrekenen van ASA naar DIN wordt een formule gebruikt van de vorm $y = a\log(x) + b$, waarin x de gevoeligheid in ASA en y die in DIN voorstelt. Stel deze formule op met a en b in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

Uit de gegevens blijkt:

- Bij $x = 200$ hoort $y = 24$, zodat $24 = a\log(200) + b$.
- Bij $x = 400$ hoort $y = 27$, zodat $27 = a\log(400) + b$.

Hieruit volgt: $3 = a\log(400) - a\log(200) = a(\log(400) - \log(200)) = a\log(2)$.

Dus $a = \frac{3}{\log(2)} \approx 9{,}97$.

En verder is $b = 27 - a\log(400) \approx 1{,}07$.

De formule wordt $y \approx 10{,}0\log(x) + 1{,}1$.

Opgave 3

Bekijk het omrekenen van ASA naar DIN in **Voorbeeld 1 op pagina 78**.

a Leid zelf de formule af zonder de uitwerking in het voorbeeld te bekijken.

b Een film heeft een lichtgevoeligheid van 100 ASA. Hoeveel DIN is dat?

c Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

Opgave 4

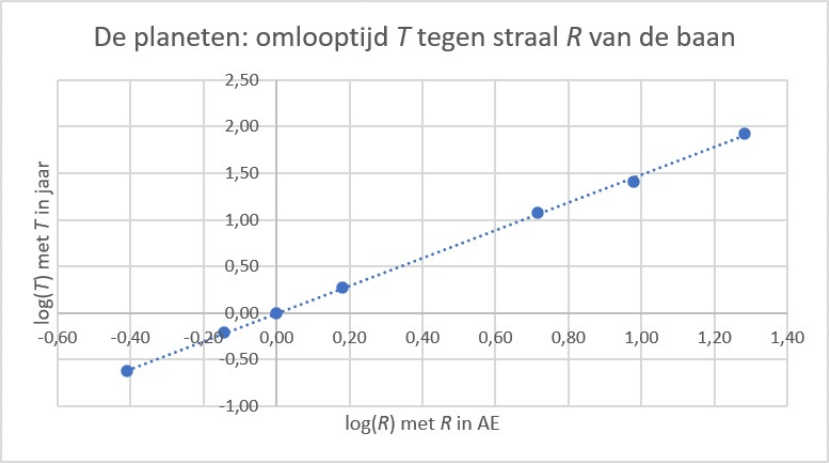
Bekijk het omrekenen van ASA naar DIN in **Voorbeeld 1 op pagina 78**.

a Herleid de gevonden formule naar de vorm $x = a \cdot g^y$.

b Laat ook met deze formule zien dat bij 24 DIN ongeveer 200 ASA hoort.

Voorbeeld 2

De onderstaande grafiek geeft voor de planeten van ons zonnestelsel een verband weer tussen de tijd T in jaren die nodig zijn voor het afleggen van één volledige baan om de zon en de (gemiddelde) straal R in AE (Astronomische Eenheid) van die baan. In de grafiek is log (T) uitgezet tegen log (R) en tussen beide lijkt een lineair verband te bestaan.



Figuur 2.3

Stel een formule op voor dit verband.

Antwoord

De grafiek is bijbenadering een rechte lijn door $(0{,}0)$ en $(1; 1{,}5)$.

De formule krijgt de vorm $\log(T) = a \cdot \log(R) + b$.

- Bij $\log(R) = 0$ hoort $\log(T) = 0$, zodat $0 = a \cdot 0 + b$.
- Bij $\log(R) = 1$ hoort (ongeveer) $\log(T) = 1{,}5$, zodat $1{,}5 = a \cdot 1 + b$.

Hieruit volgt: $a \approx 1{,}5$ en $b = 0$.

De formule wordt $\log(T) \approx 1{,}5 \log(R)$.

Opgave 5

Bekijk het verband tussen de omlooptijd T en de straal van de baan R van de planeten in ons zonnestelsel in **Voorbeeld 2 op pagina 79**.

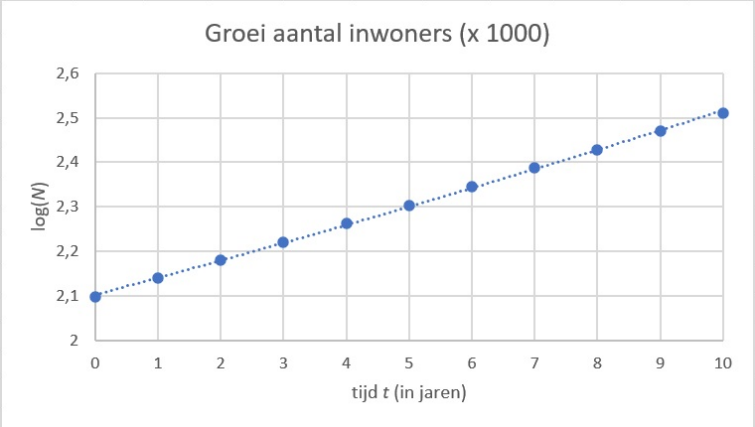
a Hoe kun je aan de grafiek zien, dat de eenheid AE gelijk is aan de straal van de baan van de aarde?

b Voor Mercurius geldt $R \approx 0{,}39$ AE. Bereken de omlooptijd van Mercurius in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor T afhankelijk van R en laat zien, dat je met deze formule hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

Opgave 6

Hier wordt de toename van het aantal inwoners in een middelgrote stad in beeld gebracht.
Nu is log (N) waarbij N het aantal inwoners in duizendtallen is, uitgezet tegen de tijd t in jaren na 2010.
Je ziet, dat de grafiek (ongeveer) een rechte lijn is door $(0; 2{,}1)$ en $(5; 2{,}3)$.



Figuur 2.4

a Stel een bij deze grafiek passende formule op.

b Voorspel met deze formule het aantal inwoners in 2025.

c Stel een formule op voor N afhankelijk van t en laat zien, dat je met deze formule hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

Oefenen

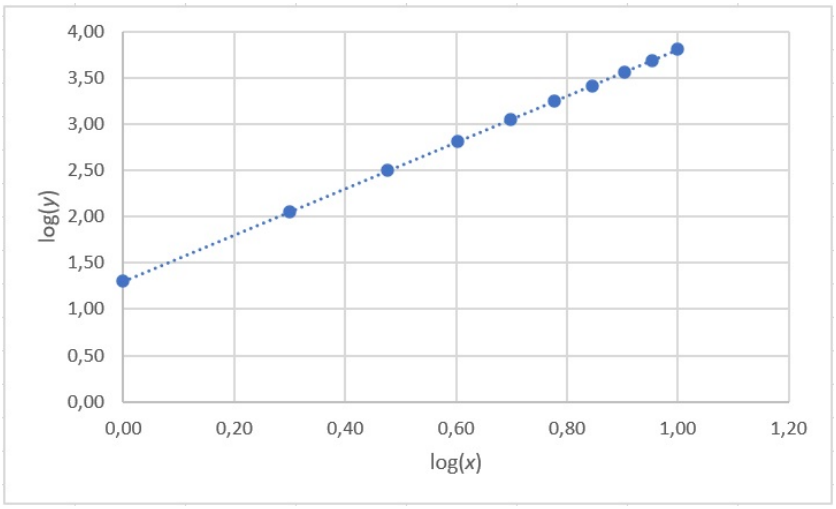
Opgave 7

Van een functie van de vorm $H(t) = a \log(t) + b$ zijn twee punten van de grafiek gegeven: $(2{,}20)$ en $(12{,}200)$.

Stel het functievoorschrift op van $H(t)$. Geef a en b in gehelen nauwkeurig.

Opgave 8

Je ziet hier een grafiek waarin log (y) is uitgezet tegen log (x). De punten liggen netjes op een rechte lijn.



Figuur 2.5

a Stel een formule op die past bij de getekende rechte lijn.

b Bereken hiermee de waarde van y voor $x = 12$.

c Herleid de formule die je hebt gevonden tot $y = f(x)$ en ga daarmee na dat je (ongeveer) dezelfde waarde voor y vindt als $x = 12$.

Opgave 9

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. Metingen op dagen met een neutrale atmosfeer geven deze waarden:

h (m)	1	10	100
w (m/s)	2	5	8

Tabel 2.2

Het verband tussen de windsnelheid w in m/s en de hoogte h in m kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$.

a Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.

b Bereken hiermee de windsnelheid op een hoogte van 500 m in één decimaal nauwkeurig.

c Laat zien, dat h een exponentiële functie is van w.

Opgave 10

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten.

Hij bepaalde de huidoppervlakte H (dm^2) en het gewicht G (kg) van dieren van een bepaalde soort.

In de tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse hooglanders, een soort koeien.

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 2.3

Als je in een grafiek log (H) uitzet tegen log (G), blijkt er een lineair verband tussen beide te bestaan.

a Teken deze grafiek.

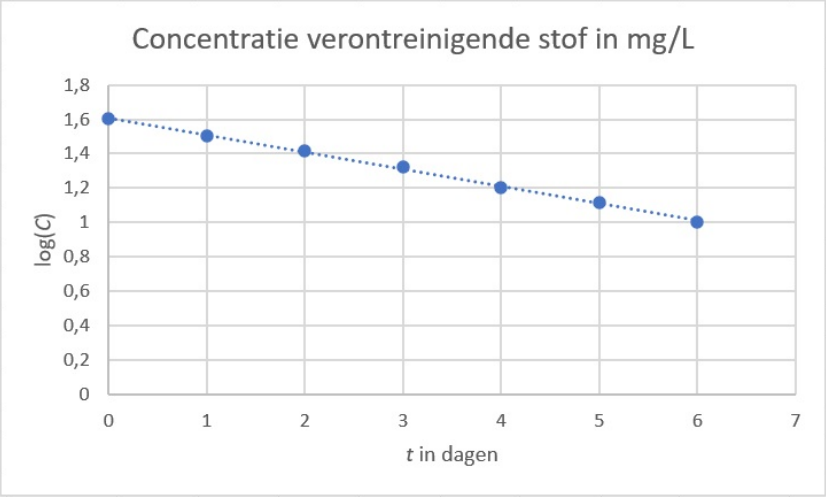
b Stel een bij deze grafiek passende formule op.

c Laat zien, dat H een machtsfunctie is van G.

d Controleer dat de gevonden machtsfunctie ongeveer bij de tabel past.

Opgave 11

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. In een tabel worden metingen steeds op hetzelfde moment 1 dag later bijgehouden. Hierbij is C de concentratie verontreinigende stof in mg/L en t de tijd in dagen. In de grafiek is log (C) uitgezet tegen t.



Figuur 2.6

a Stel een bijpassende functie op.

b Hoe groot was de concentratie 10 dagen na de eerste meting?

c Laat zien, dat $C(t)$ een exponentiële functie is en geef de bijpassende formule.

Toepassen

Opgave 12: Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt. In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L. De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N. Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$$20 \cdot \log(N) = 202 - \tfrac{4}{3}L$$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.

b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:

$$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$$

De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

c Bereken welke waarde L in 2001 had.

d Laat zien dat de formule voor de nieuwe situatie is te herleiden tot: $N \approx 2{,}512 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}794^{L}$.

Testen

Opgave 13

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.
De grafiek van H uitgezet tegen $\log(t)$ is een rechte lijn door de punten $(5{,}12)$ en $(9{,}34)$.

a Stel een bijpassende formule op.

b Bereken H als $t = 1000$.

Opgave 14

Een hoeveelheid H hangt af van de tijd t in dagen.
De grafiek van $\log(H)$ uitgezet tegen $\log(t)$ is een rechte lijn door de punten $(5{,}12)$ en $(9{,}34)$.

a Stel een bijpassende formule op.

b Bereken H als $t = 1000$.

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Formules opstellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- lineaire functie — lineair model — trendlijn, regressielijn;
- kwadratische functie — parabool — parameters;
- groeimodel — exponentiële functie — machtsfunctie;
- logaritmische functie.

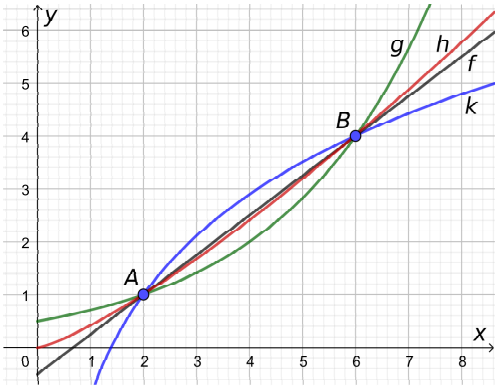
Activiteitenlijst

- bij een (trend)lijn door twee gegeven (meet)punten een lineaire functie opstellen;
- bij drie gegeven (meet)punten een kwadratische functie opstellen;
- bij twee gegeven (meet)punten een exponentieel model of een model met een machtsfunctie opstellen;
- logaritmen gebruiken bij modelleren.

Testen

Opgave 1

Je ziet in deze figuur vier verschillende grafieken door dezelfde twee punten $(2,1)$ en $(6,4)$.
Je gaat er formules voor opstellen. Geef waar nodig de constanten in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 2.1

a f is een lineaire functie. Stel een bijpassende formule op.

b g is een exponentiële functie. Stel een bijpassende formule op.

c h is een machtsfunctie. Stel een bijpassende formule op.

d k is een logartimische functie van de vorm $k(x) = a \cdot \log(x) + b$. Stel een bijpassende formule op.

Opgave 2

Een parabolische baan gaat ten opzichte van een xy-assenstelsel door de punten: $A(0,10)$, $B(2,13)$ en $C(5,10)$. Een voorwerp doorloopt deze baan vanaf punt A tot het weer op de grond komt ($y = 0$).

a Stel een formule op bij deze baan.

b Waar komt het voorwerp dat deze baan doorloopt op de grond?

c Welk domein en welk bereik heeft de functie f die deze baan beschrijft?

Opgave 3

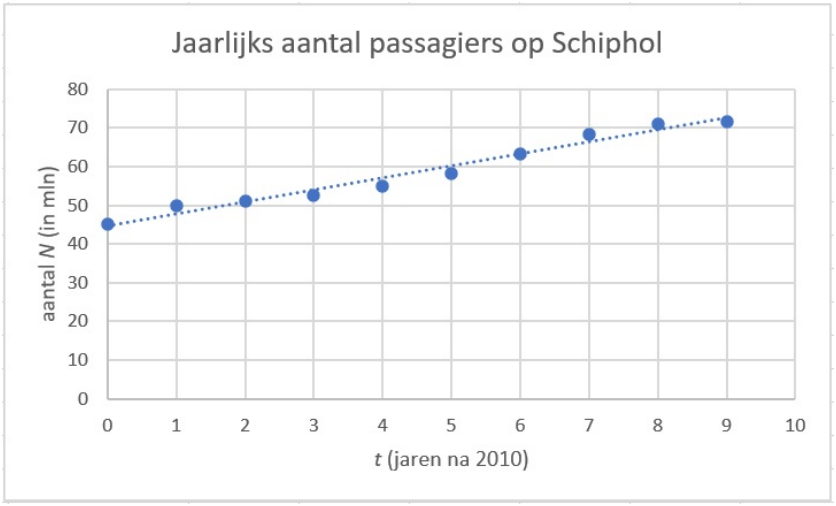
Het aantal passagiers N in miljoenen dat jaarlijks gebruikmaakt van Schiphol, groeide tot 2020 snel. Daarna stortte dit aantal (mede vanwege de coronapandemie) behoorlijk in, maar het nam een jaar later toch weer toe.

Passagiersaantallen Schiphol					
jaar	2010	2015	2019	2020	2021
aantal (in mln)	45,2	58,2	71,7	20,9	25,5

Figuur 2.2

a Ga na, of de groei tussen 2010 ($t = 0$) en 2019 ($t = 9$) exponentieel groeide met de tijd t in jaren.

Op grond van meer gegevens voor de jaren 2010 - 2019 heeft iemand deze grafiek gemaakt.



Figuur 2.3

Zij trekt een trendlijn door de meetpunten en vermoedt dat de bijbehorende functie de groei van het jaarlijks aantal passagiers N beter wordt beschreven door de formule bij deze trendlijn.

b Stel de bijpassende formule op.

De situatie vanaf 2020 past totaal niet in de voorgaande groeimodellen. Maar het aantal passagiers lijkt toch weer toe te nemen.

c Hoelang duurt het voordat het aantal passagiers weer op het niveau zit van 2019 als er vanaf 2020 van exponentiële groei sprake zou zijn?

Opgave 4

Mensen die een kind krijgen, moeten dit melden bij de Sociale Verzekeringsbank (SVB) om kinderbijslag te ontvangen. De SVB beschikt hierdoor over de voornamen van vrijwel alle kinderen die in een bepaald jaar zijn geboren. In Nederland zijn in 1996 en 1997 in totaal ongeveer 200 . 000 jongens geboren. Sommige namen worden heel vaak gegeven terwijl andere namen zelden voorkomen. In alle aanmeldingen bij de SVB over de jaren 1996 en 1997 kwamen 15 . 788 verschillende voornamen van jongens voor. Het gaat dan alleen om de eerste naam van de jongens en niet om eventuele extra namen. In de tabel is een overzicht gegeven van het aantal jongens per voornaam (a) en het bijbehorende aantal voornamen (n) in deze periode.

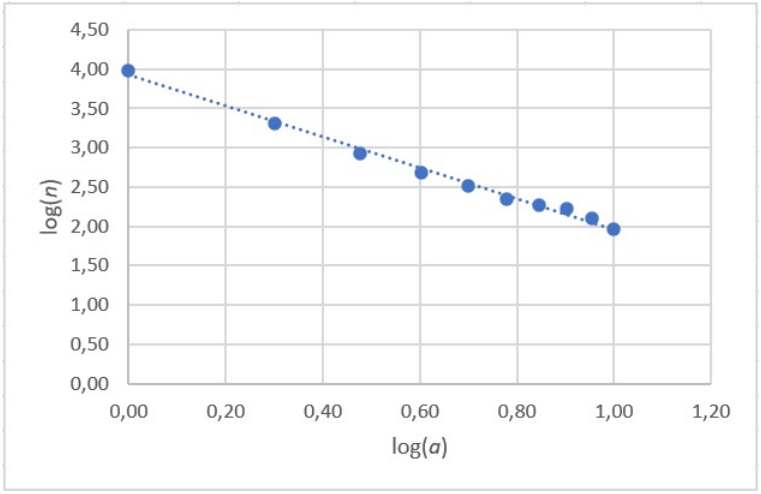
Voornamen	Monk, Archimeds, Cassius,...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	Thomas
Aantal jongens per voornaam (a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	2346
Aantal voornamen (n)	9726	2067	855	487	323	226	188	165	125	91	...	1

Figuur 2.4

Thomas is de voornaam die in de jaren 1996 en 1997 het meest voorkwam. Uit de tabel blijkt dat deze naam in totaal aan 2346 jongens werd gegeven. Er zijn ook namen die in deze periode aan slechts één jongen zijn gegeven, bijvoorbeeld Monk, Archimedes en Cassius. In de tabel zie je dat er in deze twee jaren in totaal 9726 namen waren die elk één keer aan een jongen zijn gegeven.

a Van alle jongens geboren in 1996 en 1997 zijn er 19 . 988 die minder dan vijf naamgenoten hebben die ook in deze periode geboren zijn.

In de figuur is log (n) uitgezet tegen log (a) voor $a = 1$ tot en met $a = 10$.
Deze punten liggen bij benadering op de rechte lijn door de punten met $a = 1$ en $a = 10$.



Figuur 2.5

b Stel de bijpassende formule op voor log (n) afhankelijk van log (a). Geef de constanten in twee decimalen nauwkeurig.

Het punt dat hoort bij $a = 4$ ligt iets onder de lijn. Dit betekent dat het werkelijke aantal voornamen dat 4 keer is gegeven kleiner is dan het aantal dat hiervoor met behulp van de formule bij b gevonden wordt.

c Bereken hoeveel procent kleiner.

Door herschrijven van de formule die hoort bij de grafiek in de figuur blijkt dat het verband tussen a en n kan worden benaderd met een machtsfunctie.

d Stel een formule op voor n afhankelijk van a.

e Laat zien, dat bij de naam Thomas ook volgens de formule $a = 2346$ oplevert $n = 1$.

Toepassen

Opgave 5: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af. Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Het midden van elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de tabel zie je de ligging van de middens van de stenen na één uur, na twee uur en na drie uur.

De afstand A (in dm) die de stenen na één, na twee en na drie uur hebben afgelegd hangen af van de nummers van de stenen. Als je die nummers x noemt, kun je grafieken maken van $A(x)$. Die grafieken worden (bij goede benadering) parabolen.

	Lavastroom						
	nummer = x -waarde						
tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
1	19,4	19,9	20,2	20,3	20,2	19,9	19,4
2	38,8	39,8	40,4	40,6	40,4	39,8	38,8
3	58,2	59,7	60,6	60,9	60,6	59,7	58,2

Figuur 2.6

a Stel een formule op voo $A(x)$ na 1 uur.

b Hoe kun je aan de tabel zien dat alle stenen met een constante snelheid bewegen?

c Hoe ziet de grafiek van $V(x)$ er uit als V de snelheid van de stenen in dm/uur voorstelt?

Opgave 6: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200 . 000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 2.1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert.

Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2{,}1 - 1{,}9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.

b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.

c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.

d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

3

Periodieke functies

3.1 Sinus- en cosinusfuncties 90
3.2 Vergelijkingen met sin en cos 100
3.3 Sinusoïden 109
3.4 Periodieke modellen 117
3.5 Totaalbeeld 125

3.1 Sinus- en cosinusfuncties

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- werken met de periodiciteit van deze grafieken;
- werken met exacte waarden van sinus en cosinus.

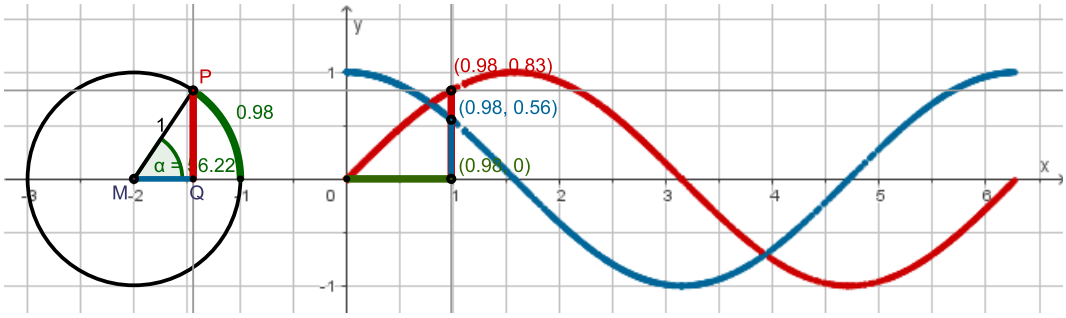
Voorkennis

- werken met graden en radialen;
- een grafiek tekenen op de grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 3.1

Je ziet hier twee grafieken, die ontstaan door punt P te laten draaien om M op een cirkel met straal $MP = 1$.

De rode grafiek laat zien hoe hoog punt P zit ten opzichte van de horizontale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

De blauwe grafiek laat zien waar punt P zit ten opzichte van de verticale lijn door M afhankelijk van de draaihoek α.

a Bij de grafieken is op de x-as de draaihoek α uitgezet, maar niet in graden, maar in radialen. Wat wordt daarmee bedoeld?

b Hoe reken je graden om in radialen?
Laat zien dat bij $\alpha = 53{,}03°$ hoort $\alpha \approx 0{,}93$ radialen.

c Hoe bereken je de waarde van de rode grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

d Hoe bereken je de waarde van de blauwe grafiek bij $x = \alpha = 0{,}93$ rad?
Van welke functie is dit de grafiek?

Opgave V2

Ga uit van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 dm.

a Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek in graden?
En in radialen?

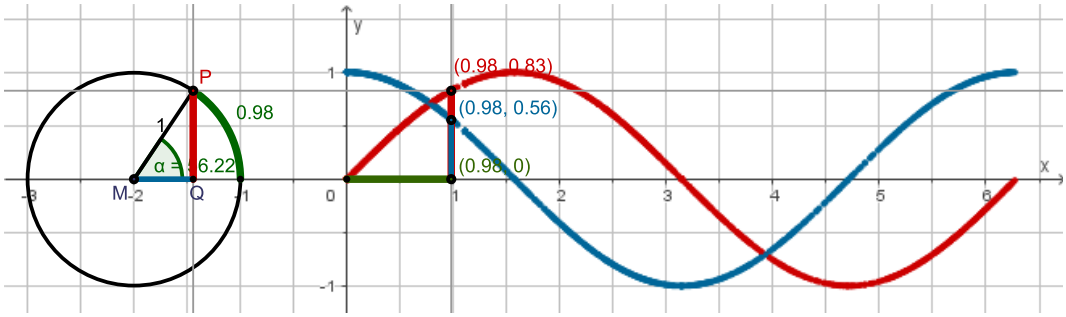
b Laat door berekening zien dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c Hoe groot is $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ precies?

d En hoe groot is $\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 3.2

De belangrijkste periodieke functies zijn $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ met x altijd in radialen. Je ziet hier hun grafieken. Ze ontstaan door een punt P over een eenheidscirkel te bewegen. De draaihoek $x = \alpha$ is in radialen (de bijbehorende booglengte in de eenheidscirkel) op de x-as uitgezet. De (rode) sinusgrafiek ontstaat uit de lengtes van QP en de (blauwe) cosinusgrafiek uit de lengtes van MQ. Beide grafieken lopen oneindig ver door als je ook draaihoeken buiten $[0,2\pi]$ toelaat.

Beide grafieken herhalen zich met een periode van 2π hetgeen overeen komt met het draaien van P van $0°$ tot $360°$.

Voor het omrekenen van graden naar radialen geldt $360° = 2\pi$ radialen, dus $1° = \frac{\pi}{180}$ rad.

Het domein van beide functies is $\mathbb{R}$, alle x-waarden zijn toegestaan.

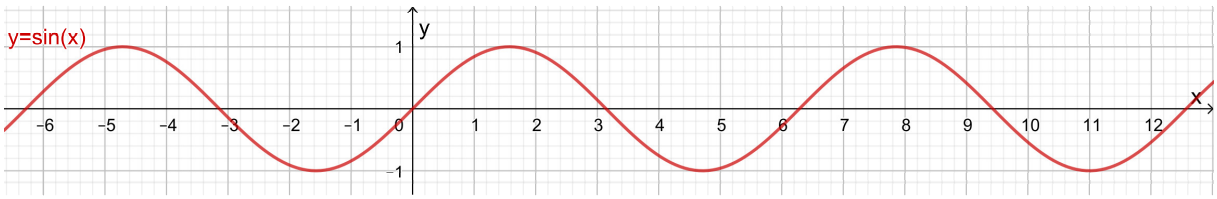
Het bereik van beide functies is $[-1,1]$.

De nulpunten van de sinusfunctie zijn $x = \alpha = ..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, ...$ of kortweg $x = k \cdot \pi$ met k een geheel getal.

De nulpunten van de cosinusfunctie zijn $x = \alpha = ..., -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, ...$ of kortweg $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Opgave 1

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \sin(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 3.3

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

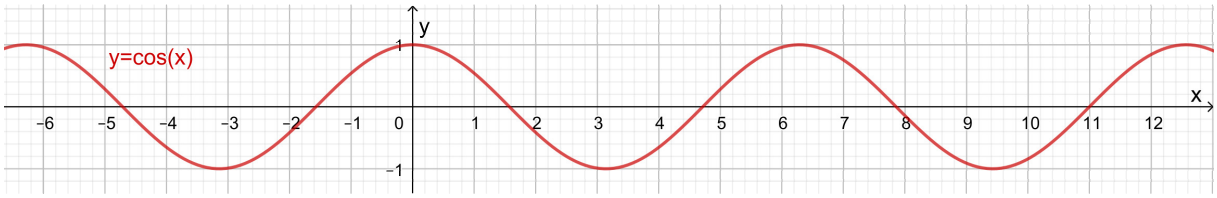
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\sin(1) = 0{,}84147...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\sin(30°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Opgave 2

Je ziet hier een deel van de grafiek van $y = \cos(x)$ met x in radialen waarbij alle waarden voor x zijn toegestaan.



Figuur 3.4

a Bij welke waarden van x zitten de maxima van deze grafiek? En hoe groot is zo'n maximum?

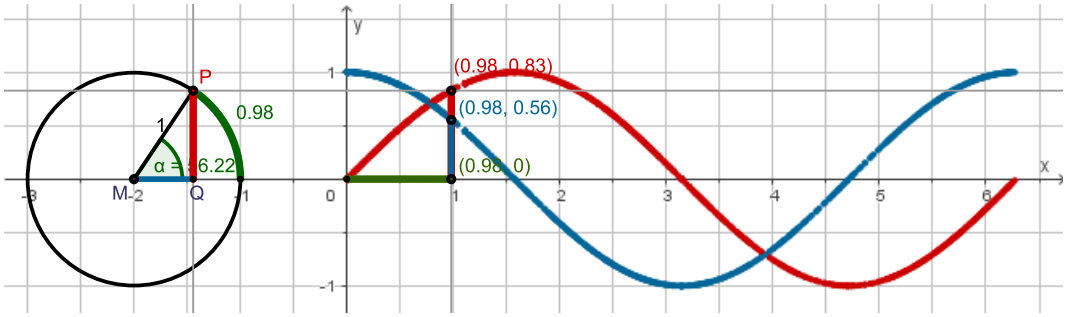
b Bij welke waarden van x zitten de minima van deze grafiek? En hoe groot is elk minimum?

c Met je rekenmachine vind je $\cos(1) = 0{,}54030...$
Voor welke waarden van x is de sinus even groot?

d Ga na, dat $\cos(60°) = 0{,}5$.
Bij welke waarden voor x in de gegeven grafiek vind je deze uitkomst?

Uitleg 2

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 3.5

Je ziet weer de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$.

Kies je $\alpha = 45° = \frac{1}{4}\pi$, dan zijn MQ en PQ gelijk.

Met behulp van de stelling van Pythagoras vind je dan $\sin(45°) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Aan de grafieken (en ook in de eenheidscirkel) zie je dat er nog veel meer x-waarden zijn met dezelfde exacte uitkomst, namelijk $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En ook is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

En er zijn meer x-waarden waarvan de sinus en de cosinus exact te berekenen zijn.

In de tabel staan enkele exacte waarden van de sinus en cosinus waarbij de hoek in graden en in radialen is gegeven.

hoek (graden)	0°	30°	45°	60°	90°
hoek (radialen)	0 rad	$\frac{1}{6}\pi$ rad	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\frac{1}{3}\pi$ rad	$\frac{1}{2}\pi$ rad
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 3.1

Met behulp van de symmetrie van de eenheidscirkel kun je ook de exacte waarde van bijvoorbeeld $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$ bepalen. Er geldt bijvoorbeeld dat:

$\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opgave 3

In Uitleg 2 op pagina 93 zie je dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

a Leid dit zelf af door in ΔMQP de stelling van Pythagoras toe te passen.

b Ga nu zowel in de eenheidscirkel als in de grafiek na, dat $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

c Schrijf alle waarden van x op waarvoor $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d Leg uit waarom $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

Opgave 4

In **Uitleg 2 op pagina 93** zie je een tabel met exacte uitkomsten voor sinus en cosinus bij enkele hoeken. Al deze waarden kun je zelf afleiden.

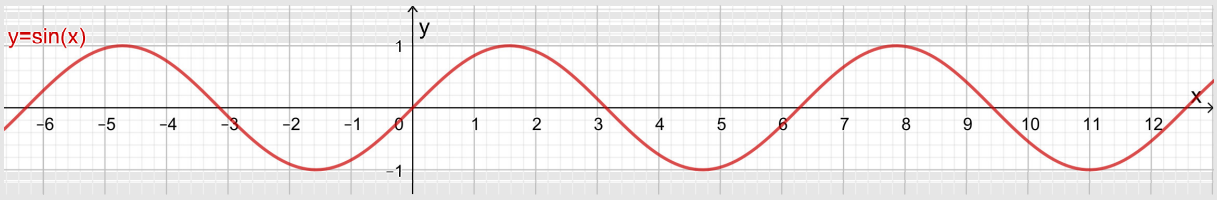
a Kies $x = \frac{1}{6}\pi$. ΔMQP is nu de helft van een gelijkzijdige driehoek waarvan MQ de symmetrieas is.

Leg uit dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b Hoe leid je af dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?

Theorie en voorbeelden

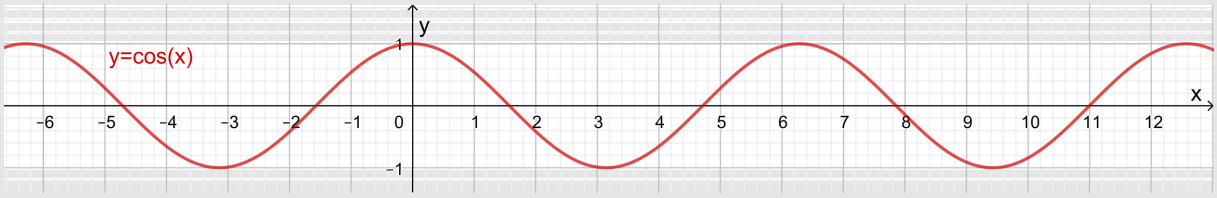
Om te onthouden



Figuur 3.6

De **standaard sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$



Figuur 3.7

De **standaard cosinusfunctie** $f(x) = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is - 1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

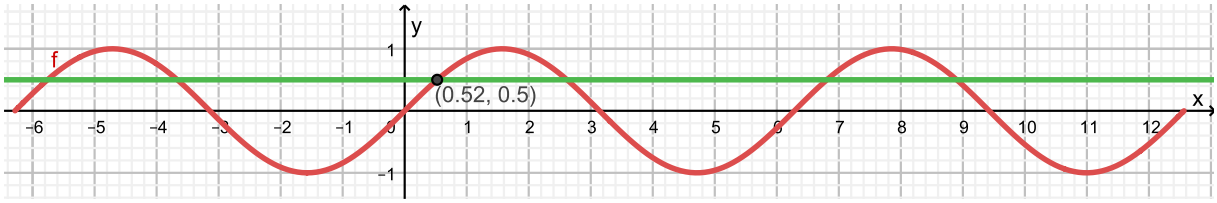
De grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x - b) + c$ en $h(x) = a \cdot \cos(x - b) + c$ kun je door transformaties uit die van $y = \sin(x)$ laten ontstaan, maar dus ook uit die van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $y = \sin(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
Voor welke andere waarden op het gegeven domein is de sinus even groot?

Antwoord



Figuur 3.8

Je ziet dat de grafiek symmetrisch is met symmetrieas $x = \frac{1}{2}\pi$.

Dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π.
Daarom geldt dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ voor:

$x = -1\frac{5}{6}\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 95**.

a Voor welke waarden van x geldt $\sin(x) = -\frac{1}{2}$?

b Los op: $\sin(x) < -\frac{1}{2}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[0; 6{,}5\pi]$.

a Maak de grafiek van f. Hoeveel periodes zijn zichtbaar?

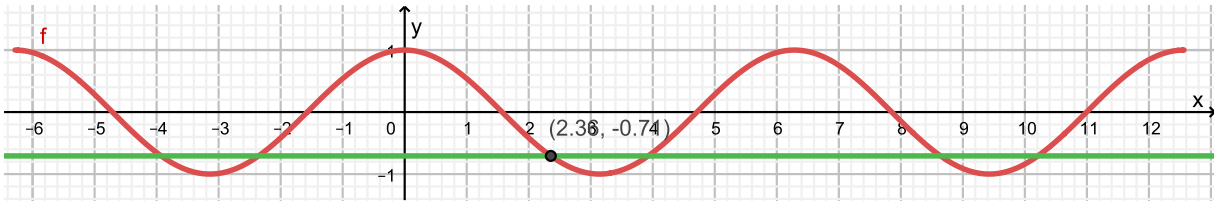
b Voor welke waarden van x in het gegeven domein, geldt $f(x) = \sin(-0{,}1)$? Rond af op drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $y = \cos(x)$ op het domein $[-2\pi, 4\pi]$.

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Voor welke andere waarden op het domein is de cosinus even groot?

Antwoord



Figuur 3.9

Je ziet dat $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De periode van $y = \cos(x)$ is 2π.

Daarom geldt dat $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ als: $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het gegeven domein is $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ voor:

$x = -1\frac{1}{4}\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 2\frac{3}{4}\pi \vee x = 3\frac{1}{4}\pi$.

Opgave 7

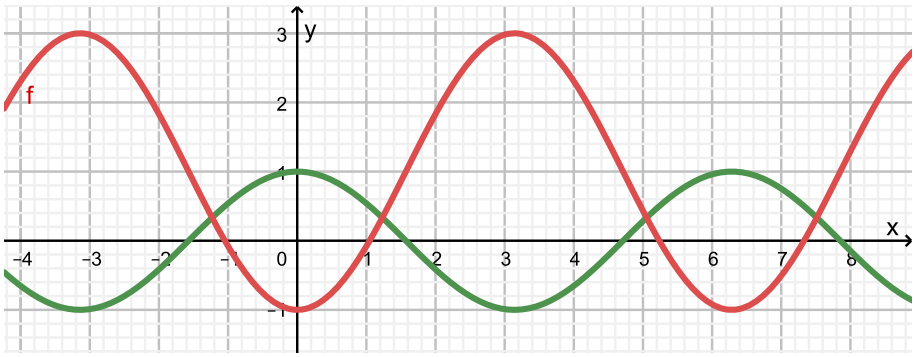
Bestudeer **Voorbeeld 2 op pagina 95**.

Voor welke waarden uit het gegeven domein geldt: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$?

Voorbeeld 3

Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van $f(x) = 2\cos(x - \pi) + 1$ uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$?

Antwoord



Figuur 3.10

Maak eerst de grafiek van f en zet die van $y = \cos(x)$ erbij.

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door achtereenvolgens:

- Verschuiving in de x-richting met π.
- Vermenigvuldiging in de y-richting met 2.
- Verschuiving in de y-richting met 1.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = -2\sin(x-1)+4$

a Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

b Hoe groot is het maximum van f?

c Wat is het minimum van f?

Opgave 9

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je zien als een translatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = 3\sin(x) - 4$ uit de grafiek van $y = \cos(x)$?

Oefenen

Opgave 10

Gegeven is de functie f door $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\sin(0{,}25) = 0{,}247...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\sin(x) = 0{,}247...$?

Opgave 11

Gegeven is de functie f door $f(x) = \cos(x)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b $\cos(0{,}25) = 0{,}968...$ Voor welke waarden van x geldt ook $\cos(x) = 0{,}968...$?

Opgave 12

Geef alle exacte waarden van x waarvoor geldt:

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\cos(x) = -0{,}5$

c $\sin(x) = -1$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\sin(x-3)+2$ met domein $[0, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \sin(x)$?

c Bepaal de coördinaten van de toppen.

Opgave 14

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5\cos(x+\pi)+4$ met domein $[-2\pi, 4\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Hoe ontstaat door transformaties de grafiek van f uit die van $y = \cos(x)$?

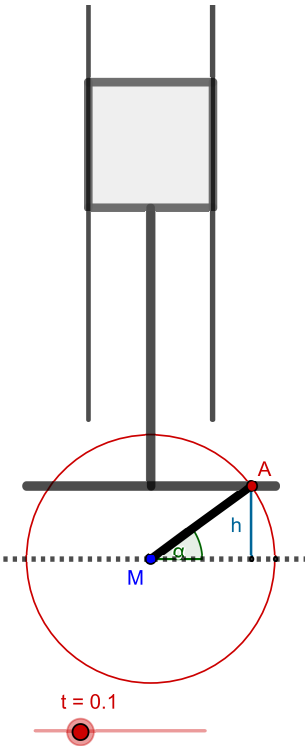
c Geef de coördinaten van de toppen.

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 3.11

Opgave 15

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 16

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $h(t) = 10\sin(t - 2) + 5$.

a De grafiek van deze functie kan ontstaan uit de grafiek van $h = \sin(t)$.
Welke transformaties moet je dan toepassen?

b Bepaal het bereik van de gegeven functie.

3.2 Vergelijkingen met sin en cos

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de vergelijking $\sin(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- de vergelijking $\cos(x) = c$ oplossen, ook exact indien mogelijk;
- vergelijkingen met getransformeerde sinus- en cosinusfuncties oplossen.

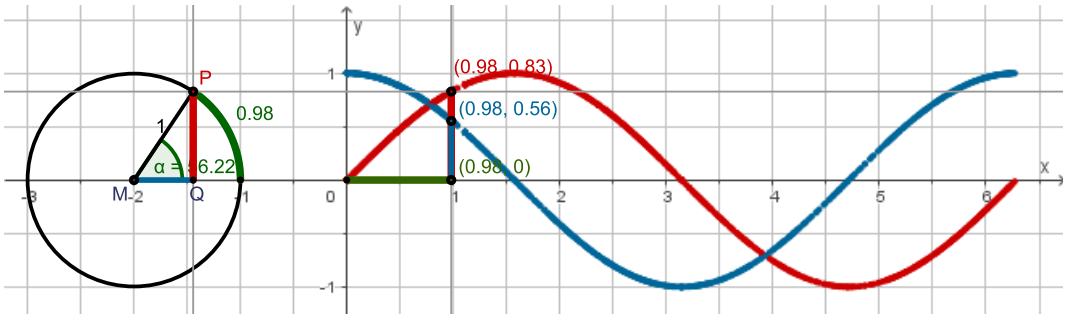
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: sinus- en cosinusfunctie.



Figuur 3.1

Je ziet hier de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ ontstaan door punt P over de eenheidscirkel met middelpunt M te bewegen.

a Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de sinus gelijk aan 0,5?
Welke verband is er tussen die twee waarden?

b Bij hoeveel waarden van x binnen één omwenteling is de cosinus gelijk aan 0,5?
Welke verband is er tussen die twee waarden?

Opgave V2

Ga even na of je de exacte waarden van x weet bij $\sin(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

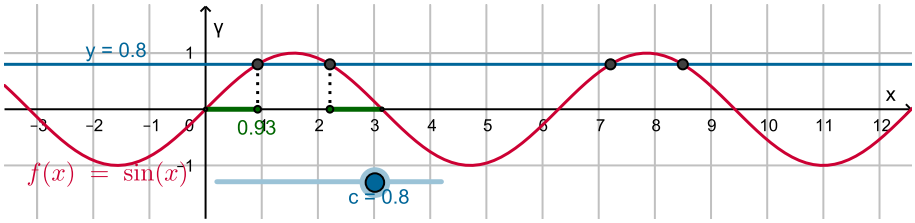
En hetzelfde voor de exacte waarden bij $\cos(x) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1$.

Uitleg 1

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

Je wilt $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:



Figuur 3.2

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet de arcsinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.

  Op de rekenmachine vind je arcsinus meestal als $\sin^{-1}$.
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8)$.
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(0{,}8) + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van deze vergelijkingen:

$\sin(x) = 1$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = -1$ geeft: $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = 0$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$ voeg dit samen tot $x = k \cdot \pi$.

Als in $\sin(x) = c$ de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1 zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 1

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}2$

b $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

Los exact op.

a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

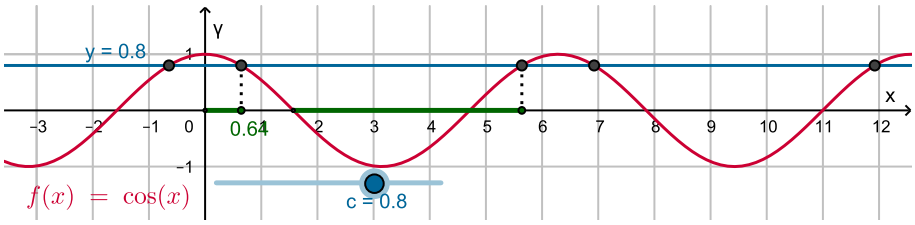
Opgave 3

Waarom heeft sin $(x) = 1{,}2$ geen oplossingen?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $y = \cos(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.



Figuur 3.3

Je wilt $\cos(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt.
  Deze oplossing heet arccosinus van 0,8. Dit getal vind je met de grafische rekenmachine.
  De oplossing is: $x = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}64$
- Zoek dan de andere oplossing in dezelfde periode door symmetrie te gebruiken.
  Die oplossing is: $x = -0{,}64 \vee x = 2\pi - 0{,}64$ (kies één van beide).
- Omdat de periode 2π is, zijn de oplossingen:
  $x = 0{,}64 + k \cdot 2\pi \vee x = -0{,}64 + k \cdot 2\pi$
  met k een geheel getal.

Bekijk de oplossingen van de vergelijkingen:
$\cos(x) = 1$ geeft: $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = -1$ geeft: $x = \pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(x) = 0$ geeft: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Als in $\cos(x) = c$ de c groter dan 1 of kleiner dan -1 is, zijn er geen oplossingen.

Bij $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $c = \pm 1$ kun je exacte oplossingen geven.

Opgave 4

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}2$

b $\cos(x) = -0{,}2$

Opgave 5

Los exact op.

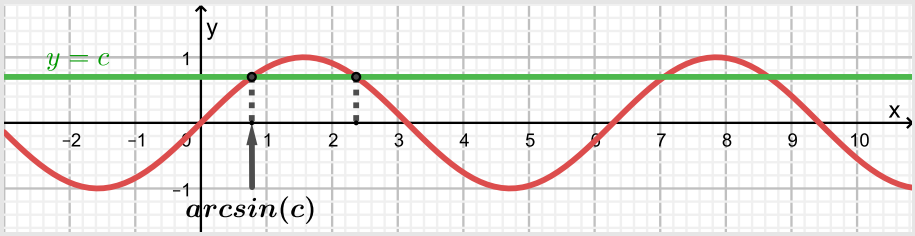
a $\cos(x) = -1$

b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



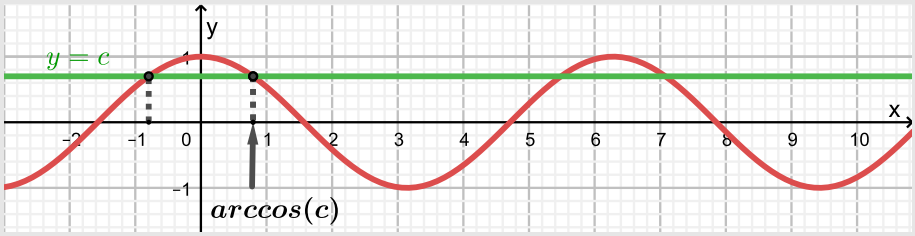
Figuur 3.4

Om $\sin(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing die binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right]$ ligt.
Die oplossing heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\sin(x) = c$:
$x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen en de lijn $y = c$.



Figuur 3.5

Om $\cos(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $[0,\pi]$.
Die oplossing heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.

Vanwege de symmetrie van de grafiek en de periode van 2π zijn alle oplossingen van $\cos(x) = c$:
$x = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$

De vergelijking $\cos(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Gebruik de waarden uit de tabel als er gevraagd wordt naar exacte uitkomsten.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabel 3.1

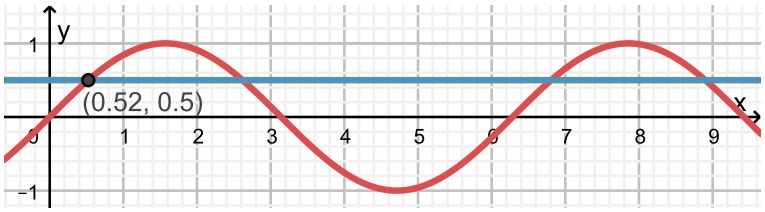
Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ met x in $[0,3\pi]$.

Bepaal eerst een oplossing in drie decimalen met behulp van een rekenmachine.
Bepaal daarna een exacte oplossing. Maak gebruik van symmetrie.

Antwoord

Maak de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval. Je ziet dat er vier oplossingen zijn.



Figuur 3.6

De eerste oplossing is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.

De andere oplossingen zijn: $x \approx 0{,}524 + k \cdot 2\pi \vee x \approx \pi - 0{,}524 + k \cdot 2\pi$.

Op $[0,3\pi]$: $x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$.

De eerste exacte oplossing is: $x = \frac{1}{6}\pi$.

In het algemeen is de oplossing: $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Op $[0,3\pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Opgave 6

Los op: $\sin(x) = -0{,}5$

a Geef alle oplossingen. Rond af op drie decimalen.

b Geef alle exacte oplossingen.

c Geef alle exacte oplossingen op het interval $[0,4\pi]$.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Los exact op: $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b Geef alle exacte oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$.

c Geef de oplossingen op het interval $[-2\pi,4\pi]$ in drie decimalen.

Voorbeeld 2

Maak de grafiek van $f(x) = 4\sin(2x) + 3$.

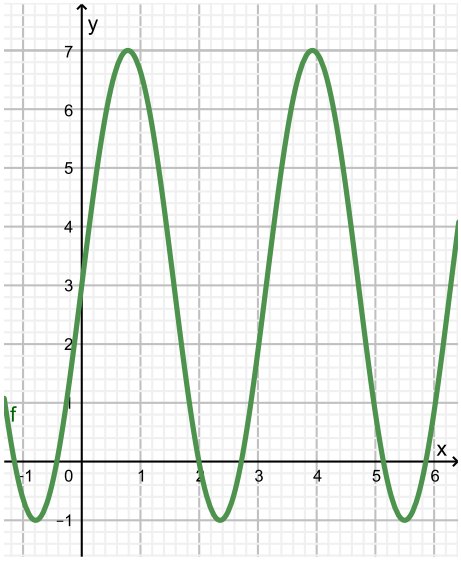
Los op: $f(x) = 0$.

Antwoord

Deze functie ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$.
In ieder geval is er sprake van:

- vermenigvuldiging met 4 in de y-richting;
- verschuiving met 3 in de y-richting.

Maar als je de grafiek maakt, zie je ook dat de periode wordt gehalveerd.
Bij het berekenen van de nulpunten zie je dat ook gebeuren.



Figuur 3.7

Je moet $f(x) = 0$ oplossen. Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 4\sin(2x) + 3 &= 0 && \text{beide zijden } -3 \\ 4\sin(2x) &= -3 && \text{beide zijden } /4 \\ \sin(2x) &= -0{,}75 && \text{arcsin gebruiken} \\ 2x \approx -0{,}85 + k \cdot 2\pi \ &\vee\ 2x \approx \pi - -0{,}85 + k \cdot 2\pi && \text{beide zijden } /2 \\ x \approx -0{,}42 + k \cdot \pi \ &\vee\ x \approx 1{,}99 + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Na het delen door 2 bij de laatste stap is de periode waarin de nulpunten optreden gehalveerd.

Opgave 8

Bekijk de functie f in **Voorbeeld 2 op pagina 105**.

a Hoe zie je aan de grafiek dat de periode is gehalveerd?

b Waarom vind je bij $f(x) = 0$ geen exacte oplossingen?

c Los exact op $f(x) = 1$.

Opgave 9

Los exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin(0{,}5x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c Los exact op: $3\cos(x) + 1 = 2\frac{1}{2}$

Oefenen

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen. Rond anders af op drie decimalen.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

c $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 11

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$.
Los de vergelijkingen op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}35$

b $\cos(x) = -0{,}35$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 12

Geef alle oplossingen.

a $\sin(x) = 0{,}5$

b $\sin(x) = \sin(0{,}5)$

c $\sin(0{,}5) = x$

d $\sin(x) = \cos(0{,}5)$

Opgave 13

Los exact op.

a $3\cos(x) + 1 = 2{,}5$

b $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

c $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 14

Gegeven is de functie g met $g(x) = 3\cos(2x)$ op $[0,4\pi]$.

a Bereken exact de nulpunten van g.

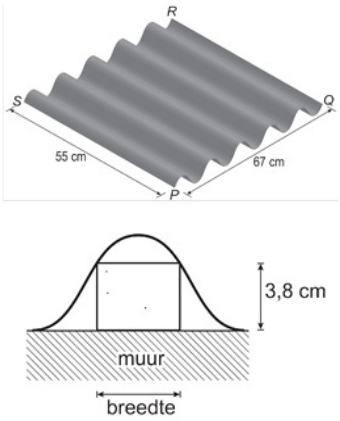
b Los exact op: $g(x) = 1\frac{1}{2}$

Toepassen

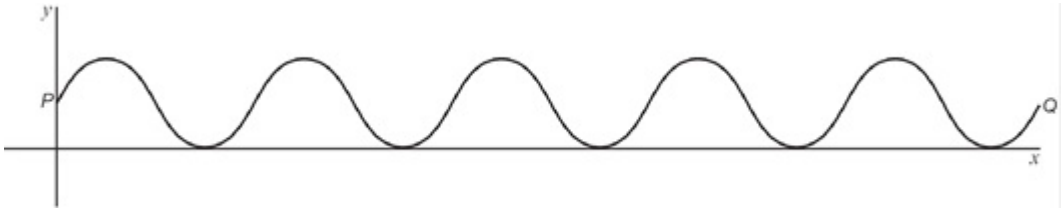
Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In de figuur hiernaast is een rechthoekig stuk golfplaat getekend. Hieronder is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd. In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek behoort de formule:

$y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$

De golfplaat wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur. De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In de figuur is dit geschetst.



Figuur 3.8



Figuur 3.9

Opgave 15

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat.

Controleer dat de breedte van de golfplaat inderdaad ongeveer 67 cm is.

Opgave 16

Bekijk de formule die hoort bij de doorsnede van een golfplaat. In die doorsnede zie je ook de voorkant van één van de rechthoekige blokjes waarmee de openingen gedicht worden.

Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 17

Bekijk de grafiek van $f(x) = \cos(x)$. Los op. Geef waar mogelijk exacte oplossingen en anders benaderingen in drie decimalen.

a $\cos(x) = 0{,}95$

b $\cos(x) = -0{,}95$

c $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 4\cos(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen.

b Los op $f(x) < 0$.

3.3 Sinusoïden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de grafieken van $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ en $y = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ tekenen en daarbij de begrippen periode, amplitude, evenwichtsstand gebruiken;
- de vergelijkingen $a \cdot \sin(b(x + c)) + d = p$ en $a \cdot \cos(b(x + c)) + d = q$ systematisch oplossen.

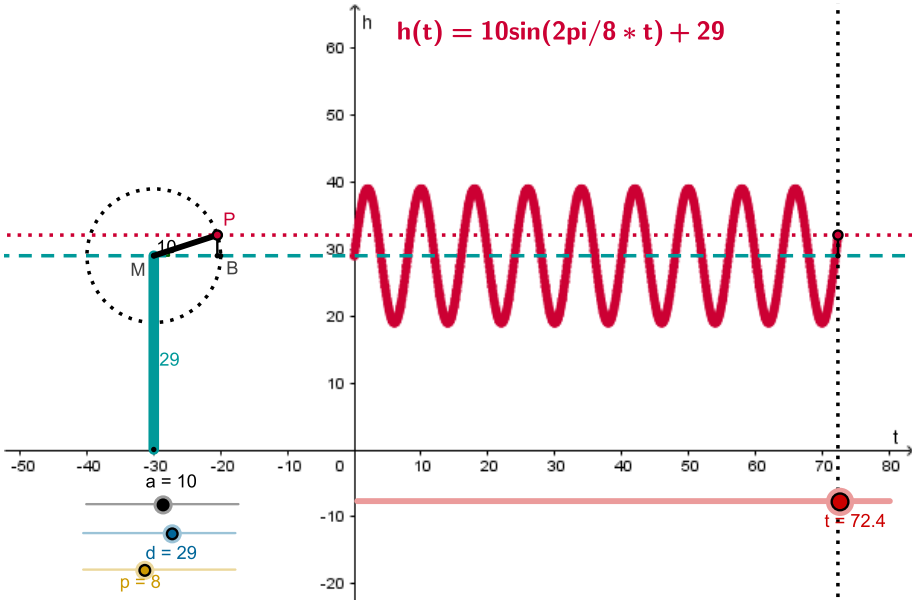
Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ en $\cos(x) = c$ oplossen als c een constante is;
- de periodiciteit van deze grafieken toepassen, met name bij exacte waarden van sin en cos.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: Windmolen



Figuur 3.1

Je ziet hier de grafiek van de hoogte van een tip (punt P) van een wiek van een windmolen boven de begane grond. Er geldt:

$$h = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot t\right) + 28$$

waarin h de hoogte van punt P in meter en t de tijd in seconden is.

a Wat stellen de getallen 10 en 28 in deze formule voor?

b En wat is de betekenis van het getal 8?

Waarom staat er in de formule $\frac{2\pi}{8}$?

c Bij dit soort periodieke verschijnselen worden vaak de termen evenwichtsstand, amplitude (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) en periode gebruikt.
Welk getal in deze formule stelt de evenwichtsstand voor? En de amplitude?

Uitleg

Bekijk de applet.

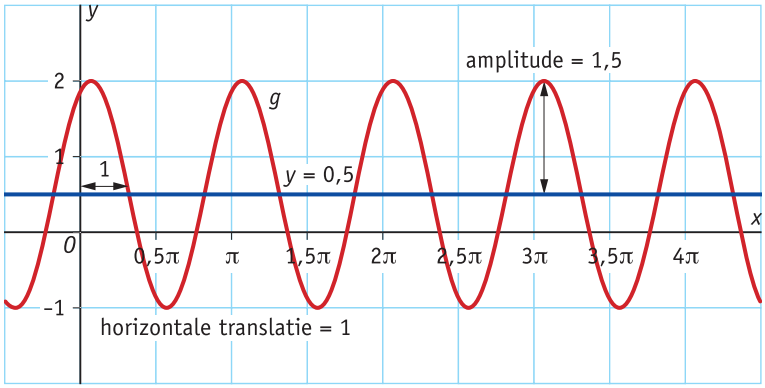
Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten sinusoïden.

Door transformatie van de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ maken.
Zulke grafieken heten ook sinusoïden.

Bekijk met de grafische rekenmachine wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a verandert de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand, de amplitude is a.
- b verandert de periode, de periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c zorgt voor een horizontale verschuiving over $-c$.
  Dit betekent voor de sinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat en voor de cosinusfunctie dat c de x-coördinaat is van een punt waar de grafiek een maximum heeft.
- d verandert de evenwichtsstand, die is $y = d$.

Bekijk de grafiek van de sinusoïde $g(x) = -1{,}5 \cdot \sin(2(x - 1)) + 0{,}5$.



Figuur 3.2

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtsstand is $y = 0{,}5$
- de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- de horizontale verschuiving is 1

Het bereik van g is: $B_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1, 2]$

De toppen van g vind je door te bedenken dat de maxima 2 en de minima -1 zijn.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x - 1)) + 0{,}5$ op $[0{,}2\pi]$ in de **Uitleg op pagina 110**.

Maak de grafiek van $g(x) = 1{,}5 \sin(2(x - 1)) + 0{,}5$ met de applet in de **Uitleg op pagina 110**.

a Waarom is het nuttig om eerst de periode, de amplitude en de evenwichtsstand af te lezen uit de formule als je zelf de grafiek moet maken?

b Het punt $(0{,}0)$ ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van g ontstaat uit $(0{,}0)$ door de transformatie van de grafiek van $y = \sin(x)$?

c Welke toppen heeft de grafiek van g?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = -10 \sin(\pi(x - 3)) + 6$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $f(x) = 11$.

Opgave 3

Gegeven is de functie g met $g(x) = 2 \cdot \cos(0{,}5(x - 2)) - 1$ op $[0{,}8\pi]$.

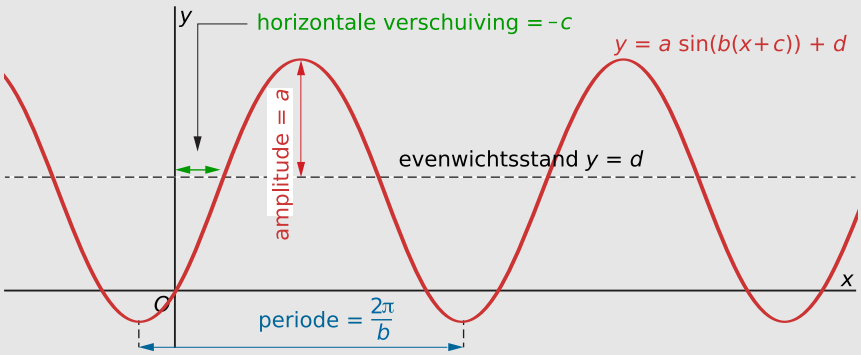
a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale translatie af. Maak vervolgens de grafiek.

b Los op: $g(x) = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïden



Figuur 3.3

Door transformaties van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken.

De grafieken van deze functies heten **sinusoïden**.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van g geldt:

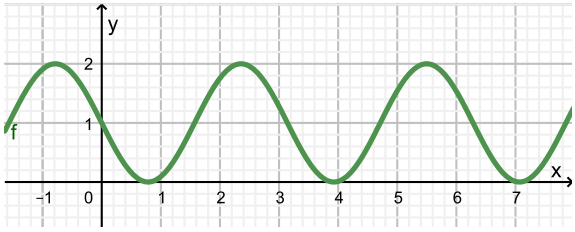
- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

Voorbeeld 1

Bekijk de figuur met daarin een deel van de grafiek van: $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$.

Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand.
Bereken de toppen van de grafiek.

Los op: $\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1 = 1\frac{1}{2}$.



Figuur 3.4

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De amplitude is 1 en de evenwichtsstand is $y = 1$, dus het maximum is $1 + 1 = 2$ en het minimum is $1 - 1 = 0$.

Bij de standaardsinus zitten de maxima bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Voor de maxima geldt dus:

$$2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Voor de minima geldt:

$$2\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 1\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = 1\tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

De toppen zijn $\left(\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi, 2\right)$ en $\left(\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi, 0\right)$.

Los op:

$$\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)+1 = 1\tfrac{1}{2}$$
$$\sin\left(2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2}$$
$$2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \pi-\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)+k\cdot 2\pi$$
$$2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \vee 2\left(x-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$$
$$x = \tfrac{7}{12}\pi+k\cdot\pi \vee x = \tfrac{11}{12}\pi+k\cdot\pi$$

In drie decimalen is de oplossing $x \approx 1{,}833+k\cdot\pi \vee x \approx 2{,}880+k\cdot\pi$.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $f(x) = 3\sin(\pi(x-1))+10$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de coördinaten van alle toppen.

c Los exact op: $f(x) = 11{,}5$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 4\cos\left(\tfrac{1}{2}(x+2)\right)+8$.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en maak de grafiek van f.

b Bereken de toppen van de grafiek van f.

c Los op: $f(x) = 11$.
Rond af op drie decimalen.

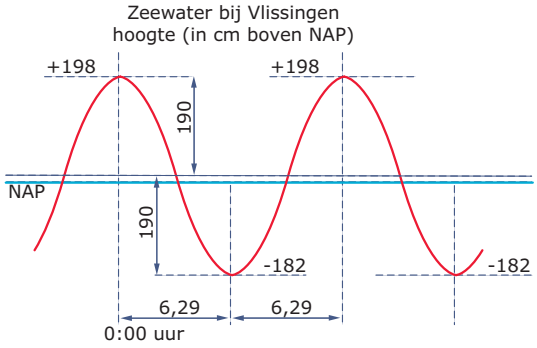
Voorbeeld 2

De grafiek in de figuur geeft globaal de getijdebeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de formule:

$$h = 8+190\cos\left(\tfrac{2\pi}{12{,}25}\cdot t\right)$$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en h in cm ten opzichte van het NAP.



Figuur 3.5

Laat zien, dat de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van deze sinusoïde overeen komen met de grafiek.
Bereken hoeveel uur per periode de waterstand hoger is dan 180 cm.

Antwoord

Volgens de formule is de periode 12,25 uur, de amplitude 190 cm en de evenwichtsstand $h = 8$ cm. Dat komt overeen met wat je in de grafiek afleest.

$h = 180$ geeft $\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25}t\right) \approx 0{,}905$

Omdat $\arccos(0{,}905) \approx 0{,}439$ krijg je: $\frac{2\pi}{12{,}25}t \approx 0{,}439 \vee \frac{2\pi}{12{,}25}t \approx -0{,}439$.

en daaruit volgt $t \approx 0{,}856 + k \cdot 12{,}25 \vee t \approx -0{,}856 + k \cdot 12{,}25$.

De waterstand is boven 180 cm van $t \approx -0{,}856$ tot $t \approx 0{,}856$.
Dat is ongeveer 1,71 uur.

Opgave 6

Bekijk de waterstanden bij Vlissingen in **Voorbeeld 2 op pagina 113**.

a Ga zelf ook na, dat de grafiek klopt met de gegeven formule.

b Los zelf op: $8 + 190\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right) = 180$.

Opgave 7

Voor de hoogte van de tip van het rotorblad van een draaiende windmolen geldt de formule:
$h(t) = 40 + 10 \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi \cdot t\right)$
Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

a Bepaal de waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Bij welke instellingen van de assen krijg je vanaf $t = 0$ precies twee periodes in beeld?

b Bereken de tijdstippen waarop de tip precies 45 meter boven de grond zit.

Oefenen

Opgave 8

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode en de amplitude en maak de grafiek zodat je twee periodes ziet.

a $y = 12 \cdot \sin(x)$

b $h(t) = 50\sin(2\pi t) + 10$

c $y = 120\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$

d $P(x) = -20\sin(2x)$

Opgave 9

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $5\cos\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

b $10\sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2)\right) = 5$

c $50\cos(4x) = 25\sqrt{3}$

d $50 - 30\sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = 20\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10$ op $[0,16]$.

a Bepaal algebraïsch het bereik van f.

b Bereken exact alle nulpunten van deze functie.

Opgave 11

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kun je beschrijven door:

$h(t) = 11 + 10\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$

Hierin is $h(t)$ uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Maak de grafiek van $h(t)$.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke betekenis?

c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid. Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoelang een bakje van een reuzenrad zich hoger dan 18 meter boven de grond bevindt.

Toepassen

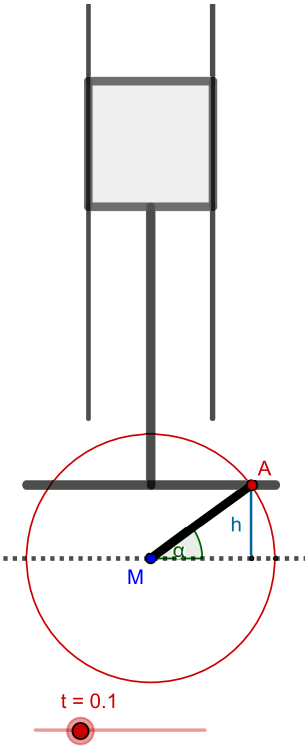
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 3.6

Opgave 12

Bekijk de formule voor de hoogte $h(t)$ van punt A boven de horizontale stippellijn.

a Waarom is de evenwichtsstand hier 0?

b Hoeveel seconden is per omwenteling $h(t) \geq 5$?

Opgave 13

De formule voor h in cm als functie van de tijd t in seconden is $h = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$.
Je kunt echter in plaats van h ten opzichte van een horizontale lijn door het draaipunt te nemen, de hoogte van A ook meten ten opzichte van de bovenkant van de cilinder. Neem daartoe aan dat de bovenkant van de cilinder 50 cm boven M zit.

a Welke formule kun je opstellen voor h als functie van t?

b Maak de grafiek bij de formule die je bij a hebt gevonden.
Hoe kun je die uit de standaardsinus afleiden?

c Op welke tijdstippen geldt $h = -42$ cm? Geef je antwoorden in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Bepaal van de functies de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

Opgave 15

Gegeven is de functie f door $f(x) = 0{,}5\sin(0{,}5\pi(x - 3))$ op $[0,10]$.

a Bereken algebraïsch alle nulpunten van de grafiek van f.

b Los op $f(x) > 0{,}25$.

3.4 Periodieke modellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

Voorkennis

- de grafiek van een sinusoïde (zowel met sin als cos) tekenen en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

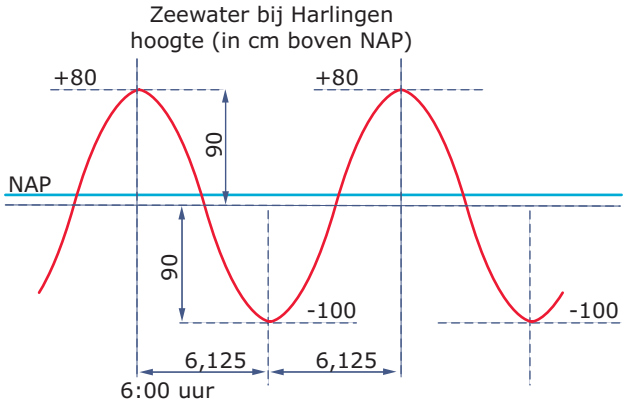
Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van de hoogte van het zeewater bij Harlingen op een zekere dag.

Noem h de hoogte het water in centimeter en t de tijd in uren.

Je kunt deze periodieke grafiek bij benadering opvatten als een sinusoïde.



Figuur 3.1

a Hoe groot zijn de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van deze sinusoïde dan ongeveer?

b Welke formule kun je opstellen voor deze sinusoïde?

c Voorspel met je formule de waterstand om 6:00 uur de volgende dag.

Uitleg

Bekijk de applet.

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

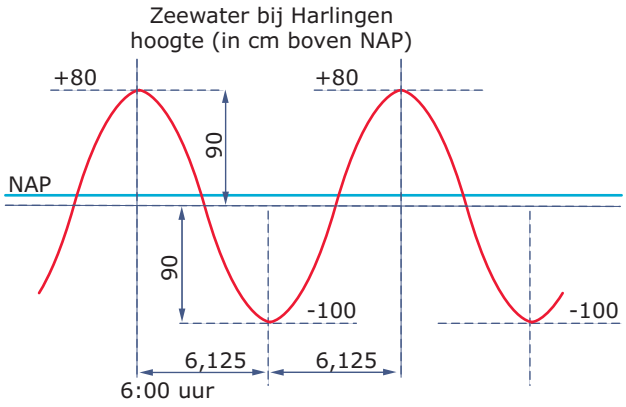
In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$

Uit de gegevens volgt:

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12{,}25} \approx 0{,}52$
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en - 1,0 m. De amplitude is $a = 0{,}9$ m.
- De evenwichtsstand is 0,9 m onder hoogwater: $d = -0{,}1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtslijn zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3{,}0625 \approx 2{,}94$. Dit betekent dat $c \approx -2{,}94$.



Figuur 3.2

De bijpassende sinusoïde wordt:

$h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$

Opgave 1

Gegeven is de opgestelde sinusoïde als model voor de waterstand bij Harlingen in de uitleg.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de amplitude en de evenwichtslijn worden gevonden.

b Stel een bijpassende formule op uitgaande van $y = \cos(x)$.

c De grafiek van de formule $h(t) \approx 0{,}9 \sin(0{,}52(t - 2{,}94)) - 0{,}1$ van de uitleg moet hetzelfde zijn als de grafiek van de formule die je bij b hebt gevonden (door de afronding zullen de grafieken iets afwijken). Controleer dit op de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Geef het voorschrift van de periodieke functies die ontstaan bij de volgenden wijzigingen.

a De amplitude wordt 4.

b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

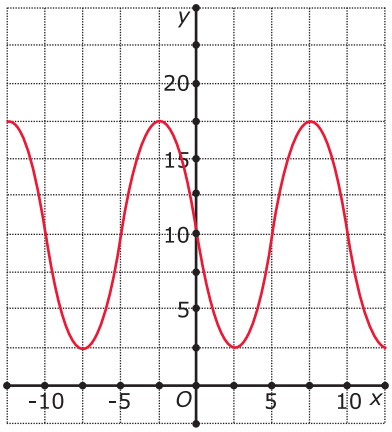
d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Opgave 3

Bekijk de sinusoïde.

a Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \sin(x)$.

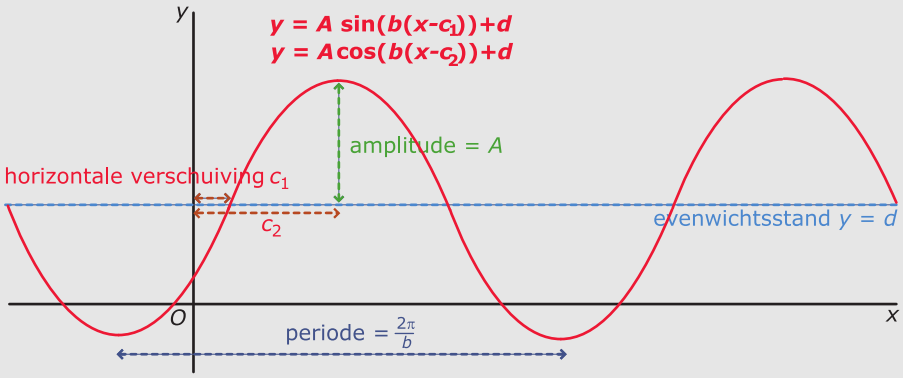
b Maak een functievoorschrift bij de sinusoïde, uitgaand van $y = \cos(x)$.



Figuur 3.3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 3.4

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde kun je daarbij een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** (ten opzichte van de standaardgrafiek) c te bepalen.

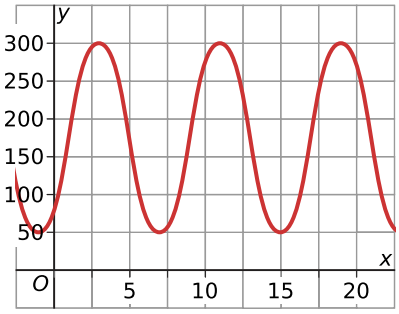
Er zijn twee functievoorschriften mogelijk:

- $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c_1)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$
- $f(x) = a \cdot \cos(b(x - c_2)) + d$ waarin $b = \frac{2\pi}{p}$

Let erop dat de waarden voor a, b en d bij beide grafieken hetzelfde zijn, maar de waarden van c niet. De sinus 'begint' altijd op de evenwichtslijn, de cosinus op het hoogste punt. De verschuiving ten opzichte van de standaardsinus is daardoor anders dan ten opzichte van de standaardcosinus.

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde.



Figuur 3.5

Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde maken uitgaande van de standaardsinus?
En welk functievoorschrift kun je maken uitgaande van de standaard-cosinus?

Antwoord

Het maximum van de functie is 300 en het minimum 50.
Dit betekent dat:

- de amplitude is $a = \frac{300-50}{2} = 125$
- de evenwichtsstand is $y = 300 - 125 = 50 + 125 = 175$

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$.
De periode is $p = 8$. Ga uit van de standaardsinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek op de evenwichtslijn op het moment dat de grafiek daar stijgt.
Hier is dat $x = 1$.

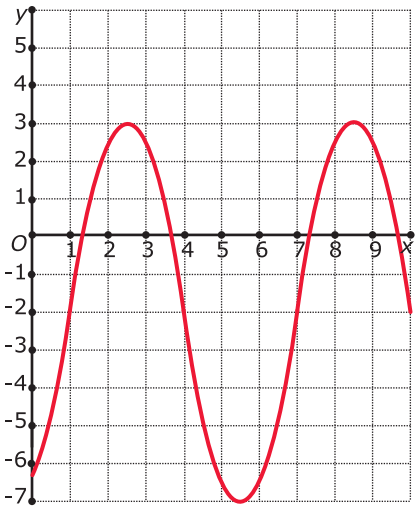
Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 125 \sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-1)\right) + 175$

Ga je uit van de standaardcosinus, dan is de horizontale verschuiving de x-waarde van een punt op de grafiek waar een maximum zit. Hier is dat bijvoorbeeld $x = 3$.
Het functievoorschrift wordt:

$f(x) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{8}(x-3)\right) + 175$

Opgave 4

Bekijk de sinusoïde.



Figuur 3.6

Maak er een functievoorschrift bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.

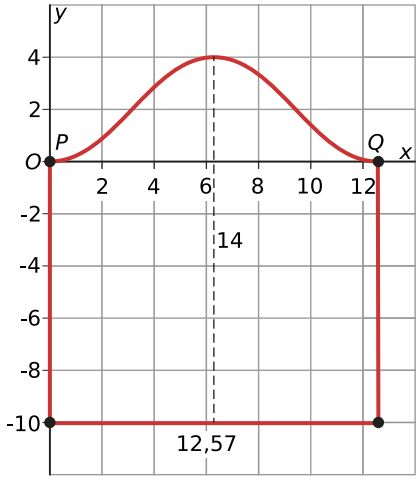
Opgave 5

Maak bij de sinusoïde van de vorige opgave een functievoorschrift uitgaande van $y = \cos(x)$.

Voorbeeld 2

Als je een cilinder met een diameter van 4 cm over het cirkeloppervlak dwars door het midden snijdt en vervolgens openknipt en plat neerlegt, krijg je de afgebeelde figuur. Er is bovendien een assenstelsel gekozen. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Neem aan dat punt P de coördinaten $(0,0)$ heeft.



Figuur 3.7

Antwoord

De assen zie je in de figuur. Er geldt:

- de evenwichtsstand is $y = 2$
- de amplitude is 2
- de periode is 4π

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de cosinus is de horizontale verschuiving 2π.
De formule wordt: $y = 2\cos(0{,}5(x - 2\pi)) + 2$ met domein $[0; 4\pi]$.

Opgave 6

Gebruik de cilinder uit **Voorbeeld 2 op pagina 121**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

Opgave 7

De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit **Voorbeeld 2 op pagina 121** in de punten C en D.
Bereken exact de lengte van lijnstuk CD.

Opgave 8

Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand van de figuur in **Voorbeeld 2 op pagina 121** in A en B.
Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Oefenen

Opgave 9

Op 24 november 2015 werd verwacht dat op 15 december 2016 het waterpeil bij Hoek van Holland de hoogste stand van 1,30 m boven NAP zou hebben om 3:05 uur en om 15:23 uur. De laagste stand was die dan ongeveer - 0,50 m. Er werd een model opgesteld van het getij, hierbij werd een sinusoïde $h(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$ gebruikt voor de hoogte van de waterstand in cm met t in uren.

Stel zelf dit model op.

Opgave 10

Gegeven zijn karakteristieken van sinusoïden. Stel een passend functievoorschrift op met een sinus.

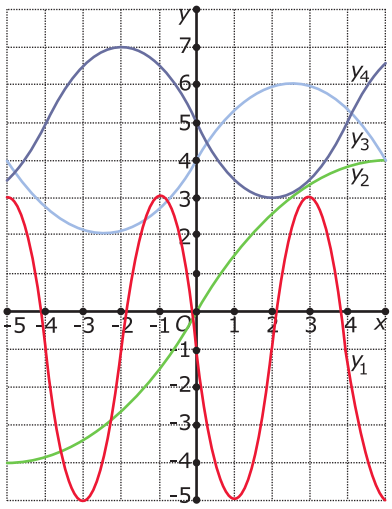
a De amplitude is 3, de periode is π, de evenwichtslijn is - 1 en het maximum bevindt zich op $x = \frac{\pi}{2}$.

b De amplitude is 5, de periode is 2, de evenwichtslijn is 2 en het maximum bevindt zich op $x = 1{,}5$.

c De amplitude is 2, de periode is 6, de evenwichtslijn is 0 en het maximum bevindt zich op $x = 3$.

Opgave 11

Stel bij de vier sinusoïden in de afbeelding een passend functievoorschrift op met een sinus.



Figuur 3.8

Opgave 12

De grafiek van f is sinusvormig. De evenwichtslijn is $y = 1$ en de amplitude is 2. De periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

a Stel een formule op voor $f(x)$.

b Bereken exact met die formule $f(0)$.

c Los op: $f(x) \leq 0$

Opgave 13

De menselijke ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toenemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

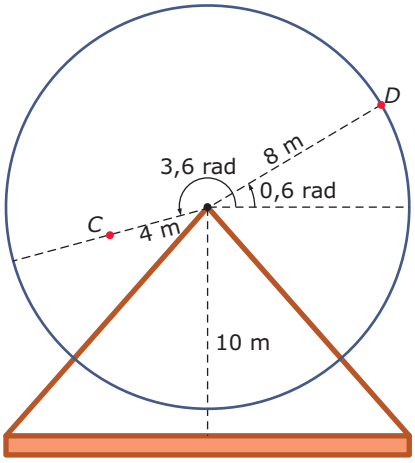
a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Bepaal de evenwichtslijn, de periode en de amplitude van deze sinusoïde.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

Toepassen

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in de rondte, stoeltje D op een afstand van 8 meter. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 0$ heeft stoeltje D een kwartcirkel vanaf de grond gedraaid. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 3.9

Opgave 14

Bekijk de beschrijving van de stoeltjes in een draaiend reuzenrad.

a Bekijk de figuur. Bereken bij deze stand de hoogte van de stoeltjes C en D ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje D en ook van stoeltje C.

Opgave 15

Bekijk nog eens goed de gegevens van stoeltje C.

a Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 1413{,}25$? Geef je antwoord in meter. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Hoeveel seconden zit je in stoeltje C elk rondje boven de 12 meter?

Testen

Opgave 16

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt $(20{,}300)$ en een eerstvolgend maximum in het punt $(32{,}400)$.

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot 60.

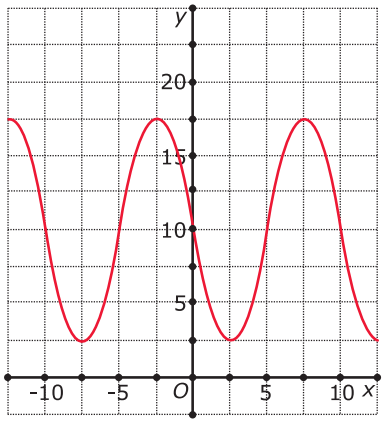
b Stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los exact op: $f(x) = 325$.

Opgave 17

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op.



Figuur 3.10

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- radialen — standaard sinusfunctie — standaard cosinusfunctie;
- arcsinus — arccosinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtsstand — horizontale verschuiving;
- periodiek model.

Activiteitenlijst

- de standaard sinusgrafiek en de standaard cosinusgrafiek tekenen en werken met hun periodiciteit — werken met exacte waarden;
- vergelijkingen bij de standaardsinus en standaardcosinus oplossen, exact (met arcsin, arccos) en met GeoGebra, Desmos of een grafische rekenmachine;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie f door $f(x) = 200 - 50 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Bepaal het bereik van f en maak de grafiek van f.

b Los algebraïsch op: $f(x) = 210$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 2

Los algebraïsch op. Geef waar mogelijk exacte antwoorden, rond anders af op twee decimalen.

a $2\sin(x) = \sqrt{2}$

b $\cos(x) = \cos(2)$

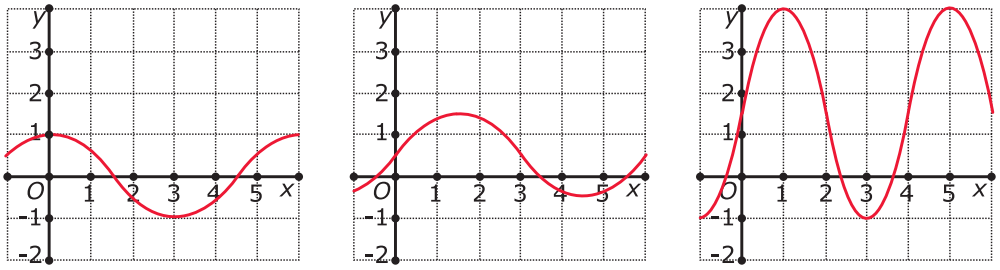
c $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$

d $2\cos(x) + 4 = 5$

e $25 + 10\cos\left(\frac{\pi}{7}(t - 15)\right) = 17$

Opgave 3

Bekijk de sinusoïden. Geef een bijpassend functievoorschrift.



I II III

Figuur 3.1

Opgave 4

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering te Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$y = 0{,}4 + 1{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$

Hierin is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP. Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten minimaal zijn? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$P = 50 + 50 \sin(0{,}212769t - 1{,}042563)$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

a Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de schijngestalte van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

Figuur 3.2

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

b Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

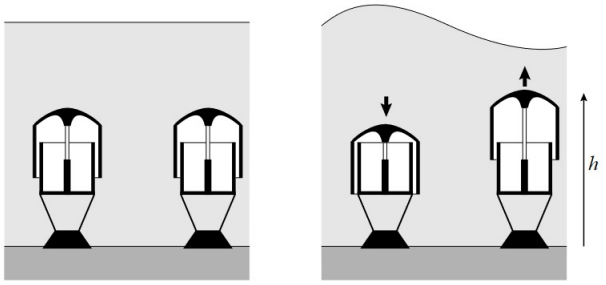
c Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Opgave 6

De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In figuur 1 zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In figuur 2 zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen. Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.

figuur 1 **figuur 2**



Figuur 3.3

De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

Neem aan dat de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter.

a Stel voor de hoogte h van de bovenkant van de drijver een formule op van de vorm $h = a + b \cdot \sin(ct)$, waarin t de tijd in seconde en h de hoogte ten opzichte van de zeebodem in m is.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door:

$d = -4{,}0 + 3{,}5 \sin(0{,}5t)$

met d de hoogte in meter en t de tijd in seconde.

De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule:

$w = -A \cos(0{,}5t)$

Hierin is w de waterhoogte in meter, A de amplitude van de golven ($A \geq 0{,}5$) in meter en t de tijd in seconde.

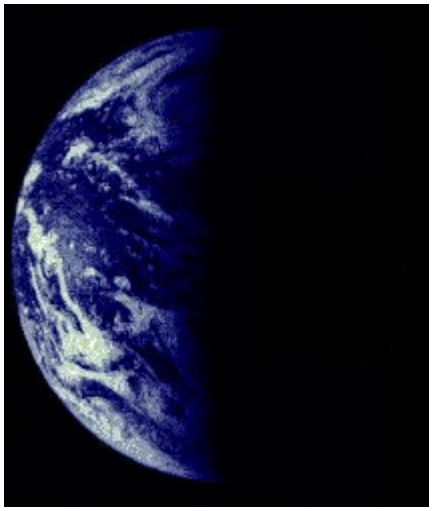
Afhankelijk van de waarde van A kan de drijver soms boven water uitsteken.

b Onderzoek met behulp van grafieken bij welke waarden van A dit het geval is. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

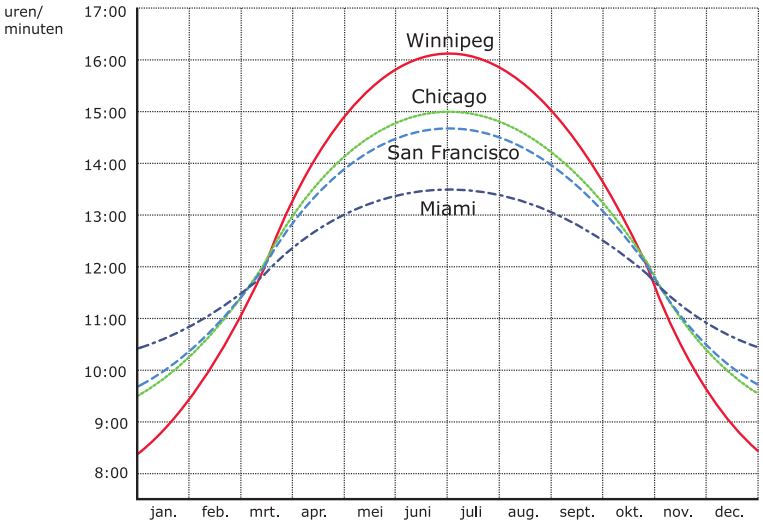
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.



Figuur 3.4

Via internet kun je een **actuele tabel voor zonsopkomst en -ondergang in De Bilt** vinden. Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken. Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de lengte dag en de kortste dag berekenen...

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op Aarde. Dat komt omdat de Aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de Aardbaan om de Zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



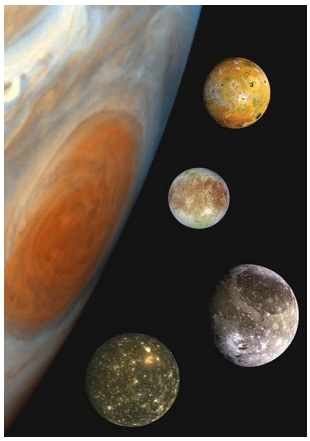
Figuur 3.5

a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter



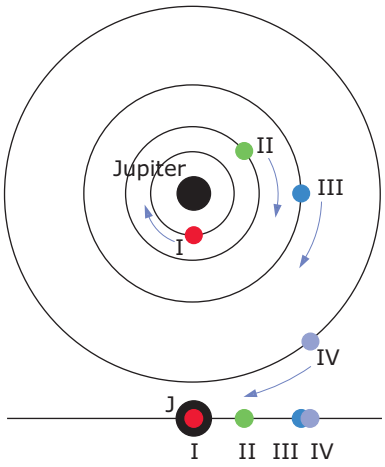
Figuur 3.6

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008. Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{29.5}(t - 17)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 sep 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen. En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hum cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.



Figuur 3.7

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen. Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0{,}365(t - 24))$. (Hierbij is er van uit gegaan dat 'West' een positieve waarde van u betekent en 'Oost' een negatieve.)

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

Opgave 9: Fietsen

Bij normaal weer, zonder al te veel mee- of tegenwind, legt een fietser gemiddeld 15 kilometer per uur af. Als je bij een constante snelheid de hoogte van de trappers uitzet tegen de tijd, of de hoogte van het ventiel tegen de tijd, krijg je een mooie sinusoïden.

Figuur 3.8

a Maak daarvan een overzicht met grafieken en formules. Geef redelijke schattingen van de bijbehorende afmetingen.

De baan die het ventiel aflegt als je fietst is geen sinusoïde.

b Waarom is dat zo?

c Hoe ziet die baan er dan wel uit? Maak er een zo goed mogelijke tekening van en verwerk die in het overzicht.

4

Differentiëren

4.1 Verandering 132
4.2 Het begrip afgeleide 141
4.3 Differentiëren 150
4.4 De kettingregel 160
4.5 De product- en de quotiëntregel 167
4.6 Totaalbeeld 174

4.1 Verandering

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de verandering van een functie herkennen in een grafiek en benoemen;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- grafieken maken bij functies en grafieken aflezen;
- toenemende, afnemende of constante stijging en daling, maximum en minimum in grafieken herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 4.1

Figuur 4.1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

b Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

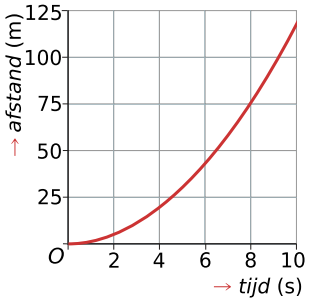
c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode vanaf de 12^{e} tot de 18^{e} km.

d Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Opgave V2

Een auto trekt op. De snelheid neemt dus toe. Stel dat je om de 2 seconden de afgelegde afstand opneemt. Je kunt dan een grafiek maken.

Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s (in meter) de formule $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden. Dat de snelheid van de auto toeneemt, kun je aan de grafiek zien.



Figuur 4.2

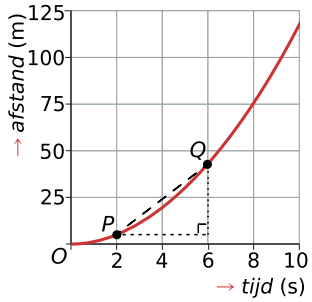
a Waaraan zie je dat?

b Hoe bereken je gemiddelde snelheid in de eerste seconde? En in de tweede seconde? En de derde seconde?

c Hoe geef je die gemiddelde snelheden in de grafiek aan?

d Hoe bepaal je nauwkeurig de snelheid op het moment dat de auto 5 seconden onderweg is?

Uitleg 1



Figuur 4.3

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval $[2,6]$ verandert $s(t)$ gemiddeld met: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling). De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval. Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

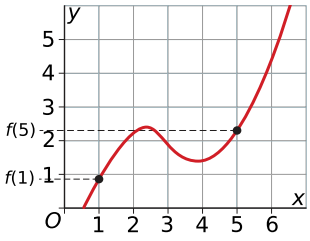
a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0,6]$.

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval $[6,10]$.

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval $[1,5]$.



Figuur 4.4

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,4]$.

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

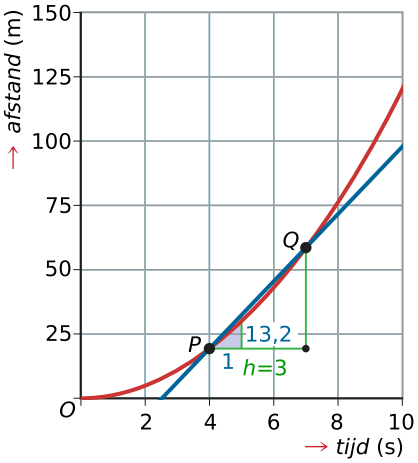
d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Dit is de grafiek van de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd. Er geldt $s = 1{,}2t^2$.
Daarbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde. De wagen gaat steeds sneller rijden.

De snelheid op $t = 4$ bereken je met het differentiequotiënt op het interval $[4{,}4 + h]$ waarbij h steeds dichter bij 0 wordt gekozen: $h \to 0$.



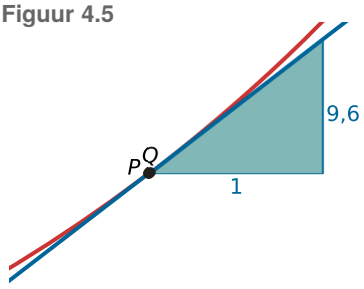
Figuur 4.5

Het differentiequotiënt op dat interval is:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2\cdot(4+h)^2 - 1{,}2\cdot 4^2}{4+h-4}$$

Dat is de gemiddelde snelheid in m/s op het interval $[4{,}4 + h]$. De formule is te herleiden tot:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2\cdot(4+h)^2 - 1{,}2\cdot 4^2}{h} = \frac{9{,}6h + 1{,}2h^2}{h} = 9{,}6 + 1{,}2h$$



Figuur 4.6

Als $h \to 0$, dan $1{,}2h \to 0$.

$9{,}6 + 1{,}2h$ nadert dan de waarde 9,6 m/s.

Je noemt deze waarde het differentiaalquotiënt op $t = 4$.

En het is de plaatsverandering, de snelheid op $t = 4$: $v(4) = 9{,}6$ m/s.

Dit differentiaalquotiënt is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie in dat punt. En het is de momentane verandering van de functie.

Opgave 3

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1 op pagina 133**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[5{,}5 + h]$, waarin $h \to 0$.

c Hoe wordt de snelheid $t = 5$ zichtbaar in de grafiek?

Opgave 4

Een functie f is gegeven door $f(x) = 5x^2$.

a Bereken de gemiddelde verandering van deze functie op het interval $[2,5]$.

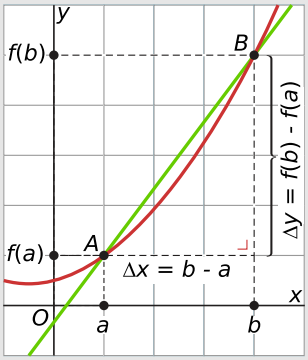
b Bereken de momentane verandering van deze functie als $x = 2$.

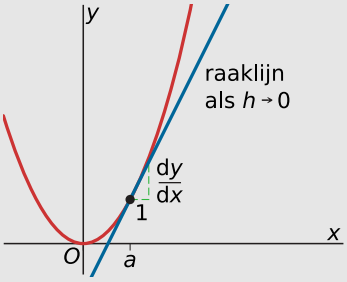
c Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet een deel van de grafiek van de functie $y = f(x)$.





Figuur 4.7

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.

Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan:

- de helling van lijn AB;
- de richtingscoëfficiënt van lijn AB;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a,b]$.

De **momentane verandering** of de **verandering in een punt** met $x = a$ van de functie f vind je door het differentiequotiënt op $[a,a+h]$ te berekenen:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Na herleiden en $h \to 0$ krijg je dan het **differentiaalquotiënt** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$.

In plaats van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt gelijk aan de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn in het punt van de grafiek met $x = a$.

Voorbeeld 1

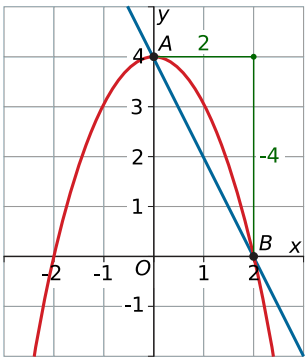
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ en beschrijf de betekenis van dit getal.

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Het differentiequotiënt is het hellingsgetal van het lijnstuk AB.
Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval $[0,2]$.
Het geeft de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.



Figuur 4.8

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 135**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval $[-2,1]$.

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval $[-1,1]$.

Opgave 6

Een hardloper houdt onderweg zijn tussentijden bij.

tijd t (min)	0	10	15	21
afstand s (km)	0	3,5	5,5	8,0

Tabel 4.2

Gedurende de eerste tien minuten liep hij 3,5 km. Gedurende de volgende vijf minuten liep hij 2 km.

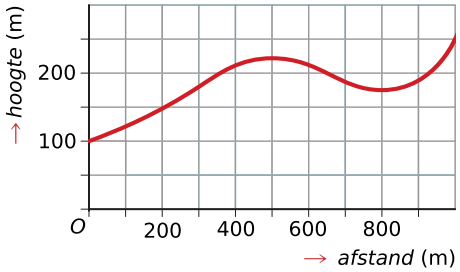
a Op welk van deze twee tijdsintervallen liep hij het snelst?

b Wat is de gemiddelde snelheid in kilometer per uur van deze hardloper over de eerste 3 kilometer?

c Als deze hardloper de hele 8 kilometer met een constante snelheid loopt, wie van de twee hardlopers is dan het snelst?

Opgave 7

Bij het begin van een berg staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft die berg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.



Figuur 4.9

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele berg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval [400,500] ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze berg.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Bereken het differentiaalquotiënt van deze functie voor $x = 3$.
Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[3,3 + h]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h \text{ (mits } h \neq 0).$$

Als $h \to 0$, dan $6 + h \to 6$.

Het differentiaalquotiënt van f voor $x = 3$ is dus $f'(3) = 6$.

Het getal 6 is ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Deze raaklijn is een rechte lijn en heeft daarom een vergelijking van de vorm: $y = 6x + b$.

Omdat $f(3) = 3^2 = 9$, gaat deze raaklijn door het (raak)punt $(3,9)$. Dus $9 = 6 \cdot 3 + b$ en $b = -9$.

De vergelijking van de gevraagde raaklijn is $y = 6x - 9$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2 op pagina 136** zie je hoe bij $f(x) = x^2$ het differentiaalquotiënt wordt berekend voor $x = 3$.

a Leg uit dat dit differentiaalquotiënt de momentane verandering van f voorstelt.

b Bereken de momentane verandering op $x = 4$ van functie f

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 4$.

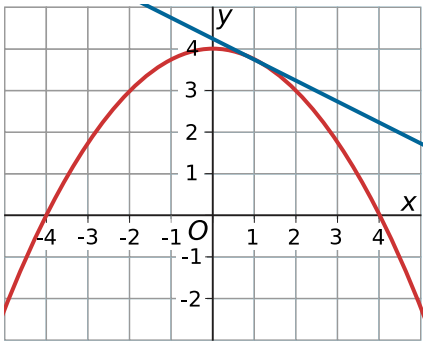
Opgave 9

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ op het domein $[-5,5]$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[1,1 + h]$.

b Welk hellingsgetal heeft de raaklijn aan grafiek van f voor $x = 1$?

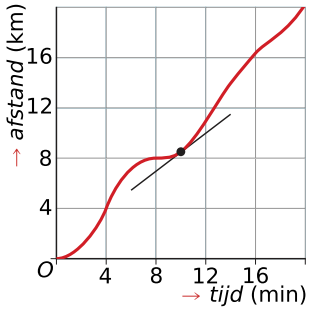
c Dit hellingsgetal is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek voor $x = 1$.
Stel een vergelijking van die raaklijn op.



Figuur 4.10

Voorbeeld 3

Je ziet de grafiek van de afgelegde afstand s van een auto op een binnenweg, uitgezet tegen de tijd t. Je ziet dat de snelheid eerst langzaam toeneemt totdat hij na vier minuten maximaal is. De grafiek gaat daar van toenemend stijgend over in afnemend stijgend. Daarna neemt de snelheid weer af. Na acht minuten staat de auto even stil om daarna weer langzaam op te trekken. Bepaal de snelheid van deze auto na precies tien minuten.



Figuur 4.11

Antwoord

De snelheid na precies tien minuten is het differentiaalquotiënt op $t = 10$. Omdat er geen functievoorschrift bij deze grafiek is, bepaal je de waarde van $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 10$ met behulp van de grafiek en de getekende raaklijn.

Je weet dat $\left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=10}$ de helling is van deze raaklijn.

Je ziet dat die raaklijn behalve door $(10; 8{,}5)$ ook (bij benadering) door het punt $(12; 10)$ gaat. De helling van de raaklijn is daarom ongeveer:

$\frac{10{,}0-8{,}5}{12-10} = 0{,}75$.

De auto had na precies tien minuten een snelheid van 0,75 km/minuut. Dat is ongeveer 45 km/uur.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3 op pagina 137** zie je een tijd afstand-grafiek van een auto.

a Wanneer was de snelheid van de auto hoger, bij $t = 4$ of bij $t = 16$?

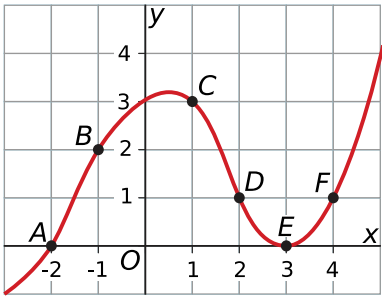
b Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn bij $t = 8$ ongeveer?

c Hoeveel minuten heeft de auto ongeveer met constante snelheid gereden?

Oefenen

Opgave 11

Je ziet een aantal punten op een grafiek.



Figuur 4.12

a Bereken de helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de helling van de lijn door C en F.

c Bij welke getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0? (Er zijn twee mogelijkheden.)

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C.
Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval $[1,4]$ zien?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 7x + 12$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval $[2,6]$.

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[-4,9]$.

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Opgave 13

Bij een wielrenner in een vlakke tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel.

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 4.3

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval $[0,10]$ en geef de betekenis hiervan.

b Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in km. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval $[44,60]$ en geef de betekenis hiervan.

c Bereken voor het tijdsinterval $[18,44]$ de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

d Heeft de wielrenner zijn krachten goed verdeeld? Licht je antwoord toe.

Opgave 14

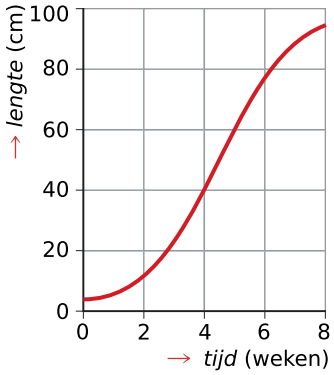
Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 15

Hier zie je een grafiek van de lengtegroei van een dahliaplantje in de loop van de weken.



Figuur 4.13

a Hoeveel cm per week groeit deze dahlia gemiddeld, gerekend over de eerste vier weken? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel bedraagt de groeisnelheid na drie weken? Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting.

c Wanneer is de dahlia het hardst gegroeid?

d Hoe zie je dat in de grafiek? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 16

Een steen valt van een loodrechte rotswand 500 meter naar beneden. Voor de afgelegde weg s (in meter) geldt de formule $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin t de tijd in seconden is, tenminste zolang de steen nog aan het vallen is en niet op de grond terecht is gekomen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden.

c Bereken de snelheid waarmee de steen op de grond terechtkomt.

Opgave 17

Het Empire State Building in New York is ongeveer 380 m hoog.
Het verhaal gaat dat een muntje wat je van die hoogte laat vallen een mens kan doden.

Met welke snelheid komt zo'n muntje op de grond?

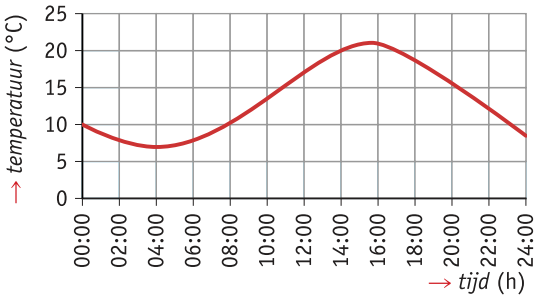
Testen

Opgave 18

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^4$. Bereken het differentiequotiënt op het interval $[1,3]$.

Opgave 19

Bekijk het verloop van de temperatuur op een mooie dag in mei.



Figuur 4.14

a Bepaal de gemiddelde temperatuurverandering per uur op de intervallen $[2,6]$, $[6,17]$ en $[17,20]$. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Schat de momentane temperatuurverandering om 8:00 uur.

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 + 1$.

a Bereken het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.

b Stel een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek in het punt $(2; 3{,}4)$.

c Er is een punt op de grafiek waarin de helling van de raaklijn precies het tegenovergestelde is van die bij b. Welk punt is dat? Licht je antwoord toe.

d In welk punt van de grafiek is de helling 0?

4.2 Het begrip afgeleide

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- de grafiek van de afgeleide functie bepalen met behulp van GeoGebra, Desmos, of de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen, stijgen en dalen van grafieken;
- de gemiddelde verandering van een functie over een interval berekenen;
- de momentane verandering van een functie in een punt berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Met een zeilwagen die Stevin in de zeventiende eeuw uitvond kun je veranderingen van de snelheid bestuderen.

In deze opgave wordt zo'n zeilwagen klaargemaakt, de zeilen worden gehesen. De zeilwagen gaat steeds sneller, er staat een flinke wind. Bij benadering geldt voor de afgelegde afstand s in m de formule $s = 1{,}2t^2$ waarin de tijd t wordt gemeten in seconden.

Figuur 4.1

a Hoeveel m heeft de zeilwagen na 5 s afgelegd en hoe snel rijdt hij dan?

b Kun je een formule opstellen voor de snelheid v in m/s van de zeilwagen als functie van t?

Uitleg 1

Voor de afstand die een zeilwagen heeft afgelegd geldt $s(t) = 1{,}2t^2$.
Hierbij is s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde. De wagen gaat steeds sneller rijden.

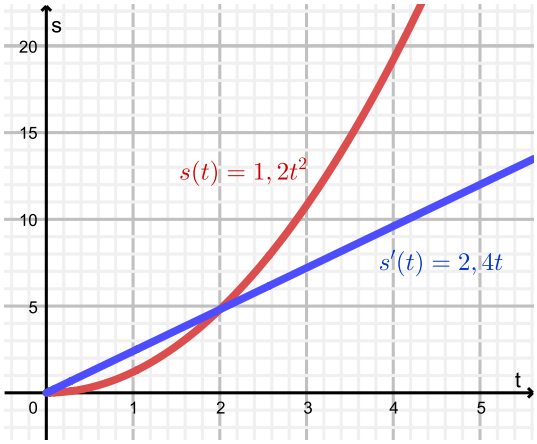
De snelheid op $t = 4$ kun je uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[4{,}4 + h]$ als je na herleiden $h \to 0$ kiest. Je vindt dan $v(4) = 9{,}6$ m/s.
Dit differentiaalquotiënt noem je ook wel de afgeleide waarde van s voor $t = 4$ en je noteert $s'(4) = 9{,}6$.

Op dezelfde manier kun je bij elke willekeurige t-waarde de snelheid uitrekenen met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[t,t + h]$.

Je vindt dan $v(t) = s'(t) = 2{,}4t$.

$v(t)$ is de veranderingsfunctie van $s(t)$ en geeft voor elke waarde van t de momentane verandering van s. Omdat het hier over afstand en tijd gaat, is deze functie ook de snelheidsfunctie.

Je noteert zo'n veranderingsfunctie als $s'(t)$ en hij heet de afgeleide functie. Hij beschrijft ook de helling van de grafiek voor elke waarde van t.
GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kunnen bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide functie maken. Dat noem je de hellingsgrafiek van de functie. Je ziet hier de hellingsgrafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$.



Figuur 4.2

Opgave 1

Bekijk de formule voor de afgelegde weg van de zeilwagen in **Uitleg 1 op pagina 141**.

a Bereken de gemiddelde snelheid over de eerste vijf seconden.

b Bereken de snelheid op $t = 5$ met behulp van het differentiequotiënt op $[5{,}5 + h]$, waarin $h \to 0$.

c Stel zelf de formule voor $v(t) = s'(t)$ op met behulp van het differentiequotiënt op $[t{,}t + h]$.

d Maak de grafiek van de afgeleide van $s(t) = 1{,}2t^2$ met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine. Ga na, dat deze grafiek hetzelfde is als de grafiek van de formule bij b.

e Welke betekenis heeft $v(5) = s'(5)$?

f Hoe groot is $v(5)$?

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

a Bereken $f'(5)$ met behulp van een differentiequotiënt.

b Stel de formule op voor de afgeleide functie $f'(x)$.
Maak ook de hellingsgrafiek van f en laat zien dat die past bij de afgeleide.

c Controleer je antwoord bij a door 5 in de afgeleide functie in te vullen.

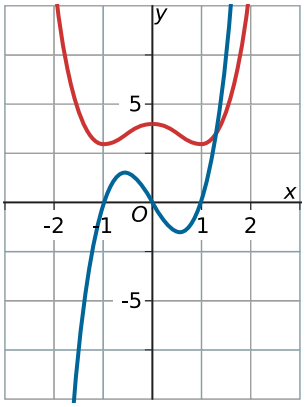
Uitleg 2

Bekijk de applet

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat dus over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide geeft de helling van de grafiek van de functie weer. Dus de grafiek van de afgeleide gaat daar ook over van positief naar negatief. Dat kun je gebruiken om de waarde van bijvoorbeeld het maximum te vinden. Hier zie je hoe dat kan.

Je ziet hier de grafiek (in het rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek is de hellingsgrafiek van f, dus de grafiek van de afgeleide f'. Als je goed kijkt, zie je dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (dit is het geval voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (dit is het geval voor $x = 0$).



Figuur 4.3

Je zoekt dus naar de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dat moet dus bij een nulpunt van de afgeleide zijn.

Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

Extremen berekenen doe je dus zo:

- Bereken voor welke x-waarden de afgeleide 0 is.
- Controleer of de afgeleide daar van positief naar negatief of andersom gaat.
- Bereken de extreme waarde door de gevonden waarden voor x in te vullen in de functie zelf.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 142** wat $f'(x)$ zegt over het verloop van $f(x)$.

a Wat weet je van $f'(x)$ als de grafiek van f stijgend is?

b Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x) = 0$?

c Wat gebeurt er met $f'(x)$ als de grafiek van f een minimum heeft?

d Wat weet je van de grafiek van f als $f'(x)$ een maximum heeft?

Opgave 4

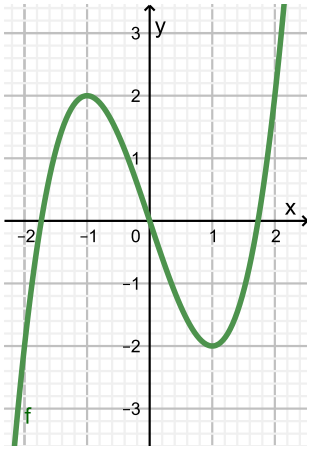
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Maak de grafiek van de afgeleide van f.

b Lees de nulpunten van de afgeleide uit de figuur af. Bekijk of er bij deze nulpunten van $f'(x)$ extreme waarden optreden (minima of maxima) voor f.

c Bereken de extremen van f.

d Ga na dat ook f' een minimum heeft.
Welke betekenis heeft dit minimum voor de grafiek van f?



Figuur 4.4

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ en die van zijn afgeleide.

a Bepaal de waarden van x waarin $f'(x) = 0$.

b Heeft de functie een extreme waarde?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het hellingsgetal van een grafiek voor een bepaalde waarde van x, zeg a, van een functie f bereken je met het differentiequotiënt op $[a,a+h]$. Je herleid dit differentiequotiënt en neemt $h \to 0$ (h mag ook negatief zijn). Als dit differentiequotiënt dan een bepaalde waarde nadert dan is die waarde

- het **hellingsgetal** of
- de **afgeleide waarde** of
- het **differentiaalquotiënt**

van $f(x)$ voor $x = a$.

De afgeleide waarde van $f(x)$ voor $x = a$ schrijf je zo: $f'(a)$. Uitspraak: 'f accent a'.

Of zo: $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$. Uitspraak: 'dy dx als x is a'.

De afgeleide voor alle mogelijke waarden van x is $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
Deze functie van x heet de **afgeleide (functie)** of **hellingfunctie**.

Bekijk de applet

De afgeleide geeft bij iedere waarde van x (uit het domein) de helling van de functie voor die waarde van x. Dit getal is ook het hellingsgetal van de raaklijn in het punt met die waarde van x. Met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine kun je bij een gegeven functie de grafiek van de afgeleide laten maken.

Veel functies hebben **extremen**. Dat zijn waarden waarbij de functie maximaal is of juist minimaal is. Je kunt die waarden niet altijd goed uit de grafiek van een functie aflezen, bijvoorbeeld omdat die grafiek niet gemakkelijk in beeld is te krijgen. Je bepaalt ze dan zo:

- Bepaal $f'(x)$ en maak er een grafiek van.
- Bepaal de nulpunten van $f'(x)$.
- Als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat in zo'n nulpunt heeft f een maximum.
- Als $f'(x)$ van negatief naar positief gaat in zo'n nulpunt heeft f een minimum.

Als de afgeleide niet van teken wisselt in een nulpunt, is er daar geen extreme waarde. In de grafiek van f is dan vaak een buigpunt met een horizontale raaklijn te zien.

Optimaliseren is het berekenen van extremen in praktijksituaties: minimale hoeveelheid materiaal bij een gegeven inhoud, het berekenen van een maximale oppervlakte van een stuk land bij een vaste lengte van de omheining, enzovoort.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 4$.
Stel een voorschrift op voor de afgeleide van deze functie. Stel met behulp daarvan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f voor willekeurige x op het interval $[x,x+h]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+h)^2+4-(3x^2+4)}{h} = \frac{6xh+3h^2}{h} = 6x + 3h$$

Als $h \to 0$ krijg je de afgeleide: $f'(x) = 6x$.

Wil je nu de vergelijking opstellen van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ dan heb je het hellingsgetal nodig voor die waarde van x. De afgeleide is het hellingsgetal van de grafiek van f voor willekeurige x, dus het hellingsgetal van de raaklijn voor $x = 3$ is: $f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$

De vergelijking van de raaklijn wordt daarmee: $y = 18x + b$

$f(3) = 31$, dus $31 = 18 \cdot 3 + b$ en hieruit volgt $b = -23$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 18x - 23$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$.

a Met behulp van het differentiequotiënt op $[x,x+h]$ kun je de afgeleide van de functie $f(x)$ bepalen. Stel de formule van de afgeleide functie op. Laat duidelijk zien hoe je eraan komt.

b De lijn met vergelijking $y = -2x + 8$ lijkt de grafiek te raken. Laat zien dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 7

Een constante functie heeft als voorschrift $f(x) = c$.

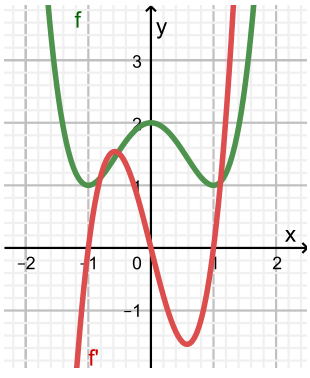
Toon aan dat de afgeleide van een constante functie altijd de waarde 0 heeft.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.
Bepaal de extremen van f met behulp van een grafiek van de afgeleide.

Antwoord

Hier zie je hoe dit is gedaan met behulp van GeoGebra. Maar je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.



Figuur 4.5

Je kunt aflezen dat $f'(x) = 0$ als $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$.

Of er sprake is van een maximum of een minimum of geen van beide kun je aan de grafiek van de afgeleide zien:

- Als $x = -1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: $\min. f(-1) = 1$.
- Als $x = 0$ gaat f' over van positief naar negatief.
  Dat betekent dat f daar een maximum heeft: $\max. f(0) = 2$.
- Als $x = 1$ gaat f' over van negatief naar positief.
  Dat betekent dat f daar een minimum heeft: $\min. f(1) = 1$.

Omdat je hier de extremen ook gemakkelijk direct uit de grafiek van de functie zelf kunt halen, lijkt het werken met zo'n afgeleide overbodig. Maar dat wordt heel anders als je straks met functies te maken krijgt waarvan de grafiek niet zo gemakkelijk in beeld komt.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2 op pagina 145** zie je hoe de extremen van een functie kunnen worden bepaald vanuit de grafiek van de afgeleide.
Gegeven is nu de functie $f(x) = x^4 - 4x^2 + 200$.

a Waarom krijg je nu de grafiek van f niet automatisch met de standaardinstellingen in beeld?

b Waarom krijg je de hellingsgrafiek wel gemakkelijk in beeld?

c Welke extremen heeft deze functie?

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1000 - 3x^2 + x^3$.

a Maak een grafiek van de hellingfunctie (de afgeleide) van f.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide.

c Welke extremen heeft deze functie?

Voorbeeld 3

De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

Teken de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Geef aan bij welk aantal verkochte producten de opbrengst maximaal is en leg uit hoe je dat aan de hellingsgrafiek kunt zien.

Antwoord

Omdat de afgeleide functie voor elke waarde van q de helling van de grafiek van R geeft, is de grafiek van $R'(q)$ de hellingsgrafiek van R. Maak beide grafieken in één figuur.

Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de hellingsgrafiek: waar hij de horizontale as snijdt, heeft de grafiek van R een maximum. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.

Figuur 4.6

Opgave 10

In **Voorbeeld 3 op pagina 146** wordt bij een opbrengstfunctie R de grafiek van de hellingsfunctie getekend.

a Laat zien, hoe je een formule voor R' kunt afleiden

b Wat betekent het voor de grafiek van R als $R' > 0$? en als $R' < 0$?

c Laat zien dat uit $R'(q) = 0$ inderdaad volgt $q = 12$.

Opgave 11

De kosten $K(q)$ (euro) voor de productie van q liter van een bepaalde chemische stof bedragen $K(q) = 0{,}1q^2 + 0{,}7q + 12$.

a Maak de hellingsgrafiek van K.

b Hoe kun je aan de hellingsgrafiek zien dat de kosten blijven stijgen bij toenemende q?

Oefenen

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 5$.

a Bereken $f'(2)$ en omschrijf de betekenis van dit getal.

b Bepaal de afgeleide functie (of hellingsfunctie) door het differentiequotiënt van f op het interval $[x,x + h]$ uit te werken en dan h naar 0 te laten naderen.

c Controleer nu je antwoord bij a door $x = 2$ in te vullen in de afgeleide functie die je bij b hebt gevonden.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

a Maak de grafiek van f'.

b Bepaal de nulpunten van de afgeleide en daarmee de extremen van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 14

Voor een vallend voorwerp geldt bij benadering $s(t) = 4{,}9t^2$, waarin s de afgelegde afstand in meter en t de tijd in seconde is.

a Bereken de gemiddelde snelheid gedurende de eerste tien seconden van de val.

b De snelheid na tien seconden is groter dan de gemiddelde snelheid over de eerste tien seconden. Laat dit door middel van een berekening zien.

c Stel een formule op voor de snelheid v als functie van t.

d Na hoeveel seconden vrije val beweegt het lichaam met een snelheid van 120 km/h?

Opgave 15

De winst van een bedrijf is te beschrijven met een winstformule: $W(q) = -3q^2 + 200q - 300$, waarbij q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt en W de winst in honderden euro.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze winstfunctie.

b Welke betekenis heeft $W'(50)$ voor de opbrengstfunctie?

c De fabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale winst te bereiken. Bereken deze productieomvang en de maximale winst met behulp van de afgeleide.

Opgave 16

De helling van een raaklijn aan de de grafiek van de functie $f(x) = -5x^2 + 4$ is 7.

Bereken voor welke x dit het geval is.

Toepassen

Als een voorwerp van niet al te grote hoogte naar beneden (richting aarde) valt, dan geldt voor de afgelegde weg s de formule:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Hierin is:

- s de afgelegde weg in m
- t de tijd in seconde
- $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de gravitatieconstante

De luchtweerstand wordt dan buiten beschouwing gelaten.

Opgave 17

Bekijk de algemene formule van de afgelegde weg van een (van niet al te grote hoogte) vallend voorwerp.

a Bereken de snelheid van de steen na precies vijf seconden. Gebruik het differentiequotiënt op $[t,t+h]$.

b Stel een formule op voor de snelheid waarmee de steen valt.

c Controleer je antwoord bij a met de formule bij b.

Opgave 18

Voor een voorwerp dat je van 500 m hoogte laat vallen geldt $h(t) = 500 - 4{,}9t^2$, waarin h de hoogte (in m) boven de grond en t de tijd in seconden is.

Met welke snelheid komt zo'n voorwerp op de grond?

Testen

Opgave 19

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 1{,}5x^2 + 4$ op het interval $[-2,4]$.

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op dit interval.

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide $f'(x)$.

c Bereken de veranderingssnelheid van $f(x)$ voor $x = 2$.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Opgave 20

Voor een bepaalde autofabrikant geldt voor de totale opbrengst TO van de verkoop : $TO = 900q - 60q^2$ waarin TO wordt uitgedrukt in duizenden euro's en q de geplande productieomvang in honderdtallen per jaar voorstelt. Er wordt van uit gegaan dat alle geproduceerde auto's ook worden verkocht.

a Maak een grafiek van de afgeleide van deze opbrengstfunctie.

b Welke betekenis heeft $TO'(5)$ voor de opbrengstfunctie?

c De autofabrikant wil onderzoeken hoe groot zijn productieomvang moet zijn om een maximale opbrengst te krijgen. Bereken deze productieomvang met behulp van de afgeleide functie die je bij a heb gevonden.

4.3 Differentiëren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je door differentiëren afgeleide functies kunt bepalen;
- regels toepassen bij het differentiëren;
- raaklijnen en extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Voorkennis

- de momentane veranderingen van een gegeven functie beschrijven met een afgeleide functie;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat bij functie f een afgeleide functie is te maken door

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

te herleiden, dan $h \to 0$ te nemen en te bekijken of daar iets uitkomt dat allen van h afhangt.

a Laat zien, dat $f(x) = x^2$ dan $f'(x) = 2x$ als afgeleide heeft.

b Welke betekenis heeft deze afgeleide functie?

c Laat zien, dat bij $f(x) = x^3$ hoort $f'(x) = 3x^2$.

d Welke afgeleide zal $f(x) = x^4$ hebben? Ontdek je regelmaat?

Uitleg 1

Je kunt met GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de afgeleide functie gemakkelijk in beeld brengen. Alleen zijn daarvan niet altijd de nulpunten goed af te lezen. Je wilt een formule voor de afgeleide.

Je kunt van elke functie de afgeleide bepalen door het differentiequotiënt op het interval $[x,x+h]$ te berekenen en dan $h \to 0$ te nemen.

Voor $f(x) = x^2$ gaat dit zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt $f'(x) = 2x$.

Voor $f(x) = x^3$ gaat het zo:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

Neem nu $h \to 0$ en je vindt: $f'(x) = 3x^2$

Zo vind je bij $f(x) = x^4$ de afgeleide $f'(x) = 4x^3$

Nu zie je wellicht de regelmaat al.

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Er zijn meer regels:

- Van de constante functie $f(x) = c$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.
- Als $f(x) = c \cdot x^n$ dan is $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$
- Als een functie bestaat uit een optelling/aftrekking van meerdere functies is de afgeleide de optelling/aftrekking van de afgeleiden.

De afgeleide van $f(x) = 3x^2 - 25x + 10$ bepaal je dus zo: $f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 25x^{1-1} + 0 = 6x - 25$.

Dit noem je differentiëren.

Opgave 1

Bepaal de afgeleide functie van de volgende functies.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = 12x^2 + 4x - 2$

b $g(x) = -4x^3 + 5x$

c $h(x) = 5x^{10} + 2x^5 - 3x^3$

Uitleg 2

Je hebt gezien, dat:

Als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, waarin $n = 0,1,2,3,4,...$

Deze differentieerregel blijkt ook op te gaan voor gebroken en/of negatieve exponenten.
Wiskundigen hebben bewezen dat deze regel geldt voor alle mogelijke exponenten:

Als $f(x) = x^r$ dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Dit heet de algemene machtsregel voor differentiëren.

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Door de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{-1}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Opgave 3

In **Uitleg 2 op pagina 151** zie je hoe de algemene machtsregel kan worden toegepast bij het differentiëren.

a Bepaal zelf de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

b Bepaal de afgeleide van $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

c Bepaal de afgeleide van $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a Bepaal de afgeleide $f'(x)$.

b Bereken de extreme waarden van f met behulp van de afgeleide.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Met het differentiaalquotiënt is de afgeleide van elke functie te bepalen (als die bestaat). Dat kan wel heel bewerkelijk zijn. Door voor bepaalde soorten functies de afgeleide te bepalen ontstaan de **differentieerregels**. Het gebruik van deze regels heet **differentiëren**.

Hier zie je enkele differentieerregels:

- **machtsregel**:
  als $f(x) = c \cdot x^r$ is $f'(x) = c \cdot rx^{r-1}$ voor elke waarde van c en voor elke waarde van r
- **constante-regel**:
  als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **somregel**
  als $f(x) = u(x) + v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
  als $f(x) = u(x) - v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

De afgeleide functie van $y = f(x)$ kun je schrijven als: $f'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $y'(x)$.

Je kunt met behulp van differentiëren bij functies een afgeleide bepalen.
Daarmee kun je bij een gegeven waarde van x de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie berekenen.
Ook kun je er extreme waarden van de functie mee berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met de afgeleide.

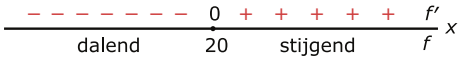
$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Kies zowel links als rechts van $x = 20$ een getal en vul dit in de afgeleide in om te kijken of de afgeleide van teken wisselt. Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en dus negatief en $f'(25) = 762500$ en dus positief.

In schema:



Figuur 4.1

f' gaat voor $x = 20$ over van negatief naar positief.

En dus geldt dat f een minimum heeft voor $x = 20$.
Omdat $f(20) = -12012345$ schrijf je: min.$f(20) = -12012345$.

Opgave 5

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 10x^3 - 60x + 100$

b $g(x) = 15 + 2x - 5x^2 - 10x^4$

c $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$

d $A(d) = \frac{1}{2}\pi d^2 + 10\pi d$

e $k(x) = x^2(x - 4)$

f $P(x) = \left(x^2 - 4\right)(x - 4)$

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van de afgeleide van f. Geef er de plaats van de extremen in aan en bereken die extremen.

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

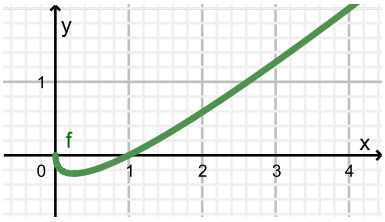
a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Voor welke waarden van x hebben beide functies dezelfde helling?

Voorbeeld 2

Je ziet hier de grafiek van de functie $f(x) = x - \sqrt{x}$.



Figuur 4.2

Bereken het exacte minimum van f.

Antwoord

Deze functie heeft een minimum. Je kunt dit niet nauwkeurig aflezen uit de grafiek. Je werkt daarom met de afgeleide.

Eerst schrijf je $f(x) = x - \sqrt{x} = x - x^{\frac{1}{2}}$.

Differentiëren: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ en dus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$.
Dit geeft $2\sqrt{x} = 1$ en $x = 0{,}25$.

Dus: min. $f(0{,}25) = -0{,}25$.

Opgave 8

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2x$

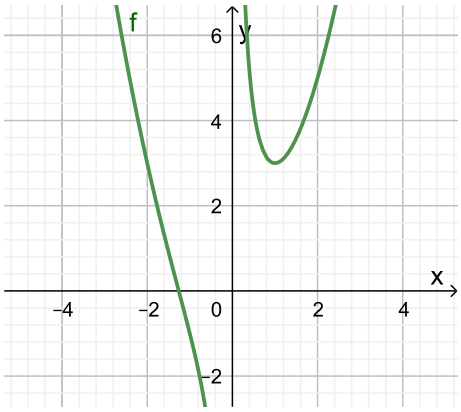
b $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

c $h(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

d $K(p) = \frac{300+5p}{p}$

Opgave 9

Je ziet hier een deel van de grafiek van $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
De functie lijkt alleen één minimum te hebben en geen maximum.



Figuur 4.3

a Laat met behulp van de afgeleide zien dat f inderdaad precies één extreme waarde heeft.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Voorbeeld 3

Een timmerman maakt voor een klant een houten kist met deksel. Voor die kist gebruikt hij 192 dm^2 hout. De lengte van de kist moet twee keer zo groot zijn als de breedte. Bij welke afmetingen heeft de doos een maximale inhoud?

Antwoord

Neem aan dat de kist de vorm van een balk heeft.

De inhoud van een balk met afmetingen $l \times b \times h$ is: $I = l \cdot b \cdot h$.

Neem je $b = x$ dan is $l = 2x$, dus $I = 2x^2h$.

Voor de oppervlakte van de kist geldt $A = 4x^2 + 6xh = 192$.

Je wilt de inhoud maximaliseren. Dus maak je daarvan een functie door beide formules te combineren.

Uit $4x^2 + 6xh = 192$ volgt $h = \frac{192-4x^2}{6x}$

De inhoud (in dm^3) is dan: $I = 2x^2h = 2x^2 \cdot \frac{192-4x^2}{6x} = 64x - 1\frac{1}{3}x^3$.

Bekijk de grafiek van $I(x)$.

Omdat $x > 0$ heeft de grafiek van I alleen een maximum, dat je met behulp van differentiëren kunt bepalen.
$I'(x) = 64 - 4x^2 = 0$ geeft $x^2 = 16$ en dus $x = 4$.

Dus als $x = 4$ is de inhoud maximaal. Dit betekent dat als de doos 8 dm lang, 4 dm breed en $5\frac{1}{3}$ dm hoog is, de inhoud maximaal is.

Figuur 4.4

Opgave 10

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben precies de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm. De fabrikant vraagt zich nu af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat er dus om de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet hij kiezen?

a Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

b Noem de zijde van het vierkante grondvlak x. Druk de hoogte h uit in x.

c Druk de inhoud I uit in de x.

d Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

e Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud. Geef je antwoord in centimeters afgerond op één cijfer achter de komma.

Oefenen

Opgave 11

Bepaal eerst de afgeleide van de gegeven functie door differentiëren. Bepaal vervolgens ook het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(1,y)$.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

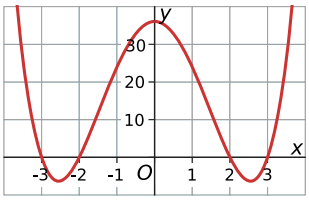
d $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

e $TK(p) = 8{,}5 + \frac{200}{p^2}$

f $h(x) = 2\sqrt{x} - 4x$

Opgave 12

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.



Figuur 4.5

a Bereken de nulpunten van f.

b Bepaal de afgeleide van f .

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los exact op: $f'(x) = 0$

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?

Opgave 13

Als een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek, dan is zijn baan parabolisch wanneer je de luchtweerstand verwaarloost. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

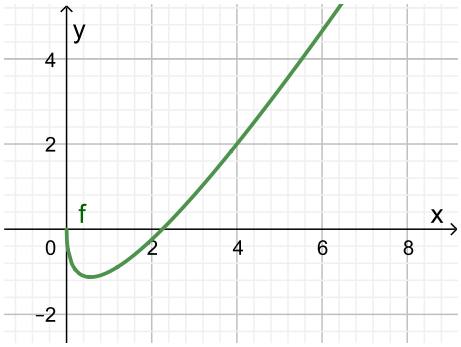
d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 14

Je ziet de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.



Figuur 4.6

Opgave 15

Van een balkvormige kartonnen doos is de lengte gelijk aan de breedte. In verband met de beschikbare hoeveelheid karton moet de oppervlakte van elke doos 120 dm^2 zijn.

Bereken bij welke afmetingen de doos een maximale inhoud heeft.

Toepassen

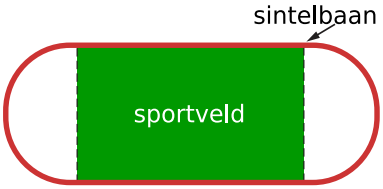
Onder **optimaliseren** versta je het vinden van waarden waarbij iets zo goed mogelijk functioneert, zo groot of zo klein mogelijk is, zo efficiënt mogelijk werkt, en dergelijke.

Je kunt dan bijvoorbeeld denken aan het omheinen van een zo groot mogelijk stuk land met een bepaalde beschikbare hoeveelheid materiaal om die omheining tot stand te brengen. Je optimaliseert dan de oppervlakte.

Opgave 16: Sportveld binnen atletiekbaan

Om een rechthoekig sportveld ligt een atletiekbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de atletiekbaan is 400 meter. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken exact de afmetingen van dit sportveld.



Figuur 4.7

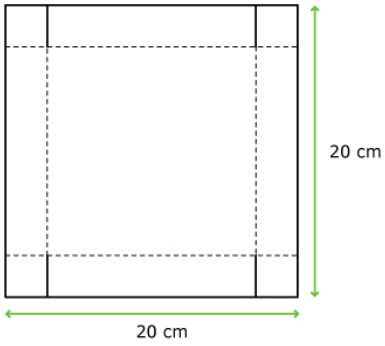
Opgave 17: Een weiland tegen de stal

Een boer omheint een rechthoekig weiland met een hek van 200 meter lengte. De stal grenst aan het weiland en heeft een lengte van 12 meter. Waar de stal staat, hoeft geen omheining te komen.

Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van het omheinde weiland.

Opgave 18: Maximaal bakje

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.



Figuur 4.8

a Stel dat de zijde van het ingeknipte vierkantje x wordt genoemd. Welke formule kun je dan opstellen voor de inhoud I van dit bakje?

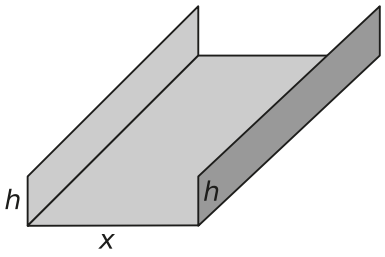
b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van dit bakje met behulp van differentiëren. Rond af op hele cm^3.

Opgave 19: Goten in ontwikkelingslanden

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.

Hoeveel water kan zo'n goot maximaal bevatten?



Figuur 4.9

Testen

Opgave 20

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $g(x) = 3x^4 - \frac{1}{5}x^2$

c $h(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $k(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$

Opgave 21

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

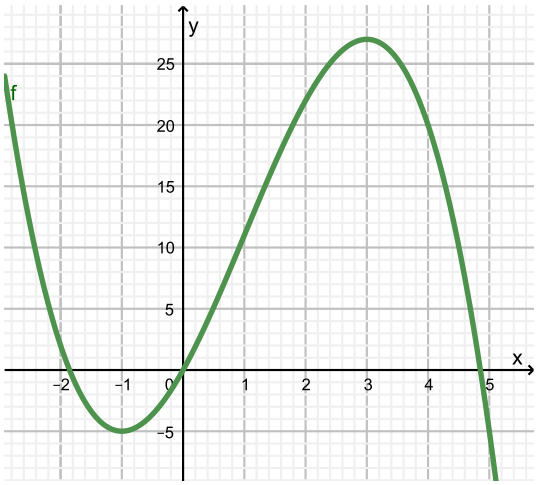
Opgave 22

Dit is (een deel van) de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt $(0,0)$ met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?



Figuur 4.10

4.4 De kettingregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de uitgebreide machtsregel en de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).

Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Soms bestaat een functievoorschrift uit een serie geschakelde functies.

Bijvoorbeeld: $S(x) = (3x + 1)^2$
Een functiewaarde $S(x)$ bereken je in twee stappen met functies g en f:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(g(x)) = (g(x))^2$

De functie $f(x) = (3x + 1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x))$ heet een samengestelde functie of kettingfunctie:

$$x \xrightarrow{g(x)} 3x + 1 \xrightarrow{f(g(x))} (3x + 1)^2$$

Deze kettingfunctie kun je niet zo maar differentiëren met de machtsregel:

$f'(x) \neq 2(3x + 1)^1 = 6x + 2$

Dat zie je door bij de functie S eerst de haakjes weg te werken en dan pas te differentiëren.
$f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ en $f'(x) = 18x + 6$

Er is ook een andere manier.

Schrijf $g(x) = 3x + 1 = u$ en $f(u) = u^2$. Dan is $f(x) = f(g(x))$.

Het differentiëren van S gaat als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $f(u)$: $f'(u) = 2u$
- Bepaal de afgeleide van $g(x)$: $g'(x) = 3$
- De afgeleide van S is het product van bovenstaande twee afgeleides:

  $S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 2u^1 \cdot 3 = 2 \cdot (3x + 1)^1 \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

In het algemeen geldt dat als $f(x) = f(g(x))$ dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit is de kettingregel voor differentiëren.

Opgave 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \left(3x^2 + 1\right)^2$

a Waarom is f een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?

b De functie $f(x)$ kan geschreven worden als $f(u) = f(g(x))$. Geef $g(x) = u$ en $f(u)$.

c Bepaal $g'(x)$ en $f'(u)$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x)$ met de kettingregel.

Opgave 2

Gegeven is functie: $g(x) = \left(3x^2 + 2x\right)^4$

a Deze functie kun je zien als een samenstelling van twee functies. Welke twee functies?

b Bepaal met behulp van de kettingregel de afgeleide van g.

Uitleg 2

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Het domein van functie f is $[0, \rightarrow\rangle$. Maar bij de afgeleide is $x = 0$ geen toegelaten waarde. De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale raaklijn. Zo'n raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ kun je herleiden naar $f(x) = \left(2x^2 + 1\right)^{0{,}5}$.
Je kunt hier geen haakjes wegwerken. Wel kun je de functie als kettingfunctie beschouwen en met de kettingregel differentiëren.

Schrijf $g(x) = 2x^2 + 1 = u$ en $f(u) = \sqrt{u}$, dan is

- $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
- $g'(x) = 4x$

Dus $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Noem $g(x) = x^2 - 4 = u$, dan is $f(u) = \sqrt{u}$.

a Schrijf functie f als een machtsfunctie en differentieer de functie.

b Functie $f(x)$ is een kettingfunctie. Differentieer de functie.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$.

a Neem $g(x) = x^2 + 3 = u$, schrijf het functievoorschrift op van $f(u)$ en differentieer deze functie.

b Differentieer $f(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat:

$x \xrightarrow{g(x)} \ldots \xrightarrow{f(\ldots)} f(g(x))$

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als f de vorm $f(g(x))$ heeft, dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (1 - 2x)^4$.

Antwoord

Dit is een samengestelde functie $f(x) = f(g(x))$.

Schrijf $g(x) = 1 - 2x = u$ en $f(u) = u^4$.

- $f'(u) = 4u^3$
- $g'(x) = -2$

$f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4u^3 \cdot -2 = -8(1 - 2x)^3$

Dus $f'(x) = -8(1 - 2x)^3$.

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = (3x - 1)^8$

a Neem $g(x) = 3x - 1 = u$. Functie f heeft de vorm $f(u)$. Schrijf de voorschriften van f en g op.

b Laat zien dat $f'(x) = 24(3x - 1)^7$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(u) = \sqrt{u}$ en $u = g(x) = x^2 + x$

a Schrijf het functievoorschrift op van $f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van $f(x)$.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$.

Antwoord

Neem $u = g(x) = 1 - x$ en $f(u) = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$. Dan is

- $f'(u) = -2u^{-3}$
- $g'(x) = -1$

En dus is $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = -2u^{-3} \cdot -1 = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Opgave 7

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

c Toon aan dat f een maximum heeft voor $x = 0$ en bereken dit maximum.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$. Bepaal ook het bereik van functie f.

Antwoord

Schrijf de wortelvorm als een macht:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(g(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Differentieer f met de kettingregel:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(g(x)\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

De gevraagde richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) is: $f(x) = \sqrt{x}\ f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

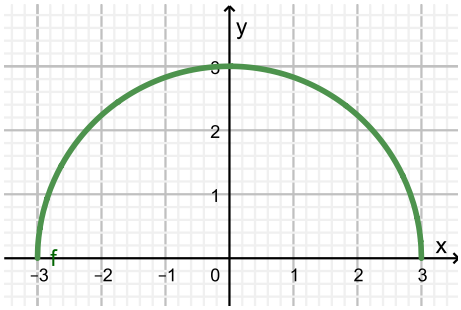
Eigenlijk zie je aan de grafiek wel meteen wat het bereik van f is.

Maar voor de zekerheid bereken je het domein en het maximum van f.

Het domein is $[-3,3]$.

Het maximum vind je uit $f'(x) = 0$ en dit geeft $x = 0$.

Omdat $f(0) = 3$ wordt het bereik $B_f = [0,3]$.



Figuur 4.1

Opgave 8

Bekijk de functie in **Voorbeeld 3 op pagina 163**.

a Hoe bepaal je het domein van f uit het functievoorschrift?

b Waarom levert $f'(x) = 0$ de waarde $x = 0$ op?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van de afgeleide het maximum van f.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Oefenen

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

c $h(x) = 25(2 - 4x)^3$

d $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(5 + 2r)^2$

Opgave 11

Gegeven is $f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x}$. Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ en stel de vergelijking van de bijbehorende raaklijn op.

Opgave 12

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \sqrt{3x}$

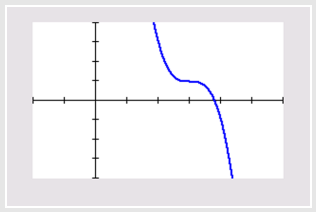
b $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $h(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$

d $j(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 13

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$ die is gemaakt met een grafische rekenmachine.



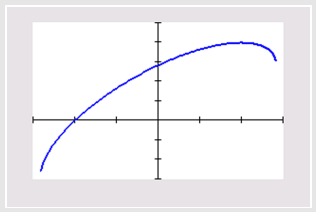
Figuur 4.2

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve voor $x = 3$. Toon aan dat dit zo is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de y-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$ zoals die met een grafische rekenmachine is gemaakt.



Figuur 4.3

a Bepaal het domein van f.

b Bereken het bereik van f.

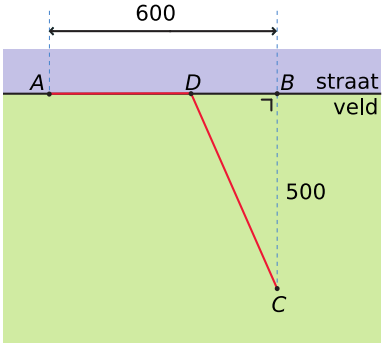
c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

Toepassen

Opgave 15: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt B. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C;
- direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar punt C;
- of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 4.4

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

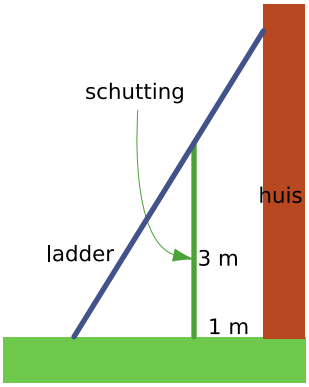
c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Opgave 16: Ladder over een schutting

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 4.5

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6(1 + 2x)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 2}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Bepaal het bereik van deze functie f.

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

4.5 De product- en de quotiëntregel

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de productregel en de quotiëntregel voor het differentiëren;
- alle differentieerregels door elkaar gebruiken.

Voorkennis

- de afgeleide functie bepalen met behulp van differentiëren, ook met de kettingregel en de uitgebreide machtsregel;
- met behulp van de afgeleide functie hellingwaarden berekenen;
- uit de afgeleide functie het verloop (stijgen, dalen) van de grafiek afleiden en extremen bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven de functies $u(x) = x^3$ en $v(x) = x^4$.

Bekijk eerst de functie $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

a Laat zien dat $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$.

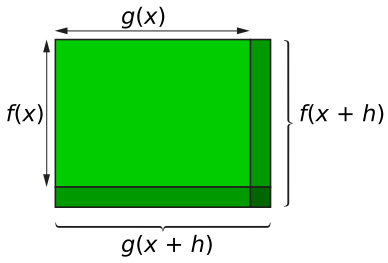
Bekijk nu $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

b Laat zien dat je niet de afgeleide van deze functie kunt bepalen door de afgeleide van de teller te delen door de afgeleide van de noemer.

c Wat betekent dit voor het differentiëren van functies die bestaan uit het product of het quotiënt van twee functies?

Uitleg 1

Als de lengte en de breedte van een rechthoek functies van x zijn, dan is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$
Verander de oppervlakte van deze rechthoek door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte is:
$A(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$



Figuur 4.1

De toename van $A(x)$ bestaat uit drie rechthoekjes:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x + h) - g(x))$
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x + h) - f(x))$
- een klein vierkantje met een oppervlakte die 0 wordt als $h \to 0$

Deel je die toename door h, dan geldt als $h \to 0$:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + 0$$

En voor $h \to 0$ is dit:
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
Dit is de productregel, een differentieerregel om de afgeleide van een productfunctie te bepalen.

Opgave 1

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^5$

a Schrijf de productfunctie $P(x)$ van deze twee functies zo kort mogelijk.

b Bepaal $P'(x)$.

c Ga na dat $P'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

De functie $A(x) = 6x^2\left(x^3 - 5x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g.

d Bepaal de afgeleide van A met behulp van de productregel.
Is de productregel hier noodzakelijk?

Opgave 2

Gegeven is de functie: $h(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{x}$

a Je kunt functie h zien als het product van twee functies. Welke twee?

b Bepaal $h'(x)$ met behulp van de productregel.

Uitleg 2

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen:

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$. Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$.
- $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ is een deling van $t(x) = 2x$ en $n(x) = x - 1$ die niet te herleiden is tot een machtsfunctie. Er blijft altijd een gebroken functie over.

Een functie die bestaat uit een deling (quotiënt) van twee functies heet een quotiëntfunctie.
Functie f kun je na de vereenvoudiging differentiëren.
Bij functie g ligt dat anders. Maar je kunt de afgeleide bepalen met de productregel:

- Schrijf de functie als: $g(x) = 2x \cdot (x - 1)^{-1}$
- Pas de productregel toe:
  $g'(x) = 2 \cdot (x - 1)^{-1} + 2x \cdot -1(x - 1)^{-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2}$

Je kunt een gebroken functie differentiëren. Je krijgt een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen:

$$g'(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Het kan sneller met de volgende regel:

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x)\cdot n(x) - t(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Dit is de quotiëntregel. Je kunt die regel zelf vinden door $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ te schrijven en daarop de productregel toe te passen. Een mooie puzzel...

Opgave 3

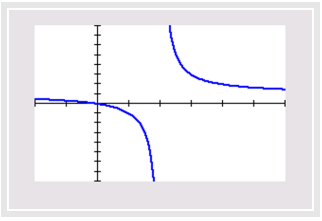
Bekijk de functie g in **Uitleg 2 op pagina 168**.

a Bepaal de afgeleide van de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ afzonderlijk.

b Ga na dat je $g'(x)$ kunt berekenen met de quotiëntregel.

Opgave 4

Met een grafische rekenmachine is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$ gemaakt. Dit is een quotiëntfunctie.



Figuur 4.2

a Bepaal de afgeleide van deze functie met behulp van de quotiëntregel.

b Hoe kun je aan de afgeleide zien, dat deze functie altijd dalend is (behalve voor $x = 2$)?

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

De productregel gebruik je vaak in combinatie met de voorgaande differentieerregels. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:
Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

De functie f is de teller van de breuk, de functie g is de noemer van de breuk.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
De quotiëntregel komt vaak in combinatie met andere differentieerregels voor. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $u(x) = 2x + 1$ waarvoor geldt: $u'(x) = 2$
- $v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ waarvoor geldt: $v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

De afgeleide van f vind je door de productregel toe te passen:
$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$
Je kunt ook eerst de haakjes van functie f wegwerken en zonder productregel differentiëren.

Opgave 5

Bekijk de functie die in **Voorbeeld 1 op pagina 169** is gegeven.

a Probeer eerst zelf de afgeleide te vinden met behulp van de productregel.

b Bepaal de afgeleide van f ook door eerst de haakjes weg te werken.
Laat zien, dat je hetzelfde krijgt als bij a en in het voorbeeld.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 6

Bepaal met de productregel de afgeleide van:

a $f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \sqrt{x}$

b $K(p) = \frac{1+3p}{p^2}$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1 + 2x}$
Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek in het punt $(0,0)$.

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel en de kettingregel:

$f(x) = x \cdot (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot (1 + 2x)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden niet nodig: $f'(0) = 1$.

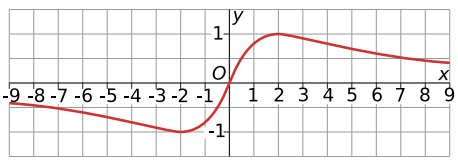
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in $(0,0)$ is: $y = x$.

Opgave 7

Gegeven is functie $f(x) = 2x\sqrt{3x + 4}$. Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(0,0)$ op.

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.
Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 4.3

Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4\cdot(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Een breuk kan alleen op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).

Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
De oplossing van deze vergelijking is: $x = -2 \ \vee \ x = 2$ (de noemer wordt bij die waarden niet 0).

De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Oefenen

Opgave 9

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = (x^3 + 6)(4x^2 - 5x)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

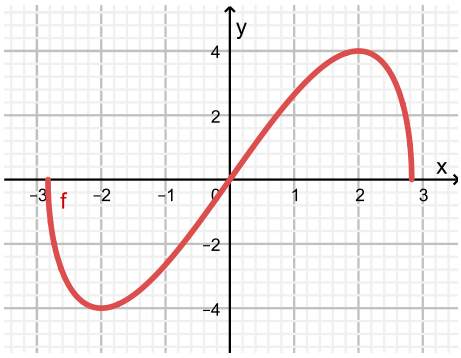
c $h(x) = 3x(x + 5)^4$

d $j(x) = x \cdot \sqrt{5 + 2x}$

e $k(x) = x - \sqrt{5 + 2x}$

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.



Figuur 4.4

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0,0)$.

Opgave 11

Differentieer.

a $f(x) = \frac{x}{x-3}$

b $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $h(x) = \frac{2x^3-10x^2+60x+120}{x}$

d $j(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

e $k(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

f $l(x) = 200x + 400 + \frac{2000}{x}$

Opgave 12

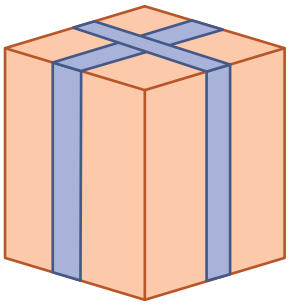
Gegeven is functie: $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$

a Bereken exact de extremen van f.

b Stel exact de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 13

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 4.5

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

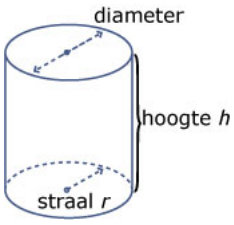
b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 14: Literblik

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Voor het volume V van zo'n blik geldt $V = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte aan blik geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.



Figuur 4.6

a Neem alle afmetingen in cm en laat zien, dat $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

b Stel een formule op voor de blikoppervlakte A als functie van r

c Bereken voor welke waarde van r de blikoppervlakte minimaal is.

Opgave 15: Poster

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.

c Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x dm. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x.

d Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.

e Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

Testen

Opgave 16

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x(1 + 2x)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

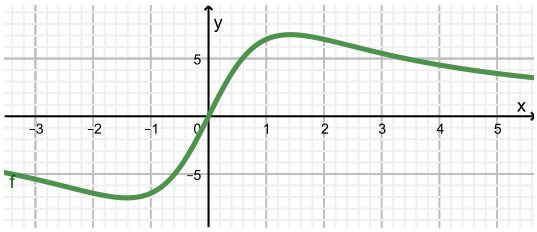
b $H(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Opgave 18

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de grootste waarde die de richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt van de grafiek van f kan hebben.



Figuur 4.7

4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Differentiëren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- gemiddelde verandering en differentiequotiënt — momentane verandering en differentiaalquotiënt
- differentiaalquotiënt en afgeleide waarde — afgeleide functie
- differentiëren — somregel, constante-regel en machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie en productregel — gebroken functie en quotiëntregel

Activiteitenlijst

- gemiddelde verandering over een interval berekenen met een differentiequotiënt — momentane verandering berekenen met een differentiaalquotiënt
- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van een differentiaalquotiënt — de vergelijking van een raaklijn aan een grafiek opstellen
- differentiëren met de basisregels — de extreme waarden van een functie berekenen met behulp van de afgeleide
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel en met de quotiëntregel

Testen

Opgave 1

Differentieer.

a $f(x) = 2(3x - 6)^8$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 4x\sqrt{2x + 1}$

d $j(x) = \frac{4x}{x^2-1}$

e $k(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

f $l(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4x}$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f. Rond af op twee decimalen.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ snijdt de y-as in punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$

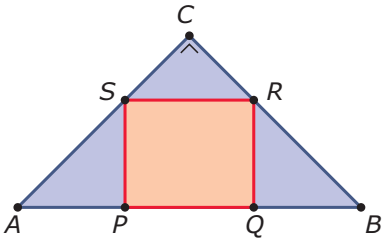
a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b In welke punt(en) is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn $y = \frac{5}{24}x - 5$?

Opgave 4

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; AB = 16 cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



Figuur 4.1

Opgave 5

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm?

Toepassen

Opgave 6: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

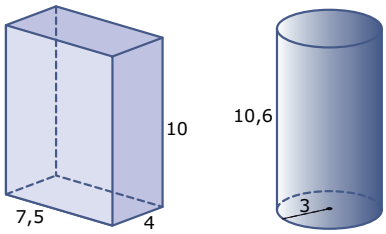
Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 7: Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking. Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.



Figuur 4.2

Er geldt: $F = \frac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.
We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. In de figuur zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.

Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank. De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

a Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).

De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \frac{8000}{\pi r^2}$. Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

b Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
'De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.'
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \frac{2}{r} + \frac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

c Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

5

Werken met e

5.1 Het getal e 178
5.2 Exponentiële functies 186
5.3 Logaritmische functies 193
5.4 Groeimodellen 199
5.5 Totaalbeeld 210

5.1 Het getal e

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het getal e kennen;
- het getal e gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële functies;
- werken met logaritmen met grondtal e.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In GeoGebra, of Desmos, of met een grafische rekenmachine kun je van een functie $f(x)$ de afgeleide $f'(x)$ in beeld brengen zonder die afgeleide te berekenen.

Breng van $f(x) = 2^x$ de afgeleide in beeld, noem hem $g(x)$.

Maak ook de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a Wat valt op als je de grafiek van f vergelijkt met die van g?

b Hoe kun je nu de grafiek van $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ verklaren?

c Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?

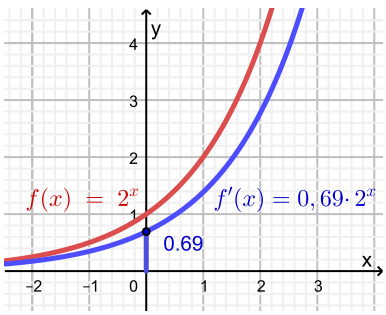
d Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

Uitleg

Bekijk de applet.

Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = 1$, dan hebben deze functies de vorm $f(x) = g^x$. In de figuur zie je zo'n functie f met de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek. De helling van de grafiek hangt af van de grootte van g. Neem je $x = 0$, dan wordt $f'(0)$ groter als g groter wordt.
De helling is voor elke x recht evenredig is met $f(x)$, dus $f'(x) = c \cdot g^x$.
En $c = f'(0)$.

- Voor $g = 2$ geldt: $c = f'(0) \approx 0{,}69$.
  Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c = f'(0) \approx 1{,}10$.
  Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$.



Figuur 5.1

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2{,}7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π. Dit getal heeft de letter e gekregen: e $\approx 2{,}71828...$
Als $g =$ e dan vallen de functie en de afgeleide samen, ze zijn dan gelijk.

Dus als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.

Met $f(x) = e^x$ reken je net als met alle exponentiële functies.
Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

Lees eerst de goed door.
In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en zijn afgeleide met behulp van GeoGebra, of Desmos.
Laat zien dat $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1{,}10$.

b Bekijk de grafiek van $f(x) = 2{,}5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c.

c Doe ditzelfde ook voor $f(x) = 2{,}7^x$ en $f(x) = 2{,}8^x$.

d Er is een grondtal g waarvoor $c = 1$. Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Als het grondtal van de functie $f(x) = g^x$ gelijk is aan e $\approx 2{,}7182...$ dan is de afgeleide gelijk aan de functie zelf. Dus:

Als $f(x) = e^x$ dan is $f'(x) = e^x$.

a Maak de grafiek van $f(x) = e^x$.

b Hoe groot is de helling van deze grafiek in $(0{,}1)$?

c Waar in de grafiek vind je het getal e?

d Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = e^x$ in het punt $(1, e)$? Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = e^x$.

a Welke asymptoot heeft die grafiek?

b Los met behulp van de grafiek op $e^x = 10$.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $e^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^{e}\log(10)$.

In plaats van $x = {}^{e}\log(...)$ wordt in de wiskunde $\ln(...)$ gebruikt. Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(...)$.

c Laat zien dat $\ln(10)$ dezelfde waarde voor x oplevert als bij b.

d Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $e^x = 20$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

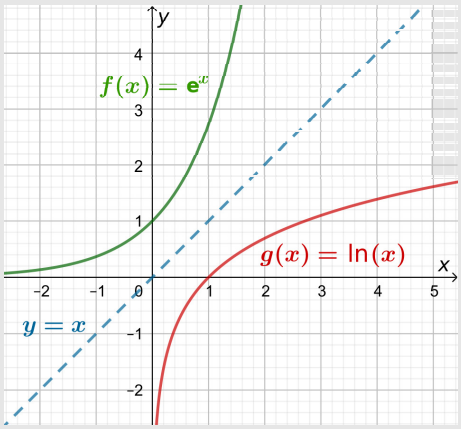
De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen.
Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.
Een benadering voor e is: e ≈ 2,71828...

Als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.

Met $f(x) = e^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij.



Figuur 5.2

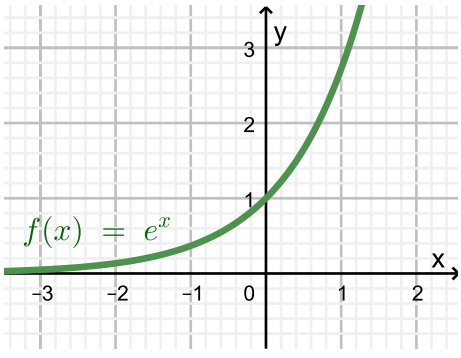
Ook nu is $e^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^e\log(a)$.
In plaats van ${}^e\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.
De functies $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld 1

Maak de grafiek van $f(x) = e^x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.
Los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord

Deze grafiek is met GeoGebra gemaakt, je kunt ook Desmos of een grafische rekenmachine gebruiken.



Figuur 5.3

Voor de raaklijn:

- $f'(x) = e^x$, dus $f'(2) = e^2$.
  De raaklijn wordt $y = e^2 \cdot x + b$.
- $f(2) = e^2$ en dit vul je in de vergelijking in: $e^2 = e^2 \cdot 2 + b$.
  Dit geeft $b = -e^2$.

De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = e^2 x - e^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarde van x bepalen waarvoor $e^x = 3$

Dit geeft: $x = \ln(3)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $x \leq \ln(3)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 180**.

a Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.

b Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.

c Los op: $f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $2^x = \frac{1}{8}$

b $e^x = \frac{1}{e^3}$

c $5\,e^x = 125$

d $e^x = e\sqrt{e}$

Voorbeeld 2

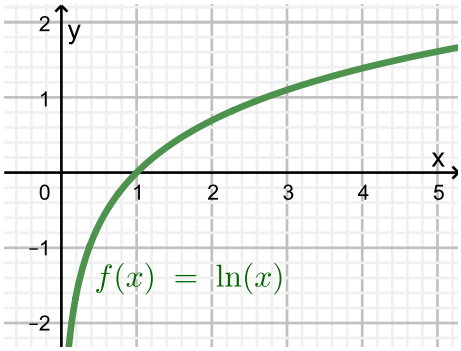
Bekijk de grafiek van $f(x) = \ln(x)$.
Los in twee decimalen nauwkeurig op: $f(x) \leq 1{,}5$.

Antwoord

Omdat $\ln(x) = {}^{e}\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.
De verticale asymptoot is $x = 0$.

$\ln(x) = {}^{e}\log(x) = 1{,}5$ geeft $x = e^{1{,}5}$.

Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:
$0 < x \leq e^{1{,}5}$.
In twee decimalen nauwkeurig $0 < x \leq 4{,}48$.



Figuur 5.4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 181**.

a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?

b Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.

c Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Voor de groei van een hoeveelheid bacteriën heeft een onderzoeker deze formule opgesteld:

$N(t) = N(0) \cdot e^{0,69t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

Wat is de betekenis van $N(0)$?
Laat zien dat het aantal bacteriën volgens deze formule elk uur ongeveer verdubbelt.
De groeisnelheid van deze bacteriën verandert steeds. Hoe groot is die groeisnelheid op $t = 0$ als $N(0) = 60$?

Antwoord

$N(0)$ is het aantal bacteriën op $t = 0$.
Immers op $t = 0$ is het aantal bacteriën: $N(0) \cdot e^0 = N(0)$.

Je kunt de groeifactor g per uur bepalen door de formule in de vorm $N(t) = N(0) \cdot g^t$ te schrijven:

$N(t) = N(0) \cdot e^{0,69t} = N(0) \cdot \left(e^{0,69}\right)^t \approx N(0) \cdot 1,99^t$

Je ziet dat de groeifactor per uur ongeveer 2 is.

Voor de groeisnelheid heb je de afgeleide nodig. Denk daarbij om de kettingregel.

$N(t) = 60 \cdot e^{0,69t}$ geeft $N'(t) = 60 \cdot e^{0,69t} \cdot 0,69 = 41,4 \cdot e^{0,69t}$

De groeisnelheid op $t = 0$ is dus $N'(0) = 41,4$ bacteriën per uur.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 182**.
Voor een andere soort bacteriën geldt de formule $N(t) = 50 \cdot e^{1,10t}$.
De betekenis van N en t is hetzelfde als in het voorbeeld.

a Hoeveel bedraagt nu de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën voor $t = 2$.

Opgave 8

Het verloop van de populatie bijen in West-Europa kan volgens wetenschappers worden beschreven door de formule:

$N(t) = N(0) \cdot e^{-0,01t}$

Hierin is:

- N het aantal bijen in een bepaald gebied
- t de tijd in jaren

$N(0) = 12 \cdot 10^3$ is het aantal bijen in een bepaald gebied op $t = 0$.

a Bereken de groeifactor per jaar van de bijenpopulatie in dit gebied.
Hoe kun je aan de formule zien dat er van verval sprake is?

b Bereken na hoeveel jaar de bijenpopulatie in dit gebied volgens de gegeven formule zou zijn gehalveerd.

c Bereken ook de groeisnelheid van de bijenpopulatie in dit gebied op $t = 0$.
Hoe kun je aan die groeisnelheid zien dat er van verval van de populatie sprake is?

Oefenen

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot e^x$.

a Maak de grafiek van f en lees daaruit de oplossing van $f(x) = 12$ af.

b Los $f(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 10

Gegeven is de functie $g(x) = e^{3x}$.

a Maak de grafiek van g en lees daaruit de oplossing van $g(x) = 12$ af.

b Los $g(x) = 12$ algebraïsch op met behulp van een logaritme.
Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 0$.

Opgave 11

India had in 2007 naar schatting 1,129 miljard inwoners.
In de voorgaande periode bedroeg de bevolkingsgroei gemiddeld 1,9% per jaar.

Hierbij kun je een groeimodel opstellen zoals dit:

$N(t) = 1{,}129 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}019t}$

Hierin is:

- N de hoeveelheid inwoners van India
- t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2007

a Laat zien dat deze formule overeen komt met het gegeven groeipercentage.

b Hoeveel inwoners zal India in 2027 hebben als de groei zo door gaat?

c In welk jaar zal India volgens dit groeimodel de 2 miljard inwoners overstijgen?

d Hoeveel bedraagt de groeisnelheid van de bevolking van India in 2020 volgens de gegeven formule?

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $e^x = 3$

b $e \cdot x = 3$

c $\ln(x) = 3$

d $2 \cdot e^{0{,}1x} = 40$

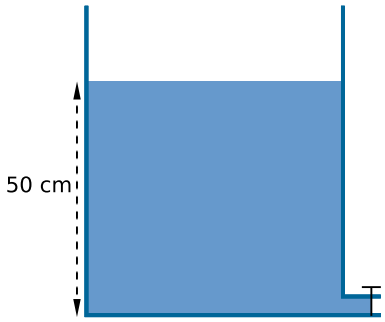
Opgave 13

Een rechthoekige open bak is tot op een hoogte van 0,5 m gevuld met water. In de bodem van de bak is een kraan gemonteerd die op $t = 0$ wordt open gezet. Het water loopt uit het vat. De waterhoogte h neemt steeds langzamer af. Er geldt:

$h(t) = 0{,}5 \cdot e^{k \cdot t}$

Hierin is:

- h de waterhoogte in m
- t de tijd in minuten



Figuur 5.5

Om k te berekenen wordt een meting verricht: op $t = 5$ is de waterhoogte $h = 0{,}25$ m.

a Bereken hiermee de waarde van k tot op twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken hoeveel minuten na het openen van de kraan de waterhoogte lager dan 0,1 m is.

c Als je de uitstroomopening groter maakt, wordt k dan een groter getal of juist een kleiner getal?

Toepassen

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan, koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

Als een les melk uit de koelkast wordt gehaald en een tijdje in een warmere kamer staat, warmt de melk langzaam op. Maar ze wordt nooit warmer dan de kamertemperatuur. Hoe verloopt die opwarming precies?

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Figuur 5.6

Opgave 14

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80 °C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}22t}$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

a Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80 °C heeft.

b Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Opgave 15

Een glas melk heeft een temperatuur van 6 °C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$T(t) = 20 - 14 \cdot e^{-0{,}05t}$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

a Ga na dat de melk volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 6 °C heeft.

b Na hoeveel minuten is de melk opgewarmd tot 15 °C?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er van opwarming sprake is?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 4\,e^x$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen de oplossing van $f(x) = 8$.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

d Los op: $f(x) \geq 6$.

Opgave 17

Voor een bepaalde soort bacteriën geldt de groeifunctie:

$N(t) = 120 \cdot e^{0{,}95t}$.

Hierin is:

- N de hoeveelheid bacteriën
- t de tijd in uren

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Bereken de groeisnelheid van deze soort bacteriën op $t = 0$.

5.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op exponentiële functies;
- bij exponentiële functies het grondtal wisselen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- werken met het getal e en de afgeleide van $f(x) = e^x$.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.

a Maak de grafiek van f en die van zijn afgeleide.

b Maak ook de grafiek van $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
Hoe ziet deze grafiek er uit en wat betekent dat?

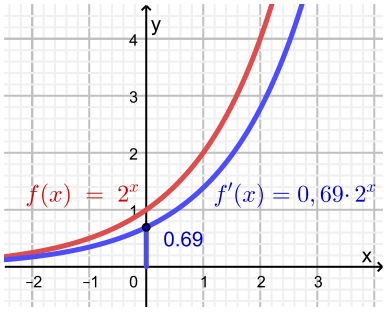
c Maak ook de grafiek van $y = \ln(2) \cdot 2^x$. Wat valt je nu op?

d Laat zien dat $g'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$ de afgeleide van $g(x) = 3^x$ is.

Uitleg

Bekijk de applet.

Hier zie je de grafiek van $f(x) = 2^x$ en de bijbehorende (blauwe) hellingsgrafiek, de grafiek van de afgeleide.
Die afgeleide is een veelvoud van de functie zelf: $f'(x) = c \cdot 2^x$.
Je kunt de waarde van c aflezen bij $x = 0$ want $f'(0) = c \cdot 2^0 = c$. Je ziet $f'(0) \approx 0{,}69$.



Figuur 5.1

Maar je kunt de waarde van c ook zelf berekenen: $c = \ln(2)$.

De afgeleide van $f(x) = 2^x$ is $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$.

Je kunt dit vinden door de functie f van grondtal te veranderen:

$f(x) = e^{c \cdot x}$ met $f'(x) = e^{c \cdot x} \cdot c$ (kettingregel!).

En omdat $e^{c \cdot x} = 2^x$ moet $e^c = 2$, dus $c = \ln(2)$.

Zo'n redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen.
Dus de afgeleide van $f(x) = g^x$ is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 186** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald: $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.

a Bepaal de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

b Bepaal de afgeleide van $h(x) = 0{,}5^x$.

c Bepaal de afgeleide van $f(x) = 200 \cdot 1{,}5^x$.

d Bepaal de afgeleide van $f(x) = 20 \cdot 1{,}2^x + 140$.

Opgave 2

In de **Uitleg op pagina 186** wordt de functie $f(x) = 2^x$ omgeschreven naar de vorm $f(x) = e^{c \cdot x}$ omdat de afgeleide van een e-macht gemakkelijk is te bepalen.

a Laat zelf zien, dat $2^x \approx e^{0{,}69x}$.
Leg ook uit dat die 0,69 eigenlijk $\ln(2)$ is.

b Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{0{,}69x}$ met behulp van de kettingregel en laat zien dat deze afgeleide is te schrijven als $f'(x) = 0{,}69 \cdot 2^x$.

c Schrijf de functie $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ in de vorm $N(t) = 200 \cdot e^{k \cdot t}$.

d Bepaal de afgeleide van $N(t)$ op twee manieren, eerst vanuit de vorm $N(t) = 200 \cdot 1{,}2^t$ en daarna vanuit de vorm met grondtal e. Laat zien dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

Opgave 3

Je hebt in de **Uitleg op pagina 186** gezien hoe je van een exponentiële functie met grondtal 2 een exponentiële functie met grondtal e maakt.

Een bacterie groeit onder bepaalde omstandigheden volgens de groeiformule:

$N(t) = 50 \cdot 8^t$

Hierin is:
- N het aantal bacteriën per kolonie
- t de tijd in uren

a Laat zien, dat je deze formule ook kunt schrijven als $N(t) = 50 \cdot e^{2{,}1t}$.

b Bereken de groeisnelheid van deze bacteriën op $t = 0$.
Gebruik eerst de gegeven formule en daarna de formule bij a. Laat zien dat beide uitkomsten gelijk zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:
- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Je kunt elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven door **veranderen van grondtal**. Als je op $t = 0$ start met een hoeveelheid $N(0)$ dan kun je $N(t)$ schrijven als:
- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ waarin $e^k = g$ dus $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $10^k = g$ dus $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot e^{1{,}61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 100 \cdot 5^x$ geeft $f'(x) = 100 \cdot \ln(5) \cdot 5^x \approx 161 \cdot 5^x$
- $f(x) = 100 \cdot e^{1{,}61x}$ geeft $f'(x) = 100 \cdot e^{1{,}61x} \cdot 1{,}61 \approx 161 \cdot e^{1{,}61x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0{,}5t} \cdot \ln(10) \cdot -0{,}5 = 1000 \ln(10) \cdot 10^{-0{,}5t}$

Opgave 4

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1 op pagina 188** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 5

Bepaal de afgeleide van:

a $f(x) = 1{,}3^x$

b $f(x) = 50 \cdot 2^x + 10$

c $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0{,}1x}$

d $f(x) = 100\, e^{-0{,}1x} + 200$

Voorbeeld 2

Een radiatorplaat warmt op volgens de formule:

$T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten is

Laat zien hoe je deze formule kunt schrijven met grondtal e en bereken de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$.

Antwoord

De formule moet de vorm $T(t) \approx 50 - 40 \cdot e^{k \cdot t}$ krijgen.

Omdat $0{,}9 = e^k$ wordt $k = \ln(0{,}9) \approx -0{,}11$ en geldt $T(t) \approx 50 - 40 \cdot e^{-0{,}11t}$.

De opwarmsnelheid is: $T'(t) = -40 \cdot e^{-0{,}11t} \cdot -0{,}11 \approx 4{,}21 \cdot e^{-0{,}11t}$.

Op $t = 0$ bedraagt de opwarmsnelheid $T'(0) \approx 4{,}21$ °C/min.

Opgave 6

Bekijk het temperatuurverloop van de opwarmende radiator in **Voorbeeld 2 op pagina 188**.

a Welke temperatuur heeft de radiator aan het begin van het opwarmingsproces?

b Je kunt de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$ ook rechtstreeks vanuit $T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$ afleiden. Laat zien, dat je dan dezelfde opwarmsnelheid krijgt.

Opgave 7

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van 3,5 atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. Er geldt:

$p(t) = 3{,}5 - 2{,}1 \cdot 0{,}97^t$

Hierin is:

- p de luchtdruk in de band in atmosfeer
- t de tijd in seconden

a Maak een passende grafiek bij dit verband.

De luchtdruk in de band begint met 1,4 atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot 2,0 atmosfeer.

b Laat zien dat dit uit de gegeven formule volgt.

c Je stopt de pomp als de druk in de band 2,6 atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?

d Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

e Schrijf de gegeven formule in de vorm met grondtal e en bereken daarmee opnieuw de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Oefenen

Opgave 8

Differentieer.

a $f(x) = 1{,}2^x$

b $g(x) = 30 \cdot 1{,}2^x$

c $N(t) = 20 - 15 \cdot 0{,}8^t$

Opgave 9

Schrijf de volgende functies met grondtal e en bereken daarmee het hellingsgetal op $t = 0$.

a $P(t) = 2400 \cdot 2{,}5^t$

b $N(t) = 40 + 20 \cdot 0{,}85^t$

Opgave 10

De luchtdruk p hangt af van de hoogte h boven het zeeniveau. Op een zekere plek geldt bij bepaalde weersomstandigheden

$p(h) = 1013 \cdot 10^{-0,53h}$

Hierin is:

- h de hoogte boven zeeniveau in km
- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)

a Bereken snelheid waarmee de luchtdruk verandert op een hoogte van 5 km in gehelen nauwkeurig.

b Je kunt deze veranderingssnelheid van de luchtdruk op 5 km hoogte ook berekenen door eerst de formule in de vorm $p(h) = 1013 \cdot g^h$ te schrijven. Laat dat zien.

Opgave 11

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Er geldt:

$T(t) = 20 - 14\,e^{-0,16t}$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

a Maak een grafiek van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.

b Laat zien, dat voor deze formule inderdaad de warmtewet van Newton geldt.

c Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Opgave 12

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$m = m_0 \cdot e^{-kt}$

Hierin is:

- t de tijd in dagen
- m_0 de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$

a Bereken k, dat is de zogenaamde desintegratieconstante.

b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?

c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke radioactieve stof is de radiumisotoop $^{226}_{88}\text{Ra}$. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α-deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}\text{Rn}$. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N. Je kunt het verval van radium dan op drie manieren met een formule beschrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0{,}9996^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \text{e}^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $\text{e}^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot \text{e}^{-0{,}00043t}$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0{,}00019t}$

Opgave 13

Bekijk **Toepassen op pagina 191**.

a Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.

b Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.

c Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?

d In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 14

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.
Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

a Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot \text{e}^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.

b Van de Dode-Zeerollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?

c Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?

d Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?

Testen

Opgave 15

Differentieer de volgende functies en bepaal het hellingsgetal voor $t = 1$.
Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $H(t) = 3 \cdot 0{,}5^t - 4$

b $N(t) = 50 - 30 \cdot e^{-0{,}50t}$

Opgave 16

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.
De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als lood. Als die stralingsintensiteit in procenten wordt voorgesteld door I, dan geldt:

$I(d) = 100 \cdot e^{-\alpha \cdot d}$

Hierin is:

- d de dikte van de loden plaat in cm
- α een constante die afhangt van het materiaal

a Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α.

b Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

5.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = {}^{g}\log(x)$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op logaritmische functies.

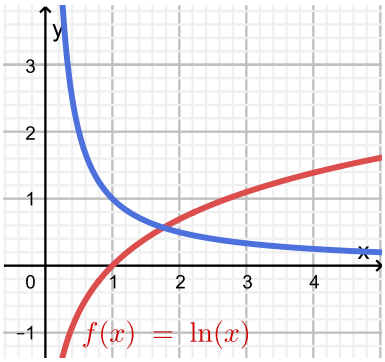
Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van exponentiële functies berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide, gemaakt in GeoGebra.



Figuur 5.1

a Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?

b De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?

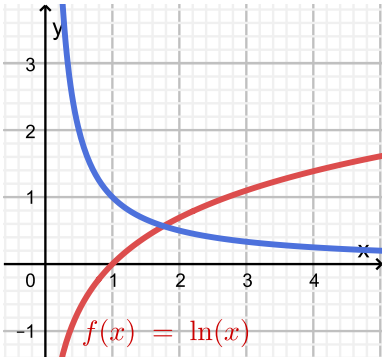
c Maak zelf de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ en zijn afgeleide met GeoGebra, Desmos of met een grafische rekenmachine.

d Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet in de figuur dat de afgeleide (blauwe grafiek) van een logaritmische functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$ erg lijkt op een gebroken functie van de vorm $y = \frac{c}{x}$ waarin c een constante is die van het grondtal g afhangt.



Figuur 5.2

Kies je voor het grondtal het getal e dan is precies $c = 1$:

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kent, kun je die van bijvoorbeeld $f(x) = {}^{2}\log(x)$ ook bepalen.

Je wisselt dan van grondtal 2 naar grondtal e met behulp van een rekenregel:

$f(x) = {}^{2}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.

En dus is $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} \approx 1{,}44 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1{,}44}{x}$.
Met andere grondtallen gaat dit net zo:

- De afgeleide van $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Nu kun je alle logaritmische functies differentiëren.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 193** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(x)$

b $f(x) = 3\ln(x) + 1$

c $f(x) = \ln(2x)$

Opgave 2

Bepaal de afgeleide van $f(x) = {}^{3}\log(x)$ en daarmee het hellingsgetal van deze functie voor $x = 2$ in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de *g*-logaritme** $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$.
Je vindt:

Als $f(x) = {}^{g}\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^{g}\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = \ln(2x)$
- $f(x) = {}^{5}\log(x)$
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$

Antwoord

- $f(x) = \ln(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = {}^{5}\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{x} \approx 0{,}62 \cdot \frac{1}{x} = \frac{0{,}62}{x}$.
- $f(x) = 5 \cdot \ln(x) - 200$ geeft $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$.
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(t)$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{t} \approx -869 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-869}{t}$.

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1 op pagina 194** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(4x)$

b $f(x) = {}^{0{,}5}\log(x)$

c $f(x) = 5\log(x)$

d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p hangt af van de hoogte k in km boven zeeniveau. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$$h = -6{,}5\log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hPa (hectopascal)
- h de hoogte boven zeeniveau in km

p_0 is de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa.
Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Figuur 5.3

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6{,}5\ln(0{,}001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0{,}235$ km.
Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$$h'(p) = -6{,}5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0{,}001p} \cdot 0{,}001 = -\frac{2{,}823}{p}.$$

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0{,}003$.
Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 195**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

a Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.

b Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.

c Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Oefenen

Opgave 6

Bepaal $f'(x)$ en bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

a $f(x) = \ln(0{,}5x)$

b $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(x) + 10$

c $f(x) = 200 \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - \ln(2x)$.

a Maak de grafiek van f.
Welke asymptoot heeft deze grafiek?

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

c Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van - 1?

Opgave 8

Gegeven de functies $y_1 = \ln(6 - x)$ en $y_2 = -\ln(x)$ met domein $[0,6]$.

a Bekijk de grafieken van deze functies.

Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x-waarde k. Neem aan dat $1 < k < 4$.

b Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2 \cdot \ln(3)$ is.

Opgave 9

Voor het geluidsdrukniveau L geldt de formule:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Hierin is I de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootheid L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

a Bij de gehoorgrens ($L = 0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2. Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2. Bereken het geluidsdrukniveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluidsdrukniveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluidsdrukniveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

b Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluidsdrukniveau.

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10 \log (2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluidsdrukniveau in dB is. L_0 is het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg.

c Als op 20 m een geluidsdrukniveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan L_0?

d Hoe groot is het geluidsdrukniveau van die weg op 100 m afstand?

e Op welke afstand van die weg is het geluidsdrukniveau 60 dB?

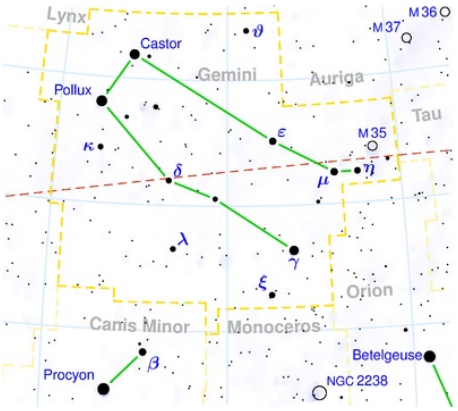
Toepassen

De helderheid van sterren wordt vanouds aangegeven door de grootteklasse of magnitude m. Heldere sterren zijn van de eerste grootte: $m = 1$. Sterren die met het blote oog nog net zichtbaar zijn, hebben magnitude 6. Die magnitude wordt echter nog fijner onderverdeeld. De ster **Castor** in het sterrenbeeld 'Tweelingen' heeft een magnitude van 1,58.

Volgens de wet van Fechner is de magnitude afhankelijk van de lichtsterkte l volgens de formule:

$m = a \ln (l) + b$

Daarin is de lichtsterkte van een ster met magnitude 6 gelijk aan 1: dus voor $l = 1$ geldt $m = 6$. Een ster van de eerste grootte is echter 100 keer zo lichtsterk: dus voor $l = 100$ geldt $m = 1$.



Figuur 5.4

Opgave 10

Bekijk **Toepassen op pagina 197**.

a Bereken met behulp van de gegevens a en b.

b Voor de ster 'Regulus' geldt dat $l = 73$. Bereken de magnitude van Regulus.

c De helderste ster is 'Sirius' met een magnitude van $m = -1{,}6$. Bereken de bijbehorende lichtsterkte.

d Schrijf l als functie van m. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

De lichtsterktes van twee sterren die samen een dubbelster vormen kun je optellen, hun magnitudes echter niet. De ster ε in het sterrenbeeld 'Lier' is zo'n dubbelster. De magnitudes van de afzonderlijke sterren zijn 4,5 en 4,7.

Bereken de magnitude van de dubbelster.

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en bereken $f'(10)$ in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = {}^{3}\log(x)$

b $f(x) = 2\ln(11 - x)$

c $f(x) = 30\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Opgave 13

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$S(t) = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Hierin is:

- t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan
- S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm. Ga er van uit dat hij elke dag 16 uur actief is en verder slaapt.

a Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Laat met behulp van de afgeleide van $S(t)$ zien, dat deze functie dalend is.

5.4 Groeimodellen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier;
- groeimodellen opstellen en de eigenschappen ervan kennen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, logaritmische functies en machtsfuncties;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies opstellen.

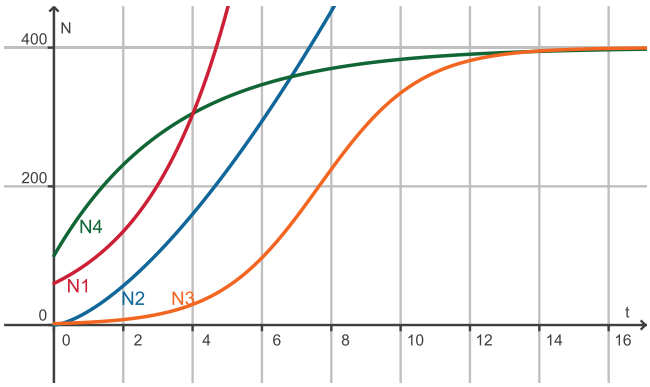
Verkennen

Opgave V1

Hier zie je in één figuur vier grafieken. De bijbehorende functies zijn:

- $N_1(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$
- $N_2(t) = 20 \cdot t^{1{,}5}$
- $N_3(t) = \frac{400}{1+200 \cdot 0{,}5^t}$
- $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$

Elk van deze functies is te gebruiken als groeimodel.



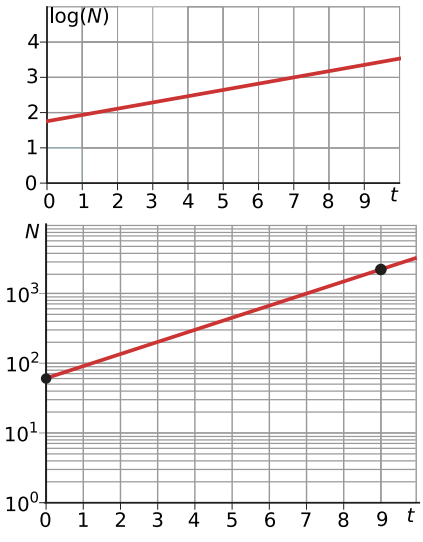
Figuur 5.1

a Beschrijf bij elk van deze functies de wijze waarop de groei verloopt.

b Beschrijf ook telkens het verloop van de groeisnelheid.

Uitleg 1

Een functie zoals $N(t) = 60 \cdot 1{,}5^t$ beschrijft **exponentiële groei**. Je kunt deze functie opvatten als een exponentieel groeimodel. De groei is dan nogal explosief, bij betrekkelijk kleine waarden van t heb je al met hele grote uitkomsten te maken.
Dat is lastig als je een geschikte grafiek wilt maken.
Neem je daarentegen aan beide zijden de logaritme dan krijg je: $\log(N) = \log(60 \cdot 1{,}5^t)$.
Met de eigenschappen van logaritmen wordt dit:
$\log(N) = \log(60) + t \cdot \log(1{,}5)$.
Omdat zowel $\log(60)$ als $\log(1{,}5)$ getallen zijn, staat hier dat tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat. En daarom wordt een exponentiële functie een rechte lijn als je op de verticale as een **logaritmische schaal** gebruikt.



Figuur 5.2

Er bestaat speciaal grafiekenpapier waar de verticale as zo is aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een exponentiële functie. Dat heet **enkellogaritmisch papier**. De onderste grafiek is die van $N(t)$ op dergelijk papier.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 199**. Daarin gaat het over het tekenen van de grafiek van een exponentiële functie.

a Ga na dat de bovenste grafiek juist is.

b Ga na dat de onderste grafiek ook juist is.

Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot 0{,}8^t$.

c Laat met de rekenregels van logaritmen zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van t is.

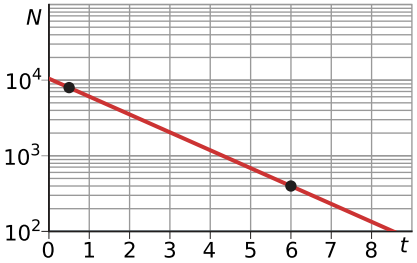
d Teken de grafiek van $\log(K)$ als functie van t.

De grafiek van K kun je ook op enkellogaritmisch grafiekenpapier tekenen. Je hoeft dan niet eerst de formule te herleiden.

e Neem een blad van dit grafiekenpapier en teken daarop de grafiek van deze functie.

Opgave 2

Je ziet hier de grafiek van een nieuwe functie $N(t)$ op enkellogaritmisch grafiekenpapier.



Figuur 5.3

a Leg uit dat de grafiek door $(0{,}5; 8000)$ en $(6{,}400)$ gaat en stel het functievoorschrift op.

b Lees uit de figuur af hoe groot $N(1)$ en $N(4{,}5)$ (bij benadering) zijn. Controleer je antwoorden met behulp van het functievoorschrift.

c Heeft $N(t) = 0$ oplossingen? Kan er op de verticale as een 0 voorkomen?

Opgave 3

Bekijk de functie $N_4(t) = 400 - 300 \cdot 0{,}75^t$.

a Teken de grafiek van N_4 op enkellogaritmisch grafiekenpapier.

b Kun je verklaren waarom de grafiek geen rechte lijn wordt?

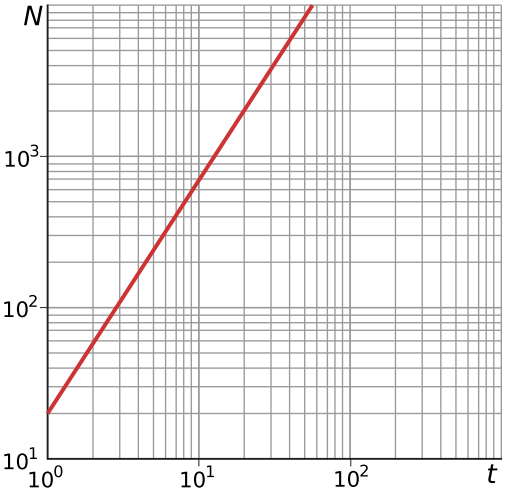
Uitleg 2

Een functie zoals $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ is een **machtsfunctie**. Ook daarvan is de grafiek lastig te tekenen, want in de buurt van $t = 0$ heb je uitkomsten vlak bij 0, maar bij grotere waarden van t als snel uitkomsten die behoorlijk groot zijn. Weer kun je het voorschrift herleiden met de rekenregels voor logaritmen:

$\log(N) = \log\left(20 \cdot t^{1,5}\right)$ levert op:
$\log(N) = \log(20) + 1{,}5 \cdot \log(t)$.

Er bestaat dus een lineair verband tussen $\log(N)$ en $\log(t)$. Nu gebruik je op beide assen een logaritmische schaal.

Ook hiervoor bestaat speciaal grafiekenpapier waar de beide assen zo zijn aangepast dat je zonder omrekenen met logaritmen een rechte lijn krijgt bij een machtsfunctie. Dat heet **dubbellogaritmisch papier**. Hier zie je de grafiek van $N(t)$ op dergelijk papier.



Figuur 5.4

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 201** over het tekenen van een machtsfunctie.

a Maak bij de functie N met $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$ een tabel van $\log(N)$ afhankelijk van $\log(t)$. Teken de grafiek van $\log(N)$ uitgezet tegen $\log(t)$.

b Neem een blad dubbellogaritmisch papier. Teken daarop zelf de grafiek van $N(t) = 20 \cdot t^{1,5}$. Waarom gaat de grafiek niet door $(0,0)$?

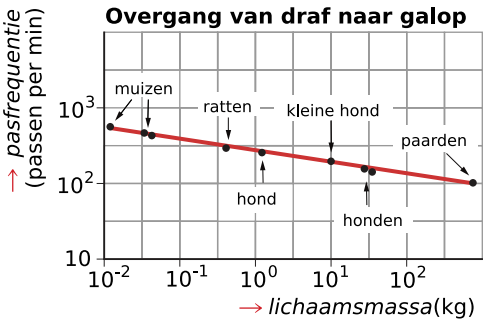
Neem nu de functie $K(t) = 600 \cdot t^{0,8}$.

c Laat op algebraïsche wijze zien dat $\log(K)$ een lineaire functie van $\log(t)$ is.

d Teken de grafiek van $K(t)$ op dubbellogaritmisch grafiekenpapier.

Opgave 5

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa (in kg).



Figuur 5.5

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

b Noem de lichaamsmassa m (in kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden. Leg uit dat het punt dat hoort bij paarden ongeveer de coördinaten $\left(10^{2,9}, 10^{2,0}\right)$ heeft. Bepaal zelf de coördinaten van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af voor P als functie van m.

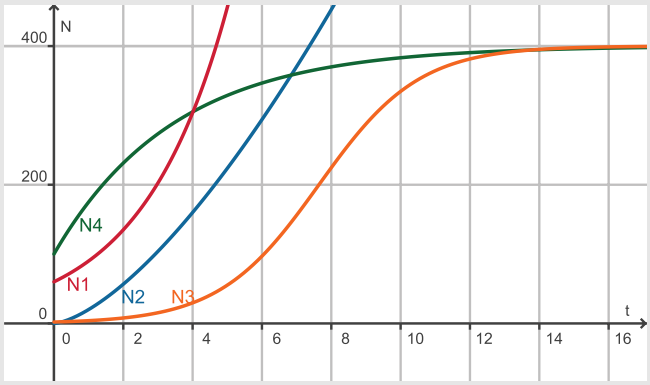
d Bereken bij welke pasfrequentie een pony van 120 kg van draf naar galop overgaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort een functie van de vorm $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$.
(In de figuur is $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Teken je dergelijke functies op **enkellogaritmisch papier** dan wordt de grafiek een rechte lijn.

Bij een **machtsfunctie** als model hoort een voorschrift van de vorm $N_2(t) = b \cdot t^p$.
(In de figuur is $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Van dergelijke functies is de grafiek op **dubbellogaritmisch papier** een rechte lijn.



Figuur 5.6

Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort een functie als $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.
Kenmerkend voor dit groeimodel is, dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt, maar op zeker moment (voedselgebrek, te weinig ruimte) afremt. De groeisnelheid die eerst toeneemt, gaat vanaf dat moment afnemen. In dit groeimodel is $N = G$ de horizontale asymptoot en vind je de grootste groeisnelheid bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (In de figuur is $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Er zijn tenslotte nog situaties waarin het verschil met een constante waarde exponentieel afneemt. Daarbij hoort een groeimodel van de vorm $N_4(t) = G + b \cdot g^t$. Kenmerkend voor dit groeimodel is dat de groeisnelheid vanaf het begin afneemt. (In de figuur is $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0{,}75$.)

Voorbeeld 1

In deze tabel zie je de groei van een aantal fruitvliegjes ('Drosophila melanogaster'). De populatie leeft in een afgesloten ruimte met voldoende voedsel. N is het aantal fruitvliegjes.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156

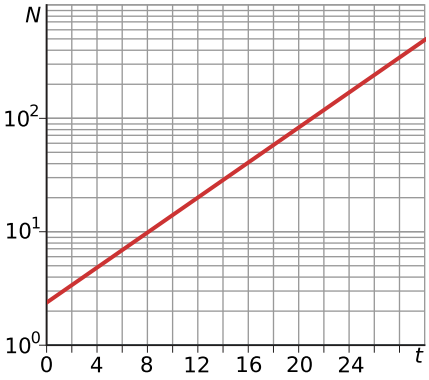
Tabel 5.1

Figuur 5.7

De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.
Teken de grafiek van log (N) als functie van t en/of teken de grafiek van $N(t)$ op **enkellogaritmisch papier** en stel een passende formule voor $N(t)$ op.

Antwoord

Zie de figuur hiernaast. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.



Figuur 5.8

Een passende formule heeft bijvoorbeeld de vorm $N(t) = b\,e^{kt}$.

De getekende grafiek gaat ongeveer door $(4,5)$ en $(12,20)$. Invullen geeft:

- $b \cdot e^{4k} = 5$
- $b \cdot e^{12k} = 20$

Beide zijden op elkaar delen: $e^{8k} = 4$ en dus $k = \frac{\ln(4)}{8} \approx 0{,}17$.

En daarmee bereken je b. Je vindt uit $b \cdot e^{0{,}17 \cdot 4} = 5$, dat $b = 2{,}5$.

Dus $N(t) = 2{,}5\,e^{0{,}17t}$ is een passende formule.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 202**. De sterke toename van N doet exponentiële groei vermoeden.

a Teken de punten uit de tabel op enkellogaritmisch papier. Teken een lijn die zo goed mogelijk past bij de getekende punten. Deze lijn stelt de grafiek van $N(t)$ voor op enkellogaritmisch papier.

b Stel zelf een formule op voor $N(t)$. Ga er vanuit dat de grafiek door $(8,10)$ en door $(21,100)$ gaat.

c Controleer of de punten uit de tabel passen bij de gevonden formule.
Waarom zal geen enkele formule precies de gegeven tabel opleveren?

d Na hoeveel dagen zouden er volgens jouw formule meer dan 1000 fruitvliegjes zijn?

Opgave 7

In deze tabel zie je hoe de groei van het aantal fruitvliegjes (‘Drosophila melanogaster’) verder gaat.

t (dagen)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$N(t)$	2	5	10	22	47	91	156	226	282	317	335	343	347

Tabel 5.2

a Waaraan zie je dat er op den duur toch geen sprake is van exponentiële groei?

Voor het aantal fruitvliegjes is deze formule opgesteld: $N(t) = \frac{350}{1+174 \cdot 0{,}81^t}$.

b Maak een grafiek voor $N(t)$ en bepaal het maximale aantal fruitvliegjes volgens dit rekenmodel.
Met welke soort groei heb je hier te maken?

c Bepaal de waarde van t waarin de groeisnelheid van N zo groot mogelijk is.

Voorbeeld 2

Johannes Kepler (1571 — 1630) beschreef als eerste het verband tussen de omlooptijd T (in jaren) van een planeet en zijn gemiddelde afstand tot de zon R. Voor de Aarde geldt $T = 1$ jaar en wordt $R = 1$ AE (astronomische eenheid) genomen. In de tabel vind je de gegevens van de andere planeten in ons zonnestelsel.

planeet	Mercurius	Venus	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Uranus	Neptunus
R (in AE)	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07
T (in jaren)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	25,5	84,0	164,8

Tabel 5.3

Het verloop van $T(R)$ doet een machtsfunctie vermoeden.
Teken de grafiek van $T(R)$ op **dubbellogaritmisch papier** en stel een passende formule op.

Antwoord

Zie de figuur. Zo moet jouw grafiek er ongeveer uit zien.

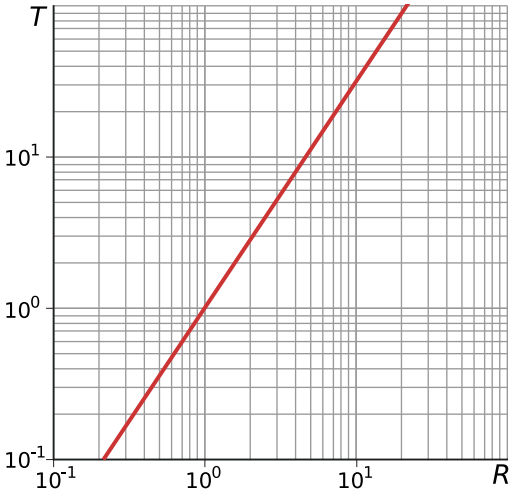
Bij deze machtsfunctie hoort een formule van de vorm $T = b \cdot R^p$.

De grafiek gaat door de punten $(1,1)$ en (ongeveer) $(20,90)$. Invullen:

- $1 = b \cdot 1^p$ zodat $b = 1$
- $90 = b \cdot 20^p$ met $b = 1$ geeft $20^p = 90$

$20^p = 90$ geeft $p = {}^{20}\log(90) \approx 1{,}50$.

Je ziet, dat $T = 1 \cdot R^{1{,}50}$ een redelijk passende formule is.



Figuur 5.9

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 204**.

a Teken zelf de grafiek van $T(R)$ op dubbellogaritmisch papier.

b Door welk punt moet je grafiek in ieder geval gaan? En waarom?

c Stel zelf een formule op voor $T(R)$ als je aanneemt dat de grafiek door $(30,165)$ gaat.

In 1930 ontdekte astronoom **Clyde Tombaugh** een nieuw hemellichaam dat om de zon draaide op een (gemiddelde) afstand van 38,4851 AE. Dit hemellichaam werd Pluto genoemd en is lang als planeet geclassificeerd.

d Welke omlooptijd heeft Pluto?

Voorbeeld 3

Een kop vers gezette koffie heeft een temperatuur van 80 °C. Als je die koffie rustig laat afkoelen in een omgevingstemperatuur van 20 °C, dan neemt (warmtewet van Newton) het temperatuurverschil met de omgeving exponentieel af: $T(t) - 20 = b \cdot g^t$.

t (min.)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
T (°C)	80,0	58,4	44,6	35,7	30,1	26,4	24,1	22,6	21,7	21,1	20,7	20,4	20,3

Tabel 5.4

Ga uit van het beschreven groeimodel en stel een bijpassende formule voor $T(t)$ op.
Bereken de snelheid van afkoelen na 5 minuten.

Antwoord

Je gaat uit van: $T(t) = 20 + b \cdot g^t$.
Dit is geen zuiver exponentiële functie, dus logaritmisch papier is niet bruikbaar.
De grafiek van $T(t)$ gaat door $(0,80)$ en dit geeft: $b = 60$.
De grafiek gaat ook (ongeveer) door $(24; 20,3)$ en dit geeft: $60 \cdot g^{24} = 0,3$ en dus $g \approx 0,80$.
Een passende formule is: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,80^t$.

De afkoelsnelheid na vijf minuten is $T'(5) = 60 \cdot \ln(0,80) \cdot 0,80^5 \approx 4,39$ °C/minuut.

Opgave 9

Bekijk het afkoelingsproces van een kop koffie in **Voorbeeld 3 op pagina 205**.

a Ga uit van het beschreven groeimodel en stel zelf een bijpassende formule op als je aanneemt dat de grafiek door de punten $(0,80)$ en $(20; 20,7)$ gaat.

b Bereken de snelheid van afkoelen na 10 minuten.

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 205**.

a Bepaal op welk tijdstip t de afkoelsnelheid 10 °C/minuut is.
Geef je antwoord in seconden.

b Bepaal met de grafische rekenmachine op welk tijdstip t de groeisnelheid maximaal is.

Oefenen

Opgave 11

Je ziet hier een tabel van de afname van een bepaalde hoeveelheid H met de tijd t in weken.

t (weken)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H (gram)	200	188	177	166	156	147	138	130	122

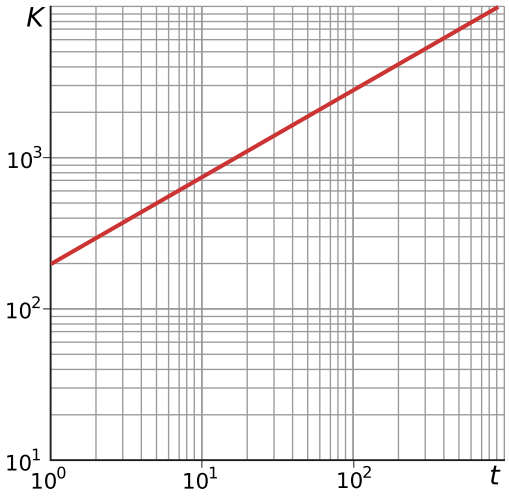
Tabel 5.5

Onderzoek met behulp van enkellogaritmisch papier of $H(t)$ exponentieel vervalt en stel - als dit zo is - een bijpassende formule op.

Opgave 12

Je ziet hier een grafiek van de functie $K(t)$.

Stel een formule voor $K(t)$ op.



Figuur 5.10

Opgave 13

De tabel geeft de gemiddelde hoogte aan van de zonnebloemen op een bepaalde akker op verschillende tijdstippen na het ontkiemen. De gemiddelde maximale hoogte die deze zonnebloemen bereiken is 256 cm.

- t is de tijd in weken na het ontkiemen
- $H(t)$ is de gemiddelde hoogte van deze zonnebloemen in cm op tijdstip t

Figuur 5.11

aantal weken	2	4	6	8	10	12
hoogte in cm	36	98	170	228	251	255

Tabel 5.6

a Als je hierbij een grafiek tekent, lijkt er van geremde exponentiële groei sprake te zijn.

Een bijpassende formule is $H(t) = \frac{256}{1+b \cdot g^t}$.

Bereken de bij de tabel passende waarden van b en g.

b Welke hoogte zullen deze zonnebloemen uiteindelijk gaan bereiken volgens dit groeimodel?

c Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 1$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tweede week groter?

d Bereken de groeisnelheid van deze zonnebloemen op $t = 10$. Waarom is de gemiddelde groei gedurende de tiende week kleiner?

e Op welke dag na het ontkiemen van de zonnebloemen groeien ze het snelst? Hoe snel groeien de zonnebloemen dan?

Opgave 14

In de tabel zie je de meetresultaten van een onderzoek naar het verband tussen de massa m van het dier en de energie E die het nodig heeft om zich over één kilometer te verplaatsen.

dier	m (gram)	E (calorieën)
muis	21	270
eekhoorn	236	870
witte rat	384	$1{,}7 \cdot 10^3$
hond (klein)	$2{,}6 \cdot 10^3$	$4{,}4 \cdot 10^3$
hond (groot)	$1{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$
schaap	$3{,}9 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^4$
paard	$5{,}8 \cdot 10^5$	$5{,}8 \cdot 10^5$

Tabel 5.7

a Teken deze gegevens op dubbellogaritmisch grafiekenpapier. Zet m uit op de horizontale as en E op de verticale as.

b Waarom kun je bij benadering aannemen, dat er tussen m en E een verband van de vorm $E = a \cdot m^b$ bestaat?

c Bereken passende waarden van a en b.

d Bereken het energieverbruik per km van een kat met een massa van 3,2 kg.

Opgave 15

De volgende alinea's zijn vrij naar een artikel dat in 1991 in een krant stond.

FAO luidt noodklok

Elk jaar verdwijnt steeds meer tropisch oerwoud. In 1990 was de afname wel anderhalf keer zo groot als in 1980. Dit stelt de FAO, de voedsel- en landbouworganisatie van de Verenigde Naties, in een zondag verschenen rapport met nieuwe gegevens over de ontbossing van de aarde.

1. In 1990 verdween in de tropen zeventien miljoen hectare oerwoud. Dit is een gebied even groot als Oostenrijk, Denemarken en Nederland samen.
2. Er was op 1 januari 1990 nog 2900 miljoen hectare tropisch oerwoud over.
3. De FAO wijst naar de geïndustrialiseerde landen waar de ontbossing een halt is toegeroepen. Tussen 1 januari 1980 en 1 januari 1985 is de bosoppervlakte in die landen met 5 procent toegenomen tot 2100 miljoen hectare.

Een lezer van dit artikel probeert de gegeven informatie in een wiskundig model te verwerken om daarmee te kijken wat de gevolgen zullen zijn als de afname van het tropisch oerwoud op dezelfde wijze blijft voortduren. Zij noemt de oppervlakte aan tropisch oerwoud (in miljoenen hectare) dat op tijdstip t nog aanwezig is $y(t)$. Zij neemt $t = 0$ op 1 januari 1980 en t in jaren.

a Leg uit waarom zowel een formule van de vorm $y(t) = a \cdot t + b$ als een formule van de vorm $y(t) = a \cdot g^t$ niet in overeenstemming is met de gegevens uit het krantenartikel.

De lezer kiest voor een formule van de vorm $y(t) = b - a \cdot g^t$.
Uit de in de alinea's 1, 2 en 3 verstrekte gegevens leidt zij deze waarden af: $b = 3311$, $a = 274$ en $g = 1{,}0414$.

b Laat zien dat de formule met die waarden in overeenstemming is met de in de alinea's 1, 2 en 3 gegeven informatie.

Wanneer de ontbossing op dezelfde wijze blijft voortduren, zal op een gegeven moment minder dan 1000 miljoen hectare tropisch oerwoud overblijven.

c Bereken in welk jaar dat volgens de door de lezer gevonden formule zal gebeuren.

Het oorspronkelijke krantenartikel begon met de zin: 'De tropische oerwouden verdwijnen anderhalf keer zo snel als 10 jaar geleden.'

d Onderzoek met behulp van differentiëren of de door de lezer gevonden formule ook hiermee in overeenstemming is.

Toepassen

Bij het oogsten van koren wordt vaak gewerkt met een combine, of maaidorser. In zo'n maaidorser wordt in twee etappes gedorst: eerst in de dorstrommel en daarna op de zogenaamde 'schudder', waar het graan (de graankorrels) tijdens het doorlopen van een traject uit het stro wordt geschud. De snelheid waarmee de hoeveelheid graan G (in kg) in het stro door het schudden afneemt, is recht evenredig met die hoeveelheid zelf:

$G'(x) = -k \cdot G(x)$

waarin x de afstand tot het begin van de schudder in meters is.

Figuur 5.12

Opgave 16

Bekijk **Toepassen op pagina 208**.

a Verklaar de formule in de tekst, met name ook het minteken.

Neem $k = 0{,}2$. Dan moet gelden $G'(x) = -0{,}2 \cdot G(x)$.

b Toon aan dat de functie $G(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$ hieraan voldoet.

c Ga uit van een schudder met een totale lengte van 6 m. Hoeveel procent van de hoeveelheid graan aan het begin van de schudder is aan het einde nog niet uit het stro geschud?

Opgave 17

k heet de scheidingsfactor van het proces van schudden zoals beschreven in **Toepassen op pagina 208**.
De scheidingsfactor hangt af van de snelheid v (in m/s) van de maaidorser. Er geldt $k = \frac{1}{v}$.

a Verklaar de naam 'scheidingsfactor'. Hoeveel procent van het graan wordt niet uit het stro geschud als de maaidorser rijdt met een snelheid van 2 m/s?

b Is er een snelheid mogelijk waarbij alle graan uit het stro wordt geschud?

Testen

Opgave 18

Bij een slingerproef is de slingerperiode T voor een aantal verschillende slingerlengten l gemeten.

l (cm)	T (s)
63,5	1,65
87,5	1,87
140,5	2,38
225,0	3,00
320,0	3,55

Tabel 5.8

a Laat zien met behulp van logaritmisch papier, dat de meetresultaten in overeenstemming zijn met de veronderstelling, dat T een machtsfunctie is van l: $T = A \cdot l^a$.

b Bereken A en a.

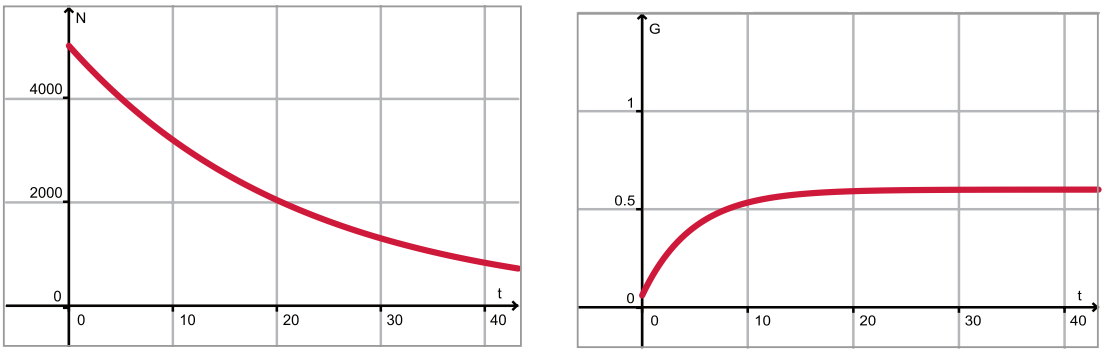
Opgave 19

Een forellenkweker zet in elk van zijn kweekvijvers steeds 5000 jonge forellen uit. Die forellen nemen vanaf dat moment ($t = 0$) in gewicht toe, maar er sterven ook forellen. Hij heeft al een aantal jaren maandelijks de stand van de forellen bijgehouden. Op grond daarvan kan hij formules opstellen voor de groei van zo'n populatie forellen. Als t de tijd in maanden is, dan geldt:

- $N(t) = 5000 \cdot e^{a \cdot t}$ waarin N het aantal forellen is.
- $G(t) = G_{\text{eind}} - b \cdot e^{c \cdot t}$ waarin G het gewicht per forel in kg is.

Figuur 5.13

G_{eind} stelt het gewicht voor dat een gemiddelde forel steeds meer zal benaderen naarmate hij ouder wordt.



Figuur 5.14

a De uitgezette forellen wegen gemiddeld 65 gram. Stel nu met behulp van de grafieken de juiste formules op voor $N(t)$ en $G(t)$.

b Stel een formule op voor het totale gewicht aan forellen in deze vijver.

c Als de forellenkweker zijn kweekvijver wil leegvissen als het totale gewicht aan forellen maximaal is, hoeveel maanden na het uitzetten moet hij dat dan doen?

5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Het getal e** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- het getal e — de natuurlijke logaritme — afgeleide van $f(x) = e^x$
- afgeleide van een exponentiële functie
- afgeleide van een logaritmische functie
- groeimodellen, o.a. exponentiële groei, machtsverband, etc. — enkellogaritmisch en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- werken met het getal e en de natuurlijke logaritme
- exponentiële functies differentiëren
- logaritmische functies differentiëren
- verschillende groeimodellen herkennen — werken met enkel- en dubbellogaritmisch grafiekenpapier

Testen

Opgave 1

Het aantal inwoners van een bepaalde stad B groeide vanaf 1990 met 1,5% per jaar. Op 01-01-2018 heeft deze stad 600 . 000 inwoners.

Er wordt verondersteld dat de groei de komende jaren zo door gaat. Op het stadhuis is de volgende formule opgesteld:

$N(t) = 6 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}015t}$

Hierin is:

- t de tijd in jaren na 2018
- N het aantal inwoners van B

a Laat zien dat deze formule inderdaad een bevolkingsgroei van 1,5% laat zien.

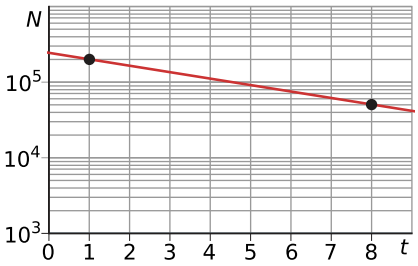
b Hoeveel inwoners had B volgens dit groeimodel in 2000?

c Hoeveel bedraagt de groeisnelheid 2018? En in 2028?

d In welk jaar overstijgt het aantal inwoners van B volgens dit groeimodel de 1 mln?

Opgave 2

Je ziet hier hoe een hoeveelheid N afneemt met de tijd t in dagen.



Figuur 5.1

a Stel een bij deze grafiek passende formule op.

b Voor welke waarde van t (in één decimaal nauwkeurig) is $N(t) \leq 10.000$?

Opgave 3

Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule

$$N(t) = 1200\left(1 - e^{-0{,}31t}\right)$$

Hierin is t in uren en is $t = 0$ om 09:00 uur.

a Op grond van deze formule kun je concluderen dat het aantal leerlingen dat van een belangrijk feit op de hoogte is uiteindelijk ongeveer constant wordt? Leg uit waarom.

b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $N(t)$.

c Bereken algebraïsch op welk tijdstip er 550 leerlingen van het feit gehoord hebben. Rond in het antwoord af op minuten.

d Voor de snelheid v waarmee het nieuws zich verspreidt geldt: $v(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. Hoe ziet de formule voor de snelheid van de nieuwsverspreiding er uit? Kun je op grond van deze formule dezelfde conclusies als bij a trekken?

e Toon algebraïsch aan dat de grafiek van N stijgend is.

f Met welke snelheid verspreidt het nieuws zich om kwart voor 11? Geef het antwoord in gehelen per minuut.

g Op welk tijdstip is de snelheid van de nieuwsverspreiding de helft van die om 09:00 uur? Geef dit tijdstip in minuten nauwkeurig.

Opgave 4

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand. De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0{,}06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

a Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

In de onderstaande tabel staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.

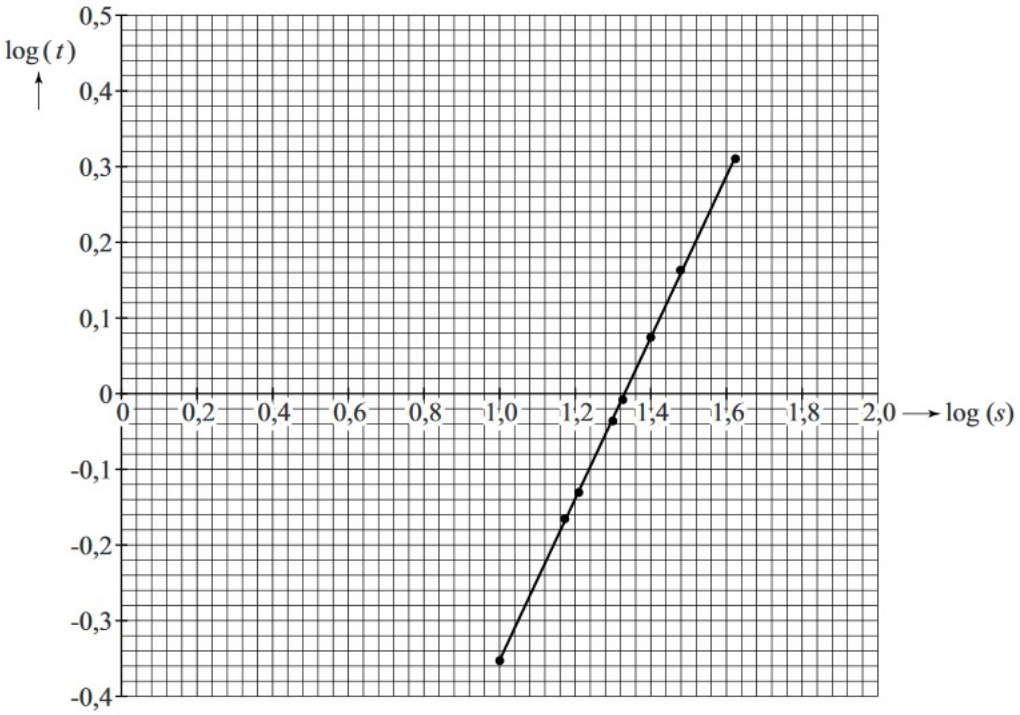
		Wereldtijd in 2015		
Wedstrijd	**Afstand (m)**	**Uren**	**Minuten**	**Seconden**
10 km	10000		26	44
15 km	15000		41	13
10 mijl	16093		44	23
20 km	20000		55	21
halve marathon	21097		58	23
25 km	25000	1	11	18
30 km	30000	1	27	37
marathon	42195	2	02	57

Tabel 5.1

In de hardloopsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het looptempo genoemd.

b Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in de figuur is getekend.

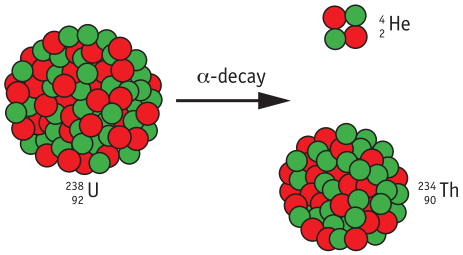


Figuur 5.2

c Bepaal met behulp van de lijn in de figuur het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

Opgave 5

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.



Figuur 5.3

Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd is voor elke radioactieve stof een bepaald constant getal. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.

a Omdat de halfwaardetijd voor een radioactieve stof een constant getal is, is de hoeveelheid H van die stof als functie van de tijd t te beschrijven met een formule van de vorm $H(t) = H(0) \cdot e^{kt}$. Leg uit waarom dat zo is.

b Op $t = 0$ heb je 1 kg U-238. Stel nu een formule op voor $H(t)$.

Neem t in miljarden jaren. k heet de desintegratieconstante.

c Waarom is de desintegratieconstante niet afhankelijk van de hoeveelheid U-238 waarmee je begint?

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is radioactief en daardoor kunnen deeltjes ervan in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen.

d Bereken de desintegratieconstante van jodium-131.

e Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

f Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

g Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

h Als een meetnauwkeurigheid in mg van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Toepassen

Opgave 6: Vissen in de Grevelingen

De Grevelingen (thans het Grevelingenmeer) is een voormalige zeearm van de Noordzee, gelegen tussen de eilanden Goeree-Overflakkee en Schouwen-Duiveland, op de grens van de provincies Zuid-Holland en Zeeland. In het kader van de Deltawerken werd de Grevelingen door de Grevelingendam (1965) en de Brouwersdam (1971) van zee afgesloten. Het Grevelingenmeer is het grootste zoutwatermeer van West-Europa, en is vooral van belang voor de watersport en recreatie. Het zoutgehalte van het Grevelingenmeer wordt op peil gehouden door de Brouwerssluis, een doorlaatsluis in de Brouwersdam, waarmee zeewater ingelaten wordt. Een gebied met een oppervlakte van 13.872 ha is aangemerkt als beschermd Natura 2000-gebied.

In 1985 werd voor enkele vissoorten het verloop van hun populatiegrootte in modellen beschreven. Omdat enkele vissoorten zoals de schol zich in het afgesloten Grevelingenmeer niet meer konden voortplanten moest de mens een handje helpen. De larven van de schol zwemmen recht op na hun geboorte en zien er dan ook uit als andere vissen. Na ongeveer 6 weken ondergaan ze een gedaanteverwisseling, waarbij een van hun ogen naar de andere kant groeit en ze zich tot platvis ontwikkelen en een jonge schol worden. Voor de schol werden er twee modellen ontworpen:

Figuur 5.4

- Model A: Er worden jaarlijks 5 miljoen larven en 200.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.
- Model B: Er worden jaarlijks 2 miljoen larven en 100.000 schollen ouder dan 1 jaar uitgezet in het Grevelingenmeer.

Voor beide modellen geldt dat de sterfte onder jonge schollen (jonger dan 1 jaar) 90% per jaar is en onder schollen ouder dan 1 jaar 33% per jaar. Alle larven worden jonge schollen. Neem aan dat er in 1985 nog 300.000 schollen ouder dan 1 jaar in het Grevelingenmeer zaten.

a Maak op grond van model A een tabel van het aantal schollen ouder dan 1 jaar gedurende de eerste 10 jaren na 1985.

b Teken een grafiek van het aantal schollen S ouder dan 1 jaar in de loop van de jaren.

c Voor S geldt een groeimodel van de vorm $S(t) = G - a \cdot e^{bt}$. Welke waarde voor G schat je op grond van de grafiek bij b? Bereken nu ook de waarden van a en b.

d Er is in dit model nog geen rekening gehouden met bevissing. De visserijmortaliteit is 23% per jaar. Wat betekent dit?

e Pas je model A aan en onderzoek wat dit betekent voor het aantal schollen op den duur.

Opgave 7: Verouderende populaties

Van een zekere populatie neemt met een toenemende leeftijd x van het individu het aantal individuen van die leeftijd meestal af. Die afname wordt door demografen uitgedrukt in het sterftecijfer m (van 'mortality'), dat is het deel van het aantal individuen van een bepaalde leeftijd dat er jaarlijks sterft. Bij een constant sterftecijfer neemt het aantal individuen van een bepaalde leeftijd $S(x)$ (van 'survivors') exponentieel af.

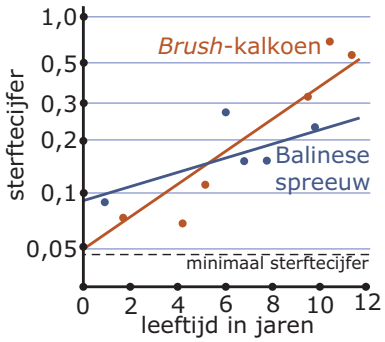
a Verklaar waarom dat zo is.

Bij verouderende populaties blijft het sterftecijfer niet constant, maar wordt het bij hogere leeftijden steeds groter. In dat geval geldt de zogenaamde Gompertzvergelijking:

$m(x) = M \cdot e^{G \cdot x}$

Hierin is:

- M het sterftecijfer van volgroeide individuen
- x de leeftijd van een individu
- G de Gompertz-constante, een maat voor de verouderingssnelheid



Figuur 5.5

Hier zie je de grafieken van $m(x)$ voor de Australische Brush-kalkoen en de Balinese spreeuw. Van Australische Brush-kalkoenen is $M = 0{,}05$ en $G = 0{,}21$.

b Ga na hoe deze getallen zijn terug te vinden in de grafieken van het sterftecijfer.

c Stel voor deze soort een Gompertz-vergelijking voor het sterftecijfer op en ga na of hij past bij de getekende grafiek.

d Als een populatie Brush-kalkoenen 100 volgroeide 0-jarige individuen kent, hoeveel 10-jarige individuen zou die populatie dan moeten hebben?

e Schat nu zelf met behulp van de grafiek de waarden van M en G die gelden voor de Balinese spreeuw. Stel ook voor deze soort de Gompertz-vergelijking op.

Een andere maat voor de veroudering van een populatie is de verdubbelingstijd van het sterftecijfer, de $SCVT$.

f Toon aan dat $SCVT = \frac{\ln(2)}{G}$.

g Bereken de $SCVT$ voor zowel de Brush-kalkoen als de Balinese spreeuw.

h $S(x)$ stelt het aantal volwassen individuen van een populatie met de leeftijd x voor. Teken grafieken van $S(x)$ voor een populatie Australische Brush-kalkoenen en voor een populatie Balinese spreeuwen. Ga bij beide populaties uit van 100 volgroeide 0-jarige individuen. Vergelijk beide grafieken en de verouderingsprocessen van beide populaties.

6

Goniometrische functies

6.1 Goniometrische functies 218
6.2 Goniometrische formules 227
6.3 Differentiëren van goniometrische functies 235
6.4 Harmonische trilling 242
6.5 Totaalbeeld 249

6.1 Goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip goniometrische functie en eigenschappen van dergelijke functies onderzoeken;
- de functie $f(x) = \tan(x)$ en zijn eigenschappen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt leren werken met periodieke functies, met name met sinusoïden. Een voorbeeld is de functie

$h_P(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$

Hierin is:

- t de tijd in seconden
- h de hoogte van een punt P boven de grond in m

a Lees uit het gegeven functievoorschrift de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van h af.
Maak vervolgens die grafiek. (Denk om het gebruik van radialen.)

b Hoe ziet de baan die punt P beschrijft er uit?

c Hoe lang doet P over deze baan?

Voor een ander punt Q geldt $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-1)\right)$.

d Wat is het verschil tussen de banen van P en Q?

Voor het hoogteverschil van beide punten geldt $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$.

e Is h ook een sinusoïde?

f Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{1}{2}\pi(t-3)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

g Neem aan dat voor Q zou gelden $h_Q(t) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi(t-1)\right)$.

Is $h(t) = h_P(t) - h_Q(t)$ dan nog steeds een sinusoïde?

Uitleg 1

Je kent de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen al. Omdat in deze functies de goniometrische verhoudingen sinus en cosinus voorkomen zijn het voorbeelden van goniometrische functies. De belangrijkste eigenschap is wel hun periodiciteit. Maar wat als je $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$ gaat gebruiken om ingewikkelder functievoorschriften te maken? Bekijk eerst maar eens een paar grafieken:

- $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$
- $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$
- $y_5 = \sin\left(x^2\right)$
- $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$
- $y_7 = \sin(2x) - \sin(x)$
- $y_8 = x + \sin(x)$

Je weet dat y_3 een zuivere sinusoïde is, dus daarbij is sprake van een periode (4π), een amplitude (2), een evenwichtsstand ($y = 1$) en een horizontale verschuiving (2 in de positieve x-richting). Ga dit na, eigenlijk moet je dit vooraf meteen kunnen zien.
Verder lijken ook y_4 en y_6 zuivere sinusoïden. Dat is ook inderdaad het geval, al kun je nu nog niet aantonen dat dit zo is. Je kunt wel periode, amplitude, evenwichtsstand en horizontale verschuiving uit de grafiek aflezen.
Van de overige functies is alleen y_7 periodiek, de andere twee niet.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 219**.
Gegeven is onder andere de goniometrische functie $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$.
Je weet dat dit een zuivere sinusoïde is.

a Maak de grafiek van deze functie. Waarom is het hierbij handig om vooraf te bedenken dat het een sinusoïde betreft en de periode, de amplitude en de evenwichtsstand te bepalen?

b Welke horizontale verschuiving moet je op de grafiek van $y = \sin(x)$ toepassen om die van f te krijgen?

c Bereken de toppen van de grafiek van f op het interval $[0{,}4\pi]$.

d Los op: $y_3 \leq 2$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1 op pagina 219**. Ga van elk van de volgende functies na of de grafiek op een sinusoïde lijkt of niet.

a $y_3 = 1 + 2\sin(0{,}5x - 1)$

b $y_4 = \sin(x) + \cos(x)$

c $y_5 = \sin\left(x^2\right)$

d $y_6 = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

e $y_9 = \sin(9x) - \sin(11x)$

Uitleg 2

Bekijk de applet: Tangens

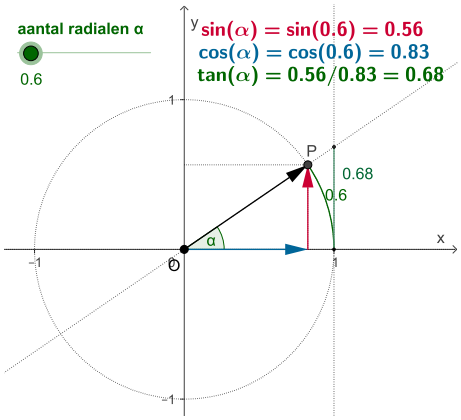
In een eenheidscirkel kun je zo de **tangens** definiëren:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$

En daarom geldt voor de **tangensfunctie**:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.



Figuur 6.1

Terugrekenen vanuit deze functie doe je met behulp van arctan, op veel apparatuur genoteerd als $\tan^{-1}$. Bijvoorbeeld is de oplossing van $\tan(x) = 0{,}5$ gelijk aan $x = \arctan(0{,}5) + k \cdot \pi \approx 0{,}464 + k \cdot \pi$.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2 op pagina 220**. Bekijk de grafiek van $y = \tan(x)$.

a Breng die grafiek zo in beeld, dat je precies twee periodes ziet.

b Waar zitten de verticale asymptoten van deze functie? Leg ook uit hoe je dat kunt afleiden uit de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

c Voor welke waarden van x is $\tan(x) = 1$?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 222**.

Ook bij de tangensfunctie komen exacte waarden voor bij $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{3}\pi$.

a Bereken de exacte waarden van $\tan(x)$ voor deze x-waarden.

b Schrijf alle oplossingen op van $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Theorie en voorbeelden

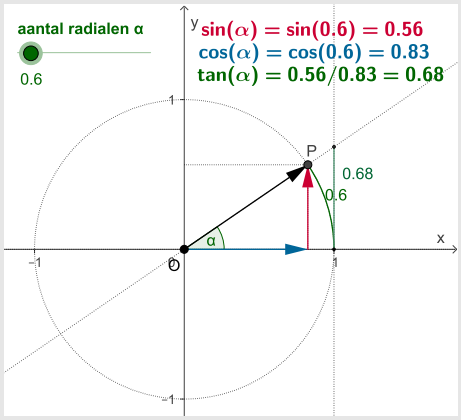
Om te onthouden

Bekijk de applet: Tangensfunctie

Onder **goniometrische functies** versta je functies waarin sin, cos (en tan) voorkomen.
De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al. De tangensfunctie is nieuw.
In deze eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens gedefinieerd als:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

En dus geldt voor de **tangensfunctie**: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Figuur 6.2

Deze functie is ook periodiek, maar nu met een periode van π. Verder heeft deze functie verticale asymptoten: voor waarden van x waarbij $\cos(x) = 0$ bestaan de functiewaarden niet, je deelt dan door 0. Dit is het geval als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De bekende sinusoïden zijn goniometrische functies die zuiver periodiek zijn en een amplitude en een evenwichtsstand hebben. Maar dat geldt niet voor alle goniometrische functies.

Bekijk de applet.

$f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

- periode: $\frac{2\pi}{b}$
- amplitude: a
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Bekijk de applet.

$f(x) = a\tan(b(x-c)) + d$

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c

Voorbeeld 1

Los op $[-\pi,\pi]$ op: $\tan(x) \leq 1$.

Antwoord

Maak eerst de grafiek van $y = \tan(x)$, minstens op $[-\pi,\pi]$. De verticale asymptoten vallen meteen op. Omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vind je ze bij x-waarden waarvoor $\cos(x) = 0$.

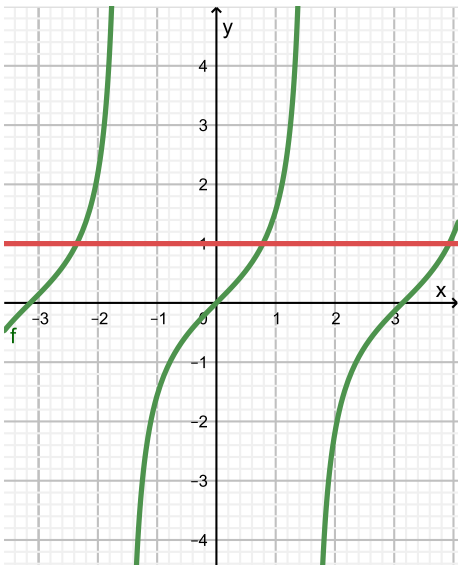
Dus: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Los nu op: $\tan(x) = 1$.

Omdat $\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$ en de tangensfunctie een periode van π heeft, wordt dit: $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

Uit de grafiek lees je de oplossing af, rekening houdend met de verticale asymptoten:

$-\pi \leq x < -\frac{3}{4}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$.



Figuur 6.3

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 222**. Los zelf op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > \sqrt{3}$.

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = 10\sin(0{,}1\pi(x-5)) + 15$ op het interval $[0,50]$.

a Lees periode, amplitude, evenwichtsstand en de horizontale verschuiving t.o.v. de y-as uit het functievoorschrift af.

b Maak de grafiek van f.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) = 12$.

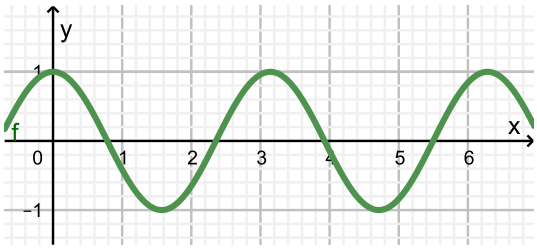
Voorbeeld 2

Gegeven de functie f met voorschrift $f(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

(Met $\cos^2(x)$ wordt $(\cos(x))^2$ bedoeld.)
Onderzoek of deze goniometrische functie periodiek is en bepaal dan de bijbehorende periode.

Antwoord

De standaard cosinusgrafiek heeft een periode van 2π. Het ligt dus voor de hand om de grafiek van f in beeld te brengen op bijvoorbeeld $[0,2\pi]$. Die grafiek lijkt op een zuivere sinusoïde met periode π, amplitude 1 en evenwichtsstand $y = 0$. Als je er een formule met cos bij wilt maken is de horizontale verschuiving 0. Kortom: de grafiek lijkt op die van $y = \cos(2x)$.



Figuur 6.4

Of dit echt het geval is, kun je (nog) niet aantonen. Wel kun je de nulpunten berekenen en kijken of die hetzelfde zijn als die van $y = \cos(2x)$.

$f(x) = 0$ als $2\cos^2(x) - 1 = 0$, dus als $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dit levert dezelfde waarden op als $\cos(2x) = 0$ oplossen.
Ga dat zelf na.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 223**.

a Maak zelf de grafiek van f en bepaal twee opeenvolgende toppen met een maximum.

b Welke periode kun je hieruit afleiden voor de sinusoïde die lijkt te ontstaan?

c Welke andere formule zou je bij deze sinusoïde kunnen opstellen?

d Waarom weet je nog niet helemaal zeker dat de grafiek van f ook echt een sinusoïde is?

Opgave 8

Gegeven de functie f met $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Maak de grafiek van f.

b Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Zo ja, welke formule past er dan bij die sinusoïde?

c Los op: $f(x) = 0{,}5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

d Gebruik nu de formule van de sinusoïde die je bij b hebt gemaakt en los exact op: $y = 0{,}5$. Komen deze antwoorden overeen met die bij c?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2x\sin(x)$ op $[0,2\pi]$.

a Waarom kan hier geen sprake zijn van een sinusoïde?

b Is dit een periodieke functie?

c Beschrijf de regelmaat van de grafiek van f.

Oefenen

Opgave 10

Als je de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \cos(x)$ optelt, krijg je de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a Maak de grafiek van f. Lijkt de grafiek op een sinusoïde? Waarom mag je op grond hiervan nog niet aannemen dat het er ook werkelijk één is?

De grafiek van f is een sinusoïde.

b Geef de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y_1 = \sin(x)$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor deze sinusoïde.

d Bereken met behulp van je formule bij b de toppen en de nulpunten van de grafiek van f.

e Los op $[0,2\pi]$ op: $f(x) > 1$.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

a Deze grafiek is periodiek. Hoe groot is de periode?

b Is de grafiek van g een sinusoïde?

c Bepaal de nulpunten en de toppen van de functie g. Neem als domein $[0,2\pi]$.

Opgave 12

De grafiek van de functie $y_2 = \sin^2(x)$ is een zuivere sinusoïde.

a Bepaal de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving ten opzichte van de grafiek van $y = \cos(x)$.

b Geef een passende formule voor deze sinusoïde.

c Los op: $y_2 = 1$ door gebruik te maken van het oorspronkelijke functievoorschrift.

d Doe hetzelfde nog eens door gebruik te maken van de gevonden formule voor de sinusoïde.

Opgave 13

Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Breng de grafiek van f in beeld op je grafische rekenmachine.

b Neem aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

c Los nu algebraïsch op: $f(x) < 0{,}5$.

Toepassen

In de Westerse muziek worden zeven stamtonen onderscheiden, die samen een toonladder vormen. Deze zeven stamtonen worden aangeduid met A, B, C, D, E, F en G. De centrale A heeft een frequentie van 440 Hz (440 trillingen per seconde). Dit betekent dat in de lucht een trilling plaats vindt met die frequentie (is aantal trillingen per seconde). Voor de A geldt dan bijvoorbeeld

$u(t) = a \cdot \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$

De luidheid van deze grondtoon wordt bepaald door de amplitude a. Neem voor het gemak $a = 1$.

Bij een grondtoon klinken meestal boventonen mee.
De eerste boventoon heeft een frequentie die de helft is van die van de grondtoon.
De tweede boventoon heeft een frequentie die éénderde is van die van de grondtoon. Enzovoorts.

De eerste boventoon van de A klinkt soms minder luid, en dan geldt (bijvoorbeeld)
$u_1(t) = 0{,}8 \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$.
En bij de tweede boventoon past (bijvoorbeeld): $u_1(t) = 0{,}6 \sin(1320 \cdot 2\pi \cdot t)$.
Tel je deze drie sinusfuncties op, dan krijg je een A met een bepaalde klankkleur.

Opgave 14

Bekijk de formules voor een grondtoon en twee boventonen die je in **Toepassen op pagina 225** aantreft.

a Maak eerst de grafiek van de grondtoon A. Zorg dat je precies drie periodes in beeld krijgt, bepaal dus eerst de periode.

b Zet de twee boventonen er bij en tel deze functies op. Maak de bijbehorende grafiek.

c Is de resulterende snaartrilling een zuivere sinusoïde?

Opgave 15

De stamtoon E heeft een frequentie van 330 Hz.

a Welke formule past bij deze toon als je weer uitgaat van een amplitude van 1 en een evenwichtsstand van $u = 0$?

b De eerste boventoon hoor je maar voor 50 % van de geluidssterkte van de grondtoon E.
Welke formule past daar bij?

c Waarom levert het samen horen van de grondtoon E met zijn eerste boventoon wel een periodieke trilling op, maar geen sinusoïde?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Geef een formule voor deze sinusoïde met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

d Los algebraïsch op: $f(x) \geq 1$.

Opgave 17

De grafiek van $y = \cos^2(x)$ is een sinusoïde. Schrijf de formule in de vorm $y = a\cos(b(x + c)) + d$.

6.2 Goniometrische formules

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- goniometrische formules (symmetrieformules, somformules, verdubbelingsformules, enz.) kennen;
- goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van functievoorschriften en het oplossen van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijbehorende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies met de grafische rekenmachine onderzoeken;
- werken met de functie $y = \tan(x)$.

Verkennen

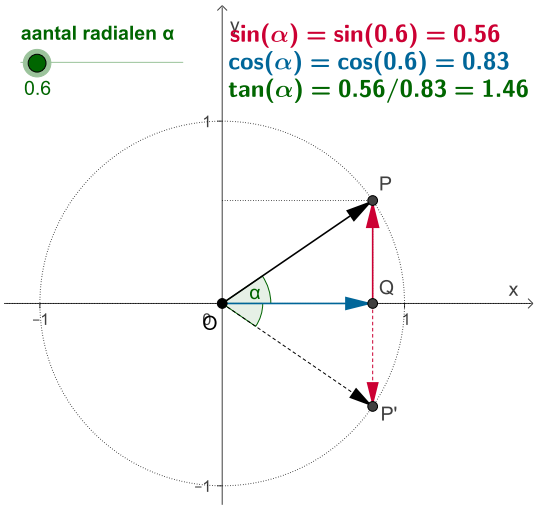
Opgave V1

Bekijk de applet.

Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

Hier zie je α en $-\alpha$ in één figuur.



Figuur 6.1

a Leg uit waarom $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

b Welk verband is er tussen $\sin(\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$?

c Kun je nog meer van dit soort symmetrieformules afleiden?

d Denk ook eens aan de stelling van Pythagoras. Kun je iets zeggen over $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

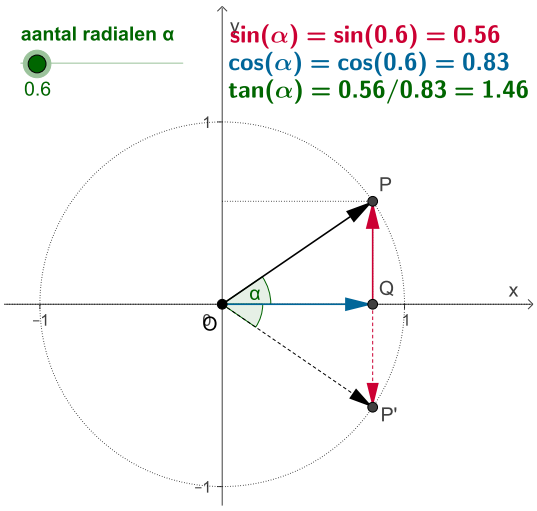
Om eigenschappen van sinus, cosinus en tangens af te leiden moet je kijken naar hun definities in de eenheidscirkel:

$\sin(\alpha) = y_P$
$\cos(\alpha) = x_P$
$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

In deze figuur zie je de hoeken α en $\beta = \pi - \alpha$.

Omdat ΔOQP en $\Delta OQ'P'$ congruent zijn vanwege de symmetrie van de figuur geldt:

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$



Figuur 6.2

Kijk je alleen naar ΔOQP dan zie je met de stelling van Pythagoras: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Op deze wijze kun je allerlei formules voor sin, cos en tan afleiden.
Bijvoorbeeld: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Of: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

Of: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 1

Bekijk de symmetrieformules die in de **Uitleg 1 op pagina 228** worden afgeleid.

a Laat zelf zien, dat: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ en $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ en $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

b Laat zien, dat: $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$.

c Laat ook zien dat: $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Opgave 2

Breng de grafiek van $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ in beeld.

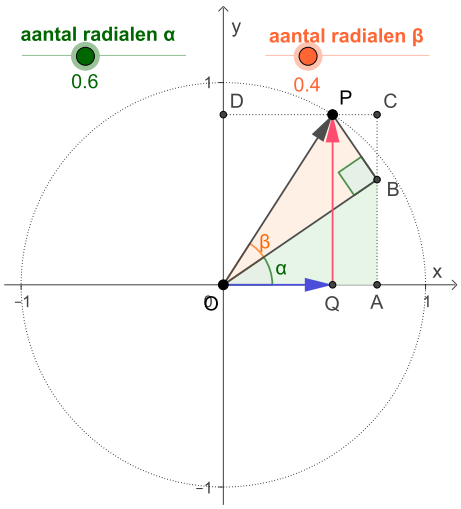
a Welke formule heb je nu zichtbaar gemaakt? En hoe wordt die formule in **Uitleg 1 op pagina 228** afgeleid?

b Maakt het daarbij verschil of je in graden of radialen werkt?

Uitleg 2

Bekijk de applet.

Met behulp van de figuur hiernaast kun je de zogenaamde somformules afleiden. Je ziet hoe hier de hoeken α en β 'op elkaar gestapeld' zijn. Het is de bedoeling om $\sin(\alpha+\beta)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ en $\cos(\beta)$ met behulp van rechthoek $OACD$ en de rechthoekige driehoeken OBP en BCP. Dit gaat alleen zolang $\alpha+\beta$ tussen 0 en $0{,}5\pi$ blijft. Alle andere situaties moet je met behulp van de symmetrieformules en de eenheidscirkel tot deze herleiden!



Figuur 6.3

Ga na, dat $\sin(\alpha+\beta)=\frac{QP}{OP}=\frac{AC}{OP}$.

Ga ook na, dat $\angle PBC=\alpha$ en daarmee

$\sin(\alpha)=\frac{AB}{OB}$, $\cos(\alpha)=\frac{OA}{OB}=\frac{BC}{BP}$, $\sin(\beta)=\frac{BP}{OP}$ en $\cos(\beta)=\frac{OB}{OP}$.

Dan is:

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)=\frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP}+\frac{BC}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}=$

$\frac{AB}{OP}+\frac{BC}{OP}=\frac{AC}{OP}=\sin(\alpha+\beta)$.

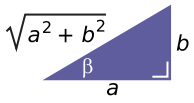
Hiermee heb je afgeleid: $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.
Met behulp van de symmetrieformules kun je hier dan weer varianten op maken.
En bovendien geldt als je $\alpha=\beta=x$ neemt: $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.
Dit is een voorbeeld van een verdubbelingsformule.

Opgave 3

In de **Uitleg 2 op pagina 229** wordt de formule $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ afgeleid.

a Laat zien dat hieruit volgt $\sin\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin(x)+\frac{1}{2}\cdot\cos(x)$.

Voor β geldt $\tan(\beta)=\frac{b}{a}$, zie figuur.



Figuur 6.4

b Laat zien, dat $\sin(x+\beta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos(x)$.

c Laat zien, dat $a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$ waarin $\tan(\beta)=\frac{b}{a}$.

Je hebt nu ontdekt dat elke formule van de vorm $y=a\sin(x)+b\cos(x)$ een sinusoïde is.

d Laat zien, dat $3\sin(x)+4\cos(x)\approx 5\sin(x+0{,}93)$.

e Laat zien, dat $\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$.

Opgave 4

In de **Uitleg 2 op pagina 229** worden verdubbelingsformules afgeleid.

a Laat zien dat $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Je hebt al eerder gezien, dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

b Laat zien dat je hierbij uit de formule bij a kunt afleiden $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Dit is een overzicht van de belangrijkste **goniometrische formules**. Je kunt ze gebruiken om goniometrische functies te herleiden en/of bijbehorende vergelijkingen op te lossen.

Symmetrieformules

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

Verbanden tussen sin en cos

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Somformules

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Verdubbelingsformules

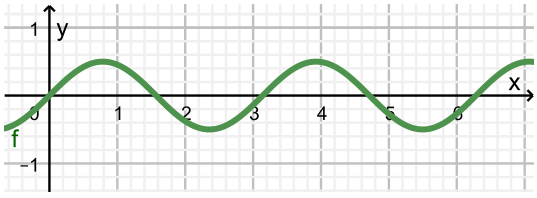
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

Formule voor a sin(x) plus b cos(x)

$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$

Voorbeeld 1

Je ziet hier de grafiek van de functie f met $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$.
De grafiek lijkt op een sinusoïde. Toon aan dat dit ook echt zo is.



Figuur 6.5

Antwoord

Het functievoorschrift $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ past bij de verdubbelingsformule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Die verdubbelingsformule kun je schrijven als $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Het functievoorschrift kun je hiermee herleiden: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

En $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ is een sinusoïde met amplitude $\frac{1}{2}$, periode π en evenwichtsstand $y = 0$. En dat klopt ook netjes met de grafiek.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = \cos^2(x)$. De grafiek van f lijkt een zuivere sinusoïde te zijn.

a Ga dat na.

b Toon aan dat f een sinusoïde is.
Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtsstand van die sinusoïde.

c Los algebraïsch op $f(x) = 1$.

Opgave 6

Waarom is $f(x) = 2\sin(x) + \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ een sinusoïde?

Voorbeeld 2

Laat zien, dat $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ een sinusoïde is.
Stel een bijpassende formule op in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Eerst gebruik je de somformule $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

Dat geeft $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en dus:

$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(x)$.

Vervolgens gebruik je $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Dat geeft $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 231** wordt de functie $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ als sinusoïde geschreven.

a Laat zelf zien, dat $f(x) \approx 1{,}73\sin(x - 0{,}52)$.

De vergelijking $\sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$ kun je in deze vorm niet algebraïsch oplossen.
Maar door het schrijven van het functievoorschrift als sinusoïde kan dit wel.

b Los deze vergelijking op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oefenen

Opgave 8

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

a Bereken de nulpunten van deze functie.

b Laat zien dat je het voorschrift van deze functie kunt herschrijven tot $f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$.

c Bereken de nulpunten opnieuw vanuit de formule die je bij b hebt gevonden.

d Los algebraïsch op: $f(x) > \frac{1}{2}$.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $S(x) = f(x) + g(x)$.

a Onderzoek of de functie S een sinusoïde zou kunnen zijn.

b Toon met behulp van de somformules voor sinus aan dat S een sinusoïde is.

c Los algebraïsch op: $S(x) \geq 1$.

Opgave 10

Los algebraïsch op $\sin(x) = \cos(x)$ op $[0,2\pi]$.

Opgave 11

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 0{,}5\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze functie.

b Breng de grafiek in beeld en bepaal de asymptoten.

c Los algebraïsch op: $f(x) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opgave 12

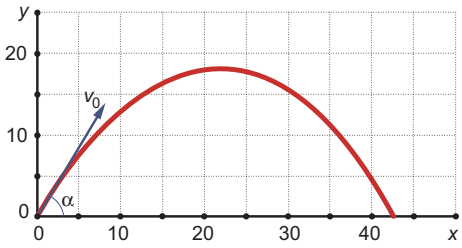
Door de sinusoïden $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$ op te tellen ontstaat de grafiek van een functie f. Neem voor het domein van f het interval $[0,4\pi]$.

a Toon aan dat de grafiek van f een zuivere sinusoïde is. Stel een formule op. Gebruik benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Los nu algebraïsch op: $f(x) < 1$.

Toepassen

De baan die een afgeschoten voorwerp onder invloed van de zwaartekracht aflegt noem je de kogelbaan. De vorm van deze baan is een parabool. Dat kun je zelf afleiden uit een paar natuurkundige formules.



Figuur 6.6

Als je een voorwerp afschiet met een beginsnelheid v_0 (in m/s) onder een bepaalde hoek α dan ondervindt het zwaartekracht en luchtweerstand. Stel je voor dat die luchtweerstand kan worden verwaarloosd. Je wilt de baan tekenen in een gewoon rechthoekig Oxy-assenstelsel.

- In de x-richting geldt dan: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$.
- In de y-richting geldt dan: $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 0{,}5gt^2$.

Hierin is $g \approx 9{,}8$ m/s^2 de zwaartekrachtversnelling en t de tijd in seconden.

Wellicht herken je de formules voor de eenparige beweging in de x-richting en die voor de eenparig versnelde beweging in de y-richting wel uit de natuurkunde. En natuurlijk wil je weten bij welke hoek de kogel het verst verwijderd op de grond komt.

Opgave 13

Bekijk de formules voor de kogelbaan in **Toepassen op pagina 233**.

a Licht toe hoe je aan deze formules komt.

Voor de kogelbaan in de figuur geldt $\alpha = 60°$ en $v_0 = 96$ m/s.

b De kogel komt op de grond als $y = 0$. Bij welke waarden van t is dat?

c Bereken de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt.

d Laat zien dat in het algemeen voor het punt waar de kogel na het afschieten weer op de grond terecht komt geldt: $t = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

e Laat zien dat voor de afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt geldt: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$.

Opgave 14

De afstand tussen het punt waar de kogel wordt afgeschoten en het punt waar de kogel op de grond terecht komt is: $x = \frac{v_0 \sin(2\alpha)}{g}$. Bij een bepaalde beginsnelheid hangt deze afstand alleen van α af.

a Bij welke hoek α is x maximaal?

b Hoeveel m na het afschieten met een beginsnelheid van 300 m/s komt de kogel weer op de grond als je deze beste hoek kiest?

c Laat zien, dat de baan parabolisch is.

Testen

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(2x) - \sin^2(x)$ op $[-\pi,\pi]$. De grafiek van f is een sinusoïde.

a Toon dat aan.

b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.

c Beredeneer de extremen van f.

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \tan(x - \pi) + 1$ op $[0,2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de nulpunten van deze grafiek.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Los op: $f(x) \leq 2$.

6.3 Differentiëren van goniometrische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een sinusoïde bepalen;
- de differentieerregels toepassen op functies waarin sinus, cosinus of tangens voorkomen.

Voorkennis

- werken met goniometrische functies en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- werken met de functie $y = \tan(x)$;
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

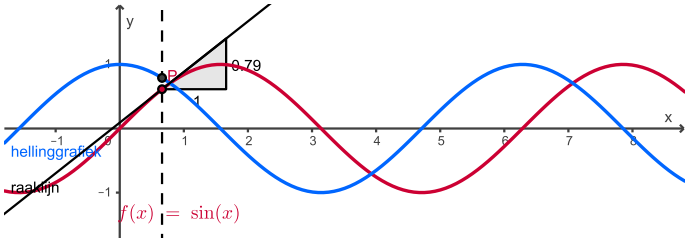
Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en een bijpassende hellingsgrafiek.

a Ga na dat die blauwe grafiek inderdaad de hellingsgrafiek van f is.

b Welke afgeleide heeft $f(x) = \sin(x)$, denk je?

c Welke afgeleide heeft $f(x) = \cos(x)$, denk je?



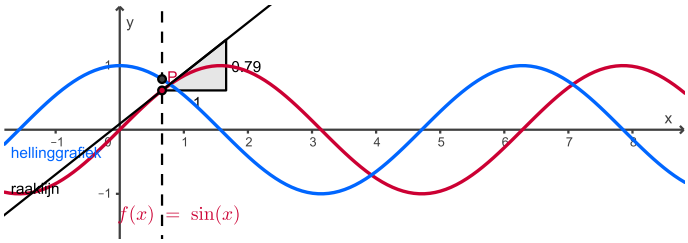
Figuur 6.1

Uitleg

Bekijk de applet: Afgeleide sinus

Het differentiëren van functies waarin sinus en/of cosinus voorkomen is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.



Figuur 6.2

In de applet wordt dit voor $f(x) = \sin(x)$ aannemelijk gemaakt. Je ziet hierin dat de hellingsgrafiek van f gelijk is aan de grafiek van $f'(x) = \cos(x)$.

Op dezelfde manier zie je dat afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ gelijk is aan $f(x) = -\sin(x)$.

Opgave 1

Bekijk de afgeleiden van sinus en cosinus in de. In de figuur kun je zien dat de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ gelijk is aan $f'(x) = \cos(x)$.

Maak de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ en de bijbehorende hellingsgrafiek.

Opgave 2

Je kent nu de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$.

a Bereken daarmee de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Bewijs 1

Om de afgeleide van $y = \sin(x)$ te bepalen kijk je naar het differentiequotiënt:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ als $h \to 0$

Gebruik de goniometrische formule $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$

Omdat $\cos(h) \to 1$ als $h \to 0$ kun je dit schrijven als

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} = \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$

En omdat voor $h \to 0$ geldt dat $\sin(h) \to h$, staat hier

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \to \cos(x)$ als $h \to 0$

Precies wat je wilde aantonen...

De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ kun je op dezelfde wijze afleiden.

De afgeleide van $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ leid je met behulp van de quotiëntregel af.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel en met de constante-regels.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$
- $h(t) = 3\sin^2(t)$

Antwoord

Gebruik - behalve de afgeleiden van sinus en cosinus - ook de differentieerregels.

- $f(x) = 5\sin(x) + 20$ geeft $f'(x) = 5\cos(x)$.
- $p(t) = 4\cos(0{,}15t)$ geeft $p'(t) = 4 \cdot -\sin(0{,}15t) \cdot 0{,}15 = -0{,}6\sin(0{,}15t)$ (kettingregel!).
- $h(t) = 3\sin^2(t) = 3 \cdot (\sin(t))^2$ geeft $h'(t) = 3 \cdot 2(\sin(t))^1 \cdot \cos(t) = 6\sin(t)\cos(t)$.

Opgave 3

Bereken de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 2\sin(x)$

b $f(x) = \sin(2x)$

c $f(x) = \sin^2(x)$

d $h(t) = 12\sin(0{,}5\pi t) + 1$

e $I(t) = 30\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$

f $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Opgave 4

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ kun je vinden door de quotiëntregel voor differentiëren en de afgeleiden van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ te gebruiken. Laat dat zien.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = -10 + 20\sin(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$ met domein $[-10, 10]$.
Stel m.b.v. differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

$f'(x) = 20\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi) \cdot 0{,}1\pi = 2\pi\cos(0{,}1\pi x - 0{,}2\pi)$.

Daaruit volgt: $f'(0) = 2\pi\cos(-0{,}2\pi) \approx 5{,}08$.
Verder is: $f(0) = -10 + 20\sin(-0{,}2\pi) \approx 21{,}76$.

De vergelijking van de raaklijn wordt bij benadering: $y = 5{,}08x - 21{,}76$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 237**.

Stel zelf de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ op.

Opgave 6

Bekijk het **Voorbeeld 2 op pagina 237**. Je ziet daar hoe de vergelijking van de raaklijn aan een sinusoïde wordt opgesteld. Differentieer nu de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn voor $x = 0$.

a $f(x) = 20 \sin(440\pi x)$

b $f(x) = \tan(x)$

Voorbeeld 3

Bij in- en uitademen varieert het longvolume V (in liters) periodiek met de tijd t (in seconden). Stel je voor dat iemand's longvolume varieert tussen 3,05 en 3,15 L en dat deze persoon 40 keer per minuut in- en uitademt. Neem verder aan dat $V(t)$ een zuivere sinusoïde is.
Op $t = 0$ is zijn longvolume maximaal. Bereken de grootste snelheid van uitademen.

Antwoord

Dit is een passende formule: $V(t) = 3{,}10 + 0{,}05 \cos\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right)$.
Hierin is t in seconden (er gaan 40 ademhalingen in 60 seconden, dus de periode is 1,5 s).

De grootste snelheid van uitademen vindt plaats als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum. Bijvoorbeeld op $t = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$.
Die snelheid is dan gelijk aan de afgeleide van $V(t)$ op dat tijdstip.

Nu is: $V'(t) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5}t\right) \cdot \frac{2\pi}{1{,}5}$.

En daarom is: $V'(0{,}375) = -0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} \cdot 0{,}375\right) \cdot \frac{2\pi}{1}{,}5 \approx -0{,}209$.
De maximale snelheid van uitademen in ongeveer 0,2 L/s.

Opgave 7

Voorbeeld 3 op pagina 238 gaat over iemand's longvolume en de snelheid van in- en uitademen.

a Laat zien hoe je de formule voor $V(t)$ uit de tekst kunt afleiden.

b Leg uit waarom de grootste snelheid van uitademen plaats vindt als de grafiek de evenwichtsstand passeert vanaf een maximum naar een minimum.

c Voer nu zelf de berekening van die maximale snelheid van uitademen uit.

d En bij welke waarden van t krijg je de grootste snelheid van inademen? Hoe groot is die snelheid?

Oefenen

Opgave 8

Differentieer deze goniometrische functies.

a $f_1(x) = 4 \cos(x)$

b $f_2(x) = 4 \sin(2x - 0{,}25\pi) + 10$

c $f_3(x) = 50 \cos^2(x)$

d $f_4(x) = 2 - 2 \sin(x - 1)$

Opgave 9

Met domein $[0,2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 1$.

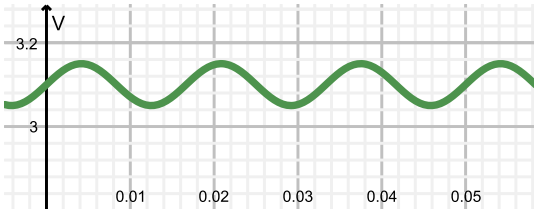
a Laat zien, dat $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 1$.

b Bereken de exacte extremen van deze functie.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

Opgave 10

Het longvolume V (in L) van een mens kun je registreren met een zogenaamde spirograaf. Bij iemand die hyperventileert geeft de spirograaf de grafiek die je hiernaast ziet. Horizontaal zie je de tijd t in minuten.



Figuur 6.3

a Hoeveel keer per minuut ademt deze patiënt uit?

b Stel een formule op voor V als functie van de tijd t. Ga ervan uit dat de grafiek een zuivere sinusoïde is.

c Benader in twee decimalen nauwkeurig de toenamesnelheid van het longvolume op $t = \frac{7}{480}$.

Opgave 11

Gegeven een functie waarvan de grafiek lijkt op een sinusoïde. Alleen de evenwichtsstand is geen horizontale lijn, maar een lijn met helling van $\frac{1}{2}$. Bij deze functie hoort het voorschrift $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + 2\sin(x)$. Je spreekt nu niet van een evenwichtsstand, maar van een trendlijn.

a Welke formule geldt voor de trendlijn? Breng op je grafische rekenmachine zowel de grafiek van f als de trendlijn in beeld.

b Bereken algebraïsch de toppen van de gegeven functie.

c Vallen de x-waarden van die toppen samen met die van de toppen van $y = \sin(x)$? Geef een verklaring.

Toepassen

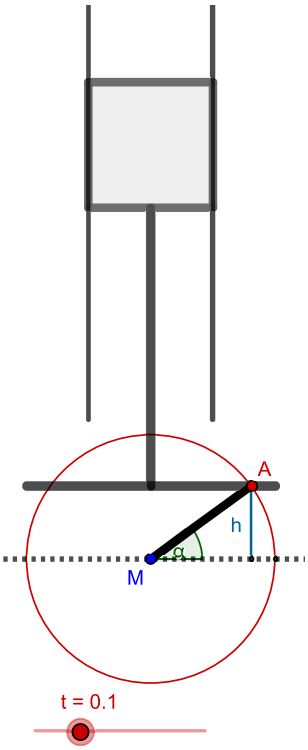
Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een krukstang MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek. De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.

Je kunt deze formule ombouwen tot een formule waarin h afhangt van de tijd t als je weet dat de krukstang elke seconde een complete omwenteling doorloopt. Neem je MA in cm, dan krijg je:

$h(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$

met h de hoogte in cm en t de tijd in seconden.



Figuur 6.4

Opgave 12

Bekijk de formule voor $h(t)$ in **Toepassen op pagina 240**.
De zuiger beweegt op en neer.

a Beweegt de zuiger steeds met dezelfde snelheid omhoog?

De snelheid waarmee h verandert is gelijk aan de afgeleide van h.

b Stel een formule voor die snelheid op.

c Hoe groot is de snelheid waarmee h verandert op $t = 0$?

Opgave 13

Bekijk de formule voor de snelheid waarmee de hoogte van de zuiger verandert in de vorige opgave.

a Tussen welke waarden kan deze snelheid variëren?

b Op welke twee manieren kun je de hoogste snelheid die de zuiger kan aannemen nog verhogen?

Testen

Opgave 14

Je doorloopt in een bepaald reuzenrad een cirkelbaan waarbij geldt $h(t) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, met:

- h de hoogte boven de begane grond in m;
- t de tijd in seconden.

a Je vertrekt op $t = 0$. Hoe snel gaat de hoogteverandering op dat moment?

b Hoe snel gaat de hoogteverandering als je een kwart cirkel hebt doorlopen?

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = x + 2\sin(x)$ op het domein $[0,2\pi]$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Stel vergelijkingen op van de rechte lijnen l en m die de grafiek van f raken en evenwijdig zijn aan de lijn met vergelijking $y = x$.

6.4 Harmonische trilling

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- harmonische trillingen beschrijven m.b.v. sinusoïden;
- sinusoïden optellen en onderzoeken of er dan opnieuw sprake is van een sinusoïde.

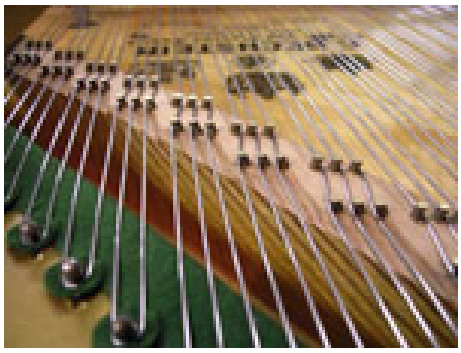
Voorkennis

- werken met sinusoïden en bijpassende vergelijkingen oplossen;
- goniometrische functies differentiëren.
- differentiëren met behulp van alle differentieerregels en dit toepassen op het berekenen van hellingen en extremen.

Verkennen

Opgave V1

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.



Figuur 6.1

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880\pi \cdot t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

a Breng de bijbehorende grafiek in beeld, precies twee periodes.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Een boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

b Laat zien hoe de grafiek van $u(t) = \sin(880\pi \cdot t) + 0{,}5\sin(1760\pi \cdot t)$ er uit ziet.
Is dit een zuivere sinusoïde?

Uitleg

Bekijk de applet: Harmonische trillingen

Een harmonische trilling is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde.

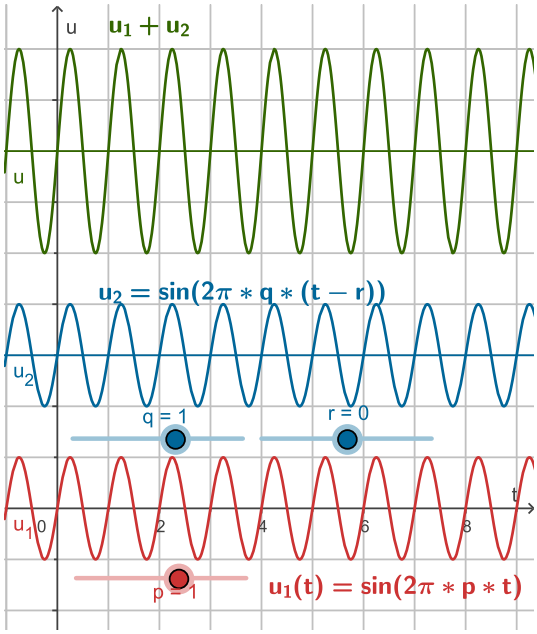
Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking uit de evenwichtsstand heeft dan bijvoorbeeld een formule zoals

$u(t) = 10 \sin(2\pi t)$

Hierin is:

- u de uitwijking uit de evenwichtsstand in cm
- t de tijd in seconden

De periode van deze trilling is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ seconde.



Figuur 6.2

Je kunt ook twee harmonische trillingen optellen, ze werken dan tegelijkertijd. Soms zijn ze 'in fase' (ze starten dan op hetzelfde moment), soms niet, er is dan een faseverschil. Ze kunnen ze elkaar versterken, dan wel uitdoven. Altijd ontstaat er een nieuwe periodieke functie, niet altijd is het weer een harmonische trilling, een sinusoïde. Wanneer wel en wanneer niet?

Even experimenteren en je zult wel vermoeden dat dit te maken heeft met de periodes van u_1 en u_2: alleen als die gelijk zijn krijg je weer een zuivere sinusoïde.

Opgave 1

Neem $u_1 = 10 \sin(2\pi t)$ en $u_2 = 5 \sin(2\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a Laat algebraïsch zien dat u een sinusoïde is.

b Hebben u_1 en u_2 een faseverschil?

Je gaat nu met een faseverschil werken. Gebruik de applet of maak zelf grafieken.

c Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(2\pi(t - 0{,}2))$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$. Wat valt op?

d Het faseverschil van de voorgaande trillingen is 0,2.
Wat gebeurt er als het faseverschil 0,5 wordt?

Opgave 2

Neem $u_1 = \sin(2\pi t)$ en $u_2 = \sin(\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

a De periodes van u_1 en u_2 zijn nu verschillend. Is u een sinusoïde?

b Experimenteer met de periodes van u_1 en u_2. Wanneer wordt u een sinusoïde?

c Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(0{,}2\pi t)$.
Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.
Welke periode heeft u?

Opgave 3

Neem $u_1 = \sin(4\pi t)$ en $u_2 = \sin(3\pi t)$. Bekijk de grafieken van u_1, u_2 en $u = u_1 + u_2$.

Hoe groot is de periode van $u(t)$?
Hoe kun je die berekenen uit de periodes van u_1 en u_2?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde. Een goed voorbeeld is een veer met een gewichtje er aan wat in trilling wordt gebracht. De uitwijking u (in m) uit de evenwichtsstand is een functie van de tijd t (in s):

$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- Als beide sinusoïden dezelfde periode hebben, is hun som ook een sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen met dezelfde periode is weer een harmonische trilling. Zie **Voorbeeld 1 op pagina 244**.
- Als beide sinusoïden verschillende periodes hebben, is hun som geen sinusoïde: de som van twee harmonische trillingen is geen zuiver harmonische trilling, maar wel een periodiek verschijnsel. Zie **Voorbeeld 2 op pagina 245**.

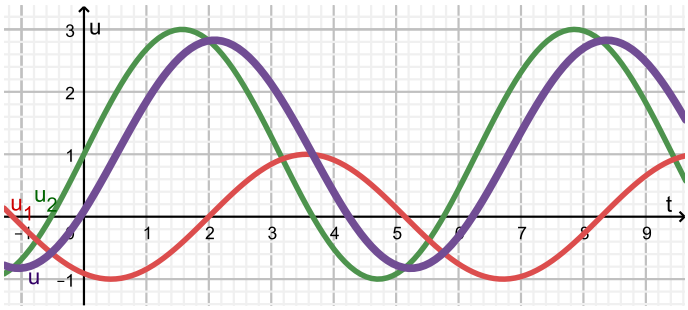
Voorbeeld 1

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = 2\sin(t) + 1$ en $u_2 = \sin(t - 2)$.
Beide trillingen hebben dezelfde periode, dus $u = u_1 + u_2$ is ook een harmonische trilling.

Stel met behulp van de grafiek een formule op voor $u(t)$.

Antwoord

Maak eerst de grafieken van u_1, u_2 en u in één figuur in bijvoorbeeld GeoGebra.



Figuur 6.3

Bepaal nu met behulp van GeoGebra, Desmos, of een grafische rekenmachine de maxima en de minima van de grafiek van u.

Je vind maxima bij $x \approx 2{,}09 + k \cdot 2\pi$ van $\approx 2{,}83$.
Je vind minima bij $x \approx 5{,}23 + k \cdot 2\pi$ van $\approx -0{,}83$.

De evenwichtsstand lees je uit de figuur af: $u = 1$.
De periode is dezelfde als die van u_1 en u_2, dus 2π.

De amplitude is $2{,}83 - 1 = 1{,}83$.

Het eerste punt op de evenwichtsstand waarin een complete trilling begint ligt bij $t = 2{,}09 - \frac{1}{4} \cdot 2\pi \approx 0{,}52$.
Dit getal bepaalt de horizontale verschuiving.

De formule wordt $u(t) \approx 1{,}83 \sin(t - 0{,}52) + 1$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 244** zie je hoe twee harmonische trillingen u_1 en u_2 met dezelfde periode worden opgeteld.

a Breng zelf de grafiek van $u(t)$ in beeld. Ga na dat hij op een sinusoïde lijkt en bepaal frequentie, amplitude en evenwichtslijn.

b Bepaal op dezelfde manier de formule van $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ als sinusoïde.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen met dezelfde frequentie. Bepaal de amplitude van de resulterende harmonische trilling.

a $y_1(t) = 20 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ en $y_2(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-1)\right)$

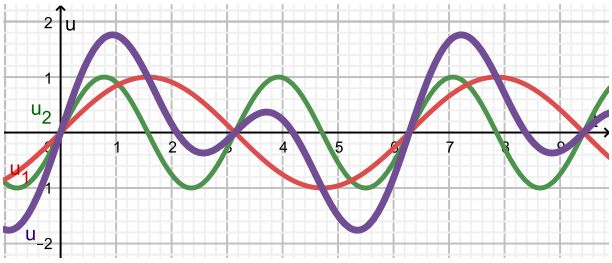
b $y_1(t) = 20 \sin(t)$ en $y_2(t) = 10 \cos(t)$

Voorbeeld 2

Gegeven de twee harmonische trillingen u_1 en u_2 door $u_1 = \sin(t)$ en $u_2 = \sin(2t)$.
Beide trillingen hebben verschillende periodes, dus $u = u_1 + u_2$ is geen harmonische trilling.
Hoe groot is de periode van $u(t)$?

Antwoord

Omdat de periodes verschillen heeft u niet de gedaante van een sinusoïde.
Maar $u(t)$ is wel periodiek. Omdat $\sin(t)$ zich herhaalt met een periode van 2π en $\sin(2t)$ met een periode van π, past de trillingstijd van de $\sin(2t)$ precies twee keer in die van $\sin(t)$. De periode is daarom 2π.



Figuur 6.4

(In het algemeen is in een dergelijk geval de periode het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van beide afzonderlijke periodes.)

Opgave 6

Bekijk de twee harmonische trillingen in **Voorbeeld 2 op pagina 245**.
Hun som is geen harmonische trilling.

a Waarom niet?

Neem nu $u_1(t) = \sin(3t)$ en $u_2(t) = \sin(4t)$.

b De grafiek van $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ is geen harmonische trilling, maar wel periodiek.
Hoe leid je de periode van u af uit die van u_1 en die van u_2?

Oefenen

Opgave 7

Ga uit van twee harmonische trillingen u_1 en u_2. Bepaal in de elk van de volgende gevallen of $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ weer een harmonische trilling is. Bepaal in dat geval de frequentie en amplitude.

a $u_1 = 2\cos(t)$ en $u_2 = 5 + \sin(t)$

b $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi t)$

c $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(50\pi(t-2))$

d $u_1 = 2\cos(50\pi t)$ en $u_2 = 5 + \sin(100\pi t)$

Opgave 8

Je kunt met een hoorn lage tonen spelen. Zo'n toon heeft bijvoorbeeld een frequentie van 80 Hz. De toon kun je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 10.
Op een hobo speel je hogere tonen met een frequentie van bijvoorbeeld 400 Hz. Deze toon kun je je voorstellen door een sinusoïde met een amplitude van 5.

Figuur 6.5

a Stel voor beide tonen een formule op voor de bijbehorende sinusoïde.

b Iemand hoort de beide tonen tegelijk. Teken de grafiek van de toon die hij hoort. Zorg ervoor dat er precies twee periodes zichtbaar zijn.

c De amplitudes zijn een maat voor de sterkte van het geluid. Welke amplitude heeft de grafiek die je bij b hebt gemaakt?

Opgave 9

Twee trillingen hebben alleen een faseverschil. Als voor de ene trilling geldt $y_1 = \sin(t)$ dan geldt voor de andere $y_2 = \sin(t - p)$. Een puntmassa trilt zuiver harmonisch onder invloed van beide trillingen.

a Neem $p = 0$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

b Neem $p = \pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

c Neem $p = \frac{1}{2}\pi$. Welke formule geldt dan voor $y(t) = y_1 + y_2$?

Opgave 10

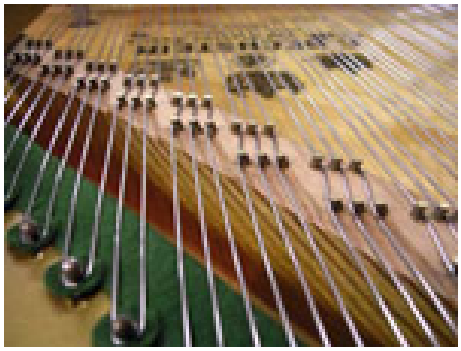
Een passerend schip veroorzaakt op een rivier een golf die tegen de wal wordt teruggekaatst. Gedurende enige tijd ondervindt een klein vissersbootje zowel invloed van de oorspronkelijke golf als van de teruggekaatste golf. Bij de terugkaatsing wordt door demping de amplitude kleiner en wel $\frac{2}{3}$ deel van de oorspronkelijke amplitude.
De teruggekaatste golf is het spiegelbeeld van de voortzetting van de oorspronkelijke golf. Stel je voor dat voor de oorspronkelijke golf geldt $h(t) = \sin(t)$ met t in radialen. Verder bevindt de dichtstbijzijnde golftop zich $\frac{5}{6}$ periode uit de wal.

a Leg uit dat voor de combinatie van beide golven geldt: $h(t) = \sin(t) + \frac{2}{3}\sin\left(t + 3\frac{1}{3}\pi\right)$.

b De combinatie van beide golven is een sinusoïde. Welke amplitude heeft deze sinusoïde?

Toepassen

Als iemand muziek maakt hoor je tonen. Die tonen ontstaan meestal door trilling van een snaar, of van lucht in een of andere holte. Trillingen kun je goed zien door te kijken naar een trillende snaar. De hoogte van de toon hangt af van de lengte van de snaar: hoe vaker hij per seconde trilt, hoe hoger de toon. De 'kamertoon', de centrale A van de piano trilt met 440 Hz (hertz = trillingen per seconde). Het is een voorbeeld van een harmonische trilling.



Figuur 6.6

Bij deze A hoort een harmonische trilling volgens $u(t) = \sin(880 \cdot \pi t)$ waarin u de uitwijking van de trilling en t de tijd in seconden is.

Behalve deze grondtoon klinken er ook boventonen mee, de eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en de tweede heeft een frequentie die drie keer zo groot is, etc. Elke boventoon klinkt vaak minder sterk dan de grondtoon.

Hier zie je een geluidsspoor van een A zoals die op een klarinet wordt gespeeld (blauw). Je kunt aan de grondtoon boventonen toevoegen en bekijken hoe het geluidsspoor verandert. Je kunt zo het geluidsspoor van de A op de klarinet nabootsen.

Bekijk de applet: Geluidsapplet

Opgave 11

Bekijk het trillingspatroon van een A van 440 Hz gespeeld op de klarinet.

Maak zelf dit trillingspatroon na met de applet. Welke formule hoort er bij?

Opgave 12

Van een aangeslagen pianosnaar zijn de grondtoon en de eerste boventoon hoorbaar. Voor de grondtoon geldt de formule $u_0 = \sin(880\pi t)$. De eerste boventoon heeft de dubbele frequentie en een amplitude die half zo groot is.

a Het geluid dat deze snaar produceert ontstaat door beide trillingen op te tellen. Welke formule geldt voor de trilling van de snaar?

b Waarom trilt de snaar niet zuiver harmonisch? Welke frequentie heeft de trilling?

c Welke formule geldt er dan voor de uitwijking van de pianosnaar? Met welke frequentie trilt de snaar?

Testen

Opgave 13

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee zuiver harmonische trillingen. Leg uit in welk van de volgende gevallen de puntmassa zelf ook zuiver harmonisch trilt. Bepaal in die gevallen de frequentie en de amplitude van de trilling.

a $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(t + 2)$

b $u_1 = 5\sin(t)$ en $u_2 = 10 + 5\sin(2t)$

c $u_1 = 5\sin(220\pi t)$ en $u_2 = 10 + 3\sin(220\pi t)$

6.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Goniometrische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- goniometrische functie — de functie $f(x) = tan(x)$
- goniometrische formules: symmetrieformules, verdubbelingsformules, somformules — verbanden tussen sin en cos
- afgeleiden van sin, cos en tan
- harmonische trilling — frequentie en trillingstijd

Activiteitenlijst

- werken met goniometrische functies (o.a. $f(x) = tan(x)$) op een grafische rekenmachine of met GeoGebra of Desmos
- de goniometrische formules afleiden — de goniometrische formules gebruiken bij het herleiden van goniometrische functies en het oplossen van vergelijkingen
- de afgeleide van een goniometrische functie bepalen en toepassen
- bepalen of een som van harmonische trillingen weer een harmonische trilling is

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$ met domein $[0,2\pi]$.

a De grafiek van P is een zuivere sinusoïde. Bepaal grafisch de amplitude en de evenwichtsstand van deze functie.

b Toon algebraïsch aan dat $P(t) = 25 - 25\cos(2t)$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 12{,}5$.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ en $g(x) = 1 + \sin(x)$.

Beide hebben ze als domein $[0,2\pi]$.
Verder is gegeven de functie h met $h(x) = f(x) - g(x)$.

a De grafiek van h is een zuivere sinusoïde. Bereken de amplitude en de evenwichtsstand van h.

b Los op: $h(x) < 0$.

Opgave 3

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = 3\sin(\pi x)$

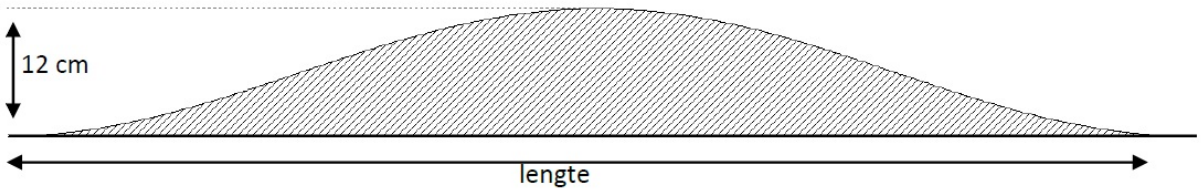
b $g(x) = 5\cos(x + 2) - 10$

c $P(t) = 50 \cdot \sin^2(t)$

d $W(t) = 0{,}5t + 4 + 3\sin(2t)$

Opgave 4

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.



Figuur 6.1

Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

b Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is. Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

c De helling van de drempel is niet overal even groot. Geef een formule voor de helling van deze verkeersdrempel en laat daarmee zien tussen welke waarden de helling varieert.

Opgave 5

Een puntmassa beweegt onder invloed van twee harmonische trillingen $u_1(t) = 2\sin(2\pi t)$ en $u_2 = \cos(2\pi t) + 1$ heen en weer.

a Laat met behulp van een grafiek zien dat de uitwijking $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ van deze puntmassa door een sinusoïde kan worden beschreven. Stel een formule van deze sinusoïde op.

b Bereken de waarden van t waarin de puntmassa het snelst beweegt.

Toepassen

Opgave 6: Zwevingen

Als je twee tonen met vrijwel dezelfde frequentie tegelijk laat horen merk je het (onaangename) verschijnsel **zweving** op. De applet maakt meteen duidelijk hoe dit werkt: de rode grafiek is een A van 440 Hz, de blauwe grafiek is een toon die daar v.w.b. de frequentie vlak bij zit. Je ziet hoe hun optelling een grafiek oplevert die een frequentie heeft die weinig van de A verschilt, maar waarvan de amplitude toeneemt en weer afneemt...

Bekijk de applet: Zwevingen

Stel in de applet naast de trilling $u_1(t) = sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$ de trilling $u_2(t) = sin(2\pi \cdot 430 \cdot t)$ in, met t in seconden.

a Stel je hoort deze trillingen tegelijk. Bekijk de grafiek van de resulterende trilling. Waaraan herken je de zweving?

b De amplitude van de trilling is een maat voor de sterkte van het geluid. Tussen welke waarden zweeft de resulterende trilling? Welk verband is er met de amplitudes van de twee afzonderlijke harmonische trillingen?

c Onderzoek of zweving zich altijd voordoet als de frequenties van twee trillingen verschillen. Als dat niet het geval is, probeer dan vast te leggen wanneer zweving zich wel voordoet. Is er verband tussen de waarden waartussen de geluidssterkte zweeft en de amplitudes van de afzonderlijke harmonische trillingen?

Opgave 7: Gedempte trillingen

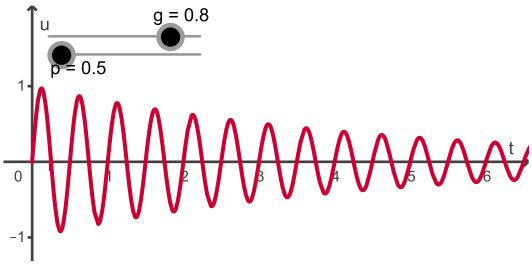
Een gedempte trilling is een trilling waarvan de amplitude met de tijd afneemt. In praktische situaties heb je bijna altijd met demping te maken: wegstervend geluid, een steeds minder uitslaande slinger, een veer die steeds minder trilt...

Bekijk de applet: Gedempte trilling

Bij een trillende snaar bijvoorbeeld wordt door de luchtweerstand de amplitude steeds iets kleiner. Op zeker moment zo klein, dat de toon niet meer te horen is. De amplitude is dan een dalende functie van t.

$u(t) = g^t \cdot sin\left(\frac{2\pi}{t} \cdot t\right)$

Bekijk hoe de demping afhangt van g en de 'periode' p. De amplitude is $A(t) = g^t$ met $0 < g < 1$.



Figuur 6.2

a Waarom is exponentiële afname in praktijksituaties van de amplitude voor de hand liggender dan lineaire afname? Beschrijf een paar van die praktijksituaties.

Neem aan dat $g = 0{,}8$.

b Na hoeveel tijd is de amplitude dan telkens gehalveerd?

c Bij een periode van $p = 1$ heeft $u(t)$ een maximum op $t = 0{,}25$. Hoe groot is dit maximum? Is er een maximum dat precies de helft van dit maximum is? Zo ja, op welk tijdstip?

7

Meetkunde in 3D

7.1 Parallelprojectie 254
7.2 Hoeken en afstanden 263
7.3 Oppervlakte en inhoud 274
7.4 Doorsneden construeren 284
7.5 Totaalbeeld 294

7.1 Parallelprojectie

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Voorkennis

- de vlakke (rechthoek, vierkant, parallellogram, ruit, vlieger, trapezium) en ruimtelijke (balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel) basisvormen en hun eigenschappen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet een tekening van een woonhuis. Het onderste deel kun je je voorstellen als een wiskundige balk (dus met rechte hoeken). Zo'n balk heeft drie groepen evenwijdige lijnen. De tekening is zo gemaakt dat hij levensecht lijkt, net een foto. Je ziet dat evenwijdige lijnen nu niet langer evenwijdig zijn, er vindt dus vertekening plaats.

Figuur 7.1

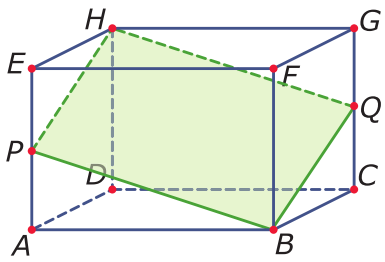
a Waarom lopen op een foto evenwijdige lijnen niet altijd evenwijdig?

b Het gebouw lijkt uit meerdere ruimtelijke basisvormen te zijn samengesteld. Noem er zoveel mogelijk.

c De gevels vormen vlakke figuren. Welke basisvormen tref je aan?

Opgave V2

Je ziet een afbeelding van een balk. Er is een vlak $PBQH$ in getekend, P en Q zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.



Figuur 7.2

a Welke drie groepen lijnstukken zijn in werkelijkheid evenwijdig?

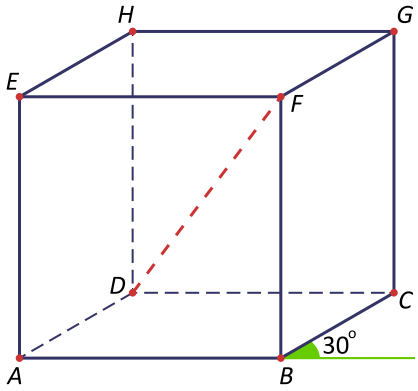
b Welke vorm heeft het zijvlak $BCGF$ in werkelijkheid?

c Welke vorm heeft het diagonaalvlak $ACGE$ in werkelijkheid?

d Welke vorm heeft het vlak $PBQH$ in werkelijkheid?

Uitleg 1

Bij het afbeelden van ruimtelijke figuren op een plat vlak, kunnen niet alle eigenschappen van de ruimtelijke figuur behouden blijven. Bekijk deze projectie van kubus $ABCD.EFGH$ op een plat vlak. Om zoveel mogelijk eigenschappen te behouden is parallelprojectie gebruikt:



Figuur 7.3

- ribben die in werkelijkheid parallel zijn in de afbeelding ook evenwijdig;
- ribben die in evenwijdig zijn aan het tekenvlak hebben hun ware grootte;
- ribben die loodrecht op het tekenvlak staan worden ongeveer half zo lang als ze in werkelijkheid zijn en schuin naar achteren getekend;
- hoeken houden alleen hun ware grootte als ze in een vlak liggen dat evenwijdig aan het tekenvlak is.

De hoek die de ribben die schuin naar achteren zijn getekend met een horizontale lijn maken, heet de wijkhoek.

Deze ribben zijn korter gemaakt met een vaste verkortingsfactor.

Om de lichaamsdiagonaal DF op ware grootte te zien, kun je diagonaalvlak $DBFH$ als een rechthoek en op ware grootte tekenen.

Opgave 1

Bekijk de afbeelding van de kubus $ABCD.EFGH$ in de uitleg. Neem aan dat alle ribben van de kubus 4 cm lang zijn.

a Welke vorm heeft vlak $ABFE$ in werkelijkheid?

b Welke ribben zijn evenwijdig met ribbe AD?

c Teken vlak $ABCD$ op ware grootte en in de juiste vorm. Je kunt nu de lengte van BD opmeten. Controleer jouw antwoord met een berekening.

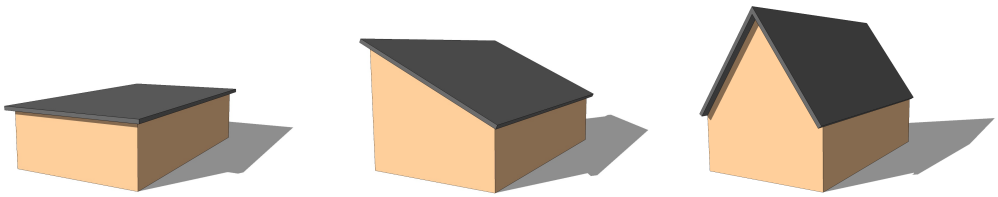
d Teken diagonaalvlak $DBFH$ op ware grootte (en in de juiste vorm). Bepaal de lengte van lichaamsdiagonaal DF in één decimaal nauwkeurig. Controleer jouw antwoord met behulp van een berekening.

Opgave 2

Teken zelf een parallelprojectie van deze kubus. Neem een wijkhoek van 30°, een verkortingsfactor van 0,5 en ribben van 6 cm.

Uitleg 2

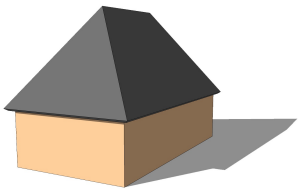
Hier zie je zes tekeningen van huizen met een bepaald soort dak, gemaakt door Michel Stomphorst van **Dutch Design Studio**. Je ziet meteen dat het geen parallelprojecties zijn, maar perspectieftekeningen.



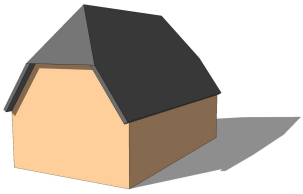
plat dak

lessenaarsdak

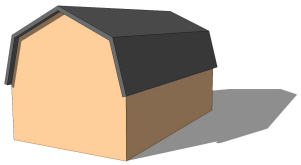
zadeldak



schilddak



wolfseinddak



mansardedak

Figuur 7.4

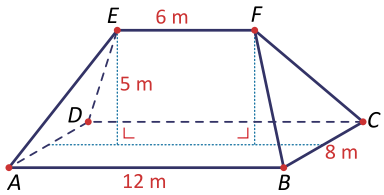
In elk van deze figuren kun je verschillende ruimtelijke en vlakke basisvormen herkennen.

Zo bestaat het huis met het schilddak uit een balk, een prisma (of twee halve balken) en twee halve piramides.

Opgave 3

Bekijk de figuren in **Uitleg 2 op pagina 256**.

Je ziet hier een parallelprojectie van het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit.



Figuur 7.5

a Teken zo'n parallelprojectie met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik een schaal van 1 : 200.

b Laat in je figuur zien, dat het schilddak kan worden verdeeld in een prisma (twee halve balken) en twee (halve) piramides.

c 'Elke ruit is ook een parallellogram.'
Klopt deze uitspraak? En klopt het omgekeerde?

d Bestaat er een rechthoekige ruit?

e Hoeveel diagonalen heeft elke vierhoek?

f Heeft een parallellogram symmetrieassen? Heeft een parallellogram een centrum van symmetrie?

Opgave 4

Bekijk weer de figuren in **Uitleg 2 op pagina 256**.

a Uit welke twee basisvormen bestaat het huis met het zadeldak?

b Het huis met het mansardedak kun je opdelen in een balk en een prisma. Wat voor prisma?

c Je kunt het huis met het mansardedak ook opdelen in balken en halve balken. Leg uit hoe.

d In welke figuren kun je het huis met het wolfseindedak opdelen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afbeelding van een ruimtelijke figuur op een plat vlak heet een **projectie** van dit lichaam. Omdat dit een vereenvoudiging van het lichaam is, heeft de afbeelding niet meer alle eigenschappen van het lichaam.

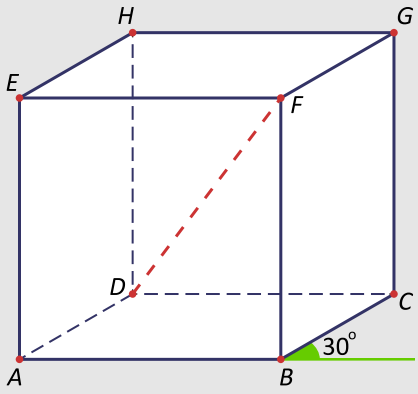
Bij **parallelprojectie** geldt:

- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;
- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).

Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven bij parallelprojectie zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

Bekijk deze parallelprojectie van een kubus $ABCD.EFGH$.

De ribben AB, BF, FE, AE en DC, CG, GH, DH zijn evenwijdig aan het tekenvlak en dus op ware grootte. De vierkanten $ABFE$ en $DCGH$ zijn ook in de tekening vierkant. De ribben BC, FG, AD, EH zijn ook in de tekening evenwijdig. Ze zijn iets korter gemaakt om de figuur echt op een kubus te laten lijken. Op een blanco tekenblad werk je met een **wijkhoek** (bijvoorbeeld de hoek tussen BC en het verlengde van AB) en een **verkortingsfactor** (de vergrotingsfactor van de lengte van BC ten opzichte van die van AB).

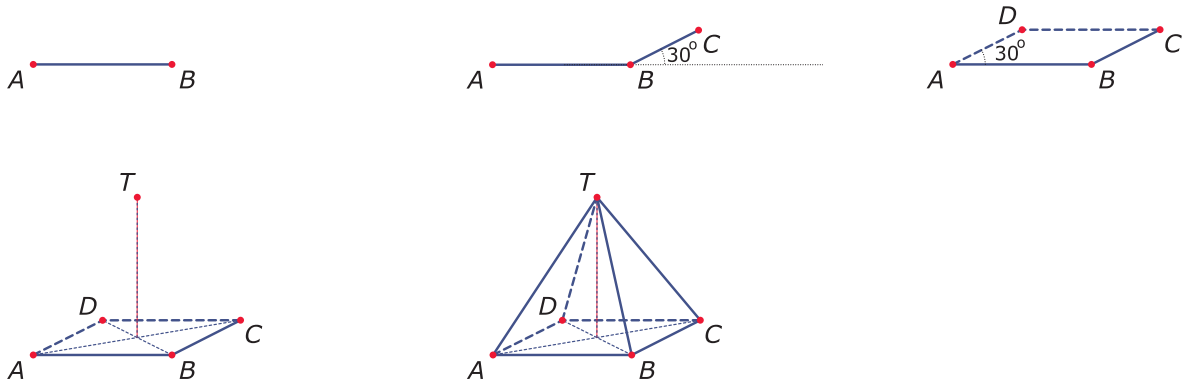


Figuur 7.6

De meeste objecten kun je opvatten als **samengestelde figuren**. Ze bestaan uit een samenstelling van de bekende basisvormen balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel.

Voorbeeld 1

Bekijk hoe je een parallelprojectie maakt van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ op een blanco tekenblad. Je gebruikt een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.



Figuur 7.7

Het grondvlak van een piramide is vierkant $ABCD$ met ribben van 4. De hoogte TS is 5. De constructie gaat zo:

- Teken eerst lijnstuk $AB = 4$ en teken bij B een hoek van 30°.
- Teken BC maar nu met een verkorte lengte: $0{,}5 \cdot 4 = 2$.
- Vervolgens teken je met behulp van evenwijdige lijnen punt D.
- Omdat de piramide regelmatig is, zit de top T recht boven het snijpunt S van de diagonalen AC en BD. Je tekent dus eerst S en dan 5 recht daarboven punt T.
- Ten slotte teken je de opstaande ribben en de figuur is klaar.

Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een parallelprojectie van een object tekent op een blanco papier met behulp van een wijkhoek en een verkortingsfactor.

a Teken een parallelprojectie van een kubus met ribben van 4 cm.
Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.

b Teken een parallelprojectie van een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 8$ en $AE = 2$. Neem een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5.

c Teken een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T \cdot ABCD$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en hoogte $TS = 2$ waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is. Neem een wijkhoek van 60° en een verkortingsfactor van 0,5.

Opgave 6

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte AD van het prisma is ook 4.

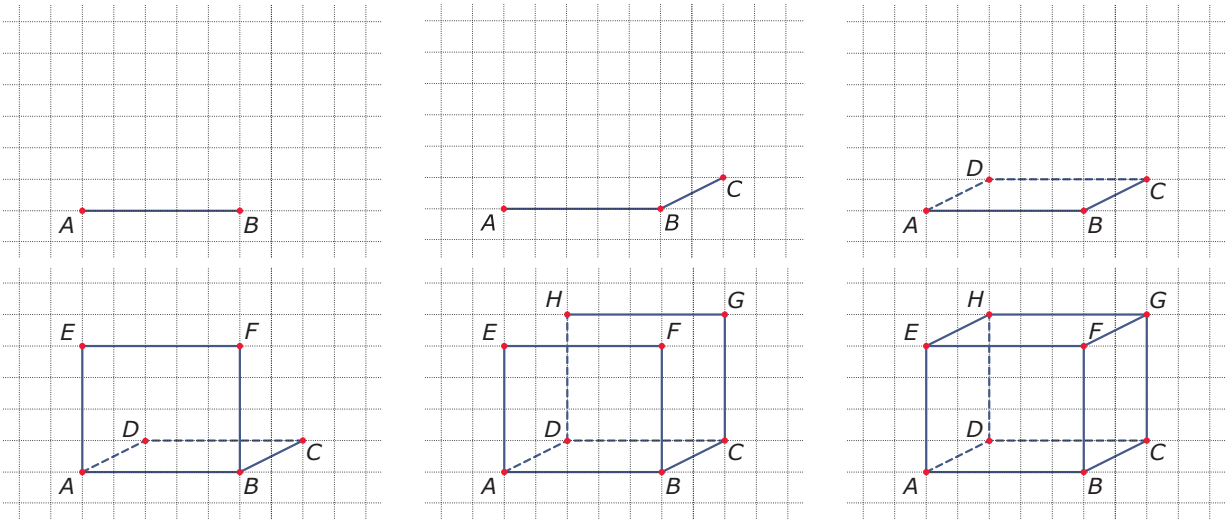
a Teken dit driehoekige prisma $ABC.DEF$ in parallelprojectie op een rooster.

P is het midden van DE, Q is het midden van EB en R is het midden van EF.

b Teken de driehoek PQR in de figuur en op ware grootte.

Voorbeeld 2

Je ziet hoe je zelf op roosterpapier een parallelprojectie van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 4$ kunt tekenen. Merk op dat $BC = AD = 4$ korter wordt getekend. Op een rooster is het handig om de ribben schuin naar achteren te tekenen als '2 naar rechts 1 omhoog'.



Figuur 7.8

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je op een rooster een parallelprojectie van een balk maakt. Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 4$, $BC = 4$ en $AE = 6$.

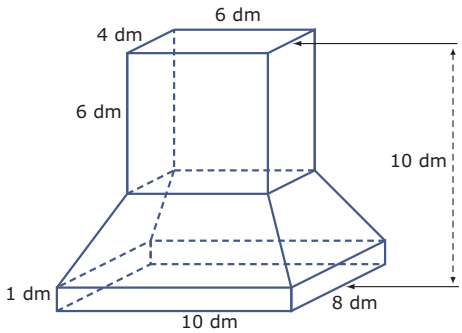
Teken hiervan een parallelprojectie waarbij het vlak $ABEF$ op ware grootte te zien is.

Opgave 8

Maak op een cm-rooster een parallelprojectie van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak een vierkant is met $AB = 4$ en de hoogte $TS = 6$, waarbij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD van het grondvlak is.

Voorbeeld 3

Je ziet hier het metalen omhulsel van een afzuigkap.
Hij bestaat uit diverse basisvormen
Beschrijf die basisvormen en noem hun afmetingen.



Figuur 7.9

Antwoord

De onderkant is een balk van 10 × 8 × 1 dm.

De bovenkant is een balk van 6 × 4 × 6 dm.

Het middenstuk lijkt misschien op een afgeknotte piramide, maar dat klopt niet. De opstaande schuine ribben komen niet alle vier in één punt uit. In een bovenaanzicht kun je dat zien.

Het middenstuk kun je bijvoorbeeld opdelen in:

- een balk van 6 × 4 × 3 dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van 6 × 1 × 3 dm;
- twee driezijdige rechthoekige prisma's (halve balken) van 2 × 2 × 3 dm;
- vier kwart piramides die samen een piramide met een grondvlak van 4 × 4 dm en een hoogte van 3 dm vormen.

Opgave 9

Bekijk de tekening van de afzuigkap in **Voorbeeld 3 op pagina 259**.

a Teken een voor-, een zij- en een bovenaanzicht van deze afzuigkap.
Laat in het bovenaanzicht zien dat het middenstuk geen afgeknotte piramide is.

b Teken het middendeel van de afzuigkap zelf in parallelprojectie op een rooster.
Gebruik schaal 1 : 20.

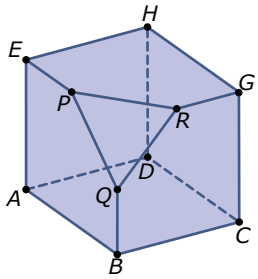
c Uit welke vlakke figuren bestaat dit middendeel? (Reken geen bodem en geen bovenvlak.)

d Teken het schuine voorvlak van het middendeel op schaal 1 : 20. Laat de benodigde berekeningen zien.

Oefenen

Opgave 10

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten P, Q en R zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.



Figuur 7.10

a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus met een wijkhoek van 30° en een verkortingsfactor van 0,5. Gebruik $ABQPE$ als voorvlak.

b Teken ΔPQR op ware grootte.

c Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte.

Opgave 11

Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. De zijden van $ABCD$ zijn 6 cm en de hoogte TS van de piramide is 10 cm. S is het snijpunt van AC en BD.

a Teken een parallelprojectie van deze piramide op een rooster.

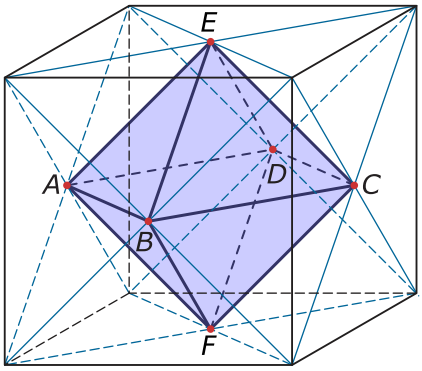
b Verdeel alle zijden van het grondvlak in drie gelijke delen. Licht je werkwijze toe.

c Verbind de getekende punten in het grondvlak, zodat je een achthoek krijgt.

d Is deze achthoek het grondvlak van een regelmatige achtzijdige piramide? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Als je de middens van de grensvlakken van een kubus met elkaar verbindt, dan krijg je een octaëder (regelmatig achtvlak) $ABCDEF$. Van dit octaëder is $AC = BD = EF = 8$ cm.



Figuur 7.11

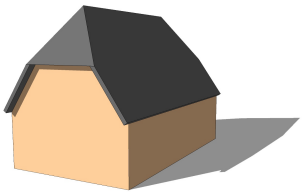
a Teken een parallelprojectie van het octaëder.

b Welke vorm hebben alle grensvlakken van het octaëder? Teken één ervan op ware grootte.

c Welk lichaam heeft als hoekpunten de middens van de zijden van het octaëder?

Opgave 13

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.
Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.
De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.



Figuur 7.12

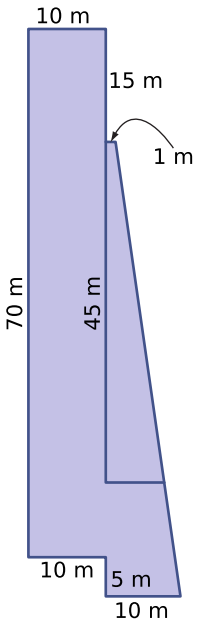
a Teken een parallelprojectie van dit wolfseinddak op een cm-rooster op schaal 1 : 200.

b Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken. Bereken de lengtes van de zijden van die gelijkbenige driehoeken.

c Teken ook één zo'n symmetrische vijfhoek op schaal 1 : 200.

Opgave 14

Bekijk de foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Je ziet een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak.



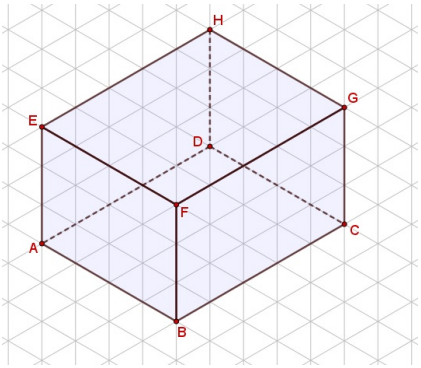
Figuur 7.13

a Teken een parallelprojectie van de vereenvoudigde versie van het gebouw 'Willemswerf' op een rooster op schaal 1 : 500.

b De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium. Teken dat grensvlak op schaal 1 : 1000.

Toepassen

Een bijzondere parallelprojectie is de **isometrische projectie**.
Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met ribben $AB = 4$, $BC = 5$ en $AE = 3$ cm, getekend in GeoGebra met een isometrisch rooster.
Omdat zo'n rooster uit gelijkzijdige driehoeken bestaat is er van een verkortingsfactor geen sprake.
Wel zijn er twee wijkhoeken.



Figuur 7.14

Opgave 15

Hierboven zie je een isometrische projectie van een balk.

a Waarom is hier ook sprake van parallelprojectie?

b Welke twee wijkhoeken worden er gebruikt?

c Hoe zit het met de rechte hoeken van de balk?

d Hebben de lichaamsdiagonalen van de balk hun ware lengte behouden?

Opgave 16

Teken nu een isometrische projectie van de volgende figuren.
Maak eventueel gebruik van het isometrisch rooster van GeoGebra.

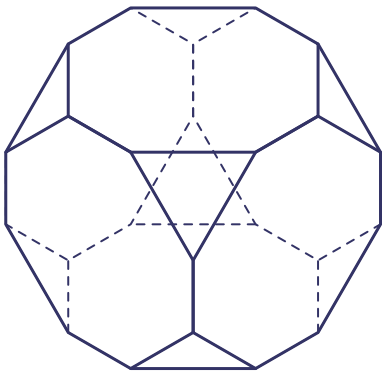
a Een kubus $ABCD.EFGH$ waarvan alle zijden 4 cm zijn.

b Een piramide $T.ABCD$ waarvan het grondvlak zijden van 4 cm heeft en de hoogte $AT = 6$ cm.

Testen

Opgave 17

Bekijk de afgeknotte kubus. De oorspronkelijke kubus was 4 bij 4 bij 4 cm. Van die ribben van 4 cm zijn nu alleen nog de middenstukken van 2 cm over.



Figuur 7.15

a Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus op een rooster. Gebruik een achthoek als voorvlak.

b Bepaal de lengte van de zijden van de driehoekige grensvlakken in mm nauwkeurig. Teken zo'n grensvlak op ware grootte.

c Teken een parallelprojectie van deze afgeknotte kubus. Gebruik nu een verkortingsfactor van 0,5 en een wijkhoek van 60°.

7.2 Hoeken en afstanden

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoeken en afstanden berekenen in ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

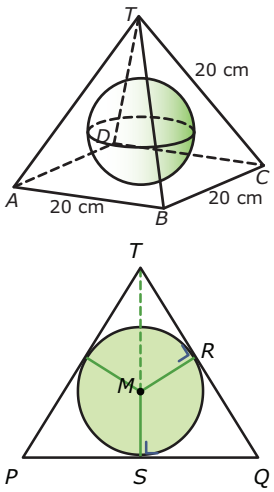
Voorkennis

- ruimtelijke figuren tekenen in parallelprojectie op een rooster en met behulp van wijkhoek en verkortingsfactor;
- de eigenschappen van een parallelprojectie herkennen en gebruiken;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet. Om aan te geven dat A en D recht achter elkaar liggen staat links onder bij de figuur A,D.



Figuur 7.1

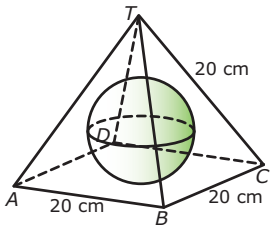
a In welke richting bekijk je de figuur als je dit vooraanzicht ziet?

b Je wilt de straal van de bol berekenen. Kun je die op (een) geschikte plek(ken) in de figuur aangeven?

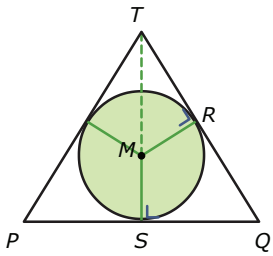
c Kun je driehoeken bedenken waarin je die straal zou kunnen uitrekenen?

Uitleg 1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet.



Om de straal te berekenen van de grootste bol die nog in deze piramide past, moet je bedenken dat deze bol precies tegen de zijvlakken van de piramide aan gaat komen. Om dat goed te kunnen zien kun je het beste even de aanzichten van piramide met bol bekijken.
Het vooraanzicht dat hier is getekend, is hetzelfde als ΔPQT als P het midden van AD en Q het midden van BC is. Dit noem je een doorsnede van de piramide met bol en het vlak door T, P en Q. Hierin is de bol een cirkel die raakt aan PQ, PT en QT. Er zijn dus stralen vanuit het middelpunt M te tekenen die loodrecht op deze zijden staan. Van ΔPQT weet je alle zijden: $PQ = 20$ en $PT = QT = \sqrt{300}$.



Figuur 7.2

Neem je r voor de straal van de bol, dan kun je de gelijkvormigheid van de driehoeken QST en MRT gebruiken om r uit te rekenen.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de uitleg.

a Waarom is het handig om een geschikte doorsnede te tekenen?

b Laat met een berekening zien, dat $PT = QT = \sqrt{300}$.

c Je weet dat $MS = r$. Laat zien dat $TM = \sqrt{200} - r$.

d Waarom zijn de driehoeken QST en MRT gelijkvormig?

e Bereken nu r in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bij de vorige opgave is het werken met gelijkvormigheid niet echt noodzakelijk. Je kunt ook werken met goniometrie en bijvoorbeeld $\angle Q$ uitrekenen. Laat zien, hoe je zo r berekent op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Een ander probleem is: Hoeveel bedraagt de afstand van deze bol tot de ribben van de piramide?

a Nu is ΔACT een geschikte doorsnede om de gevraagde afstand uit te rekenen. Waarom?

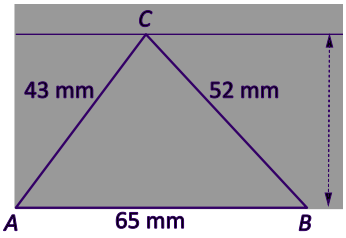
b Teken zelf die driehoek op schaal en teken de cirkel die de bol voorstelt er in. (De straal heb je in de voorgaande opgaven uitgerekend.)

c Geef in je figuur de gevraagde afstand aan.

d Bereken de gevraagde afstand. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Je hebt een metalen driehoekig plaatje nodig met zijden van 65 mm, 43 mm en 52 mm.



Figuur 7.3

Je wilt het uit een rechthoekig stuk metaal zagen, de langste zijde komt langs de rand van de rechthoek. De lengte van de rechthoek moet daarom 65 mm of meer zijn. Maar hoe lang moet de breedte zijn?

Je kunt dit bepalen door de driehoek op papier te construeren en de afstand van C tot lijn AB te meten. Dat gaat prima, je moet dan wel de juiste afmetingen omcirkelen en niet maar even een schets maken zoals de figuur hiernaast.

Maar je kunt dit ook berekenen. Daartoe moet je inzien dat de gevraagde afstand de lengte is van hoogtelijn CD in ΔABC.

Je berekent dan met behulp van de cosinusregel bijvoorbeeld $\angle A$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$

geeft

$52^2 = 65^2 + 43^2 - 2 \cdot 65 \cdot 43 \cdot \cos(\angle A)$.

Ga na dat dit oplevert: $\angle A \approx 52{,}9°$.

Nu je een hoek weet, kun je gemakkelijk de hoogte CD berekenen.

Opgave 4

Bekijk het probleem in **Uitleg 2 op pagina 265**.

a Construeer de driehoek op papier en meet de gevraagde afstand.

Bekijk vervolgens de berekening van CD.

b Laat zelf zien hoe je komt aan $\angle A \approx 52{,}9°$

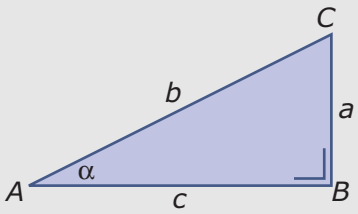
c Laat vervolgens zien hoe je daarmee CD berekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je in de ruimtefiguur geschikte vlakke figuren. Teken deze vlakke figuren (eventueel op ware grootte). Zet de gegevens erbij en bereken de gevraagde lengte en/of grootte.

Meestal zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken**, want daarin gelden:



Figuur 7.4

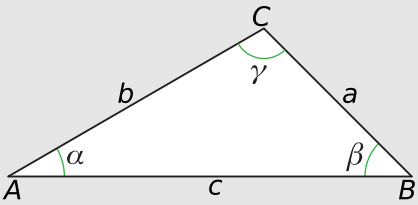
- De **stelling van Pythagoras**: $c^2 + a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

Merk op dat in dit geval b de schuine zijde (hypothenusa) is, a de voor hoek α overstaande rechthoekszijde en c de voor hoek α aanliggende rechthoekszijde is.

Verder maak je vaak gebruik van **gelijkvormigheid**. Twee figuren zijn gelijkvormig als hun overeenkomende paren hoeken gelijk zijn en de lengtes van de overeenkomende paren zijden recht evenredig met elkaar zijn. Alle lengtes van de zijden van de ene figuur kunnen dan door vermenigvuldiging met een vaste **vergrotingsfactor** uit de lengtes van de zijden van de andere figuur worden berekend.

Tenslotte zijn daar nog:

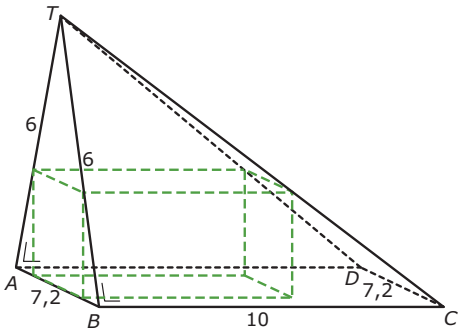
- De **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- De **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$



Figuur 7.5

Voorbeeld 1

Hier zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT, ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Bereken de afmetingen van die kamer.



Figuur 7.6

Antwoord

Om rechte hoeken ook inderdaad recht te zien kun je in dit geval goed met aanzichten werken. Vooral een vooraanzicht en een zijaanzicht zijn handig omdat daarin zowel de rechte hoeken als de schuine vlakken zichtbaar zijn.
Aan deze twee aanzichten zie je, dat er het beste kan worden gerekend in ΔABT (want die is gelijk aan het vooraanzicht) en in ΔSRT als S het midden van AB en R dat van CD is (deze driehoek is een doorsnede die gelijk is aan het zijaanzicht).
Met gelijkvormigheid of goniometrie bereken je nu de afmetingen van de kamer.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 266** zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT, ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Je gaat de afmetingen van die kamer berekenen.

a Teken de twee driehoeken waarin je gaat rekenen. Bereken eerst TS om goede figuren op schaal te kunnen tekenen.

b Zet nu alle bekende afmetingen in je figuren.

c Gebruik ΔSBT om de breedte van de kamer te berekenen.

d Gebruik ΔSRT om de lengte van de kamer te berekenen.

Opgave 6

Bekijk de zolderverdieping van de twee-onder-één-kap woning in de figuur in **Voorbeeld 1 op pagina 266**.

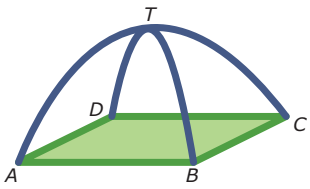
Wil je de dakoppervlakte berekenen (bijvoorbeeld omdat er een nieuwe dakbedekking nodig is), dan gebruik je een uitslag van de figuur.

a Teken de uitslag op schaal 1 : 200.

b Bereken de oppervlakte van het dak van deze zolderverdieping. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een bedrijf slaat zijn afval op in een grote vierkante verdiepte betonnen bak. Om stankoverlast tegen te gaan wordt deze bak overdekt met een groot stevig tentdoek dat wordt opgespannen over twee bogen. In de figuur stelt $ABCD$ de bovenrand van de ingegraven bak voor, een vierkant van 10 m bij 10 m. De bogen ATC en BTD zijn identieke delen van een cirkel. Punt T ligt 4 m boven vlak $ABCD$. Bereken de straal van de cirkel waar zo'n boog een deel van is en bereken hoe ver het middelpunt van die cirkel onder vlak $ABCD$ ligt.



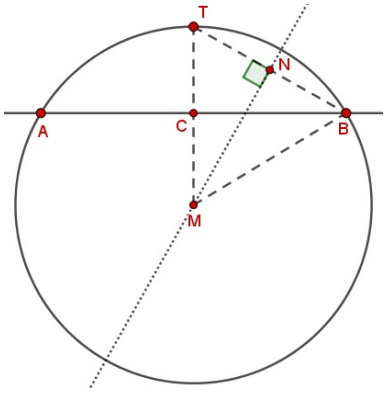
Figuur 7.7

Antwoord

Je ziet hier het vlak door A, B en T getekend in GeoGebra.

$AC = \sqrt{200}$ en dus is $AC = CB = \frac{1}{2}\sqrt{200} = 5\sqrt{2}$.

Het middelpunt M ligt op de middelloodlijn van BT en op de verticale lijn door T.
Het midden van BT noem je bijvoorbeeld N.
Je kunt in ΔCBT zowel BT als $\angle CBT$ uitrekenen.
Daarmee weet je van ΔMNT de grootte van $\angle MTN$ en de lengte van TN.
Nu kun je de straal van de cirkel berekenen.



Figuur 7.8

Opgave 7

Bekijk het probleem van de grote afvalbak in **Voorbeeld 2 op pagina 267**.

a Laat zien dat $CB = 5\sqrt{2}$.

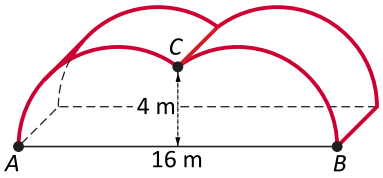
b Bereken BT en $\angle CBT$.

c Bereken de straal van de cirkel in cm nauwkeurig.

d Beantwoord de vraag in het voorbeeld.

Opgave 8

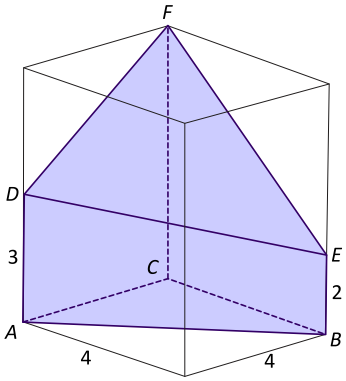
Je ziet hier een opslagruimte die bestaat uit twee in elkaar geschoven gelijke halve cilinders. De gegeven afmetingen staan in de figuur. Hoe hoog is deze opslagruimte?



Figuur 7.9

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.
Bereken de afstand van punt E tot lijn DF.



Figuur 7.10

Antwoord

Je berekent eerst de lengtes van de zijden van ΔDEF.

Ga na, dat $EF = \sqrt{32}$, $DF = 5$ en $DE = \sqrt{33}$.

Cosinusregel: $EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DF \cdot DE \cdot \cos(\angle EDF)$.

Dit geeft: $32 = 25 + 33 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{33} \cdot \cos(\angle EDF)$.

Dus: $32 = 58 - 10\sqrt{33}\cos(\angle EDF)$. En: $\cos(\angle EDF) = \frac{-26}{-10\sqrt{33}} \approx 0{,}4526$, zodat $\angle EDF \approx 63°$.

De gevraagde afstand is de lengte van hoogtelijn EP op lijnstuk DF.
Deze lengte kun je nu met de sinus van de gevonden hoek berekenen.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 268** de berekening van de hoeken van ΔDEF.

a Laat zien, hoe je de lengte van DE berekent.

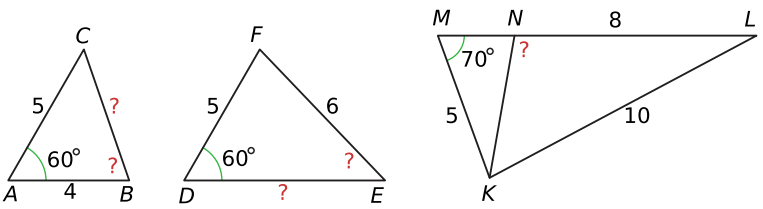
b Bereken nu ook $\angle DEF$.

c Heb je bij b opnieuw de cosinusregel gebruikt? Zo ja, kon dit ook met de sinusregel?

d Bereken de afstand van E tot lijn DF.

Opgave 10

Bereken de onbekende zijden en de onbekende hoeken in de figuren.



a b c

Figuur 7.11

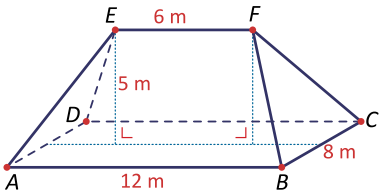
Oefenen

Opgave 11

Een bestelbus levert schilderijen. De opslagbak achterin heeft een lengte van 2 m, breedte 1,6 m en hoogte 1,3 m. Bereken de oppervlakte van het grootst mogelijke schilderij dat erin past, in m^2 in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 7.12

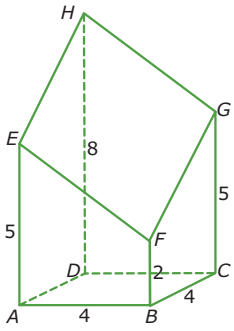
a Bereken de lengte van de ribben AE, DE, BF en CF.

b Bereken de grootte van $\angle ABF$ en $\angle BCF$.

c Op 3 meter boven de zoldervloer $ABCD$ wordt een rechthoekige verdiepingsvloer aangebracht. Bereken de oppervlakte van die verdiepingsvloer.

Opgave 13

Dit is een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen vind je in de figuur.



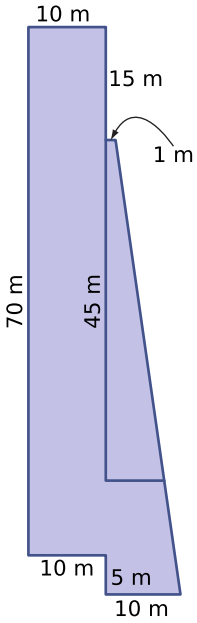
Figuur 7.13

a Bereken de hoek tussen de lijnstukken EH en HG. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de afstand van punt G tot de lijn EH. Rond af op twee decimalen.

Opgave 14

Hier zie je een foto van het gebouw 'Willemswerf' in Rotterdam. Daarnaast zie je een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak. De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium.



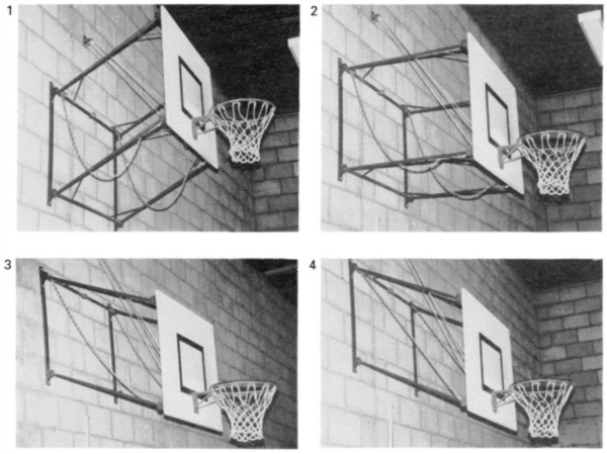
Figuur 7.14

a Bereken de lengtes van de zijden van dat trapezium.

b Bereken de grootte van de hoeken van dat trapezium.

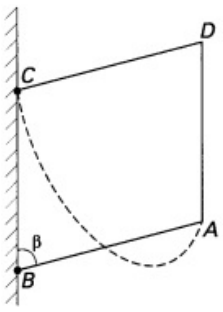
Opgave 15

Hier zie je vier momentopnamen van het neerlaten van een basketbalbord.



Figuur 7.15 Bron: havo-examen wiskunde B1,2 in 1994

De stellage bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan de basket bevestigd is. Twee even lange kettingen dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel. Het zijaanzicht van het frame is een parallellogram $ABCD$. Hierin is $BC = 90$ cm en $AB = 100$ cm. In de gymzaal waarin de foto's zijn genomen zit bevestigingspunt B op een hoogte van 280 cm van de grond. Eén van de kettingen is bevestigd in A en C. De ketting is zo lang dat bij het neerlaten van de stellage punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de begane grond.



Figuur 7.16

a Bereken de lengte van de ketting AC in twee decimalen nauwkeurig.

b Het frame wordt helemaal vanaf de laagste stand omhoog getrokken tot aan de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een cirkelboog. Bereken de lengte van de baan die punt A aflegt. Rond af op twee decimalen.

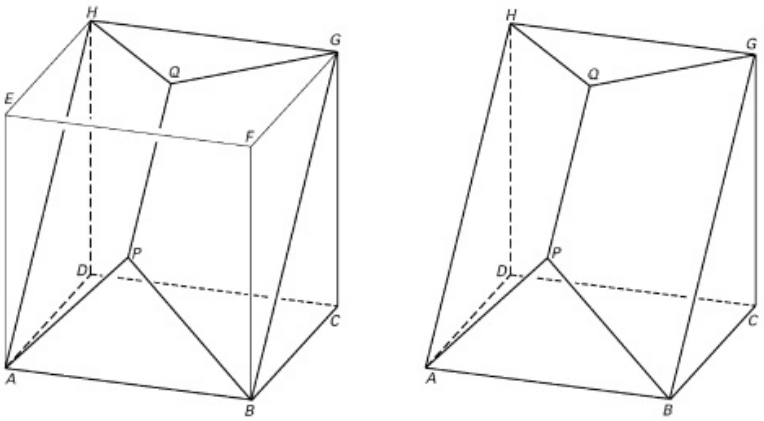
c Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat A op 300 cm boven de begane grond zit in twee decimalen nauwkeurig.

d De afstand a tussen de stangen AB en CD is de lengte van het kortste lijnstuk tussen beide. Deze lengte hangt af van de grootte van hoek β. Druk die afstand a uit in β.

e Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat afstand a precies 45 cm is.

Opgave 16

In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 cm past een lichaam L met hoekpunten A,B,C,D,P,Q,G en H. P is het snijpunt van AF en BE, Q is het snijpunt van EG en FH. In de rechter figuur is L apart getekend.



Figuur 7.17 Bron: examen havo wiskunde B1,2 in 2000

a Bereken de afstand van punt P tot punt G in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de grootte van $\angle BPQ$ in graden nauwkeurig.

De afstand tussen de lijnen PQ en CD is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen beide.

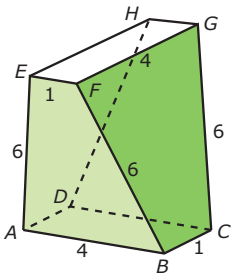
c Bereken de lengte van het bedoelde lijnstuk in één decimaal nauwkeurig.

d Punt R is het midden van GH.
Door P,Q en R gaat een cirkel c. Bereken de straal van deze cirkel in twee decimalen nauwkeurig.

e Bereken de lengte van het deel van de cirkel tussen de punten P en Q in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

In de figuur zie je een betonnen zuil die wordt gebruikt in een viaduct als ondersteuning van het bovenliggende wegdek. Zowel het ondervlak $ABCD$ als het bovenvlak $EFGH$ zijn rechthoeken van 1 m bij 4 m. Alle opstaande zijvlakken zijn gelijke symmetrische trapezia. Je wilt de afstand tussen ondervlak $ABCD$ en bovenvlak $EFGH$ berekenen.



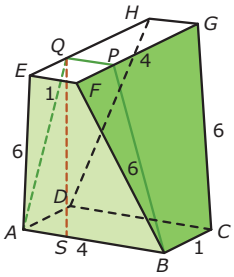
Figuur 7.18

Die afstand kun je het beste zien in een vooraanzicht. Zo'n vooraanzicht heeft dezelfde vorm als een verticale dwarsdoorsnede van de figuur. De gevraagde afstand kun je daarin aangeven.

Je wilt nu rekenen in de doorsnede $ABPQ$, maar dan moet je wel eerst de lengtes van AQ en BP weten. En daarvoor bekijk je één van de zijvlakken, bijvoorbeeld $BCGF$ waarin je de lengte van BP kunt berekenen.

Opgave 17

Bekijk het probleem in **Toepassen op pagina 272**. Hier zie je een verticale doorsnede $ABPQ$ getekend. De gevraagde afstand tussen ondervlak en bovenvlak is de lengte van QS.



Figuur 7.19

a Bereken de lengte van QS in cm nauwkeurig.

b Bereken de afstand tussen de punten B en G in twee decimalen nauwkeurig.

Er zitten ook allerlei hoeken in. Nu is het gebruik van goniometrie onvermijdelijk.

c Bereken $\angle BAE$ in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken $\angle AGC$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 18

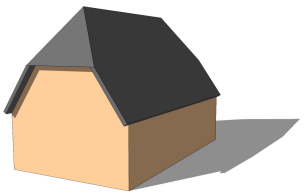
De betonnen zuil heeft een bijzondere eigenschap. Als je op hoogte x boven het grondvlak een horizontale band om de zuil maakt, dan heeft zo'n band altijd dezelfde lengte.

Toon dit aan.

Testen

Opgave 19

Je ziet een huis met een zogenaamd wolfseinddak.
Neem aan dat het huis 10 m lang en 8 m breed is.
De onderrand van het dak zit bij de zijgevels op 3 m hoogte van de grond en op de voorgevel op 6 m hoogte vanaf de grond. De nok van het dak heeft een lengte van 6 m en zit op een hoogte van 8 m boven de grond.


Figuur 7.20

a Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische vijfhoeken.
Bereken de hoeken van die twee gelijkbenige driehoeken.

b Bereken de afstand van de onderste dakrand tot aan de nok van het dak in cm nauwkeurig.

7.3 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- oppervlakte en inhoud berekenen van (delen van) ruimtelijke figuren;
- daarbij de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, goniometrie en de sinus- en de cosinusregel gebruiken.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Figuur 7.1

a Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in cL.

b Bereken de oppervlakte aan plastic in mm^2.

c Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan plastic waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffiebeker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het plastic blijft hetzelfde.

Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Uitleg 1

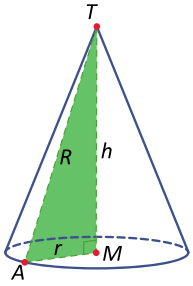
Dit kartonnen koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Die afmetingen bepalen hoeveel er in kan, de inhoud van het bekertje.

Om die uit te rekenen gebruik je de formule voor de inhoud van een kegel.

$inhoud(kegel) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Hierin is r de straal (de halve diameter) en h de hoogte van de kegel.



Figuur 7.2

Voor de inhoud van het bekertje trek je als het ware twee kegels van elkaar af: een kegel met hoogte h en diameter 46 mm trek je af van een kegel met hoogte $h + 90$ en diameter 64 mm.
Omdat beide kegels gelijkvormig zijn is

$$\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$$

waaruit volgt: $h = 230$ mm.

De inhoud van de koffiebeker is daarom $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32^2 \cdot 320 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 23^2 \cdot 230 \approx 215733$ mm^3.

De inhoud van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^3 = 8$ keer zo groot.

Opgave 1

Bekijk het koffiebekertje in **Uitleg 1 op pagina 274**.

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Voor welke figuren geldt deze formule?

b Waarom geldt voor een kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?

c Leg uit waarom geldt: $\frac{46}{64} = \frac{h}{h+90}$.

d Laat zien dat $h = 230$

e Bereken tenslotte zelf het volume van het koffiebekertje.

f Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 8 keer zo grote inhoud heeft.

Opgave 2

Er is een categorie figuren waarvan je het volume berekent V met de formule $V = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Voor welke figuren geldt deze formule?

b Waarom geldt voor een cilinder $V = \pi r^2 h$? Welke aanname moet je dan doen?

c Bereken de inhoud van een kubus waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

d Bereken de inhoud van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

e Bereken het volume van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.

f Bereken het volume van een bol met diameter 6 cm.
Zoek eventueel de formule voor de inhoud van een bol op in de **Theorie op pagina 277**.

Uitleg 2

Het kartonnen koffiebekertje van **Uitleg 1 op pagina 274** is een afgeknotte kegel met diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en hoogte 90 mm.

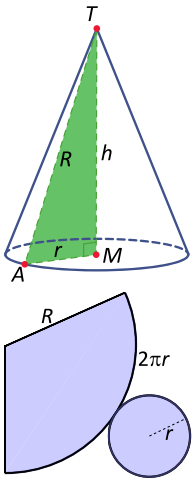
Die afmetingen bepalen hoeveel karton er voor het bekertje nodig is.

Om dat uit te rekenen gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegel.

oppervlakte(kegelmantel) $= \pi rR$.

Hierin is r de straal (de halve diameter) en R de straal van de kegelmantel (een deel van een cirkel).

Er geldt: $R = \sqrt{r^2 + h^2}$.



Figuur 7.3

Voor de oppervlakte van het bekertje trek je als het ware twee kegelmantels van elkaar af: een kegelmantel met straal $\sqrt{230^2 + 23^2} \approx 231$ en kegelstraal 23 mm trek je af van een kegelmantel met straal $\sqrt{320^2 + 32^2} \approx 322$ en kegelstraal 32 mm.

De oppervlakte van de mantel van de koffiebeker is daarom $\pi \cdot 32 \cdot 322 - \pi \cdot 23 \cdot 231 \approx 15628$ mm^2.

De totale oppervlakte van de koffiebeker is $\approx 15628 + \pi \cdot 23^2 \approx 17290$ mm^2.

De oppervlakte van een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn is $2^2 = 4$ keer zo groot.

Opgave 3

In **Uitleg 2 op pagina 276** wordt de oppervlakte van het koffiebekertje berekend.
Daarbij gebruik je de formule voor de oppervlakte van een kegelmantel.

a Welke vorm heeft een kegelmantel?

De formule *oppervlakte(kegelmantel)* $= \pi rR$ kun je zelf afleiden.
Bedenk dat de kegelmantel een deel is van een cirkel met straal R.

b Hoe groot is de oppervlakte van zo'n cirkel?

De kromme rand van de kegelmantel heeft een lengte van $2\pi r$.
De hele cirkel waar de kegelmantel een deel van is heeft een omtrek van $2\pi R$.

c Welk deel van de hele cirkel is de kegelmantel?
Leid nu zelf de formule voor de oppervlakte van de kegelmantel af.

d Bereken met die formule zelf de oppervlakte van het koffiebekertje.

e Leg uit waarom een koffiebeker waarvan alle afmetingen 2 keer zo groot zijn, een 4 keer zo grote oppervlakte heeft.

Opgave 4

De oppervlakte van een ruimtelijke figuur is de oppervlakte van de uitslag van zo'n figuur.

a Geldt dit ook voor een bol?

b Hoe kom je aan de formule $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ voor de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h? Welke aanname moet je dan doen?

c Bereken de oppervlakte van een bal waarvan de ribben 6, 5 en 4 cm lang zijn.

d Bereken de oppervlakte van een driezijdig prisma waarvan alle ribben 6 cm lang zijn.

e Bereken de oppervlakte van een cilinder met diameter 6 cm en hoogte 6 cm.

f Bereken de oppervlakte van een bol met diameter 6 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag ervan, dus het aantal eenheidsvierkantjes dat op die oppervlakte past.

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** (of het volume) is gelijk aan de het aantal eenheidskubusjes dat er in past.

Hier zie je de bijbehorende formules.

figuur	oppervlakte A	inhoud/volume V
kubus $r \times r \times r$	$A = 6 \cdot r^2$	$V = r^3$
balk $l \times b \times h$	$A = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$V = l \cdot b \cdot h$
n-zijdig prisma $G \times h$	$A = 2 \cdot G \cdot h + n \cdot A_{\text{rechthoek}}$	$V = G \cdot h$
n-zijdige piramide $G \times h$	$A = G + n \cdot A_{\text{driehoek}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
bol met straal r	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
cilinder straal r hoogte h	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
kegel straal r hoogte h	$A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

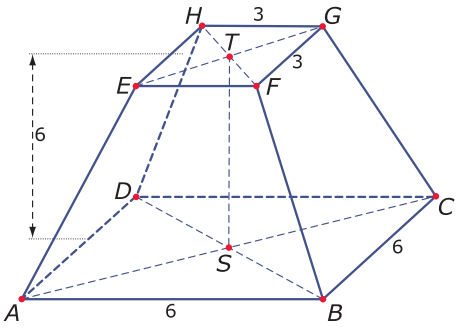
Tabel 7.1

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST, dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.
Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$

Bereken de totale oppervlakte en het volume van de afgeknotte piramide.



Figuur 7.4

Antwoord

De uitslag van zo'n afgeknotte piramide bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 en een vierkant van 3 bij 3 en vier gelijke trapezia. De hoogte van zo'n trapezium kun je berekenen door bijvoorbeeld vanuit F een

loodlijn naar het grondvlak te tekenen. Je vindt dan dat die hoogte gelijk is aan $\sqrt{6^2 + 1{,}5^2}$. De hoogte van het trapezium is dus $\sqrt{38{,}25}$ en heeft twee evenwijdige zijden van 6 en 3.

oppervlakte (ABCD.EFGH)$= 6^2 + 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \sqrt{38{,}25} \approx 156{,}3$

De afgeknotte piramide is het verschil van een grote piramide met grondvlak 6 bij 6 en hoogte $x + 6$ en een kleinere piramide met grondvlak 3 bij 3 en hoogte van x.

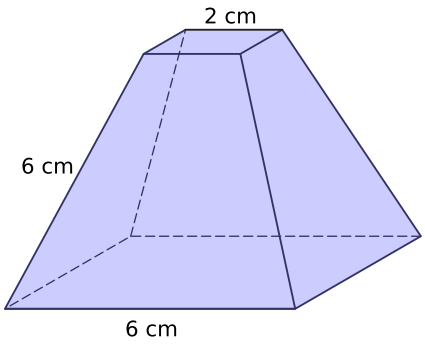
Nu is: $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{6}$ en dus is $x = 6$.

De inhoud van de afgeknotte piramide is: $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 126$

Opgave 5

Leg uit waarom de hoogte van het trapezium uit **Voorbeeld 1 op pagina 277** gelijk is aan $\sqrt{38{,}25}$.

Opgave 6



Figuur 7.5

Bereken exact de oppervlakte en de inhoud van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.

Voorbeeld 2

Dit is een ‘amsterdammertje’, een paaltje in Amsterdam om onder andere wildparkeren tegen te gaan. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovencirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend. Ga ervan uit dat er 5 liter verf nodig is voor een oppervlakte van 40 m^2. Hoeveel liter verf is er dan nodig om alle 6500 amsterdammertjes in een bepaalde wijk te schilderen?

Figuur 7.6

Antwoord

Geschilderd worden de (afgeknotte) kegelmantel en de halve bol. De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h. Met verhoudingen bereken je h: $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een oppervlakte van $\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + 225^2} - \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 135^2} \approx 4528{,}4$ cm^2.

De halve bol heeft een oppervlakte van $0{,}5 \cdot 4\pi \cdot 6^2 \approx 226{,}2$ cm^2.

De te schilderen oppervlakte is ongeveer $6500 \cdot (4258{,}4 + 226{,}2) = 30904900$ cm^2.
Dat is ongeveer 3090,5 m^2 en daar is ongeveer 386,3 liter verf voor nodig.

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van het amsterdammertje uit het voorbeeld berekent. Stel je voor dat het amsterdammertje van binnen hol is en dat het metaal overal een dikte heeft van 2 mm.

Hoeveel metaal is er dan voor nodig? Geef je antwoord in gehele cm^3.

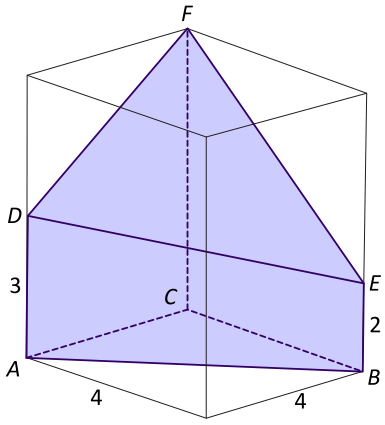
Opgave 8

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van een figuur kunt berekenen die is samengesteld uit een afgeknotte kegel en een halve bol. Heel vaak is een lichaam op te vatten als een samenstelling van (delen van) andere lichamen.
Een surprise zit in een cilinder met een diameter van 10 cm en een hoogte van 20 cm met daarop een kegelvormige punt met een hoogte van 5 cm.

Bereken in cm^2 de totale buitenoppervlakte van de verpakking. Maak eventueel zelf een schets van de situatie.

Voorbeeld 3

Bekijk de samengestelde figuur $ABC.DEF$ die past in een balk van $4 \times 4 \times 6$ cm.
Bereken de inhoud en de totale oppervlakte $ABC.DEF$



Figuur 7.7

Antwoord

Voor de oppervlakte van ΔDEF heb je de lengtes van de zijden nodig om met de cosinusregel een hoek uit te rekenen. Dan kun je een hoogte berekenen en de oppervlakte van ΔDEF berekenen. De oppervlakte van de andere grensvlakken tel je er nog bij op.

Voor de inhoud moet je de figuur verdelen in herkenbare lichamen.
Teken daartoe een vlakje EGH evenwijdig aan ΔABC.
De figuur wordt dan verdeeld in driehoekig prisma $ABC.GEH$ en piramide $E.GHFD$.
De totale inhoud is de inhoud van prisma en piramide samen.

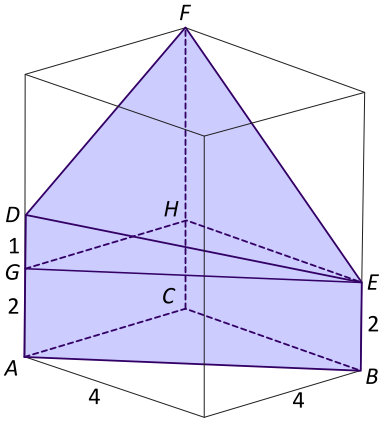
Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 279** het afgeknotte prisma $ABC.DEF$.

a Bereken de oppervlakte van ΔDEF berekent.

b Bereken de totale oppervlakte van $ABC.DEF$.

c In de figuur zie je de verdeling van $ABC.DEF$ in een prisma en een piramide.
Bereken het volume van $ABC.DEF$.

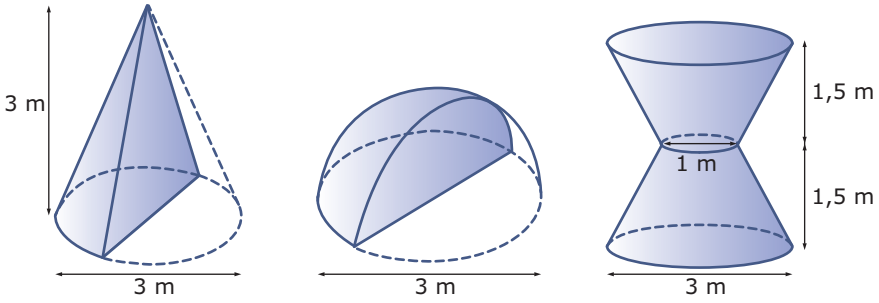


Figuur 7.8

Oefenen

Opgave 10

Je ziet hier drie figuren.



Figuur 7.9

a Bereken de oppervlakte ervan.

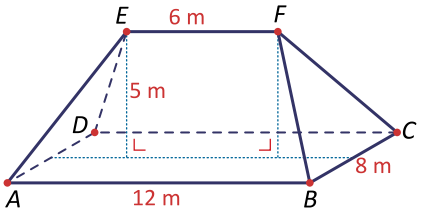
b Bereken de inhoud ervan.

Opgave 11

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.

a Bereken de exacte oppervlakte van dit schilddak.

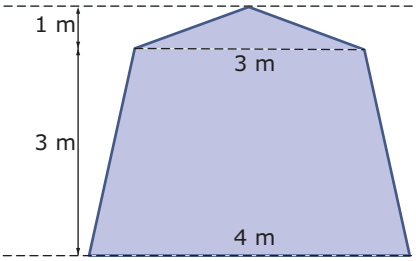
b Bereken het volume onder dit schilddak.



Figuur 7.10

Opgave 12

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.



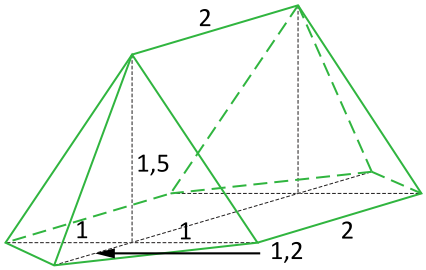
Figuur 7.11

a Bereken de oppervlakte van deze tent, dus de hoeveelheid tentdoek die je ervoor nodig hebt, in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de inhoud van deze tent.

Opgave 13

Bekijk de afbeelding van een tent met een symmetrische vorm. Door dunne stippellijnen is de onderverdeling weergegeven, de verticale dunne stippellijnen staan loodrecht op de horizontale dunne stippellijnen. Alle afmetingen zijn in meter.



Figuur 7.12

a Bereken de oppervlakte van het ervoor benodigde tentdoek, inclusief het grondzeil.

b Bereken de inhoud van deze tent.

Opgave 14

Van een cocktailglas heeft de bovenkant een wijde kegelvorm. Dat heeft een goede reden.

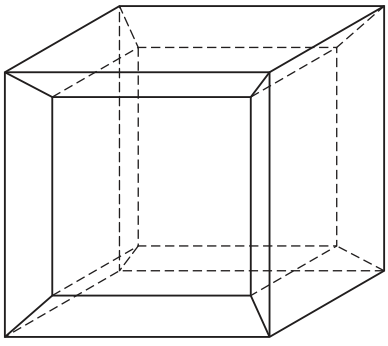
Figuur 7.13

a Stel dat de vloeistofspiegel van de cocktail tot halverwege de hoogte van de kegel staat, hoeveel procent van de totale inhoud van het cocktailglas is dan gevuld?

b Stel dat het cocktailglas half vol is, hoe hoog is dan de vloeistofspiegel?
Neem aan dat de vloeistofspiegel maximaal 10 cm vanaf de bodem van het glas kan zijn.

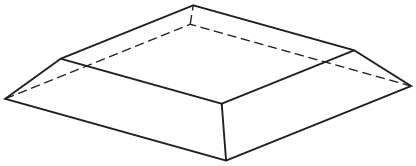
Opgave 15

In Parijs staat een groot gebouw, La Grande Arche, dat vrijwel de vorm van een uitgeholde kubus heeft.


Figuur 7.14

Bij benadering geldt dat de buitenste acht hoekpunten van het gebouw een grote kubus vormen met ribben van 110 meter. De binnenste acht hoekpunten vormen een kleinere kubus met ribben van 88 meter. Beide kubussen hebben hetzelfde middelpunt en overeenkomstige zijvlakken zijn evenwijdig.

a Bereken de verhouding van de oppervlaktes van de grote en de kleine kubus.



Figuur 7.15

Om de inhoud van het gebouw te bepalen kan het volgende model worden gebruikt. Als aan alle zijden van de kleine kubus hetzelfde lichaam dat staat afgebeeld wordt toegevoegd, ontstaat precies de grote kubus. La Grande Arche bevat vier van deze zes lichamen.

b Bereken de inhoud van het gebouw in kubieke meters nauwkeurig.

Toepassen

In de modelbouw willen mensen het liefst dat de eigenschappen van bijvoorbeeld de voertuigen en gebouwen op werkelijke grootte in hun modellen behouden blijven. Dit geldt niet alleen voor hobbyisten, maar ook bijvoorbeeld voor ontwerpers van vliegtuigen die de aerodynamische eigenschappen van hun ontwerp willen uittesten op een model.

Figuur 7.16

Opgave 16

In de luchtvaart wordt de vorm van de vleugels in een getal uitgedrukt met het begrip slankheid. De formule voor slankheid is $\lambda = \frac{b^2}{A}$. Hierbij is b de spanwijdte en A de oppervlakte van de vleugels. Ga er voor het gemak van uit dat de vleugels rechthoekig zijn.

a Een modelvliegtuig heeft een vleugeloppervlak dat 900 keer kleiner is dan die van het werkelijke vliegtuig. Wat gebeurt er met de slankheid?

Een modeltrein weegt 1,5 kg. Het is gemaakt van hetzelfde materiaal als de werkelijke trein. De werkelijke trein weegt 768 ton.

De snelheid van de modeltrein moet de werkelijkheid zo goed mogelijk nabootsen. De werkelijke trein heeft een topsnelheid van 100 km/h. Wat moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

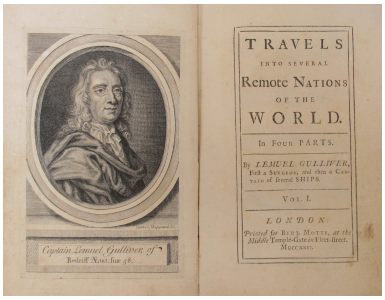
b Hoe groot moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

Een raket bestaat grofweg uit een cilinder met een kegel erop. Een amateur-raketwetenschapper heeft een modelraket van 125 kg gebouwd die, wanneer afgevuurd, 250 m hoog in de lucht komt. Hij heeft berekend dat een raket met de verhoudingen van zijn model een hoogte h (m) behaalt die evenredig is met het verschil van de massa van de cilinder en de massa van de kegel. Dus $h = c \cdot (m_1 - m_2)$, waarbij c een constante is, m_1 de massa van de cilinder en m_2 de massa van de kegel.

c Stel dat de kegel en de cilinder van een raket op werkelijke grootte van precies dezelfde materialen gemaakt worden als het model. Je wilt dat een raket 100 km de lucht in gaat. Hoe zwaar moet de werkelijke raket worden?

Opgave 17

Jonathan Swift bedacht in zijn boek 'Gulliver's travels' het volk uit Lilliput. De bewoners van Lilliput zijn verkleiningen van echte mensen met een factor 10. Ga eens uit van een Lilliputter die een perfecte verkleining is van jouzelf.



Figuur 7.17

a Hoeveel weegt die Lilliputter ten opzichte van jou?

b Hoeveel keer minder huidoppervlakte heeft die Lilliputter in vergelijking met jijzelf?

c De voedselbehoefte van zoogdieren is ongeveer recht evenredig met de huidoppervlakte omdat dit vooral nodig is om de lichaamstemperatuur op peil te houden en het temperatuurverlies vooral afhangt van de huidoppervlakte. Schat hoeveel gram voedsel jij per dag zelf nodig hebt en bereken hoeveel dat voor de Lilliputter zou moeten zijn.

d Hoeveel procent van je eigen lichaamsgewicht moet jij dagelijks eten? En de Lilliputter? In deze opgave wordt uitgegaan van een lichaamsgewicht van 80 kg.

e Waarom geldt voor zoogdieren dat de benodigde hoeveelheid voedsel recht evenredig is met het kwadraat van de lengte?

f Leg uit dat voor zoogdieren de benodigde hoeveelheid voedsel per kg lichaamsgewicht recht evenredig is met $l^{\frac{2}{3}}$, waarin l de lichaamslengte is.

Testen

Opgave 18

Deze stenen vijzel met stamper bestaat uit een wat poreuze soort steen met een soortelijke massa van 2,1 gram/cm^3. De vijzel zelf heeft ongeveer de vorm van een balk met een vierkant grondvlak en bovenvlak van 14 × 14 cm. De vier opstaande ribben zjn 8 cm. In die vijzel is een halve bol zo uitgeslepen, dat het diepste punt van die bol 2,5 cm boven het grondvlak zit.

De inhoud van een bol met straal r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$.

Figuur 7.18

a Hoeveel weegt deze vijzel in grammen nauwkeurig?

b Af en toe moet deze vijzel worden ingesmeerd met een bepaalde olie. Hoe groot is de oppervlakte van de vijzel in cm^2 nauwkeurig?

Opgave 19

Uit Wikipedia november 2016: "Een obelisk is een gedenknaald. Het gaat om een vierkante, naar boven toe iets dunner wordende zuil of kolom, met een piramidevormige stompe punt, meestal van graniet gemaakt."
Neem aan dat een bepaalde obelisk bestaat uit een 16 m hoge afgeknotte piramide met een grondvlak van 1,8 × 1,8 m en een bovenvlak van 1,0 × 1,0 m. Op dit bovenvlak staat een piramide met opstaande zijden van 2,0 m.

a Hoeveel hoog is deze obelisk in dm nauwkeurig?

b Graniet heeft een soortelijke massa van 2,7 g/cm^3. Hoe zwaar is zo'n obelisk als hij van graniet wordt gemaakt?

7.4 Doorsneden construeren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden uit een ruimtelijke figuur halen en in hun werkelijke vorm tekenen, eventueel op schaal;
- doorsneden in een ruimtelijke figuur construeren.

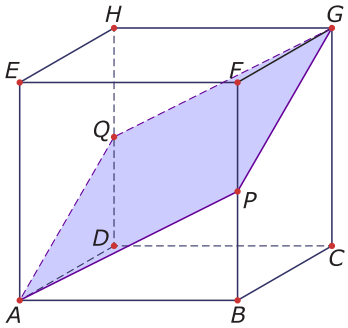
Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud berekenen van balk, prisma, piramide en cilinder;
- in objecten de vlakke en ruimtelijke (eventueel afgeknotte) basisvormen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Figuur 7.1

a Kun je uitleggen waarom dit de doorsnede van de kubus met een plat vlak is? Weet je zeker dat het een vlakke figuur is? En zo ja, waarom?

b Vanuit welke richting moet je de kubus bekijken om $APGQ$ als een lijnstuk te zien?

c Welke vlakke figuur is doorsnede $APGQ$?

d Bereken er de zijden en de hoeken van.

e Bereken er de oppervlakte van.

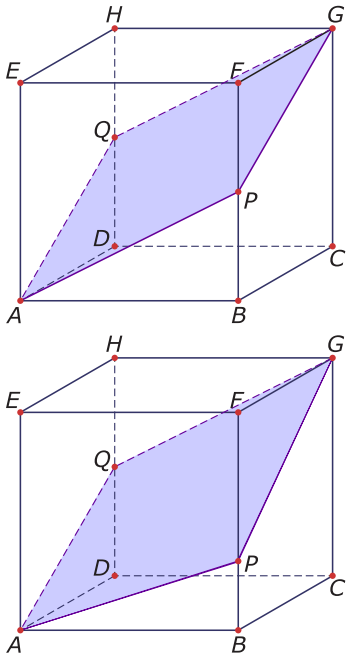
Uitleg

Bekijk in de bovenste figuur de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.
Deze doorsnede ligt in een plat vlak omdat (bijvoorbeeld) AP en QG evenwijdig zijn.

In de onderste figuur is P niet het midden van BF en daarom is $APGQ$ geen plat vlak en dus ook geen doorsnede met de kubus.
AP en QG zijn nu kruisende lijnen.

Wil je in de bovenste figuur $APGQ$ op ware grootte zien, moet je inzien dat $APGQ$ een ruit waarvan alle zijden $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm zijn.

De diagonaal PQ is $\sqrt{50}$ cm.
Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.



Figuur 7.2

Opgave 1

Bekijk de bovenste kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg op pagina 284**.
M is het midden van AC.

a Waarom zijn de twee ribben AP en QG evenwijdig?

b Teken diagonaalvlak $ACGE$ op ware grootte en laat zien dat AG en EM loodrecht op elkaar staan.

c Waarom zie je $APGQ$ op ware grootte als je in de richting EM op dat vlak kijkt?

d Bereken zelf de lengte van de twee diagonalen van ruit $APGQ$.

e Teken de ruit op ware grootte en bereken de hoeken ervan in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. P is het midden van BF. Teken zelf die kubus als een schets. Door A, P en H gaat een vlak. Dat vlak kun je binnen de kubus nog groter maken.

a Licht toe waarom het midden R van FG ook in dit vlak ligt. Denk aan evenwijdigheid!

b Teken vierhoek $APRH$ in de kubus.

c Waarom is vierhoek $APRH$ de doorsnede van het vlak door A, P en H met de kubus?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

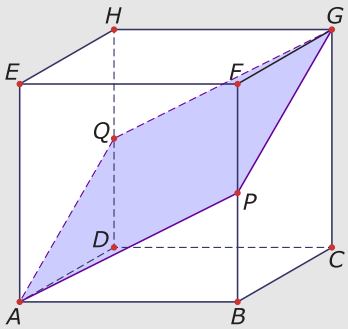
Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak.

Bij het tekenen van een doorsnede gebruik je:

- Door drie punten bestaat één vlak.
- Door twee snijdende lijnen bestaat één vlak.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als lijnen elkaar kruisen liggen ze niet in één vlak.

Bekijk de kubus. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen. De vierhoek $APGQ$ is een doorsnede van de kubus omdat AP en QG evenwijdig zijn.

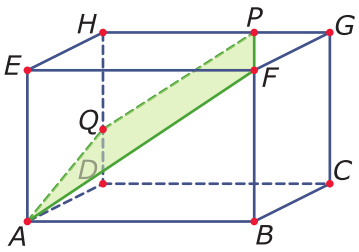
Soms wil je de doorsnede op ware grootte of op schaal tekenen. Dan moeten alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (op schaal).



Figuur 7.3

Voorbeeld 1

Bekijk doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$.
Gegeven is $AB = 6$, $BC = 4$, $CG = 3$ en $GP = 2$.
Teken doorsnede $AFPQ$ op ware grootte.



Figuur 7.4

Antwoord

De ware lengte van AF kun je halen uit rechthoek $ABFE$: $AF = \sqrt{45}$.

De ware lengte van FP kun je halen uit rechthoekige ΔFGP: $FP = \sqrt{20}$. De ware lengte van AP kun je halen uit rechthoekige ΔAHP: $AP = \sqrt{41}$. Nu teken je eerst ΔAFP met behulp van passer en liniaal.

Omdat $AFPQ$ een plat vlak is, moet $AF // PQ$. Dus zijn de driehoeken AFE en QPH gelijkvormig. Omdat $PH = \frac{4}{6}EF$ is ook $PQ = \frac{4}{6}AF$.
Hiermee kun je het trapezium $AFPQ$ afmaken.

Opgave 3

Bekijk de doorsnede $AFPQ$ in **Voorbeeld 1 op pagina 286**.

a Laat zien hoe de lengtes van de zijden van vierhoek $AFPQ$ kunnen worden berekend.

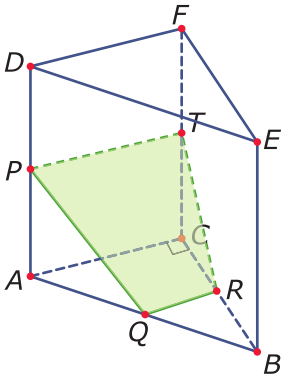
b Bereken zelf de lengte van de diagonalen van vierhoek $AFPQ$.

c Waarom weet je zeker dat vierhoek $AFPQ$ een trapezium is?

d Teken nu dit trapezium op ware grootte.

Voorbeeld 2

In het rechte prisma $ABC.DEF$ ligt P op het midden van AD, Q op het midden van AB, R op het midden van BC en T op het midden van CF. Hoek BCA is recht, $BC = BE = 4$ en $AC = 3$.
Teken doorsnede $PQRT$ op ware grootte.



Figuur 7.5

Antwoord

Van vierhoek $PQRT$ zijn hoek PTR en hoek TRQ recht. Verder is $TP = 3$, $TR = \sqrt{8}$ en $QR = 1{,}5$ (gelijkvormigheid). De figuur is nu eenvoudig te tekenen.
Ga na hoe je de hoeken en de oppervlakte van trapezium $PQRT$ berekent.

Opgave 4

Bekijk het rechte prisma $ABC.DEF$ in **Voorbeeld 2 op pagina 286**.

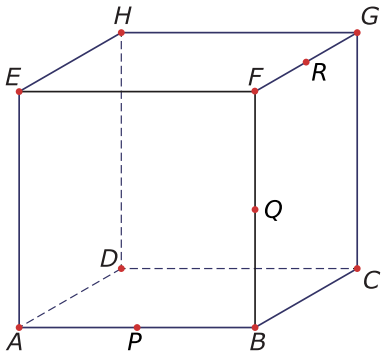
a Teken zelf de doorsnede $PQRT$ op ware grootte. Controleer alle berekende lengtes.

b Bereken de hoeken en de oppervlakte van het trapezium.

Voorbeeld 3

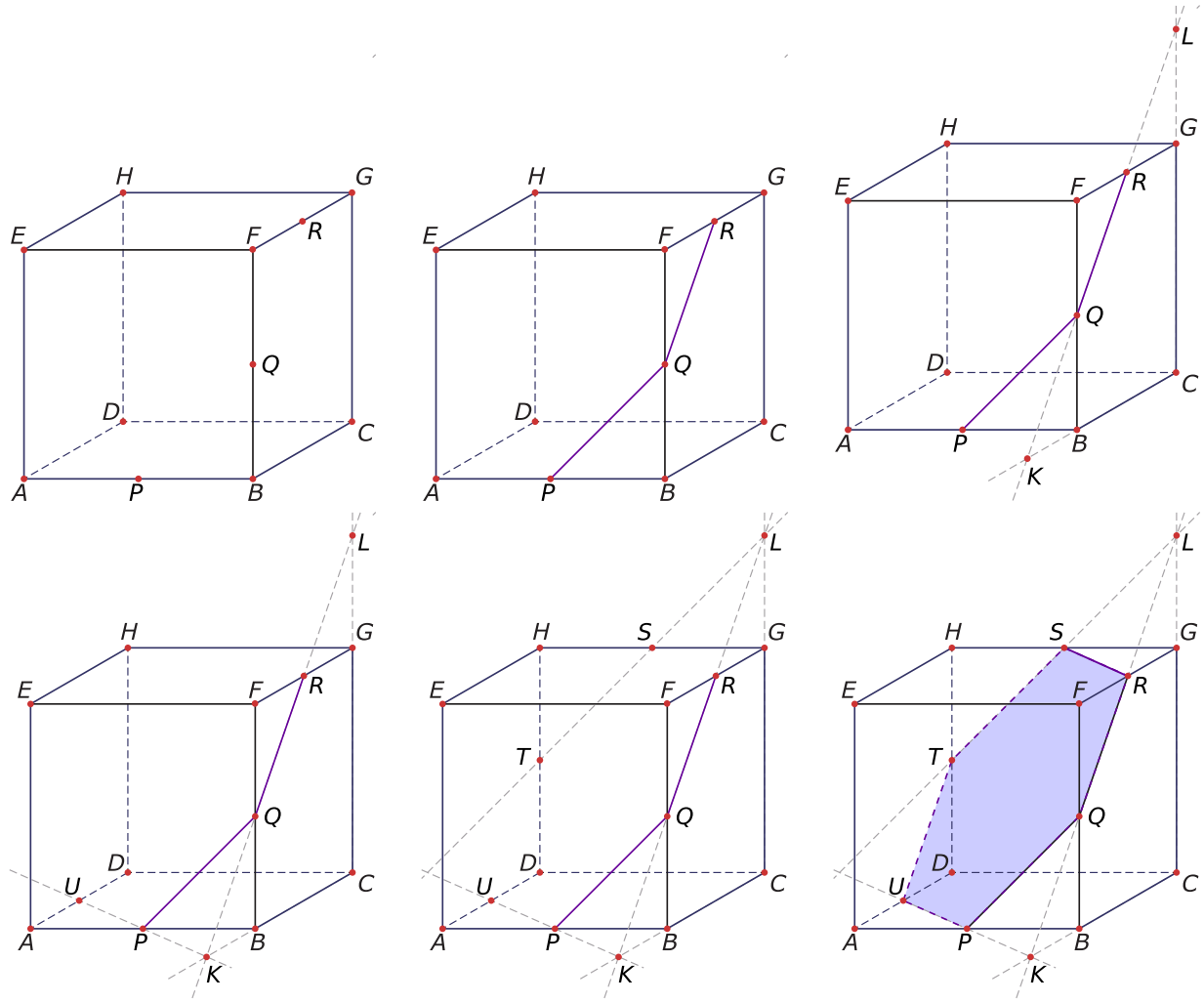
Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 8 cm. P is het midden van AB, Q dat van BF en R dat van FG.

1. Teken de doorsnede van het vlak door deze drie punten met de kubus.
2. Teken die doorsnede ook op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.



Figuur 7.6

Antwoord

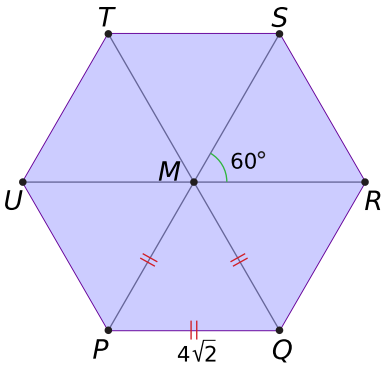


Figuur 7.7

- Bij het tekenen van de lijn door L die de punten S en T oplevert, is gebruikgemaakt van de evenwijdigheid van de snijlijnen in twee evenwijdige vlakken. Je krijgt een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met alle zijden $4\sqrt{2}$.
- Zeshoek $PQRSTU$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, want de hoeken bij punt M zijn allemaal 60°.
  Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 60° is gelijkzijdig.

De hoogte van één van die gelijkzijdige driehoeken is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. En daarmee bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek.

Ga na dat de zeshoek een oppervlakte heeft van $48\sqrt{3}$ cm^2.



Figuur 7.8

Opgave 5

Je hebt gezien hoe je een doorsnede tekent door drie gegeven punten in een kubus. Gegeven is opnieuw de kubus $ABCD.EFGH$ met de punten P, Q en R. Bekijk de afbeelding.

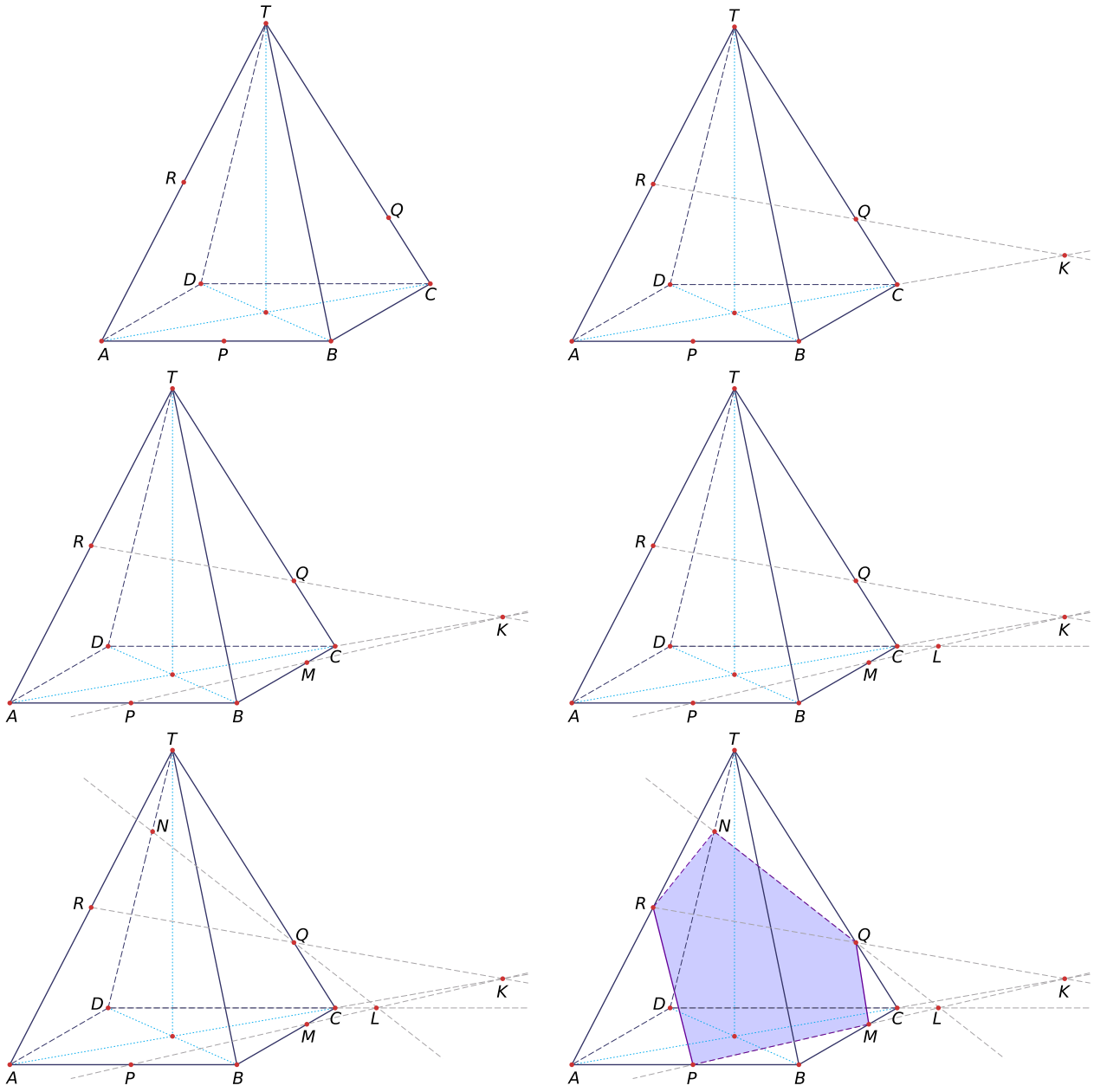
a Teken zo'n kubus met de punten P, Q en R. Voer daarna zelf de constructie van de doorsnede door deze punten stap voor stap uit. Leg bij elke stap uit hoe en waarom hij wordt gezet.

b Toon aan dat de oppervlakte van de doorsnede inderdaad $48\sqrt{3}$ cm^2 is.

c Teken de kubus nog eens. Het midden van GH is punt S, het midden van BF is punt Q. Teken de doorsnede van het vlak door E, Q en S met de kubus. Geef ook nu een uitgebreide beschrijving van je constructie.

Voorbeeld 4

Bekijk de constructie van de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de piramide $T.ABCD$.



Figuur 7.9

Opgave 6

Je hebt gezien hoe de doorsnede van het vlak door P, Q en R in een gegeven regelmatige vierzijdige piramide geconstrueerd wordt.

a Waarom weet je zeker dat de lijnen RQ en AC elkaar snijden? Waarom ligt dit snijpunt K in het grondvlak $ABCD$ van de piramide?

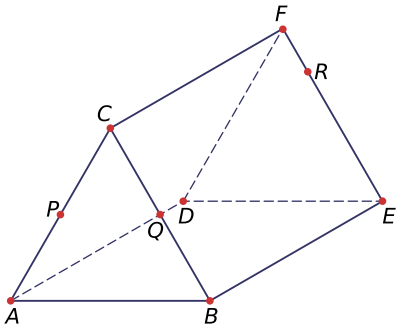
b Geef een nauwkeurige beschrijving van de constructie.

c Teken zelf deze piramide en daarin de doorsnede van het vlak door R, B en Q.

Oefenen

Opgave 7

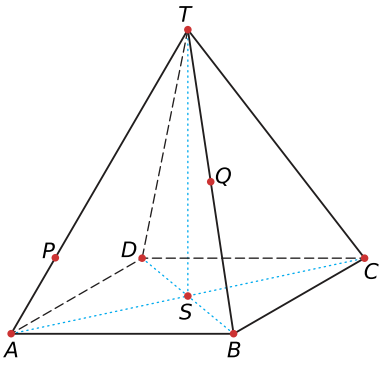
Neem het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en R. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 7.10

Opgave 8

Neem de piramide over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en C en de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Geef een beschrijving van de constructie.



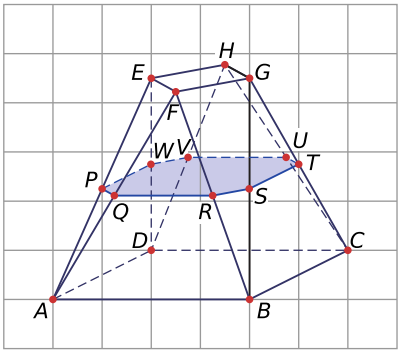
Figuur 7.11

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door het midden van alle opstaande ribben.

a Teken deze doorsnede op ware grootte. Laat zien hoe je daarbij te werk gaat.

b Bereken de totale omtrek van deze doorsnede.



Figuur 7.12

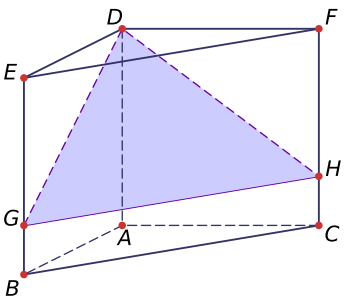
Opgave 10

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90°$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

a Teken de doorsnede van vlak GHD en het prisma op ware grootte.

b Bereken de grootte van de hoeken van driehoek GHD in één decimaal nauwkeurig.

c Neem de figuur over en teken de snijlijn van vlak GHD met het vlak waarop het grondvlak ABC ligt.

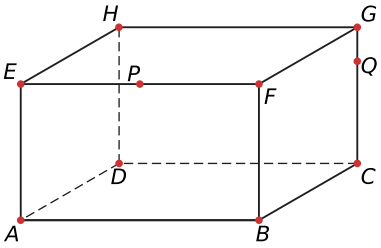


Figuur 7.13

Opgave 11

In deze balk $ABCD.EFGH$ is P het midden van EF en ligt Q op CG zo, dat $CQ : QG = 4 : 1$.

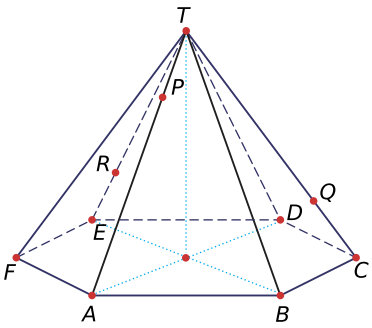
Neem de balk over en teken de doorsnede van het vlak APQ en de balk. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 7.14

Opgave 12

Gegeven is een piramide $ABCDEF.T$ met een regelmatige zeshoek als grondvlak. Zie ook de figuur. Punt P ligt op AT, punt Q ligt op TC en punt R op TE. Teken de doorsnede door de punten P, Q en R. Licht je antwoord toe.

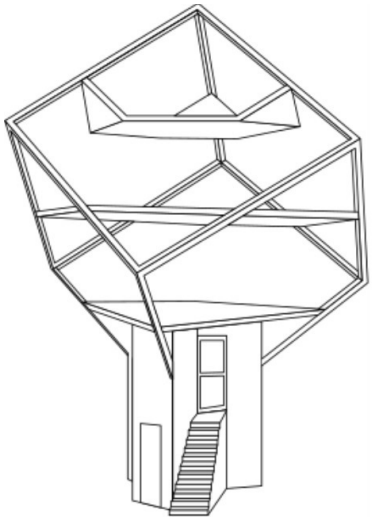


Figuur 7.15

Toepassen

Het ontwerp van de kubuswoningen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn dergelijke kubuswoningen gebouwd.

Figuur 7.17



Figuur 7.16

Opgave 13

Bekijk de kubuswoningen in de figuren hierboven.

a Teken zo'n kubus die op zijn punt staat: één van de lichaamsdiagonalen is verticaal.

b Teken de vloeren van de drie verdiepingen in de kubus. Deze drie vloeren verdelen de verticale lichaamsdiagonaal in vier gelijke delen.

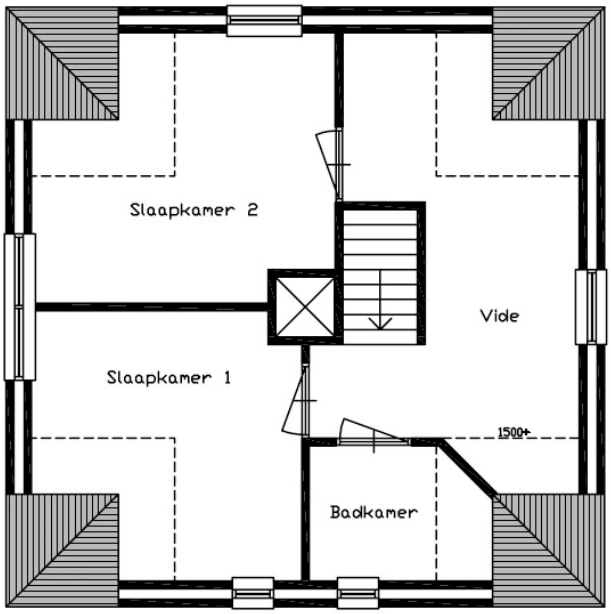
Opgave 14

Hier zie je een rondwandeling door het vakantiehuisje ‘Heideheuvel’.
Dit huisje past precies in een kubus van 8 × 8 × 8 m, als je de schoorsteen niet meerekent.

a Teken de verdiepingsvloer op schaal 1 : 100 als je weet dat hij 3 m boven de begane grond zit.

b Hoe groot is oppervlakte van die verdiepingsvloer?

c Je ziet hier de plattegrond van de verdieping.
Het muurtje tussen de badkamer en de vide bestaat uit twee delen. Teken deze delen op ware grootte.

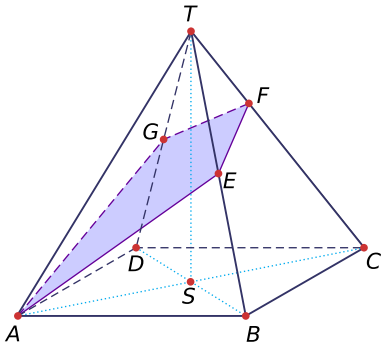


Figuur 7.18

Testen

Opgave 15

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. De hoogte van deze piramide is 5 cm. Punt E is het midden van BT en punt G is het midden van DT. De doorsnede $AEFG$ heeft de vorm van een vlieger. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD. M is het snijpunt van TS en GE.



Figuur 7.19

a Leg uit waarom deze doorsnede de vorm van een vlieger heeft.

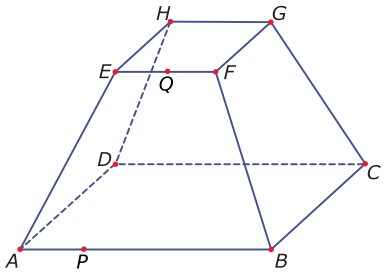
b Teken doorsnede $AEFG$ op ware grootte. Licht je antwoord met berekeningen toe.

c Bereken de grootte van $\angle EAG$.

Opgave 16

Dit is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. P ligt zo op AB dat $AP : PB = 1 : 3$ en Q is het midden van EF.

Teken de doorsnede van het vlak PQG en de afgeknotte piramide. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 7.20

7.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met vlakke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakteformules, soorten bijzondere lijnen in een driehoek voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Meetkunde in 3D** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- parallelprojectie — wijkhoek, verkortingsfactor
- gelijkvormig — stelling van Pythagoras — goniometrie — sinusregel, cosinusregel
- oppervlakte — inhoud, volume
- doorsnede — snijdende, kruisende, evenwijdige lijnen

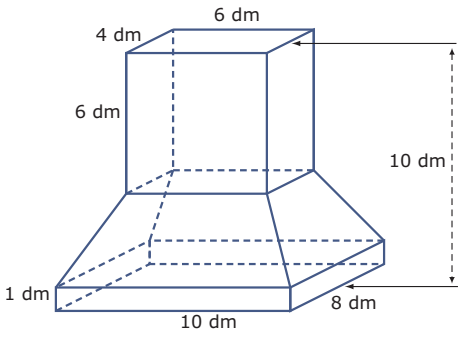
Activiteitenlijst

- eigenschappen parallelprojectie gebruiken — figuren in parallelprojectie tekenen (ook met wijkhoek en verkortingsfactor);
- hoeken en afstanden berekenen met behulp van gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, goniometrie, de sinus- en de cosinusregel;
- oppervlakte en inhoud van een (samengestelde) ruimtelijke figuur berekenen — lengte- oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken;
- een doorsnede van een vlak met een ruimtelijke figuur construeren.

Testen

Opgave 1

Je ziet een stalen afzuigkap in een keuken. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.



Figuur 7.1

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de afzuigkap.

b Bereken de hoeken in graden nauwkeurig en bereken exact de lengte van de zijden van de trapezia.

c Teken een uitslag op schaal 1:20 van de afzuigkap.

d Bereken de totale oppervlakte van deze afzuigkap in dm^2 nauwkeurig.

e Bereken de inhoud van deze afzuigkap in dm^3 nauwkeurig.

Opgave 2

Bekijk de foto van de toren van de Walfriduskerk in Bedum. Deze toren is ongeveer 35,70 meter hoog en heeft vier gelijke ruitvormige dakdelen. Iemand maakt een papieren model van deze torenspits. Daarbij maakt hij als grondvlak van de toren een vierkant van 6 cm bij 6 cm. De totale hoogte van het bouwsel wordt 36 cm. De vier onderste punten van deze ruiten komen 30 cm boven het grondvlak.

Figuur 7.2

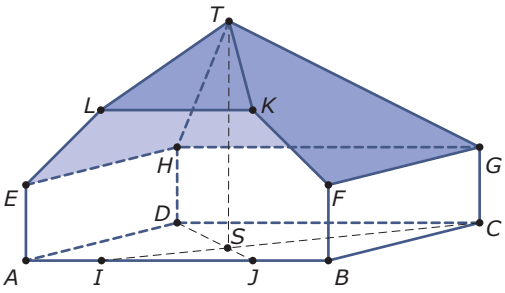
a Teken de drie aanzichten van de torenspits.

b Bereken exact de lengtes van de zijden van zo'n ruitvormig dakdeel. Bereken ook de hoeken daarvan.

c Teken een parallelprojectie van de torenspits met daarin een serie horizontale doorsneden op 2 meter, 4 meter en 6 meter onder de top.

Opgave 3

Bekijk de vereenvoudigde weergave van een boerenschuur. Grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ m en $BC = 6$ m. De zijvlakken $BCGF$ en $ADHE$ zijn rechthoeken van 6 m bij 2 m. Verder is $AI = BJ = 2$ m, $KL = IJ$ en $TS = 6$ m. Punt L zit recht boven I, punt K zit recht boven J en punt T zit recht boven S. Verder is gegeven dat $KJ = 4$ m.



Figuur 7.3

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de schuur.

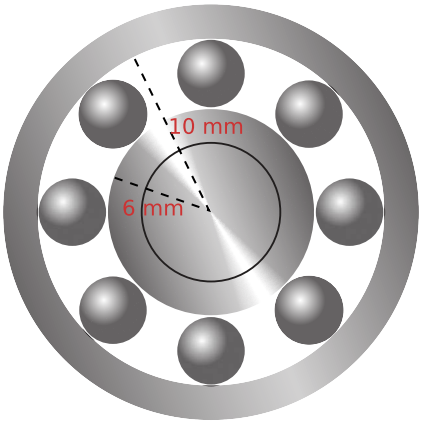
b Teken het grensvlak $FGTK$ op schaal 1:100 en bereken alle hoeken ervan in graden nauwkeurig.

c Teken in de figuur de doorsnede van een vlak door C, L en K met de schuur.

Opgave 4

Je ziet een doorsnede van een kogellager. In je fiets zit om de as van elk wiel zo'n kogellager om ervoor te zorgen dat de draaibeweging van elk wiel met weinig wrijving kan worden uitgevoerd. De kogeltjes van dit lager zijn zuivere bollen en hebben een diameter van 4 mm. De kogeltjes zitten in een cilindervormige ring met een buitenstraal van 10 mm en een binnenstraal van 6 mm. De hoogte van die ring is gelijk aan de diameter van elk kogeltje. De ruimte tussen de kogeltjes is opgevuld met vet.

Hoeveel procent van de inhoud van de ring waarbinnen de kogeltjes zitten, bestaat uit vet? Geef een exact antwoord.

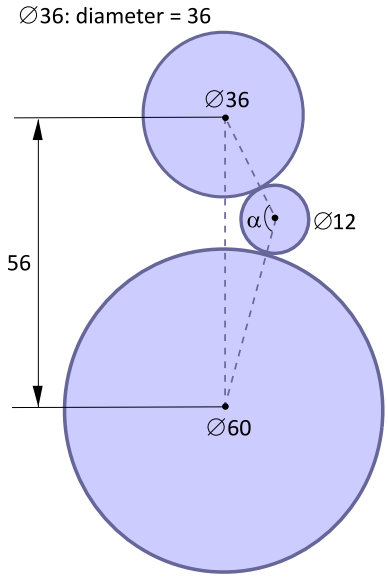


Figuur 7.4

Opgave 5

Je ziet hier twee tandwielen met een tussentandwiel.
Alle lengtematen zijn in mm.

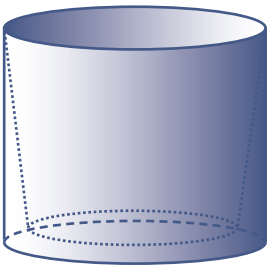
Bereken de grootte van hoek α.



Figuur 7.5

Opgave 6

Een warenhuis heeft een nieuwe plastic vaas op de markt gebracht. Je ziet een afbeelding. Hij bestaat uit een massieve cilinder met een diameter van 40 cm en een hoogte van 41 cm waaruit een afgeknotte kegel is weg geboord. De bodem van deze afgeknotte kegel is 1 cm dik en de diameter van de grondcirkel van de afgeknotte kegel is 30 cm. De vaas is behoorlijk zwaar hoewel de soortelijke massa van het plastic maar 0,5 gram/cm^3 is.



Figuur 7.6

a Bereken de hoeveelheid plastic van de vaas in cm^3.

b Bereken het gewicht van de vaas in grammen.

Opgave 7

In een cilindervormige koker passen precies drie tennisballen boven elkaar.
Hoeveel procent van de inhoud van de koker bestaat uit lucht (de lucht in de tennisballen niet meegerekend)?

Opgave 8: Schaatshouding

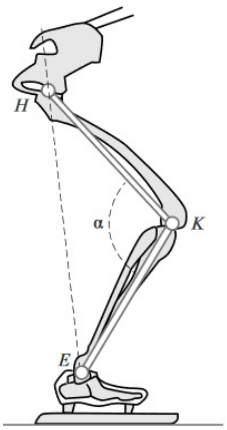
Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.

Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H, het kniegewricht K en het enkelgewricht E.

De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α. Zie de figuur.

We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser:
$HE = 69$ cm en $\alpha = 100°$.



Figuur 7.7

a Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.

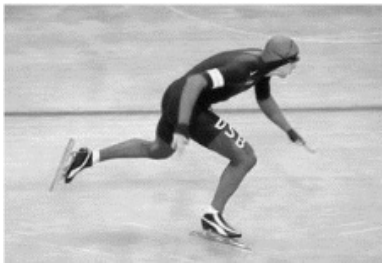
b Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.

Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken. Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180°.
Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt:

$HE = \sqrt{3625 - 3600\cos\alpha}$.
Hierbij is α in graden en HE in cm.



Figuur 7.8

c Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180°. Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.

Toepassen

Opgave 9: De 'kegel' van Marius van der Made

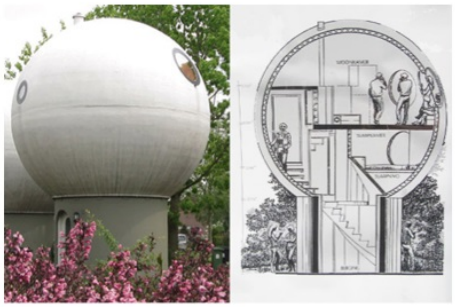
Figuur 7.9

Marius van der Made maakte deze 'kegel'. De doorsnede van het grote cirkelvormige deel van de kegel is 1,50 m. De doorsnede van het kleinere cirkelvormige deel van de kegel is 50 cm. Als de kegel op de grond staat met de punt omhoog, is de hoogte 3 meter. Het achtste deel van de kegel is 'weggesneden'. De top van de kegel ligt recht boven het midden van het grondvlak. Veronderstel dat het oppervlak van de kegel een speciale behandeling nodig heeft. Deze behandeling kost € 50 euro per m^2.

Bereken de kosten van deze behandeling.

Opgave 10: Bolwoningen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in 's-Hertogenbosch. De bolwoning is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk, door de bolvorm heeft de wind er bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor 1 of 2 personen.



Figuur 7.10

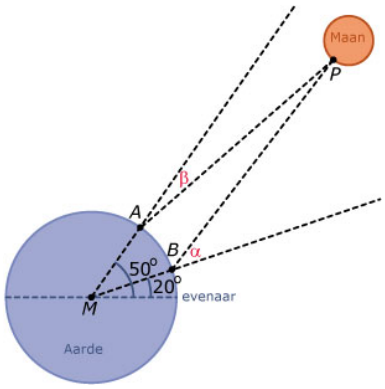
De diameter van de bol zelf is 8 meter en die van de cilinder is 6 meter, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is. Voor de oppervlakte A van een bolsegment met hoogte h van een bol met straal r geldt $A = 2\pi rh$ en voor de inhoud I geldt $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

a Bereken de totale inhoud van zo'n bolwoning.

b Bereken de totale oppervlakte van zo'n bolwoning.

Opgave 11: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M, A, B en P liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.



Figuur 7.11

8

Plaats en beweging

8.1 Coördinaten in 2D 300
8.2 Vectoren 308
8.3 Lijnen en snijpunten 319
8.4 Hoeken en inproduct 327
8.5 Bijzondere lijnen 336
8.6 Totaalbeeld 343

8.1 Coördinaten in 2D

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een cartesisch coördinatenstelsel in 2D is;
- de afstand tussen twee punten berekenen in 2D;
- het midden tussen twee punten berekenen in 2D.

Voorkennis

- werken met coördinaten in twee dimensies;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

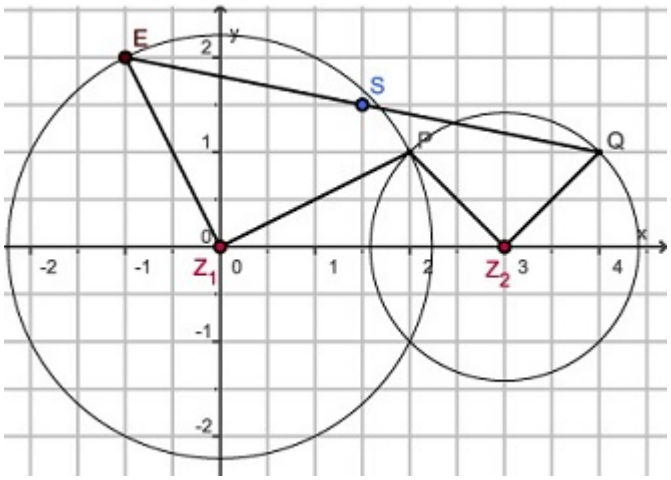
Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Loop vervolgens dezelfde afstand, in een lijn loodrecht op de vorige richting. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwerfkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga tenslotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: schatgraversprobleem



Figuur 8.1

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

Eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst.

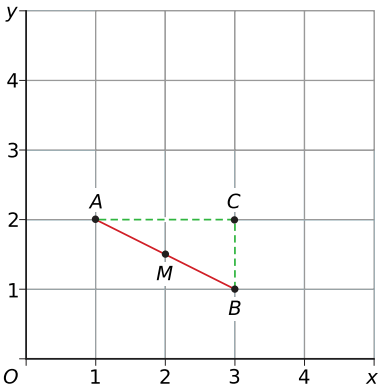
Is de plaats van de oude eik belangrijk voor de positie van de schat?

Uitleg

Bekijk de applet

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke. Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel wordt gebruikt: onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling. In twee dimensies (in 2D) spreek je van een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as. In drie dimensies komt er nog een z-as bij.

Bekijk het 2D cartesisch coördinatenstelsel met de punten A en B. Door de manier waarop het assenstelsel is gekozen, heeft A de coördinaten $(1,2)$ en is $B(3,1)$.



Figuur 8.2

De afstand van A tot B is de lengte van lijnstuk AB. De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte AB door in ΔABC de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van lijnstuk AC vind je door de x-coördinaten van A en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk CB vind je door de y-coördinaten van B en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

De coördinaten van M, het midden van AB, bereken je als volgt: De x-coördinaat van M is het gemiddelde van de x-coördinaten van A en B. De y-coördinaat van M is het gemiddelde van de y-coördinaten van A en B. Dus M is $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(1, 1\frac{1}{2}\right)$.

In een 3D coördinatenstelsel kun je op een vergelijkbare manier rekenen, er komt alleen een coördinaat bij.

Opgave 1

Je weet nu wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

a Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?

b Teken een cartesisch coördinatenstelsel met punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ en bereken de lengte van lijnstuk AB.

c Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 2

Gegeven zijn in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van AB.

c Laat zien hoe je M en de lengte van AB berekent als $A(-1,3,2)$ en $B(1,4,5)$.

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(-10{,}33)$ en $B(20,-45)$ in een coördinatenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdelingen op de assen gelijk zijn.

a Bereken de lengte van lijnstuk AB.

b Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A,y_A)$ en $B(x_B,y_B)$.

a Druk de lengte van lijnstuk AB uit in x en y.

b Druk de coördinaten van punt M uit in x en y.

c Hoe zien de coördinaten van punt M en de lengte van AB eruit als $A(x_A,y_A,z_A)$ en $B(x_B,y_B,z_B)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

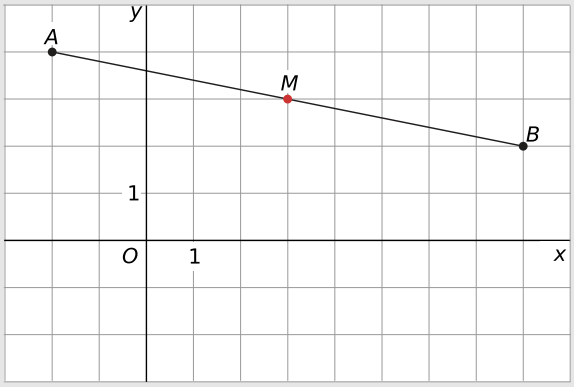
Bekijk de applet

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.

Een **cartesisch assenstelsel** is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

In twee **dimensies**, dus in 2D, gaat het om een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as, in 3D komt daar nog een z-as bij.

In 2D kan het **midden** M van lijnstuk AB op deze manier worden bepaald: Als door de keuze van het cartesische coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A,y_A) en B aan (x_B,y_B), geldt: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.



Figuur 8.3

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een 2D cartesisch coördinatenstelsel: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

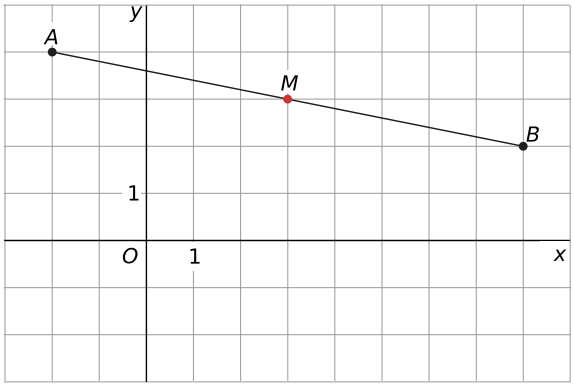
De 'omgekeerde stelling van Pythagoras' is: als in een driehoek geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is die driehoek rechthoekig.

In een 3D cartesisch coördinatenstelsel gelden vergelijkbare formules.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(-2,2)$ en $B(3,1)$.
M is het midden van lijnstuk AB.
Laat zien hoe je de coördinaten van M berekent.
Laat ook door berekening zien, dat $|AM| = |MB|$.



Figuur 8.4

Antwoord

$$M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (0{,}5;\ 1{,}5).$$

$$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-2 - 0{,}5)^2 + (2 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}.$$

$$|MB| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{(3 - 0{,}5)^2 + (1 - 1{,}5)^2} = \sqrt{6{,}5}.$$

Dus inderdaad is $|AM| = |MB|$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1 op pagina 303** zie je hoe het midden van AB wordt berekend en vervolgens wordt aangetoond dat $|AM| = |MB|$.

a Laat dit zelf zien. Neem de punten $A(-2,-1)$ en $B(3,2)$.

b Neem zelf twee andere punten A en B en voer dezelfde berekeningen uit.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten de punten $A(2{,}8,3)$ en $B(10{,}14{,}5)$.

Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB en controleer dat $|AM| = |MB|$.

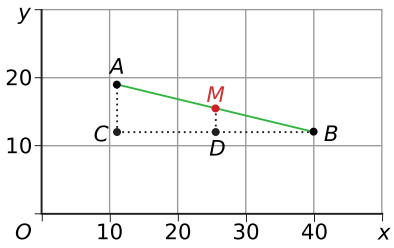
Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11{,}19)$ en $B(40{,}12)$.
Bereken de lengte van AB met de formule

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.

Laat ook zien, dat $|MB| = \frac{1}{2}|AB|$.



Figuur 8.5

Antwoord

$|AB| = \sqrt{(40 - 11)^2 + (12 - 19)^2} = \sqrt{890}$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarop de stelling van Pythagoras toe te passen.

$M = \left(\frac{11+40}{2}, \frac{19+12}{2}\right) = (25{,}5; 15{,}5)$

$|MB| = \sqrt{(25{,}5 - 11)^2 + (15{,}5 - 19)^2} = \sqrt{222{,}5} = \frac{1}{2}\sqrt{890}$

Hoe zou je kunnen aantonen dat ook de 3D-versie van de afstandsformule klopt?

Opgave 7

In **Voorbeeld 2 op pagina 304** zijn de punten $A(11{,}19)$ en $B(40{,}12)$ gegeven.

a Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de formule voor de lengte van lijnstuk AB klopt.

b Neem nu in 3D de punten $A(11{,}19{,}2)$ en $B(40{,}12{,}5)$.
Bereken $|AB|$ met de formule voor de lengte.

c Hoe kun je meetkundig laten zien, dat de voorgaande berekening in 3D geldig is?

Opgave 8

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de punten $A(-3{,}6)$, $B(6{,}0)$ en $C(18{,}18)$.

a Bereken de lengtes van de lijnstukken AB, BC en AC.

b Laat zien, dat driehoek ABC rechthoekig is.

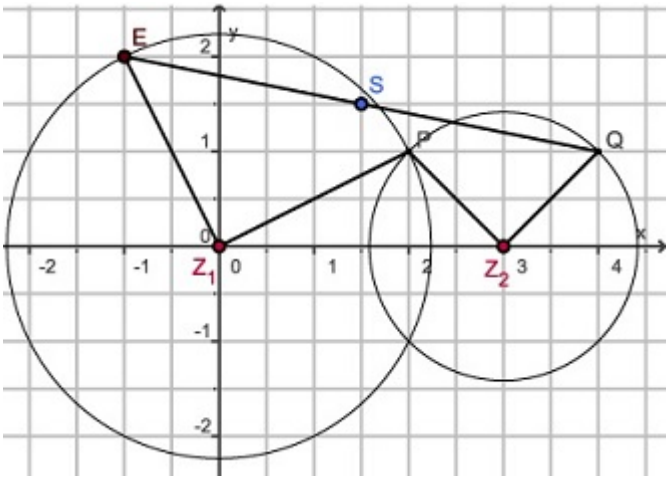
c Noem het midden van AB punt D, het midden van BC punt E, en het midden van AC punt F.
Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF.

d Laat zien, dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: schatgraversprobleem

In de figuur is E variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Gevraagd is aan te tonen dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen, ook als punt E van plaats verandert.



Figuur 8.6

Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoeken: $\Delta EAZ_1 \cong \Delta Z_1$ en $\Delta PBZ_2 \cong \Delta Z_2CQ$.

Neem voor het variabele punt $E(-x,y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3–y$. Tenslotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x,3 - y)$. Het midden van EQ is dus $S = \left(\frac{-x+3+x}{2},\frac{y+3-y}{2}\right) = (1{,}5;\ 1{,}5)$.

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk en dus ook niet van de positie van punt E.

Opgave 9

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3 op pagina 305**. Punt E kan van positie veranderen, maar de positie van punt S zou daardoor niet moeten veranderen.

a Neem $E(-1{,}2)$ en toon door berekening aan dat de positie van het punt S niet verandert.

b Neem $E(-x,y)$ en toon zelf door berekening aan dat het punt S niet verandert.

Oefenen

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-11{,}23)$ en $B(106{,}133)$.

a Bereken $|AB|$ en de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB.

b B is het midden van lijnstuk AC. Bereken de coördinaten van C.

Opgave 11

Teken de punten $A(6,0)$, $B(10,8)$, $C(6,10)$ en $D(2,2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

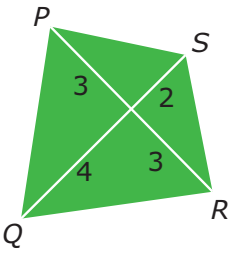
a Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

b Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.

c Bereken de oppervlakte van driehoek ABS.

Opgave 12

Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger $PQRS$ vormen een rechthoek (zoals dat bij elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.



Figuur 8.7

a Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?

b Nu zijn de hoekpunten $P(-3,0)$, $Q(0,-4)$, $R(3,0)$ en $S(0,2)$. Noem A midden PQ, B midden QR, C midden SR en D midden PS en bereken de coördinaten van A, B, C en D.

c Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l : y = 5x + 3$, $m : y = 2\frac{1}{2}x - 12$ en $n : y = -2x + 6$.

Lijnen l en m snijden elkaar in punt A, en m en n snijden elkaar in punt B.
Bereken $|AB|$ algebraïsch.

Opgave 14

Van een lijnstuk KL in 3D is het punt $K(2,8,0)$ gegeven en het midden $M(4,12,3)$.

a Bereken het eindpunt L.

b Bereken de lengte van het lijnstuk KL.

c Bereken de coördinaten van het midden N van ML.

Toepassen

Opgave 15: Schepen op zee

Twee schepen varen op zee een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die zich in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S verwijderd. Hoe dicht zullen de schepen bij elkaar komen?

a De variabele t is de tijd in uren. Kies $t = 0$ op het moment van de beschreven situatie en maak een passende tekening met een geschikt assenstelsel. Zet de afstand tussen beide schepen in het assenstelsel.

b Neem nu $t = 1$ en teken de onderlinge afstand tussen beide schepen. Doe dit ook voor $t = 2$, $t = 3$ enzovoort.

c Hoe groot is de onderlinge afstand van de schepen op $t = 0$ (t in uren)?

d Hoe groot is die afstand op $t = 1$?

e Druk de onderlinge afstand a uit in t.

f Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand tussen beide schepen?

Testen

Opgave 16

Gegeven zijn in 2D de punten $P(120,36)$ en $Q(0,12)$.

a Bereken de lengte van lijnstuk PQ in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Gegeven zijn in 3D de punten $P(120,35,20)$ en $Q(0,12,10)$.

c Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(3,2)$ en $C(1,6)$ en verbind de punten met elkaar.

a Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.

b Verbind het midden P van AC met B. Toon aan dat ΔABP een gelijkbenige driehoek is.

8.2 Vectoren

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- wat een vector is;
- de begrippen draaihoek en lengte van een vector;
- vectoren in componenten ontbinden;
- werken met componenten van vectoren;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Voorkennis

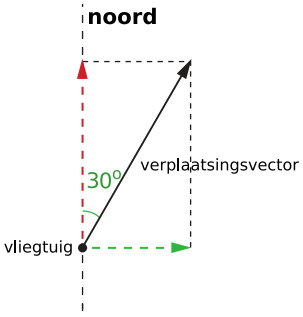
- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand, e.d., gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de snelheid). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.



Figuur 8.1

a Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30°, hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component?

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

b Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?

c Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30°?

d Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?

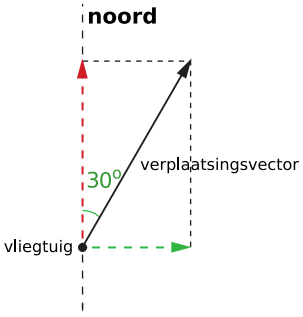
e Als je de verplaatsingen met een westelijke component meetelt, zijn er nog twee hoeken met dezelfde noordelijke of zuidelijke component als de noordelijke component bij 30°. Hoe groot zijn deze hoeken?

Uitleg 1

Bekijk de applet.

De verplaatsing van bijvoorbeeld een vliegtuig beschrijf je met twee grootheden:

- de richting, bijvoorbeeld de hoek met het noorden is 30°.
- de afstand, bijvoorbeeld over 500 km.



Figuur 8.2

Teken een pijltje, een vector, wanneer zowel afstand als richting belangrijk is. De lengte van de vector is de afstand in kilometer, de richting is de richtingshoek ten opzichte van de hoofdrichting, in dit geval het noorden.
Geef deze verplaatsingsvector als $(30°,500)$.

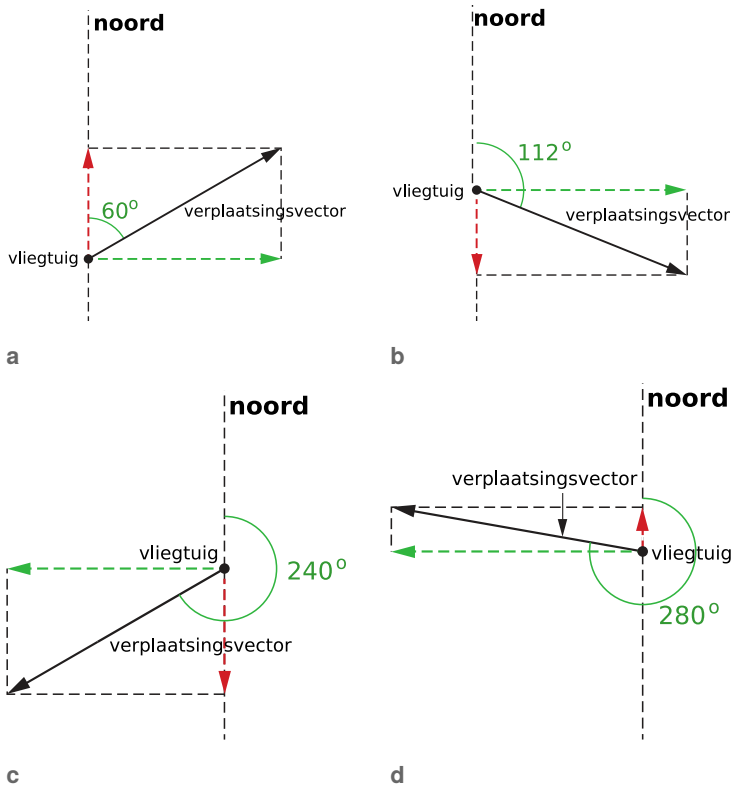
Omdat er een hoofdrichting is (het noorden), kun je doen alsof de vector bestaat uit een noordelijke component samen met een oostelijke component. De richting van een component kan negatief zijn. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst.
Bepaal de lengte van de twee componenten door de vector te ontbinden in twee onderling loodrechte richtingen (noord en oost). Je kunt de lengte van die componenten meten (of berekenen met behulp van sinus of cosinus).

De lengte van de oostelijke component is 250.
De lengte van de noordelijke component is ≈ 433.

Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van de vector. Als er meerdere vliegtuigen van verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend, maar toch kunnen de verplaatsingsvectoren gelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de vier figuren waarin een verplaatsingsvector met lengte 400 is getekend. Bepaal met behulp van cosinus of sinus bij elke situatie de lengte van de noordelijke component en de lengte van de oostelijke component. Rond zo nodig af op gehele getallen. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



Figuur 8.3

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

a noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.

b noordelijke component: - 300 km, oostelijke component: 400 km.

c noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 300 km.

d noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: - 150 km.

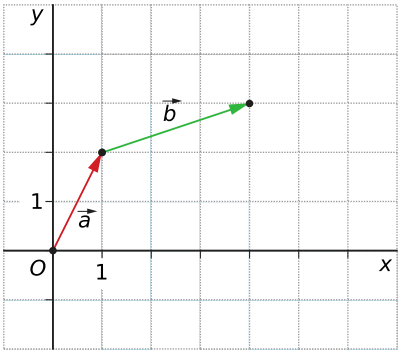
e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: - 100 km.

f noordelijke component: - 200 km, oostelijke component: 0 km.

Uitleg 2

Bekijk de applet.

In de wiskunde bestudeer je verplaatsingen het liefst in een cartesisch assenstelsel *Oxy*. Daarin neem je aan dat de positieve *x*-as de hoofdrichting is en elke hoek vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in wordt gemeten. Een vector kun je dan gemakkelijk beschrijven met een component in de *x*-richting en een component in de *y*-richting: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.4

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector. Zo'n vector kun je gemakkelijk verlengen, de componenten worden dan beide met hetzelfde getal vermenigvuldigd: $3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ of meer algemeen: $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$.

Je telt vectoren op door twee verplaatsingen na elkaar uit te voeren. Dan zet je de vectoren na elkaar, 'staart aan kop'. De vector vanaf het allereerste startpunt tot het allerlaatste eindpunt is dan de som van beide vectoren, de vectoren worden opgeteld. Dit kan eenvoudig door de kentallen op te tellen: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Als je twee vectoren van elkaar wilt aftrekken, tel je het tegengestelde van de tweede vector op bij de eerste vector: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2 op pagina 311** hoe er met vectoren wordt gewerkt. Gebruik de gegeven vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

a Teken $\vec{p} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

b Teken $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

c Teken $\vec{p} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ in een assenstelsel en geef de componenten van $\vec{p}$.

Theorie en voorbeelden

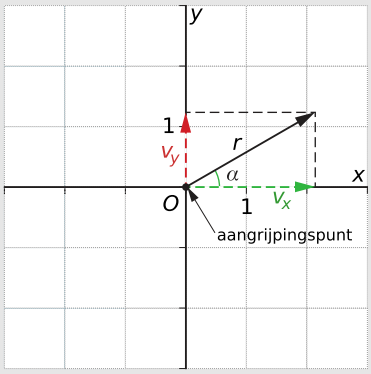
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Bekijk de applet.

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met **lengte** r en **richtingshoek** α, de hoek die de vector maakt met de gekozen hoofdrichting.

In de wiskunde is de standaard hoofdrichting in een assenstelsel de positieve x-as. Verder wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.



Figuur 8.5

Er geldt:

- de x-**component** $v_x = r\cos(\alpha)$;
- de y-**component** $v_y = r\sin(\alpha)$.

Dit zijn de **kentallen** van vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van de vector is: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is geen eigenschap van een vector.

Maak de vector $\vec{v}$ langer (of korter) door hem met een factor k te vermenigvuldigen. Dit noem je **scalaire vermenigvuldiging** van de vector met k.

$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$

Als $k = -1$ dan krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** door ze 'staart aan kop' te leggen.

Je krijgt dan de **somvector** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

De kentallen van $\vec{r}$ ontstaan door de overeenkomstige kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op te tellen.

Twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **aftrekken** door gebruik te maken van $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$

Tel dan bij $\vec{a}$ het tegengestelde van $\vec{b}$ op.

Als je $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ optelt, krijg je de **nulvector** $\vec{0}$.
De nulvector heeft geen richting en heeft lengte 0.

Noteer de vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B als $\overrightarrow{AB}$.

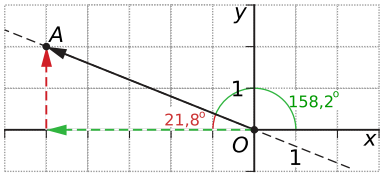
Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(-5,2)$, $B(23,16)$ en $C(28,14)$ in een cartesisch assenstelsel.

Bereken de lengte en de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$.

Laat zien dat de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{CB}$ gelijk zijn.

Waarom is $\overrightarrow{BC}$ niet gelijk aan $\overrightarrow{OA}$?



Figuur 8.6

Antwoord

De componenten van $\overrightarrow{OA}$ zijn -5 en 2. Dit geeft: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hoek α die lijn OA met de x-as maakt en daarvoor geldt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$.

Die hoek is ongeveer 21,8°.

Hieruit volgt de richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$: $180 - 21{,}8 = 158{,}2°$.

De componenten van $\overrightarrow{CB}$ zijn $23 - 28 = -5$ en $16 - 4 = 2$. Dit geeft: $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dus dezelfde kentallen en dezelfde lengte en richtingshoek als $\overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{BC}$ heeft de tegenovergestelde richting ten opzichte van $\overrightarrow{CB}$ en ook ten opzichte van $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA}$.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-31,12)$ en $D(-28,17)$ in een cartesisch assenstelsel. Bereken $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ en $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 5

Bepaal lengte en richtingshoek van de vectoren:

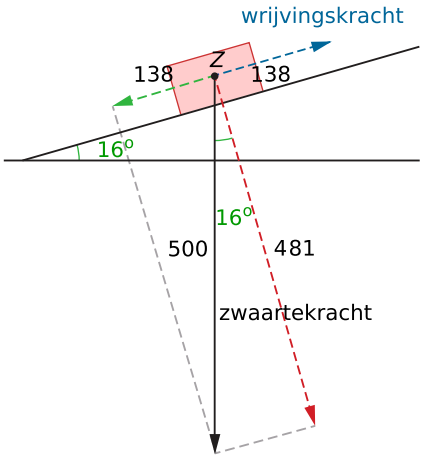
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?



Figuur 8.7

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is aan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2 - 200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$ dus de gevraagde hoek is 23,6°. Om α te berekenen, gebruik je de arctan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2 op pagina 314** de toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

a Hoe groot zal in de weergegeven situatie de wrijvingskracht zijn?

b Bij welke hellingshoeken blijft het gewicht liggen?

c Leg uit waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.

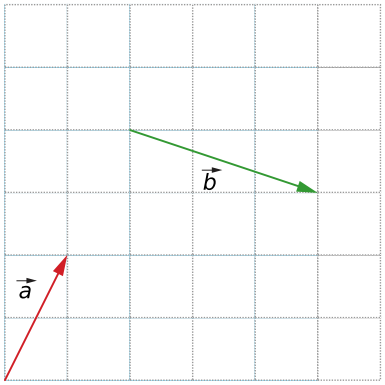
d Bereken de maximale hellingshoek waarbij een gewicht dat een zwaartekracht van 350 N ondervindt, nog blijft liggen op het hellende vlak.

Voorbeeld 3

Bekijk de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ worden opgeteld tot $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

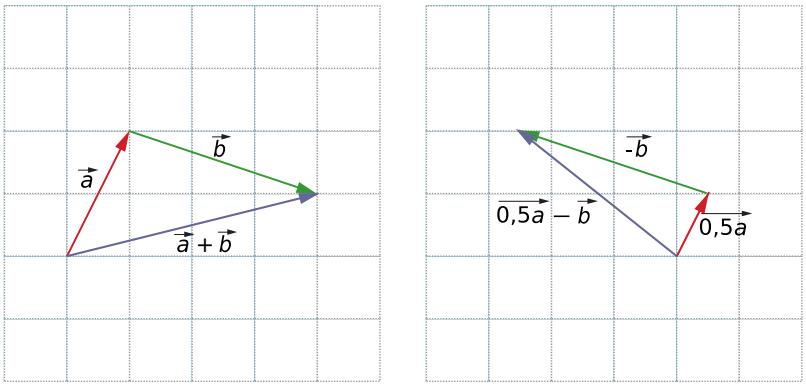
Dit heet de ‘staart aan kop’-methode.



Figuur 8.8

Op dezelfde manier maak je $0{,}5\vec{a} - \vec{b}$.

Bekijk de applet.



Figuur 8.9

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3 op pagina 314** hoe je vectoren kunt optellen en aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Gebruik de gegeven vectoren.

a Teken de vector $2\vec{a}$ en bepaal de kentallen ervan.

b Teken de vector $2\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

c Teken de vector $-2\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

d Teken de verschilvector van $-\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bepaal de kentallen ervan.

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

a Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Gegeven zijn de punten $A(a_x,a_y)$ en $B(b_x,b_y)$ en de vectoren $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ en $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ in een cartesisch assenstelsel.

b Laat zien dat $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Oefenen

Opgave 9

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Bepaal de x-component en de y-component, in één decimaal nauwkeurig.

a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135°$

b $\left|\vec{v}\right| = 5$ en $\alpha = 210°$

c $\left|\vec{v}\right| = 4$ en $\alpha = 300°$

d $\left|\vec{v}\right| = 2$ en $\alpha = 270°$

Opgave 10

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek van deze vector. Geef de lengte exact, rond de hoek af op één decimaal.

a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\vec{v} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

d $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$

Opgave 11

Gegeven is $O(0,0)$ en punt A met $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 5$. Voor een ander punt B geldt $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OB}$ ten opzichte van de x-as tegen de klok in is $30°$. Bepaal de coördinaten van punt B en rond af op één decimaal.

Opgave 12

Gegeven zijn de vectoren:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Bepaal de kentallen van de vectoren.

a $\vec{v_1} = \vec{b} + \vec{c}$

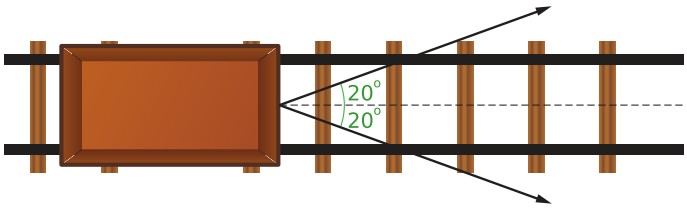
b $\vec{v_2} = \vec{f} + 0{,}5\,\vec{c}$

c $\vec{v_3} = \vec{a} - \vec{e} - 2\,\vec{d}$

d $\vec{v_4} = \vec{e} + \vec{d} - \vec{b}$

Opgave 13

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken een lorrie met dezelfde kracht van 8 N elk aan een touw.



Figuur 8.10

a Met welke kracht trekken beide personen samen aan het karretje in de rechter richting? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Beantwoord dezelfde vraag als de ene persoon trekt met een kracht van 8 N en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23{,}61)$, $B(7{,}51)$, $C(-3{,}91)$ en $D(-33{,}101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

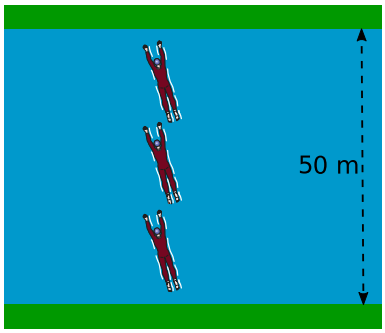
a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken de hoek tussen vectoren $\vec{AS}$ en $\vec{SB}$.

Toepassen

Opgave 15: Zwemmer (1)

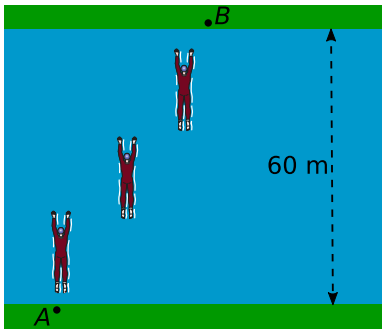
Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier met een stroomsnelheid van 0,6 km/h in. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 m breed. Hoe lang doet hij over de overtocht?



Figuur 8.11

Opgave 16: Zwemmer (2)

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar hij heeft last van de stroming. Tot zijn verbazing komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar in een punt B dat verder stroomafwaarts ligt.
De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in 5 minuten de overkant van de rivier. Wat is de snelheid in km/h waarmee hij AB aflegt? Geef je antwoord in drie decimalen.



Figuur 8.12

Opgave 17: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

a Maak van deze vlucht een tekening op schaal.

b Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a}+\vec{b}$ en $0{,}5\,\vec{a}-\vec{b}$.

d Bereken de kentallen van de vector $\vec{c}$ zo, dat $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Opgave 19

Gegeven zijn de punten $P(0,12)$ en $Q(8,2)$.

a Bereken $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x-as maakt, zo nodig in één decimaal.

b $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x-as. Bepaal de coördinaten van R.

8.3 Lijnen en snijpunten

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- hoe je met een plaatsvector en een richtingsvector lijnen kunt beschrijven en er vectorvoorstellingen van maakt;
- vergelijkingen van lijnen omzetten in vectorvoorstellingen en omgekeerd;
- vectorvoorstellingen van lijnen toepassen bij berekeningen, onder andere van snijpunten.

Voorkennis

- het begrip vector (componenten, lengte, richtingshoek) en rekenen met vectoren;
- werken met vergelijkingen van lijnen.

Verkennen

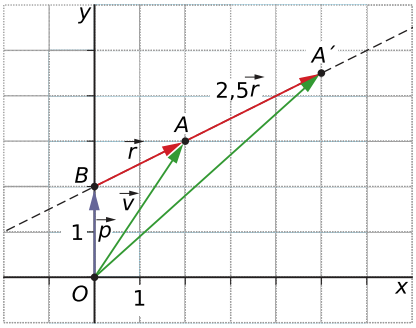
Opgave V1

Bekijk de applet

Je kunt punt A bewegen door de richtingsvector $\vec{r}$ te verlengen.

Je ziet hier de vectoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Verder is $\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}$.



Figuur 8.1

a Bekijk de eindpunten van de vectoren $\vec{p}+1\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+2\cdot\vec{r}$, $\vec{p}+3\cdot\vec{r}$ en $\vec{p}-1\cdot\vec{r}$.

b Hoe komt het dat deze eindpunten allemaal op dezelfde rechte lijn liggen?

c Laat dit zien door een vergelijking op te stellen waaraan elk eindpunt van vector $\vec{v}$ voldoet.

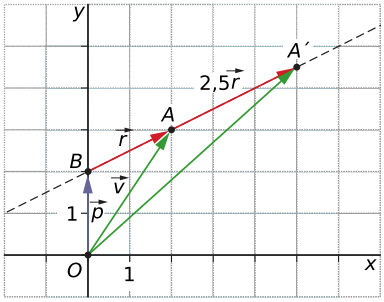
d Als t de tijd in seconden voorstelt, met welke snelheid beweegt punt A dan?

Uitleg

Bekijk de applet

Als je de vector $\vec{r}$ langer maakt zie je punt A over een rechte lijn bewegen.

Bij elk punt A hoort een vector
$\vec{v}=\vec{p}+t\cdot\vec{r}=$.
$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.2

Dit noem je een vectorvoorstelling van de lijn waar A op ligt.
$\vec{r}$ heet een richtingsvector en $\vec{p}$ een plaatsvector (of steunvector) van de lijn.

Uit de kentallen van de richtingsvector kun je afleiden dat de richtingscoëfficiënt van de lijn $\frac{1}{2}$ is. De bijbehorende vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + 2$ ofwel $-x + 2y = 4$.

Voor elk punt A op de lijn geldt $x = 0 + 2t$ en $y = 2 + t$. Door hieruit t weg te werken, kun je ook de vergelijking van de lijn maken.

Je kunt de variabele t opvatten als de tijd.

Opgave 1

Bekijk in de wat een vectorvoorstelling van een lijn is.

a Waarom is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ook een vectorvoorstelling van de getekende lijn? Welk verschil is er met de in de uitleg gegeven vectorvoorstelling als ook nu p de tijd voorstelt?

b En is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook een geschikte vectorvoorstelling? Licht je antwoord toe.

c Hoe bepaal je vanuit een richtingsvector van de lijn de richtingscoëfficiënt?

d Laat zien, hoe je een vergelijking van de lijn opstelt vanuit de richtingscoëfficiënt.

Je kunt de vergelijking van de lijn ook rechtstreeks uit de vectorvoorstelling halen.

e Laat zien hoe dit gaat door t weg te werken.

Opgave 2

De lijn m gaat door de punten $A(2,3)$ en $B(4,0)$.

a Stel voor l een vectorvoorstelling op.

b Waarom wordt bij a gesproken over ‘een’ vectorvoorstelling?

c Stel een vergelijking van l op.

d Controleer nu dat de vergelijking die je hebt gevonden een richtingscoëfficiënt heeft die past bij de richtingsvector.

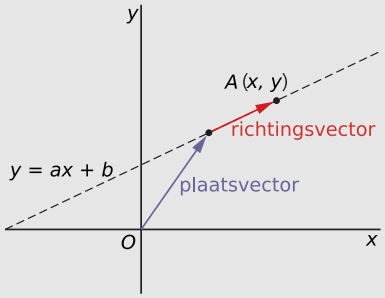
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe je de plaats een willekeurig punt A dat over een rechte lijn beweegt door t te variëren kunt beschrijven met twee vectoren:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$)



Figuur 8.3

Neem lijn l door $B(-1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst een vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit noem je een **vectorvoorstelling van de lijn** l. De plaatsvector is een vector vanuit $O(0,0)$ naar een punt B op de lijn, de richtingsvector ligt op de lijn. Voor elk punt op l geldt: $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

En daarom is de richtingscoëfficiënt van de lijn 0,5. De vergelijking is dus $y = 0{,}5x + 2{,}5$, ofwel $x - 2y = -5$. Je kunt deze vergelijking ook vinden door t weg te werken uit $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door $P(-2,3)$ en $Q(4,0)$. Maak vervolgens vanuit de vectorvoorstelling een vergelijking van lijn PQ.

Antwoord

Elk punt van die lijn bereik je vanuit O door eerst naar een punt ervan (bijvoorbeeld P) te 'lopen' en vervolgens de richtingsvector (bijvoorbeeld $\overrightarrow{PQ}$) te verlengen, of verkorten. Dus:

- een plaatsvector (steunvector) van l is $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- een richtingsvector van l is $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Die richtingsvector kun je nog inkorten door beide kentallen door 3 te delen.

Een mogelijke vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Je kunt hierbij een vergelijking maken door in $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ de t weg te werken. Je krijgt dan $x + 2y = 4$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1 op pagina 321** zie je hoe je een vectorvoorstelling maakt van een lijn door twee gegeven punten.

a Maak een andere vectorvoorstelling van deze lijn door $\overrightarrow{OQ}$ als plaatsvector en (een verlengde of verkorte vector) $\overrightarrow{QP}$ als richtingsvector te gebruiken.

b Gebruik $x = -2 + 2t$ en $y = 3 - t$ en stel een vergelijking van lijn PQ op door hieruit de t weg te werken.

c Laat ook zien, dat je vanuit de vectorvoorstelling die je bij a hebt gevonden dezelfde vergelijking voor lijn PQ kunt opstellen.

Opgave 4

a Maak een vectorvoorstelling en een vergelijking van de lijn door $R(-4,1)$ en $S(2,-1)$.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op de van de lijn door $A(-3,0)$ en $B(2,5)$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lijn $l : 4x + 3y = 12$. Stel een vectorvoorstelling op van lijn l.

Antwoord

Er zijn verschillende manieren om dit te doen:

- Neem bijvoorbeeld $x = 3t$, dan is $4 \cdot 3t + 3y = 12$ en dus $y = 4 - 4t$.
  Je vindt dan $x = 3t$ en $y = 4 - 4t$. De bijbehorende vectorvoorstelling kun je meteen opschrijven.
- Bepaal twee punten op lijn l, bijvoorbeeld $A(3,0)$ en $B(0,4)$ en stel een vectorvoorstelling op van een lijn door deze twee punten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2 op pagina 322** wordt uitgelegd hoe je vanuit een vergelijking van een lijn een bijpassende vectorvoorstelling kunt maken. Een algebraïsche manier is het invoeren van t door bijvoorbeeld $x = 3t$ te kiezen.

a Waarom wordt $x = 3t$ gekozen en niet $x = t$?

b Schrijf zelf de vectorvoorstelling op.

Bekijk de meer meetkundige methode van het bepalen van twee punten op de lijn en daarmee de vectorvoorstelling maken.

c Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

Opgave 6

Stel van de volgende lijnen een vectorvoorstelling op.

a $l : 2x - 5y = 10$

b $m : y = 12 - 0{,}25x$

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0,1)$ en Q in $(-2,6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6,3)$ en Q in $(4,0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S. Bereken de exacte coördinaten van dit punt en licht toe waarom beide punten niet met elkaar in botsing komen.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ en dus $x = t$ en $y = 1 + \frac{1}{3}t$.
- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en dus $x = -2 + t$ en $y = 6 - t$.

Denk er op dat je beide richtingsvectoren nu niet mag vergroten of verkleinen!

Als je een waarde van t zoekt waarvoor beide punten op dezelfde plek zitten (botsen), dan moet $t = -2 + t$ en $1 + \frac{1}{3}t = 6 - t$. En dat levert geen mogelijke waarde voor t op.

Toch hebben beide banen een snijpunt. Dat kun je op diverse manieren berekenen:

- Kies in de vectorvoorstelling (of parametervoorstelling) van m een andere letter voor de parameter en los het stelsel vergelijkingen dat hoort bij het snijpunt van beide banen exact op.
- Maak van beide parametervoorstellingen vergelijkingen in x en y en bereken daarmee het gevraagde snijpunt.
- Maak van één van beide parametervoorstellingen een vergelijking in x en y en vul daarin de parametervergelijkingen van de andere lijn in.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3 op pagina 323** wordt het snijpunt van de banen van twee bewegende punten berekend.

a Laat zien hoe je aan de twee vectorvoorstellingen komt.

b Waarom mogen de richtingsvectoren nu niet worden verlengd of verkort?

c Bereken het snijpunt van beide banen door in de vectorvoorstelling van m de parameter t te vervangen door s en $t = -2 + s \wedge 1 + \frac{1}{3}t = 6 - s$ op te lossen.

d Je kunt ook eerst vergelijkingen maken van beide lijnen. Bereken het snijpunt ook op deze manier.

e En bereken tenslotte het snijpunt nog eens vanuit een vergelijking van de éne lijn en een parametervoorstelling van de andere.

Opgave 8

Bereken exact het snijpunt van de lijnen p en q in de volgende gevallen.

a $l : 2x - y = 12$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en m door $x = 1 + s$ en $y = 3s$.

Opgave 9

In een cartesisch assenstelsel bewegen de punten A en B over de lijnen l en m. Op $t = 0$ zit A in $(1,4)$ en B in $(-1,0)$. Op $t = 4$ zit A in $(6,3)$ en B in $(4,1)$.

a Stel de vectorvoorstellingen van l en m op.

b Waarom botsen deze punten nu wel tegen elkaar?

c Bereken de coördinaten van het botsingspunt.

d Laat zien dat je dit punt ook kunt berekenen vanuit twee vergelijkingen van l en m.

Oefenen

Opgave 10

Maak bij de volgende lijnen een passende vectorvoorstelling:

a de lijn l door $P(-20,45)$ en $Q(30,15)$;

b de lijn m met vergelijking $2x - 5y = 10$;

c de lijn n door $P(-20,45)$ en evenwijdig met m;

d de x-as.

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l door $A(30,0)$ en $B(0,20)$ en $m : x - y = 50$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken exact het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 12

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. P beweegt over de lijn $l : x + 2y = 20$, zit op $t = 0$ op de y-as en op $t = 10$ op de x-as. Q beweegt over lijn m en zit op $t = 0$ in het punt $(2,0)$ en op $t = 6$ in $(8,12)$.

a Stel een parametervoorstelling op voor de beweging van punt Q.

b Bereken het snijpunt van l en m.

c Komen beide punten P en Q met elkaar in botsing?

Opgave 13

Stel in de volgende gevallen een vectorvoorstelling van l op.

a l is evenwijdig met de lijn $m : 4x - y = 16$ en gaat door $P(2,5)$.

b l gaat door $P(2,5)$ en maakt een hoek van $45°$ met de x-as.

Opgave 14

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde. Gegeven is de driehoek OAB door de punten $O(0,0)$, $A(8,2)$ en $B(4,6)$.

Bereken het snijpunt van de zwaartelijn door A en de zwaartelijn door B. Laat zien, dat de zwaartelijn door O ook door ditzelfde snijpunt gaat.

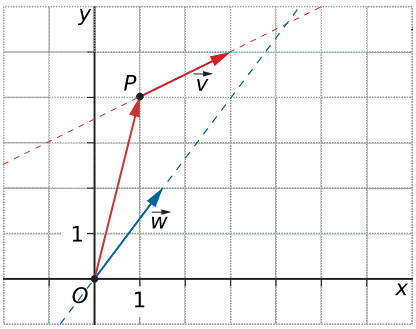
Toepassen

Bekijk de applet

Je ziet hier hoe een roofdier dat zich op $t = 0$ in punt O bevindt, de achtervolging inzet op een prooi die hij op dat moment opmerkt in het punt $P(1,4)$. De prooi rent voorbij met een constante snelheid en in een constante richting. t is de tijd in seconden.

De snelheid en de richting waarin het roofdier beweegt is nog instelbaar. Wel wordt er van uitgegaan dat ook dit roofdier vanaf $t = 0$ een constante snelheid en een constante richting heeft (in werkelijkheid zal het vanuit stilstand die snelheid nog moeten halen en misschien ook de beweegrichting aanpassen).

Welke snelheidsvector moet je instellen opdat het roofdier de prooi te pakken krijgt?



Figuur 8.4

Opgave 15: Roofdier en prooi (1)

Bekijk Toepassen op pagina 325 en de applet die je daar ziet.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de beweging van de prooi.

b Bereken de snelheid van de prooi in eenheden per seconde.

c In de applet is $k = 1{,}5$ ingesteld. Hoe snel beweegt dan het roofdier?

d Laat zien, dat in dit geval het roofdier de prooi gaat missen.

e Hoe kan het dat toch beide lijnen een snijpunt hebben en hoe bereken je dat?

Opgave 16: Roofdier en prooi (2)

Bekijk Toepassen op pagina 325 en de applet die je daar ziet.

a Stel $k = 3$ in. Krijgt het roofdier de prooi te pakken?

b Voor welke waarde van k krijgt het roofdier de prooi te pakken? En hoeveel seconden duurt dit dan?

Testen

Opgave 17

Gegeven de lijnen l door $A(-3,2)$ en $B(5,1)$ en m met vergelijking $x + 2y = 24$.

a Stel van beide lijnen een vectorvoorstelling op.

b Bereken het snijpunt van beide lijnen.

Punt P beweegt over lijn l en punt Q over lijn m. Op $t = 0$ zitten beide punten op de y-as en op $t = 6$ zit P en Q op de x-as.

c Onderzoek met behulp van een berekening of beide punten met elkaar botsen.

Opgave 18

Gegeven is lijn l door: $3x - 5y = 15$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn m door $P(2,3)$ en evenwijdig met l.

b Bereken de snijpunten met de assen van lijn m.

8.4 Hoeken en inproduct

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- bij een vector die is gegeven door twee loodrechte componenten de draaihoek en de lengte berekenen;
- het inproduct van twee vectoren berekenen;
- de hoek tussen twee vectoren berekenen met behulp van het inproduct.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal.

Verkennen

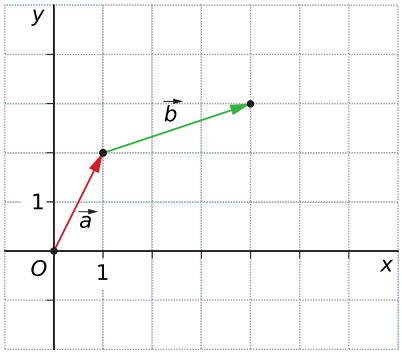
Opgave V1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De groottes van de componenten heten de kentallen. Elke vector heeft een lengte die je aangeeft met $|\vec{a}|$.



Figuur 8.1

a Hoeveel bedraagt de lengte van vector $\vec{a}$?

Elke vector heeft een richting die bepaald wordt door de draaihoek α ten opzichte van de positieve x-richting.

b Bereken de draaihoek van $\vec{a}$.

c Maakt het voor vector $\vec{a}$ wat uit als hij niet in $O(0,0)$ begint?

d Bereken de draaihoek (richtingshoek) van $\vec{b}$?

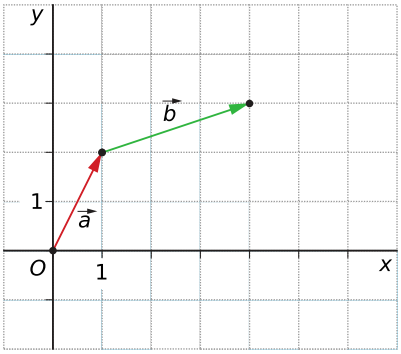
e Hoe groot is de hoek die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar maken?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Voor vectoren in een cartesisch assenstelsel Oxy is standaard de positieve x-as de hoofdrichting. Elke hoek wordt gemeten vanaf die hoofdrichting tegen de wijzers van de klok in. Een vector kan worden beschreven door een component in de x-richting en een component in de y-richting:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.2

De groottes van de componenten heten de kentallen.

De lengte van deze vector is $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

De draaihoek α, ook wel de richtingshoek genoemd, is de hoek die de vector met de positieve x-as maakt. Deze hoek heeft waarden vanaf $0°$ tot $360°$.

Je bepaalt hem uit $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{1} = 2$.

Hieruit volgt: $\alpha \approx 63{,}4°$.
Bij negatieve kentallen krijg je zo niet altijd de goede hoek. Bekijk dan goed de figuur.

Zo'n vector heeft geen vast startpunt, alleen de richting en de lengte zijn eigenschappen van elke vector.

Je ziet dat de vector $\vec{a}$ vanuit de oorsprong O is getekend. Dit punt wordt het aangrijpingspunt genoemd. Er zijn gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. Het aangrijpingspunt van vector $\vec{b}$ is $(1,4)$.

Als je de hoek tussen twee vectoren wilt berekenen, dan kun je gewoon beide richtingshoeken vergelijken. Ze hoeven daarvoor niet hetzelfde aangrijpingspunt te hebben. Let er wel op dat zo'n hoek altijd tussen $0°$ en $180°$ in ligt.

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Teken vector $\vec{c}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem de oorsprong als aangrijpingspunt.

b Teken vector $\vec{d}$ in een cartesisch assenstelsel. Neem punt $(1,4)$ als aangrijpingspunt.

c Bereken de richtingshoeken van beide vectoren. Rond af op gehelen graden.

d Bereken de hoek die beide vectoren met elkaar maken. Rond af op gehelen graden.

Opgave 2

In Uitleg 1 op pagina 328 zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeven.

a Teken $\vec{p}_1 = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p}_1$.

b Teken $\vec{p_2}=\vec{a}-\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_2}$.

c Teken $\vec{p_3}=3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}$ in een assenstelsel en bereken de richtingshoek van $\vec{p_3}$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je kunt twee vectoren ook met elkaar vermenigvuldigen. Een manier om dit te doen heet het inproduct van twee vectoren. Onder het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ versta je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

Hierin zijn $\left|\vec{a}\right|$ en $\left|\vec{b}\right|$ de lengtes van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en is φ de hoek tussen beide vectoren. Deze afspraak gaat je straks in staat stellen om hoeken te berekenen.

$\vec{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zijn de twee eenheidsvectoren in een cartesisch xy-assenstelsel.

Deze twee vectoren maken een hoek van 90° en hebben daarom een inproduct van 0:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}=\left|\vec{e_x}\right|\cdot\left|\vec{e_y}\right|\cdot\cos(90^\circ)=1\cdot1\cdot0=0.$$

Zo is ook:

$$\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}=\left|\vec{e_x}\right|\cdot\left|\vec{e_x}\right|\cdot\cos(0^\circ)=1\cdot1\cdot1=1.$$

En ook geldt $\vec{e_y}\cdot\vec{e_y}=1$.

Elke vector is te schrijven als een samenstelling van eenheidsvectoren. Neem bijvoorbeeld:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-2\,\vec{e_x}+3\,\vec{e_y} \text{ en } \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\,\vec{e_x}+1\,\vec{e_y}.$$

Voor het inproduct van beide krijg je dan:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(-2\,\vec{e_x}+3\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(2\,\vec{e_x}+1\,\vec{e_y}\right)$$

Neem nu aan dat ook voor het inproduct van twee vectoren de regels voor het wegwerken van haakjes gelden. Gebruik verder de regels hierboven. Je vindt dan

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot2+3\cdot1=-1.$$

Kennelijk hoef je alleen de overeenkomstige kentallen te vermenigvuldigen en de twee uitkomsten op te tellen om het inproduct van beide vectoren te krijgen.

Opgave 3

Het inproduct van twee vectoren wordt gegeven door kentallen in een cartesisch assenstelsel te bepalen, en de vectoren te ontleden in eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

a Laat zien dat het inproduct van $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ inderdaad $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$ is door haakjes weg te werken.

b Bereken op dezelfde manier met behulp van eenheidsvectoren het inproduct van $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

In het algemeen geldt voor het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Neem nu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gebruik het inproduct van beide vectoren om de hoek φ ertussen te berekenen.

Opgave 5

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en bereken het inproduct van beide vectoren. Gebruik dit inproduct om de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen.

Opgave 6

Neem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ en laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

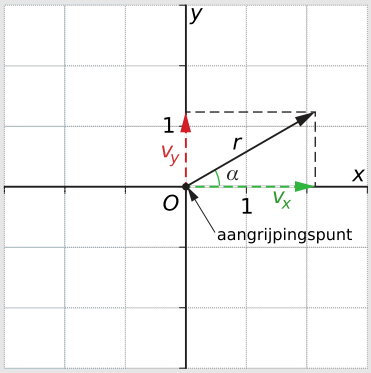
Een **vector** $\vec{v}$ is een grootheid met lengte en richting.

Je kunt hem beschrijven door

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α, de hoek die de vector met de x-richting maakt.

De richtingshoek wordt linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten.

Je kunt een vector beschrijven met **kentallen**: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.



Figuur 8.3

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als aangrijpingspunt. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben. In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn. Het aangrijpingspunt is dus geen eigenschap van een vector. Een vector die vanuit punt A naar punt B wijst, schrijf je als $\overrightarrow{AB}$.

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Dus: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

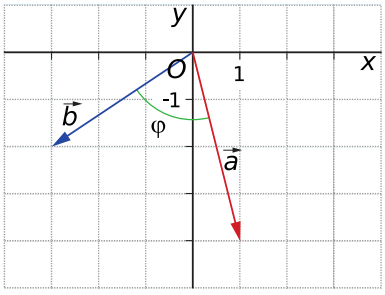
Voorbeeld 1

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf vliegveld O eerst naar een punt dat 3 km oostelijker en 5 km noordelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km oostelijker en 4 km zuidelijker ligt.
Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte van de vlucht. De retourvlucht is de kortste route terug. Bereken de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende afstand en draaihoek (ten opzichte van het oosten).

Antwoord

Voer een assenstelsel in met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

De vlucht kun je dan beschrijven als $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.4

De lengte van de vlucht is

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2} + \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{34} + \sqrt{20} \approx 10{,}3 \text{ km}.$$

De retourvlucht is $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En de lengte van de retourvlucht is $|-\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ km.

Voor de draaihoek φ die daarbij hoort, geldt: $\tan(\varphi - 180°) = \frac{-1}{-5} = 0{,}2$.
Dit geeft $\varphi \approx 191°$.

Opgave 7

Een sportvliegtuigje vliegt vanaf O eerst naar een punt dat 2 km westelijker en 5 km noordelijker ligt en daarvandaan naar een punt dat 6 km oostelijker en 7 km zuidelijker ligt.

a Teken deze vlucht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt van de vlucht, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf deze vlucht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van de vlucht.

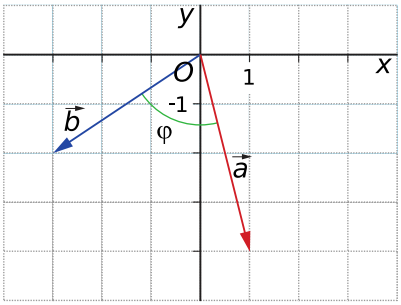
c De retourvlucht is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourvlucht beschrijft en de bijbehorende draaihoek (ten opzichte van het oosten) en lengte.

d Bereken in km de lengte van de retourvlucht.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.5

Antwoord

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot -3 + -4 \cdot -2 = 5$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, dus $5 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos(\varphi)$.

Voor de hoek φ tussen beide vectoren geldt: $\cos(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$.

Dus $\varphi \approx 70{,}3°$.

Opgave 8

De hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ is ongeveer 70,3°.

a Controleer dit met een berekening.

b Bereken de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ in één decimaal nauwkeurig.

c In de applet kun je andere vectoren kiezen. Bereken zelf telkens de hoek ertussen met behulp van het inproduct. In de applet vind je het antwoord.

Opgave 9

Met behulp van voorbeelden kun je uitzoeken wanneer twee vectoren een inproduct van 0 hebben.

a Geef een voorbeeld van twee vectoren waarvoor dat geldt. Laat door berekening zien dat het inproduct dan ook 0 is.

b Toon algebraïsch aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} kb \\ -ka \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

c Geef ook een voorbeeld van twee vectoren waarvan het inproduct gelijk is aan het product van hun lengtes.

Voorbeeld 3

Twee punten P en Q bewegen in een cartesisch Oxy-assenstelsel. Beide banen zijn rechte lijnen. Op $t = 0$ zit P in $(0,1)$ en Q in $(-2,6)$. Op $t = 6$ zit P in $(6,3)$ en Q in $(4,0)$. Beide banen snijden elkaar in punt S. Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken.

Antwoord

Je kunt van beide banen een vectorvoorstelling opstellen:

- Punt $P(x,y)$ ligt op lijn l met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- Punt $Q(x,y)$ ligt op lijn m met:
  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct van beide richtingsvectoren kun je de hoek tussen beide banen berekenen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot -1 = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \cos(\varphi)$$

geeft

$\frac{2}{3} = \sqrt{2\frac{2}{9}} \cdot \cos(\varphi)$ en dus $\varphi \approx 63{,}4°$.

Opgave 10

In zie je hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent.

Gegeven zijn de lijnen $l : y = -x + 4$ en $m : 2x - 3y = 6$.

a Bepaal van beide lijnen de richtingsvectoren.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Punt P beweegt over een lijn door $A(3,4)$ en $B(5,2)$ en punt Q beweegt over een lijn door $C(0,5)$ en $D(2,9)$.

a Bereken de hoek die beide lijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Waarschijnlijk heb je bij a een stompe hoek gevonden. Beide lijnen maken echter ook een scherpe hoek met elkaar.

b Hoeveel graden is die scherpe hoek?

c Waarom wordt meestal afgesproken dat de hoek tussen twee lijnen een scherpe hoek is?

d Waarom kun je voor de hoek tussen twee vectoren niet afspreken dat hij altijd scherp is?

Oefenen

Opgave 12

Bereken telkens de hoek tussen de gegeven vectoren in graden nauwkeurig.

a $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

b $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

c $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ en $\vec{w}=\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$

Opgave 13

Een zeilboot vaart op het IJsselmeer vanuit de haven van Enkhuizen naar een punt dat 5 km oostelijker en 3 km zuidelijker ligt en van daaruit naar een punt dat 2 km westelijker en 8 km noordelijker ligt.

a Teken deze zeiltocht in een cartesisch assenstelsel met in $O(0,0)$ het startpunt, de x-as als oostelijke richting en de y-as als noordelijke richting.

b Beschrijf de zeiltocht als de som van twee vectoren en bereken de lengte in km van deze zeiltocht.

c De retourvaart is de kortste weg terug. Geef de vector die de retourtocht beschrijft met de bijbehorende en draaihoek (t.o.v. het oosten).

d Bereken in km de lengte van de retourvaart.

Opgave 14

Gegeven zijn de lijnen $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ en $m: 2x-5y=10$.

Bereken de hoek tussen beide lijnen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 15

a Bereken de hoek tussen $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ in graden nauwkeurig.

b Geef een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{b}$ en twee keer zo lang is.

Opgave 16

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

a Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen vectoren $\vec{SA}$ en $\vec{SB}$.

Toepassen

Opgave 17: Bootje in een sloot

Een bootje wordt door een jongen en een twee keer zo sterke man aan touwen die beide aan dezelfde plek op de boeg van de boot zijn bevestigd door het midden van een sloot getrokken. De jongen en de man lopen ieder aan een andere kant van de sloot. De boot blijft in het midden van de sloot varen. De man trekt met een kracht van 10 N en onder een hoek van 20° met de vaarrichting.

a Construeer in een bovenaanzicht de vectoren die de twee trekkrachten voorstellen.

b Bereken de richtingshoek van de kracht die de jongen uitoefent in graden nauwkeurig.

De arbeid die door een kracht wordt verricht is het inproduct van deze kracht (de krachtvector) en de afgelegde afstand (de afstandsvector). Het is daarom ook het product van de component van die kracht in de bewegingsrichting en de afgelegde afstand.

c Welke arbeid verrichten beiden samen als ze het bootje 1 km voort trekken?

d Verrichten ze beiden evenveel arbeid?

Opgave 18: Gegeven hoek tussen twee vectoren

Voor welke exacte waarde(n) van a is de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix}$ gelijk aan 45°?

Testen

Opgave 19

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek tussen beide vectoren in graden nauwkeurig.

Opgave 20

Punt P beweegt over een lijn vanaf $A(0,10)$ op $t = 0$ en door $B(20,25)$ op $t = 10$.

Punt Q beweegt over een lijn vanaf $C(0,1)$ op $t = 0$ en door $D(20,31)$ op $t = 10$.

t is de tijd in seconden.

a Laat zien dat beide punten met elkaar botsen en bereken na hoeveel seconden dit het geval is.

b Bereken de hoek tussen beide lijnen in graden nauwkeurig.

8.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn (normaal);
- een normaalvector van een gegeven vector berekenen;
- werken met middelloodlijnen, hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices;
- het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op coördinaten berekenen.

Voorkennis

- werken vectoren in 2D, de begrippen lengte, richtingshoek, kentallen;
- vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- werken met het inproduct van vectoren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Gegeven zijn de lijn $l : 2x + 3y = 6$ en punt $A(3,4)$.
De (kortste) afstand van punt A tot lijn l is de lengte van een lijnstuk AS, waarbij S het snijpunt is van een loodlijn door A en loodrecht op l. (Ga dit na met de applet.) Om die afstand AS te berekenen moet je daarom eerst een lijn loodrecht op l en door punt A beschrijven.

a Laat zien, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ een mogelijke richtingsvector van l is.

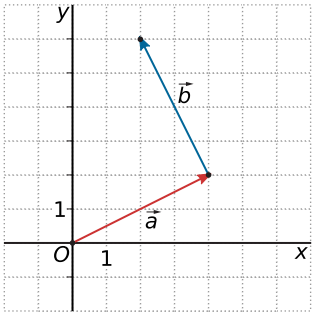
b Laat met behulp van het inproduct zien, dat de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht op die richtingsvector staat.

c Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door A en loodrecht l en bereken daarmee punt S en de afstand van A tot lijn l.

Uitleg 1

Bekijk de applet

Je ziet hier de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Figuur 8.1

Met behulp van het inproduct van beide vectoren kun je laten zien dat ze loodrecht op elkaar staan:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot -2 + 2 \cdot 4 = 0$

zodat voor de hoek φ tussen deze vectoren geldt: $\cos(\varphi) = 0$ en dus $\varphi = 90°$.

Zo kun je met het inproduct laten zien dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ altijd loodrecht op elkaar staan. Je noemt $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ een normaalvector van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dit kun je gebruiken om een loodlijn op een gegeven lijn te maken. En met behulp van een loodlijn kun je dan weer de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

Opgave 1

In **Uitleg 1 op pagina 336** kun je met de applet nagaan dat de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

a Laat dit ook zien met behulp van hun inproduct.

b Staat de vector $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ ook loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$?

c Staat de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -2a \end{pmatrix}$ loodrecht op $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? En de vector $\begin{pmatrix} 2b \\ -3a \end{pmatrix}$?

Opgave 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,2)$, $B(4,1)$ en $C(3,4)$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn AB.

b Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door C en loodrecht op AB.

c Bereken de afstand van punt C tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

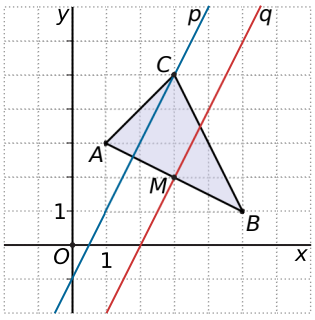
Bekijk de applet

Je ziet hier een driehoek ABC met $A(1,3)$, $B(5,1)$ en $C(3,5)$.

Punt M is het midden van AB.

De lijn p staat loodrecht op AB en gaat door punt C. Zo'n lijn wordt wel de hoogtelijn door C van ΔABC genoemd.

De lijn q staat loodrecht op AB en gaat door punt M. Zo'n lijn wordt wel de middelloodlijn van AB genoemd.



Figuur 8.2

Als je een lijn r door C en het midden M van AB tekent, is dat de zwaartelijn door C van ΔABC.

Elke driehoek heeft drie hoogtelijnen, drie middelloodlijnen en drie zijden.

Door gebruik te maken van normaalvectoren kun je vanuit de gegeven hoekpunten vectorvoorstellingen (en dus ook vergelijkingen) van hoogtelijnen en middelloodlijnen maken. Vanuit de hoekpunten en de middens van de zijden kun je vectorvoorstellingen (en vergelijkingen) van zwaartelijnen maken. De snijpunten van de zwaartelijnen heet het zwaartepunt van de driehoek. Het snijpunt van de drie middelloodlijn is het middelpunt van een cirkel door de drie punten. En wat is het hoogtepunt?

Opgave 3

Bekijk de gegeven ΔABC in **Uitleg 2 op pagina 337**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

d Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de zwaartelijn door B.

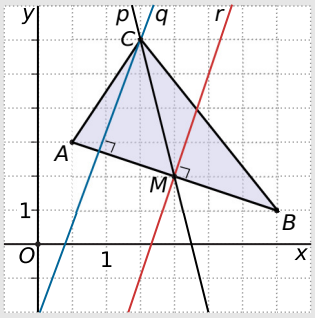
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In deze ΔABC zijn drie **bijzondere lijnen** getekend:

- p is de **zwaartelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt naar het midden M van de overstaande zijde AB;
- q is de **hoogtelijn** door punt C, een lijn door dit hoekpunt en loodrecht op de overstaande zijde AB.
- r is de **middelloodlijn** van zijde AB, een lijn door het midden M van en loodrecht op lijnstuk AB.



Figuur 8.3

Een hoogtelijn is een voorbeeld van een **loodlijn**, een lijn die loodrecht op een andere lijn staat. De richtingsvector van zo'n loodlijn is de **normaalvector** van de richtingsvector van de lijn waar hij loodrecht opstaat.

Van een vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een vector zoals $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (of een veelvoud ervan) een normaalvector.

Hiervan kun je goed gebruik maken bij het berekenen van de **afstand van een punt tot een lijn**.

In elke driehoek kun je drie zwaartelijnen tekenen die door één punt gaan: het **zwaartepunt**.

In elke driehoek kun je drie middelloodlijnen tekenen die door één punt gaan: het **middelpunt van de omgeschreven cirkel**.

Voorbeeld 1

Bereken de afstand van punt $A(4,2)$ tot de lijn $l : 4x + 3y = 12$.

Antwoord

Teken eventueel de situatie en ga na, dat $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l is.

Bij deze richtingsvector van l hoort een normaalvector als $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nu kun je een vectorvoorstelling of een vergelijking van de loodlijn m door A en loodrecht op l opstellen.

Dan bereken je het snijpunt S van de lijnen l en m.

De gevraagde afstand is de lengte van AS. Ga na dat deze afstand precies 2 is.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1 op pagina 338**.

a Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de loodlijn m van AB.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l.

Opgave 5

Twee evenwijdige lijnen hebben overal dezelfde afstand tot elkaar.

a Wat versta je onder de afstand tussen twee evenwijdige lijnen?

b Hoe bereken je de afstand tussen twee evenwijdige lijnen k en l?

Voorbeeld 2

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee zwaartelijnen en bereken daarmee de coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

Antwoord

De zwaartelijn door C gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze zwaartelijn is $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking is $y = -2{,}5x + 9{,}5$.

De zwaartelijn door A heeft zo vergelijking $y = 2x - 1$.

Z is het snijpunt van deze twee lijnen: $Z\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2 op pagina 339**.

a Stel zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel ook zelf een vergelijking op van de zwaartelijn door A.

c Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z.

d Laat zien, dat ook de zwaartelijn door B door punt Z gaat.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn drie punten $A(1,1)$, $B(5,3)$ en $C(1,7)$.

Stel vergelijkingen op van twee middelloodlijnen van de zijden en bereken daarmee de coördinaten van het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

Antwoord

De middelloodlijn van AB gaat door het midden van AB, dus door $D(3,2)$.

Een richtingsvector van deze middelloodlijn is de normaalvector van $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking ervan is $y = -2x + 8$.

De middelloodlijn van AC is $y = 4$.

M is het snijpunt van deze twee lijnen: $M(2,4)$.

Ga zelf na, dat dit punt gelijke afstanden heeft tot elk van de hoekpunten van ΔABC en dat er dus een cirkel met middelpunt M is die precies door A, B en C gaat.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3 op pagina 340**.

a Laat zien hoe je de coördinaten van punt M berekent.

b Stel zelf een vergelijking op van de middelloodlijn van BC.

c Laat zien, dat ook de middelloodlijn van BC door punt M gaat.

Opgave 8

Gebruik de drie punten uit **Voorbeeld 3 op pagina 340**.

a Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door punt C.

b Laat zien, dat alle drie de hoogtelijnen door één punt gaan.

Oefenen

Opgave 9

Gegeven zijn de lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en punt $P(5,0)$.

Bereken de afstand van P tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Driehoek ABC is gegeven door de punten $A(-2,0)$, $B(4,2)$ en $C(0,6)$.

a Stel een vergelijking op van de zwaartelijn door C.

b Stel een vergelijking op van de hoogtelijn door C.

c Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

d Bereken de afstand van punt C tot lijn AB.

Opgave 11

Een punt beweegt vanaf punt $A(0,10)$ op $t = 0$ in 10 seconden naar punt $B(20,0)$.

a Op welk tijdstip is dit punt het dichtst bij de oorsprong van het assenstelsel?

b Welke afstand tot $O(0,0)$ heeft het punt op dit moment?

Een ander punt P beweegt over de middelloodlijn van AB.
Op $t = 0$ zit dit punt in het midden van AB.

c Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand van beide punten? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Gegeven zijn de punten $A(-4,0)$, $B(6,0)$ en $C(0,8)$.

a Bereken de exacte coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC.

b Bereken het exacte middelpunt M van de cirkel door A, B en C.

Opgave 13

Op de lijn $l : 3x + 4y = 24$ ligt een punt P dat gelijke afstanden heeft tot $A(0,2)$ en $B(6,0)$.

a Bereken de exacte coördinaten van punt P.

b Bereken de afstand van P tot lijn AB in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Bekijk de applet

In deze applet kunnen de punten A en B bewegen met de tijd t in seconden.

Voor punt A geldt $x = t$ en $y = 0{,}25t$.

De vectorvoostelling van de lijn die A doorloopt is dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Punt B begint in $(0,5)$ en zit na 4 seconden in $(2,4)$.

Beide punten botsen niet.

Beide punten passeren wel het driehoekige ‘grasveld’ PQR.

Opgave 14: Bewegende punten (1)

Bekijk in de twee bewegende punten A en B.

a Stel een vectorvoorstelling op voor de baan die punt B doorloopt.

b Bereken de hoek die beide banen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

c Bereken de kleinste onderlinge afstand van beide punten.

Opgave 15: Bewegende punten (2)

Bekijk in de twee bewegende punten A en B.

a Hoeveel seconden bevindt punt B zich op het 'grasveld'? (Ga er vanuit dat de punten en de lijnen geen breedtes hebben.)

b Bereken het tijdsverschil waarmee de punten A en B de middelloodlijn van QR passeren.

Testen

Opgave 16

Bereken de afstand van $A(0,12)$ tot de lijn $l : y = 4x + 5$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 17

Driehoek ABC heeft hoekpunten $A(2,0)$, $B(6,0)$ en $C(0,4)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde BC.

b Bereken het middelpunt M van de cirkel door de drie gegeven punten.

c Bereken het zwaartepunt Z van ΔABC.

8.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp is het werken met vlakke figuren, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, oppervlakteformules, soorten bijzondere lijnen in een driehoek voorbij gekomen.

Je hebt nu alle theorie van **Plaats en beweging** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- cartesisch assenstelsel — dimensie — midden, lengte van een lijnstuk
- vector met kentallen, lengte en richtingshoek — x- en y-component — nulvector — aangrijpingspunt — som, verschil van twee vectoren — scalaire vermenigvuldiging
- vectorvoorstelling van een lijn — plaatsvector en richtingsvector
- inproduct van twee vectoren
- normaalvector — loodlijn — middelloodlijn — zwaartelijn en zwaartepunt — hoogtelijn

Activiteitenlijst

- werken met coördinaten in een cartesisch assenstelsel — het midden en de lengte van een lijnstuk berekenen;
- van een met kentallen gegeven vector de lengte en de richtingshoek berekenen en omgekeerd — vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal;
- een lijn beschrijven met een vectorvoorstelling — een vectorvoorstelling van een lijn omzetten naar een vergelijking en omgekeerd — snijpunten van lijnen berekenen;
- de hoek tussen vectoren berekenen met behulp van hun inproduct — de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een lijn berekenen met behulp van een loodlijn — vectorvoorstellingen en vergelijkingen van middelloodlijnen, zwaartelijnen en hoogtelijnen opstellen — het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek berekenen.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m.

b Stel een vergelijking op van de lijn p door het midden van lijnstuk AB en evenwijdig met lijn l.

Opgave 2

Gegeven zijn de lijnen $l : 5x - 4y = 40$ en m door de punten $A(12,3)$ en $B(2,-2)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van punt A tot lijn l in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Bereken de hoeken van ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$ in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is ΔABC met $A(15,21)$, $B(29,28)$ en $C(25,40)$.

a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB.

b Bereken het middelpunt M en de straal r van de cirkel door de drie gegeven punten in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 5

Punt P beweegt vanaf $(0,12)$ op $t = 0$ in een rechte lijn door $(36,0)$ op $t = 12$.

Punt Q beweegt vanaf $(0,0)$ op $t = 0$ in een rechte lijn door $(24,36)$ op $t = 12$.

a Stel vectorvoorstellingen op voor de banen van deze punten.

b Toon aan dat beide punten niet botsen met elkaar.

c Beide punten bewegen langs $A(7,6)$. Welk punt komt er het dichtst in de buurt?

d Bereken de kortste afstand tussen beide punten in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Als er in een cartesisch assenstelsel vier punten zijn gegeven, dan kun je je afvragen **liggen de vier gegeven punten op één cirkel**?

Dit probleem kun je oplossen door een cirkel door drie van de vier punten te maken. Dat is dan de omgeschreven cirkel van de driehoek waar die punten de hoekpunten van zijn. Hoe je het middelpunt M van zo'n cirkel uitrekent, heb je eerder gezien. En de straal is gewoon de afstand tussen het middelpunt en een hoekpunt van de driehoek.

Opgave 6: Op de cirkel? (1)

Gegeven zijn in een cartisch assenstelsel de punten $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(6,4)$ en $D(1,6)$.
Je wilt nagaan of deze vier punten op één cirkel liggen.

a Bereken het middelpunt van de cirkel door A, B en C.

b Bereken de straal van de cirkel door A, B en C.

c Bereken de afstand van het middelpunt tot D. Ligt punt D op de cirkel?

Opgave 7: Op de cirkel? (2)

Gaat de cirkel door $A(-1,2)$, $B(2,1)$ en $C(6,3)$ door de oorsprong van het cartesisch assenstelsel?

Register

a

aangrijpingspunt 312
afgeleide g-logaritme 194
afgeleide exponentiële functie 187
afgeleide (functie) 144
afgeleide natuurlijke logaritmische functie 194
afgeleide waarde 144
afstand punt tot lijn 338
aftrekken 312
amplitude 112, 119, 244
arccosinus 103
arcsinus 103
asymptoot 24

b

bereik 18
bijzondere lijnen 338

c

cartesisch assenstelsel 302
component van een vector 312
constante-regel 152
cosinusregel 266
cos-functie 94

d

differentiaalquotiënt 135, 144
differentieerregel 152
differentiequotiënt 135
differentiëren 152
differentiëren van goniometrische functies 236
dimensie 302
domein 18, 1
doorsnede 285
dubbellogaritmisch papier 202

e

enkellogaritmisch papier 202
evenwichtsstand 112, 119
exponentieel groeimodel 71
exponentiële groei 199
exponentiële groeimodel 202
extremen 144

f

formule voor a sin(x) plus b cos(x) 230
frequentie 244
functie 8
functievoorschrift 8
functiewaarde 8

g

gelijkvormigheid 266
gemiddelde verandering 135
geremd exponentieel groeimodel 202
getal e 180
goniometrische formules 230
goniometrische functies 221
goniometrische verhoudingen 265
groeimodel 71
groeimodel met een macht 71

h

harmonische trilling 244
hellingfunctie 144
hellingsgetal 144
hoogtelijn 338
horizontale asymptoot 24
horizontale verschuiving 112, 119

i

inhoud lichaam 277
inproduct 331
interval 18
invoerwaarde 8
inwendig product 331

k

karakteristieken 24
kentallen van een vector 312, 330
kettingregel 162

l

lengte lijnstuk 302
lengte van een vector 312, 330
lengtevergrotingsfactor 277
lineair model 55
lineaire functie 55
logaritmische schaal 199
loodlijn, normaal 338

m

machtsfunctie 201, 202
machtsregel 152
maximum 18
middelloodlijn 338
middelpunt van de omgeschreven cirkel 338
midden 302
minimum 18
momentane verandering 135

n

natuurlijke groeifactor 180
natuurlijke logaritme 180
normaalvector 338
nulpunt 8
nulvector 312
nulwaarde 8

o

oppervlakte lichaam 277
oppervlaktevergrotingsfactor 277
optellen 312
optimaliseren 144

p

parabool 64
parallelprojectie 257
parameter 64
periode 112, 119, 244
plaatsvector 321
plotten 8
productregel 169
projectie 257

q

quotiëntregel 169

r

rechthoekige driehoek 265
regressielijn 55
rekenen met logaritmen 77
rekenschema 33
richtingscoëfficiënt 135
richtingshoek van een vector 312, 330
richtingsvector 321

s

somformules 230
symmetrieformules 230
samengestelde figuur 257
samengestelde functie 33, 162
scalaire vermenigvuldiging 312
sinusoïde 111
sinusregel 266
sin-functie 94
snijpunt met de assen 24
somregel 152
somvector 312
standaardfunctie 40
stelling van pythagoras 265
steunvector 321

t

tangens 220
tangensfunctie 220, 221
tegengestelde 312
top 24
transformatie van een grafiek 40
translatie 40
trendlijn 55
trillingstijd 244

v

verbanden tussen sin en cos 230
verdubbelingsformules 230
vector 312, 330
vectorvoorstelling van de lijn 321
veranderen van grondtal 187
verandering in een punt 135
vergrotingsfactor 266
verkortingsfactor 257
vermenigvuldiging ten opzichte van een as 40
verschuiving 40
verticale asymptoot 24
volumevergrotingsfactor 277

w

wijkhoek 257

z

zwaartelijn 338
zwaartepunt 338
zweving 251

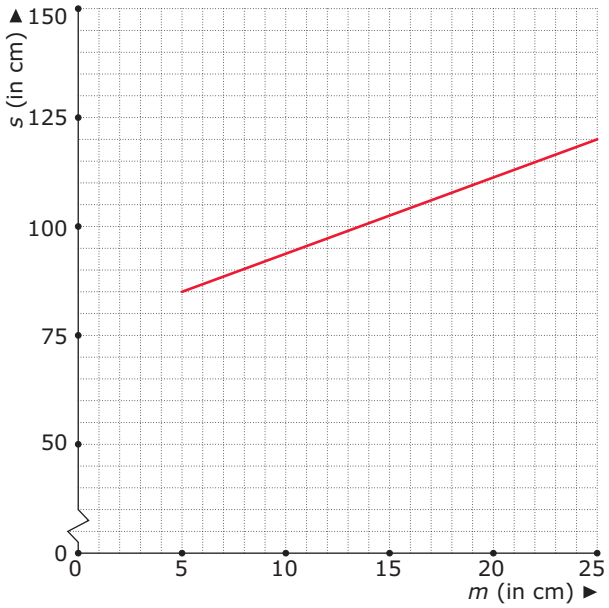
Het lesmateriaal in dit boek is gebaseerd op het materiaal dat u kunt vinden op de website `www.math4all.nl`.
De volgorde van de onderwerpen in dit boek is gekozen door de auteurs van Math4All. Indien u in uw klas een andere volgorde wilt hanteren, maar een boek nog steeds op prijsstelt nodigen we u uit om gebruik te maken van de Math4All maatwerkdienst waarmee u zelf boeken kunt genereren.

Stichting Math4All

Math4all
www.math4all.nl

4Math MBO
www.math4mbo.nl

Werkblad bij Opgave 10 op pagina 60



a Stel een formule op, die bij deze grafiek past.

b Teken in de figuur de grafiek bij deze formule.

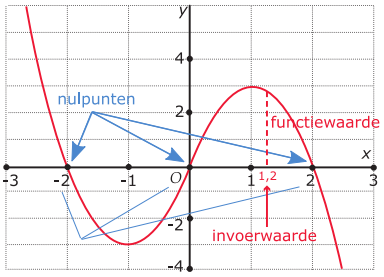
c Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van m de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

d Bepaal met behulp van de grafieken bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

Spiekbriefjes bij Functies en grafieken

Het begrip functie

Bij een formule zoals $y = -x^3 + 4x$ vind je bij elke mogelijke waarde van x precies één waarde van y. Dan is y een **functie** van x met **functievoorschrift** $y(x) = -x^3 + 4x$.



Bij een functie kun je een tabel maken en een grafiek tekenen. De **invoerwaarden** komen op de x-as. De uitkomsten heten **functiewaarden** en komen op de y-as.

Voor $y(x)$ wordt ook wel $f(x)$ gebruikt. f is dan de 'naam' van de functie. Vaak gebruik je letters als t voor tijd, l voor lengte, I voor inhoud, v voor snelheid, P voor vermogen, enzovoort.

De **nulpunten** van een functie zijn de invoerwaarden waarbij de functiewaarde 0 is, dus je vindt ze door $y(x) = 0$ op te lossen. De nulpunten van deze functie zijn $x = 0, x = -2$ en $x = 2$.

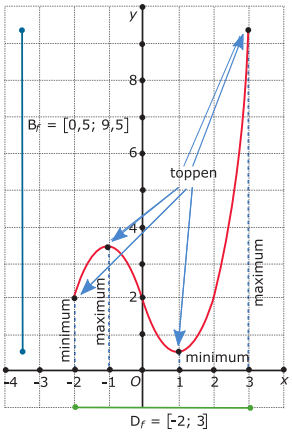
meer info

Domein en bereik

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein wordt bepaald door:

- beperkingen vanwege het functievoorschrift;
- beperkingen vanuit de situatie.

Het domein van functie f is $D_f = [-2,3]$.



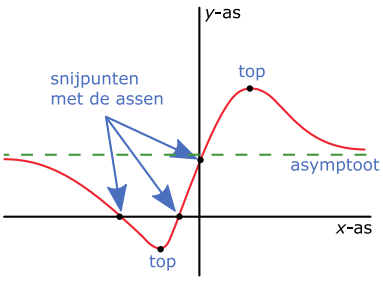
Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van functie f te bepalen heb je een goed beeld van de grafiek van f nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Het bereik van functie f is $B_f = [0,5; 9,5]$.

De vensterinstelling is hier $[-4,4] \times [-1,10]$.

meer info

Karakteristieken

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar. Dat zijn: de **snijpunten met de assen**, de **asymptoten** en de **toppen**.



Asymptoten zijn lijnen waar de grafiek steeds dichter naast loopt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt.

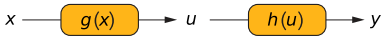
Een **verticale asymptoot** ontstaat vaak bij een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen.

Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

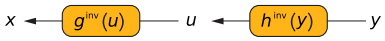
meer info

Samengestelde functies

Je kunt twee functies g en h schakelen tot een **samengestelde functie** $f(x) = h(g(x))$.



Bij veel samengestelde functies kun je dit **rekenschema** gebruiken om terug te rekenen door alle afzonderlijke schakels terug te rekenen. Je gebruikt dan de inverse functies van g en h om de **inverse functie** van f te krijgen.



Door terugrekenen herleid je $y = f(x)$ tot $x = f^{\text{inv}}(y)$. Bij de inverse functie zijn de y-waarden de invoervariabelen. Omdat het gebruikelijk is om de letter x te gebruiken voor de invoervariabele, schrijf je meestal $y = f^{\text{inv}}(x)$. De grafieken van f en f^{inv} zijn daardoor elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

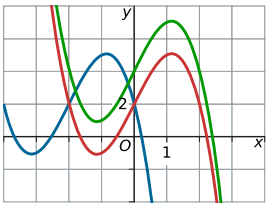
Bij elke y-waarde van f moet bij terugrekenen ook precies één waarde voor x horen. Is dit niet het geval, dan verklein je het domein van f tot dit wel het geval is.

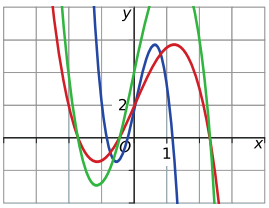
meer info

Transformaties

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as 2 eenheden te verschuiven.
- De blauwe grafiek van $y = f(x + 2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as -2 eenheden te verschuiven.
- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.





Dit zijn vier **transformaties van een grafiek**.

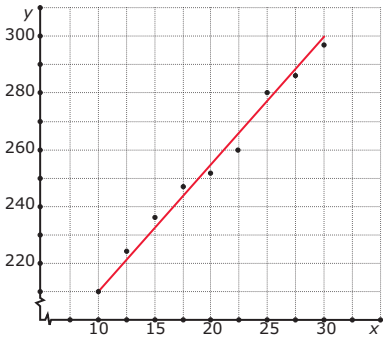
De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van f.

meer info

Spiekbriefjes bij Formules opstellen

Lineaire modellen

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. Die lijn heet de **trendlijn**, of ook wel **regressielijn**. Daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.



Gaat de rechte lijn door de punten $(10,210)$ en $(30,300)$, dan bepaal je als volgt de formule:

- de richtingscoëfficiënt van de lijn is $a = \frac{300-210}{30-10} = 4{,}5$;
- de gevraagde formule is $y = 4{,}5x + b$;
- $(10,210)$ moet op de lijn liggen, dus $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$, zodat $b = 165$.

De rechte lijn heeft als formule: $y = 4{,}5x + 165$.

meer info

Kwadratische modellen

Bij elke **parabool** hoort een formule van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ of $y = ax^2 + bx + c$. Dit stelt je in staat om bij voldoende gegevens de formule van de parabool op te stellen:

- Als de top (p,q) bekend is of kan worden afgelezen gebruik je de vorm $y = a(x-p)^2 + q$.
- Als er drie willekeurige punten van de parabool bekend zijn, gebruik je meestal de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Je vult de gegevens in de formule in en er ontstaan één of meer vergelijkingen met tot soms wel drie variabelen.

Deze vergelijking of dit stelsel vergelijkingen los je dan op om de **parameters** a, b en c, of a, p en q, te vinden.

meer info

Groeimodellen

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten niet op een rechte lijn, maar is er duidelijk sprake van een toenemende of afnemende stijging, dan kun je hierbij verschillende **groeimodellen** opstellen.
Bekende groeimodellen zijn:

- het **exponentiële groeimodel** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot g^t$, waarin t de tijd is.
- het **groeimodel met een machtsfunctie** van de vorm $y(t) = y(0) \cdot t^b$ of $y(t) = y(0) + a \cdot t^b$, waarin t de tijd is.

De waarden voor $y(0)$, g, a en b bepaal je door geschikte meetpunten in te vullen.

Uiteraard bestaan er ook nog andere groeimodellen.

meer info

Logaritmen in modellen

In sommige rekenmodellen komen logaritmen voor. Dat is het geval als:

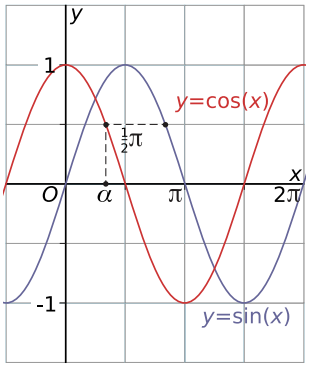
- de bijbehorende functie de vorm $y = a \cdot {}^{g}\log(bx + c) + d$ heeft.
  Vaak is dan het grondtal $g = 10$ en meestal zijn er minder parameters a,b,c,d.
- op de verticale as $\log(y)$ in plaats van y wordt uitgezet, of
  op de horizontale as $\log(x)$ in plaats van x wordt uitgezet, of
  beide tegelijk het geval is.

Rekenregels voor logaritmen	
$x = {}^{g}\log(y)$ is gelijkwaardig met $g^x = y$ met $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$	${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
${}^{g}\log(g^x) = x$ en $g^{{}^{g}\log(y)} = y$	${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ (overgaan naar grondtal 10)	$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

meer info

Spiekbriefjes bij Periodieke functies

Sinus en cosinusfuncties



De **standaard sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = k \cdot \pi$

De **standaard cosinusfunctie** $f(x) = \cos(x)$ is een periodieke functie met periode $2\pi \approx 6{,}28$.

- Het maximum is 1 en de maxima liggen bij $k \cdot 2\pi$
- Het minimum is -1 en de minima liggen bij $\pi + k \cdot 2\pi$
- De grafiek snijdt de x-as bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De grafiek van $y = \cos(x)$ kun je laten ontstaan door de grafiek van $y = \sin(x)$ te verschuiven met $-\frac{1}{2}\pi$ in de x-richting: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

De grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x - b) + c$ en $h(x) = a \cdot \cos(x - b) + c$ kun je door transformaties uit die van $y = \sin(x)$ of die van $y = \cos(x)$ laten ontstaan.

meer info

Vergelijkingen met sin en cos

Om $\sin(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.
Die oplossing heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$.
Alle oplossingen van $\sin(x) = c$ zijn: $x = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$.
Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

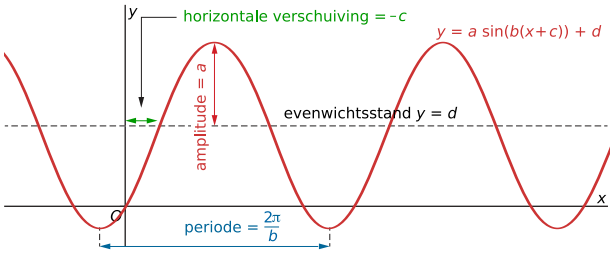
Om $\cos(x) = c$ op te lossen, zoek je eerst de oplossing binnen $[0, \pi]$.
Die oplossing heet **arccosinus** van c: $x = \arccos(c)$.
Alle oplossingen van $\cos(x) = c$ zijn: $x = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \vee x = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$.
Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Gebruik de waarden uit de tabel als er gevraagd wordt naar exacte uitkomsten.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

meer info

Sinusoïden



Door transformaties van $f(x) = \sin(x)$ kun je functies als $g(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ maken. Deze functies heten **sinusoïden**.
De grafiek van $h(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ is ook een sinusoïde, want $y = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ is een verschoven sinusgrafiek.

Voor de grafiek van g geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking van de evenwichtsstand) is a
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$, dit betekent: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- de **horizontale verschuiving** is $-c$, dit is een translatie ten opzichte van de y-as
- de **evenwichtsstand** is de lijn $y = d$

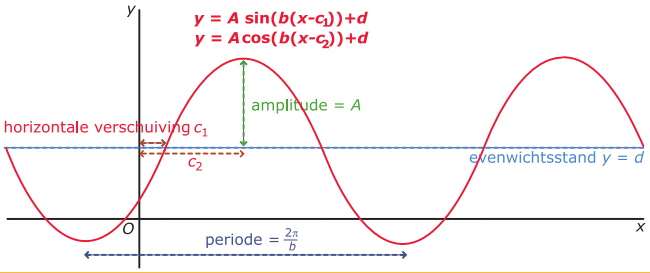
meer info

Periodieke modellen

Bij een sinusoïde kun je een passend functievoorschrift maken door:

- de **evenwichtslijn** $y = d$ te bepalen.
- de **amplitude** a te bepalen.
- de **periode** p te bepalen.
- de **horizontale verschuiving** c te bepalen.

In de figuur zie je dat er twee functievoorschriften mogelijk zijn.



meer info

Spiekbriefjes bij Differentiëren

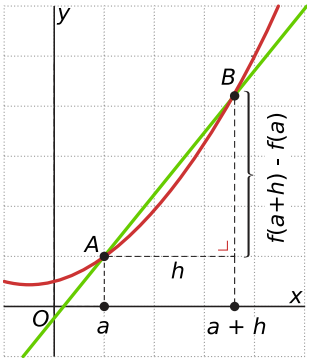
Verandering

De **gemiddelde verandering** van functie f op $[a,a+h]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Dit is het **differentiequotiënt** van f op $[a,a+h]$ en de richtingscoëfficiënt van lijn AB.

Als $h \to 0$ dan gaat dit differentiequotiënt over in de **momentane verandering** of de **verandering in een punt** met $x = a$.
Na herleiden en $h \to 0$ heet dit het **differentiaal-quotiënt** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$.



In plaats van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x = a$, schrijf je ook wel $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$.

In de grafiek is het differentiaalquotiënt de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn** in het punt met $x = a$.

meer info

Het begrip afgeleide

Het **differentiaalquotiënt** van $f(x)$ voor $x = a$ heet de **afgeleide waarde** $f'(a) = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}$. De afgeleide voor alle mogelijke waarden van x is $f'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Deze functie van x heet de **afgeleide (functie)** of **hellingfunctie** van f.
De afgeleide geeft bij iedere x het hellingsgetal van de raaklijn.

Veel functies hebben **extremen**, waarden waarbij de functie maximaal is of juist minimaal is. Je kunt die waarden zo berekenen:

- Bepaal $f'(x)$ en de nulpunten van $f'(x)$.
- Als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat in zo'n nulpunt heeft f een maximum.
- Als $f'(x)$ van negatief naar positief gaat in zo'n nulpunt heeft f een minimum.

Als de afgeleide niet van teken wisselt, is er geen extreme waarde.
Optimaliseren is het berekenen van extremen in praktijksituaties.

meer info

Differentiëren

Om de afgeleide te bepalen ga je **differentiëren**.
Hier zie je enkele **differentieerregels**:

- **machtsregel**:
  als $f(x) = c \cdot x^r$ is $f'(x) = c \cdot r x^{r-1}$ voor elke waarde van c en voor elke waarde van r
- **constante-regel**:
  als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **somregel**
  als $f(x) = u(x) + v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
  als $f(x) = u(x) - v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

De afgeleide van $y = f(x)$ schrijf je als: $f'(x)$, of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, of $y'(x)$.

Met die afgeleide bepaal je bij een gegeven x de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek.
Ook kun je er extreme waarden van de functie mee berekenen.

meer info

De kettingregel

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat:

$$x \xrightarrow{g(x)} \ldots \xrightarrow{f(\ldots)} f(g(x))$$

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als f de vorm $f(g(x))$ heeft, dan is $f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

meer info

De product- en quotiëntregel

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
Deze beide regels gebruik je vaak in combinatie met andere differentieerregels, met name de kettingregel.

meer info

Spiekbriefjes bij Werken met e

Het getal e

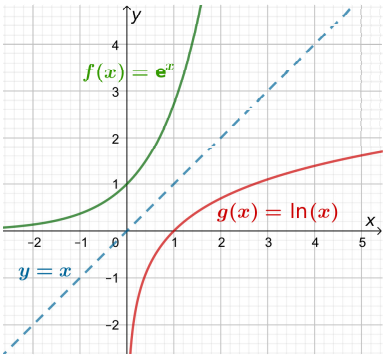
De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.
Deze **natuurlijke groeifactor** is het getal $e \approx 2{,}71828...$

Als $f(x) = e^x$, dan is $f'(x) = e^x$.

Met $f(x) = e^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor.

$e^x = a$ geeft $x = {}^e\log(a)$.
In plaats van ${}^e\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.



meer info

Exponentiële functies

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Je kunt elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven door **veranderen van grondtal**:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{kt}$ waarin $e^k = g$ dus $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $10^k = g$ dus $k = \log(g)$

Je kunt zo verschillende exponentiële functies hetzelfde grondtal geven, e of 10.

meer info

Logaritmische functies

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de g-logaritme** $f(x) = {}^g\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$.
Je vindt:

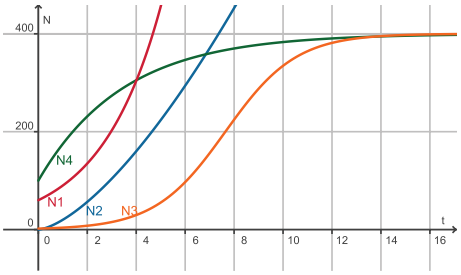
Als $f(x) = {}^g\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^g\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels.

meer info

Groeimodellen

Bij het **exponentiële groeimodel** hoort $N_1(t) = b \cdot g^t$ of $N_1(t) = b \cdot e^{kt}$ of $N_1(t) = b \cdot 10^{kt}$. (Figuur: $b = 60$ en $g = 1{,}5$.)
Op **enkellogaritmisch papier** wordt de grafiek een rechte lijn.
Bij een **machtsfunctie** als model hoort $N_2(t) = b \cdot t^p$. (Figuur $b = 20$ en $p = 1{,}5$.)
Op **dubbellogaritmisch papier** wordt de grafiek een rechte lijn.



Bij een **geremd exponentieel groeimodel** hoort $N_3(t) = \frac{G}{1+b \cdot g^t}$.

De groei begint exponentieel, maar remt af. $N = G$ is de horizontale asymptoot, de grootste groeisnelheid zit bij $N(t) = \frac{1}{2}G$. (Figuur: $G = 400$, $b = 200$ en $g = 0{,}5$.)

Bij het groeimodel $N_4(t) = G + b \cdot g^t$ neemt de groeisnelheid vanaf het begin af. (Figuur: $G = 400$, $b = -300$ en $g = 0{,}75$.)

meer info

Spiekbriefjes bij Goniometrische functies

Goniometrische functies

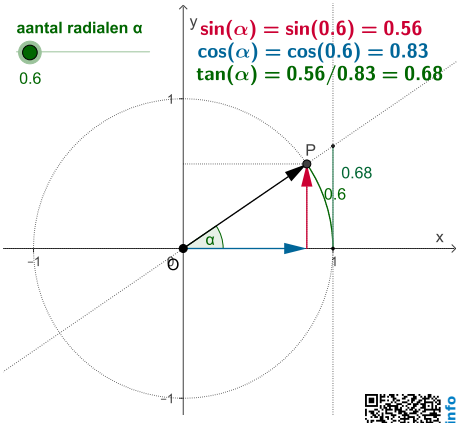
Goniometrische functies zijn functies waarin sin, cos (en tan) voorkomen. De basisfuncties $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ met x in radialen ken je al.
In deze eenheidscirkel geldt:
$\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$ en $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$

Dus de **tangensfunctie** is: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Deze functie is periodiek met periode π en heeft verticale asymptoten als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$f(x) = a\tan(b(x-c)) + d$ heeft

- periode: $\frac{\pi}{b}$
- amplitude: geen
- evenwichtsstand: $y = d$
- horizontale verschuiving: c



meer info

Goniometrische formules

Goniometrische formules om te herleiden en/of vergelijkingen op te lossen:

Symmetrieformules	**Verbanden tussen sin en cos**
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Somformules	**Verdubbelingsformules**
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
Formule voor *a* sin(*x*) plus *b* cos(*x*)	
$a\cdot\sin(x) + b\cdot\cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$ waarin $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$	

meer info

Differentiëren van goniometrische formules

Het **differentiëren van goniometrische functies** (waarin sinus en/of cosinus voorkomen) is gebaseerd op:

- De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \cos(x)$ is $f'(x) = -\sin(x)$.
- De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Om de afgeleide van een functie waarin sinus en/of cosinus voorkomen te bepalen heb je ook vaak nog de overige differentieerregels nodig.

Bijvoorbeeld moet je bij afgeleide van een sinusoïde rekening houden met de kettingregel.

meer info

Harmonische trilling

Een **harmonische trilling** is een periodieke beweging die wordt beschreven door een sinusoïde zoals:

$u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p} \cdot t\right)$ met:

- **amplitude** (maximale uitwijking) A
- **periode** of **trillingstijd** (de tijdsduur van één trilling) p
- **frequentie** (aantal trillingen per s) $f = \frac{1}{p}$

Tel je twee harmonische trillingen bij elkaar op, dan zijn er verschillende mogelijkheden:

- De som van twee harmonische trillingen met dezelfde periode is weer een harmonische trilling.
- De som van twee harmonische trillingen is geen zuiver harmonische trilling, maar wel een periodiek verschijnsel.

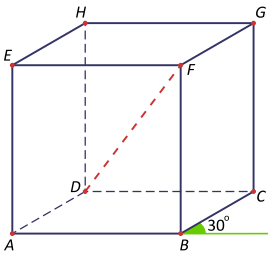
meer info

Spiekbriefjes bij Meetkunde in 3D

Parallelprojectie

Dit is een **parallelprojectie**. Dan geldt:

- ribben evenwijdig aan het tekenvlak worden op ware grootte afgebeeld;
- ribben die parallel zijn, worden evenwijdig aan elkaar afgebeeld;
- ribben die parallel en even lang zijn, worden ook even lang afgebeeld (dit betekent onder andere dat het midden van een lijnstuk ook in de figuur in het midden zit).



Eigenschappen die niet (altijd) behouden blijven zijn bijvoorbeeld hoeken en lengtes van lijnstukken die niet evenwijdig aan het tekenvlak lopen.

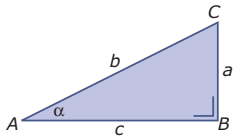
De meeste objecten zijn **samengestelde figuren**, bestaande uit de bekende basisvormen balk, kubus, piramide, prisma, cilinder, bol, kegel.

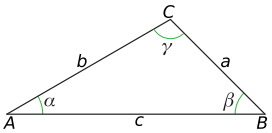
meer info

Hoeken en afstanden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken** en gebruik je:

- De **stelling van Pythagoras**: $c^2+a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$





Verder kun je **gelijkvormigheid** gebruiken. Voor het berekenen van lengtes gebruik je dan de vaste **vergrotingsfactor**.

Tenslotte zijn daar nog:

- De **sinusregel**: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- De **cosinusregel**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

meer info

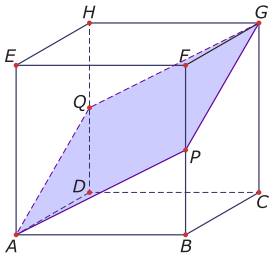
Oppervlakte en inhoud

figuur	oppervlakte A	inhoud/volume V
kubus $r \times r \times r$	$A = 6 \cdot r^2$	$V = r^3$
balk $l \times b \times h$	$A = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$	$V = l \cdot b \cdot h$
n-zijdig prisma $G \times h$	$A = 2 \cdot G \cdot h + n \cdot A_{\text{rechthoek}}$	$V = G \cdot h$
n-zijdige piramide $G \times h$	$A = G + n \cdot A_{\text{driehoek}}$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
bol met straal r	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
cilinder straal r hoogte h	$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
kegel straal r hoogte h	$A = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Worden de afmetingen van een lichaam k keer zo groot, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

meer info

Doorsneden construeren



Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak.

Bij het tekenen van een doorsnede gebruik je:

- Door drie punten bestaat één vlak.
- Door twee snijdende lijnen bestaat één vlak.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als lijnen elkaar kruisen liggen ze niet in één vlak.

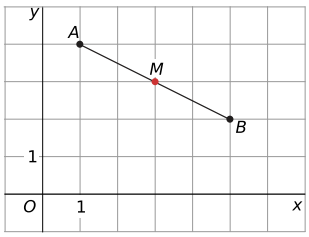
Om een doorsnede **op ware grootte** of op schaal te tekenen, moeten alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (op schaal).

meer info

Spiekbriefjes bij Plaats en beweging

Coördinaten in 2D

Een **cartesisch assenstelsel** is een assenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde lineaire schaalverdeling hebben. In twee **dimensies**, dus in 2D, is het een Oxy-assenstelsel met een x-as en een y-as, in 3D komt daar nog een z-as bij.



In 2D is het **midden** van lijnstuk AB met $A(x_A, y_A)$ en B aan $B(x_B, y_B)$ gelijk aan $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$ en is:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

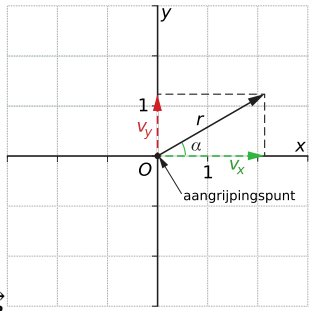
In een 3D cartesisch coördinatenstelsel gelden vergelijkbare formules.

meer info

Vectoren

Een **vector** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ heeft lengte r en **richtingshoek** α. De **kentallen** zijn:

- de x-**component** $v_x = r\cos(\alpha)$;
- de y-**component** $v_y = r\sin(\alpha)$.



En $r = |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

Deze vector heeft O als **aangrijpingspunt**.

De vector met aangrijpingspunt A en eindpunt B is $\overrightarrow{AB}$.

Bij **scalaire vermenigvuldiging** wordt de vector met k vermenigvuldigd:

$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$.

Als $k = -1$ krijg je $-\vec{v}$, het **tegengestelde** van $\vec{v}$.

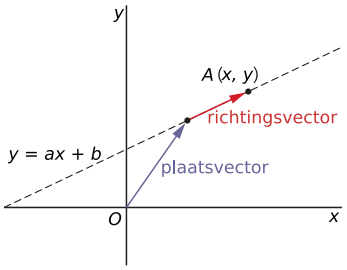
$\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je **optellen** en **aftrekken** door dit met hun kentallen te doen.

meer info

Lijnen en snijpunten

De plaats een willekeurig punt A op een rechte lijn l afhankelijk van t beschrijf je met:

- de **plaatsvector** of **steunvector** $\vec{p}$ van O naar een vast punt van de lijn
- een **richtingsvector** $\vec{r}$ (bij $t = 1$) op l



Neem lijn l door $B(-1,2)$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Naar elk punt $A(x,y)$ van l wijst vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit is een **vectorvoorstelling** l. Voor elk punt op l is: $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

De richtingsvector kun je vergroten of verkleinen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Dus is de r.c. van de lijn $0{,}5$ en de vergelijking $y = 0{,}5x + 2{,}5$. Dit kun je ook vinden door t weg te werken uit $x = -1 + 2t$ en $y = 2 + t$.

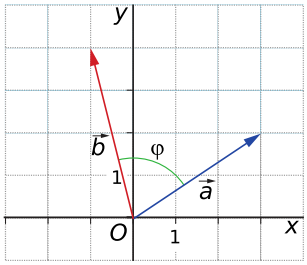
meer info

Hoeken en inproduct

Het **inproduct** of **inwendig product** van de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

waarin φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is.



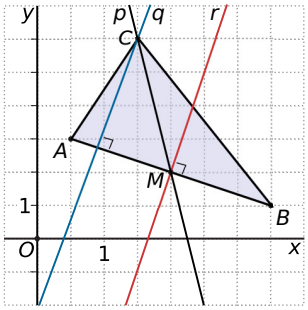
Er geldt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.
Dit gebruik je bij het berekenen van de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Belangrijk is nog dat van twee onderling loodrechte vectoren het inproduct altijd 0 is omdat de hoek tussen beide 90° is.

meer info

Bijzondere lijnen

In ΔABC zijn drie **bijzondere lijnen** getekend:

- **zwaartelijn** p door C naar het midden M van AB;
- **hoogtelijn** q door C loodrecht op AB;
- **middelloodlijn** r door het midden M en loodrecht op AB.



De richtingsvector van een loodlijn is de **normaalvector** van de lijn waar hij loodrecht opstaat.

Van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (of een veelvoud ervan) een normaalvector. Dit gebruik je bij het berekenen van de **afstand van een punt tot een lijn**.
Elke driehoek heeft drie zwaartelijnen die door het **zwaartepunt** en drie middelloodlijnen die door het **middelpunt van de omgeschreven cirkel** gaan.

meer info